CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

JEAN-MARC CORDIER

Comparaison de deux catégories d'homotopie de morphismes cohérents

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 30, nº 3 (1989), p. 257-275

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1989__30_3_257_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES

VOL. XXX-3 (1989)

COMPARAISON DE DEUX CATÉGORIES D'HOMOTOPIE DE MORPHISMES COHÉRENTS

par Jean-Marc CORDIER

ABSTRACT. The homotopy category of coherent morphisms between fonctors from A to *Top* defined by Vogt is proved to be isomorphic to a homotopy category of coherent morphisms in which the coherence conditions are simplicially expressed. This latter homotopy category, which is linked to the coherent prohomotopy category of Lisica-Mardešič, is obtained as the Kleisli category of an idempotent comonad on the homotopy category $\pi_0(Top_s^A)$ of natural homotopy classes of transformations between functors from A to *Top*.

L'évolution de l'étude des théories de forme a conduit Edwards et Hastings [6] à définir une théorie de forme forte en considérant la catégorie d'homotopie *Ho(proTop)*. Cette catégorie est obtenue à partir de *proTop* en localisant par les transformations qui sont des équivalences d'homotopie à chaque niveau. De leur étude, dans ce cadre, des tours d'espaces ils ont posé le problème de développer un modèle cohérent de la forme forte qui serait équivalent au modèle initialement proposé. Un modèle de prohomotopie cohérente sur des systèmes inverses d'espaces a été ainsi abordé par Lisica et Mardesic [7], où le problème de l'équivalence avec le modèle *Ho(proTop)* était soulevé comme étant une "probabilité". Une telle probabilité se réfère au travail de Vogt [8] où une catégorie d'homotopie de morphismes cohérents entre A-diagrammes cohérents, *HA*, est introduite. En se basant sur le traité de Boardmann et Vogt [1], cette catégorie est indiquée comme étant équivalente à la catégorie d'homotopie $Ho(Top^A)$ des A-diagrammes.

L'étude de la cohérence homotopique faite dans [2,3] a abouti d'une part, dans [4], à développer une technique de fins et cofins simplicialement cohérentes et donc à formaliser une notion de morphismes cohérents entre A-diagrammes, et d'autre part, dans [5], grâce à l'étude du nerf homotopiquement cohérent d'une catégorie simpliciale, à donner une démonstration directe de l'équivalence entre HA et $Ho(Top^A)$.

La formalisation des morphismes cohérents, donnée par les fins et cofins simplicialement cohérentes, conduit à la construction d'une catégorie d'homotopie de morphismes cohérents entre foncteurs de A dans Top, $HCo(Top_s^A)$: Top_s^A est la catégorie simpliciale des foncteurs de A dans Top, Top_s étant la structure de catégorie simpliciale naturellement définie sur Top, la catégorie des espaces compactement engendrés. Cette catégorie $HCo(Top_s^A)$ s'obtient comme étant la catégorie de Kleisli d'une comonade idempotente $(\mathbf{B},\eta,\mu)$ sur $\pi_0(Top_s^A)$. Nous avons ainsi, pour deux foncteurs F et G de A dans Top (A-diagrammes)

$$HCo(Top_s^A)(\mathrm{F},\mathrm{G}) = \pi_0(\underline{Top_s^A})(\mathbf{B}\mathrm{F},\mathrm{G})$$

où $\mathbf{B}$F est le rectifié de F défini par

$$\mathbf{B}\mathrm{FA} = \int^n \Delta_n \times \coprod_{\mathrm{A}_0\to\mathrm{A}_1\ldots\mathrm{A}_n\to\mathrm{A}} \mathrm{FA}_0\,.$$

La donnée d'un morphisme cohérent de F dans G correspond alors à la donnée pour chaque n-uple

$$\mathrm{A}_0 \xrightarrow{f_1} \mathrm{A}_1 \longrightarrow \quad \ldots \xrightarrow{f_n} \mathrm{A}_n$$

de morphismes de A d'une homotopie $c(f_1,\ldots,f_n)\colon \mathrm{FA}_0\times\Delta_n\to\mathrm{GA}_n$, les homotopies ainsi obtenues étant liées par des axiomes de cohérence. L'élément d'idempotence $\mu\colon \mathbf{B}\mathrm{F} \to \mathbf{B}^2\mathrm{F}$ nous donne un composé naturel des morphismes cohérents, associatif à homotopie près.

D'un autre côté, la catégorie HA s'obtient comme étant la catégorie associée au Hom simplicial du nerf de A dans le nerf homotopiquement cohérent de Top, notée $\underline{S}(\mathrm{Ner}\,A, \mathrm{Ner}_{hc}(Top))$. Nous allons considérer ici une sous-catégorie $H_f A$ de HA ayant pour objets les foncteurs de A dans Top. Dans cette sous-catégorie, les morphismes cohérents s'expriment cubiquement par des homotopies

$$c(f_1,\ldots,f_n)\colon \mathrm{FA}_0\times[0,1]^n \longrightarrow \mathrm{GA}_n;$$

mais, à la différence de $HCo(Top_s^A)$, la construction de HA ne nous donne qu'un composé à homotopie près des morphismes cohérents.

Dans cet article, nous montrons que ces deux constructions de catégories d'homotopie de morphismes cohérents entre foncteurs de A dans Top, à savoir $HCo(Top_s^A)$ et $H_f A$, déterminent en fait des catégories isomorphes.

En utilisant la spécificité de chacune de ces catégories, à savoir pour $HCo(Top_s^A)$ la description explicite du composé de deux morphismes cohérents et pour H_fA la preuve de l'inversibilité des morphismes cohérents qui sont des équivalences d'homotopie à chaque niveau, nous obtenons l'isomorphisme entre les categories $Ho(Top^A)$ et $HCo(Top_s^A)$.

Une version préliminaire de ce texte a fait l'objet de la prépublication: "Une représentation de $Ho(Top^A)$", Amiens 1985.

1. QUELQUES PROPRIÉTÉS D'UNE CATÉGORIE D'HOMOTOPIE DE MORPHISMES COHÉRENTS.

1.1. L'étude faite dans [4] des fins simplicialement cohérentes conduit naturellement à la définition de morphismes cohérents entre deux foncteurs F et G de A dans une catégorie simpliciale C et à la construction d'une catégorie d'homotopie de morphismes cohérents entre foncteurs de A dans Top. Nous allons tout d'abord rappeler quelques éléments de base de ces constructions.

Soit A une catégorie simpliciale, $\underline{A}(-,-)$ le Hom simplicial au-dessus de $A(-,-)$ et soit X(A,B) l'ensemble bisimplicial défini par

$$X(A,B)_{n,-} = \coprod_{A_0,\dots,A_n} \underline{A}(A,A_0)\times\dots\times\underline{A}(A_n,B) .$$

Soit C une catégorie simpliciale complète et cotensorisée par $[-,-]$: $S^{op}\times C \to C$, où $S = Fonc(\Delta^{op},Ens)$ est la catégorie des ensembles simpliciaux.

DEFINITION. Pour un foncteur simplicial T de $A^{op}\times A$ dans C, nous appelons *fin simplicialement cohérente de* T l'objet $\oint_A T(A,A)$ de C défini par

$$\oint_A T(A,A) = \int_{A,B} [DX(A,B),T(A,B)]$$

D étant la diagonale de l'objet bisimplicial X(A.B).

DEFINITION. Pour des foncteurs simpliciaux F et G de A vers C, nous appelons *ensemble simplicial des morphismes cohérents de* F *vers* G l'ensemble simplicial défini par

$$\underline{Co(C^A)}(F,G) = \oint_A \underline{C}(FA,GA).$$

Ainsi, si A est une catégorie et F et G deux foncteurs de A vers Top, nous avons

$$\underline{Co(Top_s^A)}(\mathrm{F},\mathrm{G}) = \int_n \underline{Top_s}(\Delta_n \times \coprod_{\mathrm{A}_0 \to \mathrm{A}_1 \dots \to \mathrm{A}_n} \mathrm{FA}_0, \mathrm{GA}_n)$$

Un 0-simplexe correspond à la donnée d'un *morphisme cohérent* de F vers G, c'est-à-dire à la donnée, pour chaque n-uple

$$\mathrm{A}_0 \xrightarrow{f_1} \mathrm{A}_1 \longrightarrow \quad \dots \xrightarrow{f_n} \mathrm{A}_n$$

de morphismes de A, d'une homotopie $c(f_1,\dots,f_n): \Delta_n \times \mathrm{FA}_0 \to \mathrm{GA}_n$ telle que:

$$c(f_1,\dots,f_n)(u_1 \leq \dots \leq u_n; x) =$$

$$\left| \begin{array}{l} c(f_2,\dots,f_n)(u_2 \leq \dots \leq u_n; \mathrm{F}(f_1)(x)) \text{ si } u_1 = 0 \\ c(f_1,\dots,f_{i+1}f_i,\dots,f_n)(u_1 \leq \dots \leq u_i \leq u_{i+2} \leq \dots \leq u_n; x) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{si } u_i = u_{i+1},\ 0 < i < n \\ \mathrm{G}(f_n)\, c(f_1,\dots,f_{n-1})(u_1 \leq \dots \leq u_{n-1}; x) \text{ si } u_n = 1 \\ c(f_1,\dots,f_{i-1},f_{i+1},\dots,f_n)(u_1 \leq \dots \leq u_{i-1} \leq u_{i+1} \leq \dots \leq u_n; x) \text{ si } f_i = \mathrm{Id}. \end{array} \right.$$

Soit $\mathbf{B}: Top_s^A \to Top_s^A$ le foncteur défini par

$$\mathbf{B}\mathrm{FA} = \int^n \Delta_n \times \coprod_{\mathrm{A}_0 \to \mathrm{A}_1 \dots \mathrm{A}_n \to \mathrm{A}} \mathrm{FA}_0 ;$$

nous avons

$$Co(Top_s^A)(\mathrm{F},\mathrm{G}) = (Top_s^A)(\mathbf{B}\mathrm{F},\mathrm{G})$$

($\mathbf{B}$F est une extension cohérente à gauche de F le long de l'identité sur A).

THEOREME 1. *Le foncteur simplicial* $\mathbf{B}: Top_s^A \to Top_s^A$ *définit une comonade idempotente* $(\mathbf{B},\eta,\mu)$ *sur* $\pi_0(Top_s^A)$. *La catégorie de Kleisli de cette comonade nous donne une catégorie d'homotopie de morphismes cohérents dont les Hom sont définis par*

$$HCo(Top_s^A)(\mathrm{F},\mathrm{G}) = \pi_0(\underline{Top}_s^A)(\mathbf{B}\mathrm{F},\mathrm{G}) = \pi_0 \underline{Co(Top_s^A)}(\mathrm{F},\mathrm{G}).$$

PREUVE. $\eta_\mathrm{F}\mathrm{A}: \mathbf{B}\mathrm{FA} \to \mathrm{FA}$ associe à

$$\mathrm{X} = [f_0,\dots,f_n;\ u_1 \leq \dots \leq u_n; x)] \in \mathbf{B}\mathrm{FA}$$

l'élément $\mathrm{F}(f_n \cdots f_0)(x) \in \mathrm{FA}$ et $\mu_\mathrm{F}: \mathbf{B}\mathrm{F} \to \mathbf{B}^2\mathrm{F}$ associe à X l'élément suivant de $\mathbf{B}^2\mathrm{FA}$:

$$\left[f_i,\dots,f_n;\ 2u_{i+1}-1 \leq \dots \leq 2u_n - 1;\ [f_0,\dots,f_{i-1}, 1_{\mathrm{A}_i};\ 2u_1 \leq \dots \leq 2u_i; x] \right]$$

$$\text{si } u_1 \leq \dots \leq u_i \leq 1/2 \leq u_{i+1} \leq \dots \leq u_n.$$

Pour les classes d'homotopie dans $\pi_0(Top_s^A)$, nous avons

$$[\mathbf{B}(\eta_\mathrm{F}) \cdot \mu_\mathrm{F}] = [1_{\mathbf{B}\mathrm{F}}] \text{ et } [\eta_{\mathbf{B}\mathrm{F}} \cdot \mu_\mathrm{F}] = [1_{\mathbf{B}\mathrm{F}}]$$

par les homotopies de $\Delta_1 \times \mathbf{B}F$ dans $\mathbf{B}F$ qui, à (X,t), associent respectivement:

$$[f_0,\dots,f_n;\ v_1(t)\leq\dots\leq v_n(t);\ x] \text{ où } v_i(t)=\sup((1+t)u_i,t)-t$$

et

$$[f_0,\dots,f_n;\ w_1(t)\leq\dots\leq w_n(t);\ x] \text{ où } w_i(t)=\inf((1+t)u_i,t)+(1-t)u_i.$$

Nous avons $[\mathbf{B}(\mu_F)\cdot\mu_F]=[\mu_{\mathbf{B}F}\cdot\mu_F]$ par l'homotopie qui à (X,t) associe

$$\Big[f_{s(t)},\dots,f_n;\ x_{s(t)+1}\leq\dots\leq x_k\leq\dots\leq x_n;\ \dots$$
$$[f_{r(t)},\dots,f_{x(t)-1},1_{A_{s(t)}};\ y_{r(t)+1}\leq\dots\leq y_k\leq\dots\leq y_{s(t)};\ \dots$$
$$[f_0,\dots,f_{r(t)-1},1_{A_{r(t)}};\ z_1\leq\dots\leq z_k\leq\dots\leq z_{r(t)};\ x]]\Big]$$

où $r(t)$ et $s(t)$ sont les entiers tels que

$$u_1\leq\dots\leq u_{r(t)}\leq\dots\leq(t+1)/4\leq u_{r(t)+1}\leq\dots$$
$$\dots\leq u_{s(t)}\leq(t+2)/4\leq u_{s(t)+1}\leq\dots\leq u_n$$

et où $x_k=(4u_k-t-2)/(2-t)$ pour $s(t)+1\leq k\leq n$, $y_k=4u_k-t-1$ pour $r(t)+1\leq k\leq s(t)$, $z_k=4u_k/(t+1)$ pour $1\leq k\leq r(t)$.

L'idempotence est donnée par $\mu_F^{-1}\colon \mathbf{B}^2F\to\mathbf{B}F$ qui, à

$$\Big[f_0,\dots,f_n;\ u_1\leq\dots\leq u_n;[g_0,\dots,g_m;\ v_1\leq\dots\leq v_m;\ x]\Big]\in\mathbf{B}^2FA$$

associe

$$[g_0,\dots,g_m,f_0,\dots,f_n;\ v_1/2\leq\dots\leq v_m/2\leq 1/2\leq(u_1+1)/2\leq\dots$$
$$\dots\leq(u_n+1)/2;\ x]\in\mathbf{B}FA. \quad\blacksquare$$

Soit

$$Co(A)(F,G)=\underline{Co(Top^A_s)}(F,G)_0 \text{ et } HCo(A)=\pi_0\ \underline{Co(Top^A_s)}(F,G).$$

Soit $Kl(A)$ la catégorie de Kleisli associée à la comonade $(\mathbf{B},\eta,\mu)$ et soit $N(\mathbf{B}F,G)$ l'ensemble $\underline{Top}^A_s(\mathbf{B}F,G)_0$ des transformations de $\mathbf{B}F$ dans G. Nous avons une bijection α de $Co(A)(F,G)$ sur $N(\mathbf{B}F,G)$. Cette bijection α associe à un morphisme cohérent $c\colon F\to G$ la transformation $\alpha(c)$ définie par

$$\alpha(c)[f_0,\dots,f_n;\ u_0\leq\dots\leq u_n;\ x]$$
$$=G(f_n)c(f_0,\dots,f_{n-1})(u_1\leq\dots\leq u_n;\ x)$$

de $\mathbf{B}FA$ dans GA. Son inverse α^{-1} associe à $t\colon\mathbf{B}F\to G$ le morphisme cohérent $\alpha^{-1}(t)\colon F\to G$ défini par:

$$\alpha^{-1}(t)(f_1,\dots,f_n)(u_1\leq\dots\leq u_n;\ x)=t_{A_n}[f_1,\dots,f_n,1_{A_n};\ u_1\leq\dots\leq u_n;\ x]$$

de $\Delta_n\times FA_0$ dans GA_n.

Pour deux morphismes cohérents $c\colon F\to G$ et $c'\colon F\to G$, une *homotopie cohérente* entre c et c' sera un morphisme cohérent $h\colon \Delta_1\times F\to G$ tel que $h_0=c$ et $h_1=c'$; nous notons alors $c\approx c'$.

Il est clair que $c \approx c'$ est équivalent à $\alpha(c) \approx \alpha(c') : \mathbf{B}\mathrm{F} \to \mathrm{G}$; nous noterons ainsi par $[c]$ la classe d'homotopie d'un morphisme cohérent. α nous donne donc une bijection de $HCo(A)(\mathrm{F},\mathrm{G})$ sur

$$Kl(A)(\mathrm{F},\mathrm{G}) = H\mathrm{N}(\mathbf{B}\mathrm{F},\mathrm{G}) = \pi_0(\underline{Top}^A_s)(\mathbf{B}\mathrm{F},\mathrm{G}).$$

Pour $c : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ et $c' : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$, soit $c' * c : \mathrm{F} \to \mathrm{H}$ le morphisme cohérent défini par

$$c' * c = \alpha^{-1}(\alpha(c') \circ \alpha(c)) = \alpha^{-1}(\alpha(c') \cdot \mathbf{B}(\alpha(c)) \cdot \mu_{\mathrm{F}});$$

nous avons

$$(c' * c)(f_1, \dots, f_n)(u_1 \le \cdots \le u_n;\ x)$$

$$= c'(f_{i+1}, \dots, f_n)(2u_{i+1}-1 \le \cdots \le 2u_n - 1;\ c(f_1, \dots, f_n)(2u_1 \le \cdots \le 2u_i;\ x))$$

si $u_1 \le \cdots \le u_i \le 1/2 \le u_{i+1} \le \cdots \le u_n$.

Nous obtenons ainsi une catégorie d'homotopie de morphismes cohérents entre foncteurs de A dans Top. HCo(A), isomorphe par α à Kl(A).

1.2. Pour une transformation $m : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$, nous noterons par $\overline{m} : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ le morphisme cohérent trivial associé défini par

$$\overline{m}(f_1, \dots, f_n)(u_1 \le \cdots \le u_n;\ x) = m_{\mathrm{A}_n}\mathrm{F}(f_n \cdots f_1)(x) = \mathrm{G}(f_n \cdots f_1)\, m_{\mathrm{A}_0}(x).$$

Nous avons ainsi $\alpha(\overline{1}_{\mathrm{F}}) = \eta_{\mathrm{F}} : \mathbf{B}\mathrm{F} \to \mathrm{F}$ pour $\overline{1}_{\mathrm{F}} : \mathrm{F} \to \mathrm{F}$ le morphisme cohérent unité, associé à F, pour la composition des morphismes cohérents. De même pour des transformations $m : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ et m': $\mathrm{G} \to \mathrm{H}$, nous avons pour les morphismes cohérents associés:

$$\overline{m}' * \overline{m} = \overline{m' \cdot m}.$$

Pour un morphisme cohérent $c : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$, soit $\bar{\mathbf{B}}(c) : \mathbf{B}\mathrm{F} \to \mathbf{B}\mathrm{G}$ le morphisme cohérent défini par $\bar{\mathbf{B}}(c) = \alpha^{-1}\mathbf{B}(\alpha(c))$. Soit $(f_1, \dots, f_n)$ un n-uple de A de A_0 dans A_n, $u_1 \le \cdots \le u_n$ un élément de Δ_n et

$$[\mathrm{X}] = [g_0, \dots, g_m;\ v_1 \le \cdots \le v_m;\ x] \in \mathbf{B}\mathrm{F}\mathrm{A}_0;$$

alors $\bar{\mathbf{B}}(c)(f_1, \dots, f_n) : \Delta_n \times \mathbf{B}\mathrm{F}\mathrm{A}_0 \to \mathbf{B}\mathrm{G}\mathrm{A}_n$ est tel que

$$\bar{\mathbf{B}}(c)(f_1, \dots, f_n)(u_1 \le \cdots \le u_n; [\mathrm{X}]) =$$

$$[f_1, \dots, f_n, 1_{\mathrm{A}_n}:\ u_1 \le \cdots \le u_n : \mathrm{G}g_m\, c(g_0, \dots, g_{m-1})(v_1 \le \cdots \le v_m;\ x)].$$

Considérons le carré suivant de morphismes cohérents

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{B}\mathrm{F} \arrow[r, "\overline{\eta}_{\mathrm{F}}"] \arrow[d, "\bar{\mathbf{B}}(c)"'] & \mathrm{F} \arrow[d, "c"] \\
\mathbf{B}\mathrm{G} \arrow[r, "\overline{\eta}_{\mathrm{G}}"'] & \mathrm{G}
\end{tikzcd}$$

nous avons

PROPOSITION 1. *Pour un morphisme cohérent c le carré précédent est commutatif dans HCo(A), soit* $c*\bar{\eta}_F \approx \eta_G * \bar{\mathbf{B}}(c)$.

PREUVE. $c*\bar{\eta}_F$ est homotope à $\bar{\eta}_G*\bar{\mathbf{B}}(c)$ par l'homotopie cohérente $h: \Delta_1 \times \mathbf{B}F \to G$ définie de la façon suivante:

$$h(f_1,\dots,f_n)(u_1 \le \dots \le u_n; ([X], t)) =$$
$$c(g_0,\dots,g_m, f_1,\dots,f_n)(v_1 t \le \dots \le v_m t \le t \le x_1(t) \le \dots \le x_n(t);\ x)$$

où $x_i(t) = (1-t)[\sup((2-t)u_i, 1-t) + t - 1] + t$. Pour $t=0$, nous avons

$$c(f_{i+1},\dots,f_n)(2u_{i+1}-1 \le \dots \le 2u_n - 1; F(f_i \cdots f_1 g_m \cdots g_0)(x))$$
$$= (c*\bar{\eta}_F)(f_1,\dots,f_n)(u_1 \le \dots \le u_n;\ [X]),$$

où $u_1 \le \dots \le u_i \le 1/2 \le u_{i+1} \le \dots \le u_n$: et pour $t=1$:

$$G(f_n \cdots f_1 g_m)\, c(g_0,\dots,g_{m-1})(v_1 \le \dots \le v_m;\ x)$$
$$= (\bar{\eta}_G * \bar{\mathbf{B}}(c))(f_1,\dots,f_n)(u_1 \le \dots \le u_n;\ [X]). \qquad \blacksquare$$

Soit $\nu_F: F \to \mathbf{B}F$ le morphisme cohérent défini par:

$$\nu_F(f_1,\dots,f_n): \Delta_n \times FA_0 \to \mathbf{B}FA_n$$

est tel que

$$\nu_F(f_1,\dots,f_n)(u_1 \le \dots \le u_n;\ x) = [f_1,\dots,f_n, 1_{A_n};\ u_1 \le \dots \le u_n;\ x].$$

Nous avons $\bar{\mathbf{B}}(\nu_F) = \nu_{\mathbf{B}F}$, puisque

$$\bar{\mathbf{B}}(\nu_F)(f_1,\dots,f_n)(u_1 \le \dots \le u_n; [X]) =$$
$$[f_1,\dots,f_n, 1_{A_n}; u_1 \le \dots \le u_n; \mathbf{B}F(g_m)\nu_F(g_0,\dots,g_{m-1})(v_1 \le \dots \le v_m;\ x)]$$

et

$$\mathbf{B}F(g_m)\nu_F(g_0,\dots,g_{m-1})(v_1 \le \dots \le v_m;\ x)$$
$$= \mathbf{B}F(g_m)[g_0,\dots,g_{m-1}, 1_{A_m};\ v_1 \le \dots \le v_m;\ x]$$
$$= [g_0,\dots,g_{m-1}, g_m;\ v_1 \le \dots \le v_m;\ x] = [X].$$

De cette égalité, nous déduisons la proposition suivante:

PROPOSITION 2. *Pour* $F: A \to Top$, *le morphisme cohérent* $\bar{\eta}_F$: $\mathbf{B}F \to F$ *est inversible dans HCo(A), d'inverse* $\nu_F: F \to \mathbf{B}F$.

PREUVE. Nous avons $\bar{\eta}_F * \nu_F = \bar{1}_F$ puisque

$$\bar{\eta}_F * \nu_F(f_1,\dots,f_n)(u_1 \le \dots \le u_n;\ x) =$$
$$\bar{\eta}_F(f_{i+1},\dots,f_n)(2u_{i+1}-1 \le \dots \le 2u_n - 1;\ \nu_F(f_1,\dots,f_i)(2u_1 \le \dots \le 2u_i;\ x))$$
$$= F(f_n \cdots f_1)(x) = \bar{1}_F(f_1,\dots,f_n)(u_1 \le \dots \le u_n;\ x).$$

On en déduit $\nu_F * \bar{\eta}_F \approx \bar{1}_{\mathbf{B}F}$, d'après la proposition précédente, puisque le carré

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{B}F \arrow[rr, "\bar\eta_F"] \arrow[d, "\nu_{\mathbf{B}F}=\bar{\mathbf{B}}(\nu_F)"'] \arrow[drr, "\bar 1_{\mathbf{B}F}"] & & F \arrow[d, "\nu_F"] \\
\mathbf{B}^2F \arrow[rr, "\bar\eta_{\mathbf{B}F}"'] \arrow[ur, phantom, "="] & & \mathbf{B}F
\end{tikzcd}$$

nous donne $\nu_F * \bar\eta_F \approx \bar\eta_{\mathbf{B}F} * \nu_{\mathbf{B}F} = \bar 1_{\mathbf{B}F}$. ∎

2. LA CATÉGORIE D'HOMOTOPIE DES MORPHISMES COHÉRENTS DE VOGT.

2.1. Dans ce paragraphe nous allons donner quelques propriétés des morphismes cohérents de Vogt [8] entre foncteurs d'une catégorie A dans *Top*. Ainsi, suivant Vogt, la donnée d'un hA-diagramme ou *diagramme homotopiquement cohérent* de A dans *Top* est la donnée d'un *Top*-foncteur d'une catégorie topologique WA dans *Top*, où WA est défini par:

$$\underline{WA}(A,B) = \int^n [0,1]^n \times A^{n+1}(A,B)$$

(voir [2]). De l'étude de la cohérence homotopique faite dans [2], nous avons, si A est la catégorie $[n+1]$,

$$\underline{W[n+1]}(p,q) = \int^m [0,1]^m \times [n+1]^{m+1}(p,q) = [0,1]^{q-p-1} .$$

Nous exprimerons dans ce texte les cohérences par rapport à l'objet monoïde dans Top:

$$[0,1]^2 \to [0,1],\ * \to [0,1]:\ (t,t') \mapsto t\cdot t',\ * \mapsto 1 .$$

Le nerf homotopiquement cohérent de *Top*, $\mathrm{Ner}_{hc}(Top)$, est alors défini par

$$\mathrm{Ner}_{hc}(Top)_n = Top\text{-}Cat(\mathrm{W}[n],\ Top).$$

Nous obtenons la caractérisation suivante d'un hA-diagramme:

PROPOSITION 1 (cf. [2]). *Si A est une catégorie, on a une bijection entre $S(\mathrm{Ner}A, \mathrm{Ner}_{hc}(Top))$ et $Top\text{-}Cat(\mathrm{W}A, Top)$.*

PREUVE. Pour un hA-diagramme $F: \mathrm{W}A \to Top$, le morphisme simplicial $hF: \mathrm{Ner}A \to \mathrm{Ner}_{hc}(Top)$ est défini par:

$$hF_{n+1}: \mathrm{Ner}(A)_{n+1} \to Top\text{-}Cat(\mathrm{W}[n+1], Top)$$

est tel que, pour un $(n+1)$-uple $(f_0,\dots,f_n)$ de A dans B :

$$hF_{n+1}(f_0,\dots,f_n)_{(0,n+1)}[(0,1), t_1,\dots, t_n, (n,n+1)]$$

$$= F_{AB}[f_0, t_1, \ldots, t_n, f_n]. \quad \blacksquare$$

Pour deux hA-diagrammes F et G, définis par hF et hG de Ner$A$ dans $\mathrm{Ner}_{hc}(Top)$, la notion d'un h-morphisme entre F et G est définie comme un h: Ner($A\times$[1])$\to\mathrm{Ner}_{hc}(Top)$ tel que

$$h\circ N(1\times\delta_0) = hG \text{ et } h\circ N(1\times\delta_1) = hF,$$

Ner$A$ et Ner($A\times$[0]) étant identifiés. Nous avons alors

$h_{n+1}((f_0,0),\ldots,(f_n,0))(t_1,\ldots,t_n)$: $W[n+1](0,n+1) \to Top(F0,F(n+1))$

égal à

$$(h\circ N(1\times\delta_1))_{n+1}(f_0,\ldots,f_n)(t_1,\ldots,t_n) =$$
$$hF_{n+1}(f_0,\ldots,f_n)(t_1,\ldots,t_n) = F_{AB}[f_0,t_1,\ldots,t_n,f_n].$$

Les simplexes de la forme $((f_0,i),\ldots,(f_n,i))$, pour $i=0,1$, caractérisent les hA-diagrammes F et G.

Si F et G sont des foncteurs de A dans Top, considérés comme des hA-diagrammes triviaux, les homotopies de cohérence

$$h_{n+1}((f_0,i),\ldots,(f_n,i)),\ i=0,1,$$

seront prises comme homotopies triviales.

2.2. Nous avons montré dans le paragraphe précédent qu'il existe une comonade $(\mathbf{B},\eta,\mu)$ sur $\pi_0(Top_s^A)$ dont la catégorie de Kleisli nous donne une catégorie d'homotopie de morphismes cohérents entre foncteurs de A dans Top, $HCo(A)$. Dans cette catégorie les homotopies de cohérence sont exprimées par simplexes standard.

Un lien entre cet aspect simplicial et l'aspect cubique des cohérences est donné par Vogt en associant à un foncteur F: $A\to Top$ un foncteur MF de A dans Top défini par:

$$MFB = \int^{A}\int^{n\in\Delta^d} [0,1]^n\times A^{n+1}(A,B)\cdot FA$$

(voir [3]), où Δ^d est la sous-catégorie de Δ obtenue en oubliant les opérateurs faces δ_n^n. Nous avons:

PROPOSITION 2 [8]. *Pour un foncteur* F: $A\to Top$ *les foncteurs* **B**F *et* MF *sont naturellement équivalents.*

PREUVE. A l'élément $[f_0,t_1,\ldots,t_n,f_n;\ x]$ de MFB est associé

$$[f_0,\ldots,f_n;\ u_1\le\cdots\le u_n;\ x]\in\mathbf{B}FB \text{ où } u_i = t_n\cdots t_i.$$

Inversement à $[f_0,\ldots,f_n;\ u_1\le\cdots\le u_n;\ x]\in\mathbf{B}FB$ est associé

$$[f_0, u_1/u_2, \dots, u_{n-1}/u_n, f_{n-1}, u_n, f_n;\ x]$$

avec la convention $0/0 = 1$. ■

Comme **B**F et MF, pour tout F, sont naturellement équivalents, la structure de comonade $(\mathbf{B}, \eta, \mu)$ se transporte en une structure de comonade (M, η, μ) sur $\pi_0(Top_s^A)$. Nous obtenons ainsi une catégorie d'homotopie de morphismes cohérents entre foncteurs de A dans *Top* que nous noterons également *HCo*(A). Il est en effet clair que les deux catégories obtenues par les deux comonades sont naturellement isomorphes. Nous voyons que, pour F et G de A dans *Top*, la donnée d'un morphisme cohérent $c: F \to G$ correspond à la donnée pour chaque n-uple

$$A_0 \xrightarrow{f_1} A_1 \longrightarrow \dots \xrightarrow{f_n} A_n$$

d'une homotopie $c(f_1, \dots, f_n): [0,1]^n \times FA_0 \to GA_n$ telle que

$$c(f_1, \dots, f_n)(t_1, \dots, t_n)(x) = \left| \begin{array}{ll} c(f_1, \dots, f_{i+1}f_i, \dots, f_n)(t_1, \dots, \hat{t}_i, \dots, t_n)(x) & \text{si } t_i = 1,\ i < n \\ G(f_n)\, c(f_1, \dots, f_{n-1})(f_1, \dots, f_{n-1})(t_1, \dots, t_{n-1})(x) & \text{si } t_n = 1 \\ c(f_{i+1}, \dots, f_n)(t_{i+1}, \dots, t_n)(F(f_i \cdots f_1)(x)) & \text{si } t_i = 0 \\ c(f_2, \dots, f_n)(t_2, \dots, t_n)(x) & \text{si } f_1 = \mathrm{Id} \\ c(f_1, \dots, \hat{f}_i, \dots, f_n)(t_1, \dots, t_i t_{i-1}, \dots, t_n)(x) & \text{si } f_i = \mathrm{Id},\ i > 1. \end{array} \right.$$

Il va de soi que les différentes propriétés de cohérence mises en évidence dans le paragraphe précédent se transportent sur la comonade (M, η, μ). De plus, les homotopies cubiques de cohérence que nous obtenons ici sont de données plus simples que celles correspondant aux hA-diagrammes. Le lien entre ces deux façons de décrire des cohérences par des homotopies cubiques va être construit en considérant la notion de $h_T A$-diagramme introduite par Vogt.

Suivant Vogt nous notons par T la sous-catégorie pleine de $A \times [n]$ ayant pour objets les couples (A, n). De notre correspondance entre hA-diagrammes et morphisme simplicial, nous déduisons la forme suivante de la définition de Vogt:

DEFINITION. Un $h(A \times [p])$-diagramme F est dit *but réduit* ou $h_T(A \times [p])$-diagramme si

$$s_n \cdots s_i (hF_{i-1}(f_0, \dots, f_{i-2}, f_n \cdots f_{i-1})) = hF_{n+1}(f_0, \dots, f_n)$$

si $f_i = 1_{(\ i, p)}$.

Si F est un hA-diagramme et G un A-diagramme, un $h_T(A\times[1])$-diagramme de source F et de but G sera dit h-*morphisme but réduit* ou h_T-morphisme.

PROPOSITION 3. *Pour deux foncteurs* F *et* G *de* A *dans* Top, *il existe une correspondance bijective entre les* h_T*-morphismes* $h: \mathrm{Ner}(A\times[1]) \to \mathrm{Ner}_{hc}(Top)$ *de* F *vers* G *et les morphismes cohérents* $c: F \to G$ *donnés par les transformations* $\alpha(c): MF \to G$.

PREUVE. A un h_T-morphisme h est associé un morphisme cohérent $c: F\to G$ défini comme suit: $c(f_1,\dots,f_n)$: $[0.1]^n \times FA_0 \to GA_n$ est tel que

$$c(f_1,\dots,f_n)(t_1,\dots,t_n) = h_{n+1}((f_1,0),\dots,(f_n,0),(1_{A_n},j))(t_1,\dots,t_n).$$

où $j = (0<1)$. Comme les $(n+1)$-simplexes non dégénérés de $A\times[1]$ sont de la forme

$$((f_0,0),\dots,(f_{i-1},0),(f_i,j),(f_{i+1},1),\dots,(f_n,1))$$

pour un $(n+1)$-uple $(f_0,\dots,f_n)$, la formule précédente et la définition d'un h_T-morphisme permettent de définir naturellement h, pour $c: F\to G$, par

$$\begin{aligned} &h_{n+1}((f_0,0),\dots,(f_{i-1},0),(f_i,j),(f_{i+1},1),\dots,(f_n,1))(t_1,\dots,t_n) \\ &= G(f_n\cdots f_i)\, c(f_0,\dots,f_{i-1})(t_1,\dots,t_i) \\ &= G(f_n\cdots f_i)\, h_{i+1}((f_0,0),\dots,(f_{i-1},0),(1_{A_i},j))(t_1,\dots,t_i). \ \blacksquare \end{aligned}$$

Soit $SA = \underline{S}(\mathrm{Ner}A, \mathrm{Ner}_{hc}(Top))$ le Hom simplicial du nerf de A dans le nerf homotopiquement cohérent de *Top*, $\mathrm{Ner}_{hc}(Top)$. D'après Vogt nous savons que SA est un ensemble *simplicial faiblement Kan*, c'est-à-dire qu'un morphisme simplicial $f: \Lambda^r[n] \to SA$ a un remplissage $\bar{f}: \Delta[n] \to SA$, pour $0<r<n$. (Notons qu'une démonstration de cette propriété. pour la version simpliciale sur Top_s du nerf cohérent, est donnée dans [5].)

Soit GSA la catégorie associée à l'ensemble simplicial SA. Cette catégorie détermine une catégorie d'homotopie, que nous noterons HA, de morphismes cohérents entre hA-diagrammes, définie comme suit: de façon générale si X est un ensemble simplicial faiblement Kan,

$$GX = Gsk^2X = \int^{p\le 2} [p]\times X_p$$

est tel que GX a pour objets les 0-simplexes de X et pour morphismes les classes d'homotopie $[f]$ de 1-simplexes f de X où $[f]=[g]$ s'il existe un 2-simplexe σ de X vérifiant: $d_1\sigma = f$, $d_2\sigma = g$ et $d_0\sigma$ est dégénéré. Comme pour $f: x\to y$ et $g: y\to z$ il existe un 2-simplexe σ tel que $d_0\sigma = g$ et $d_2\sigma = f$, le composé de $[f]$ et $[g]$ est défini par $[g]\circ[f] = [d_1\sigma]$. *Nous noterons* $g\circ f$ *un tel élément* $d_1\sigma$.

Soit H_fA la sous-catégorie pleine de HA ayant pour objets les foncteurs de A dans *Top*. Comme nous voulons considérer des h_T-morphismes entre A-diagrammes nous utiliserons la propriété suivante indiquée par Vogt: Etant donné $f:\Lambda^r[n]\to SA$ défini par $(n-1)$ $h_T(A\times[n-1])$-diagrammes $h_0,\dots, h_{r-1}, h_{r+1},\dots, h_{n-1}$ où $0<r\leq n-1$ et un $h(A\times[n-1])$-diagramme h_n avec

$$d_{j-1}h_i = d_ih_j \text{ pour } 0\leq i<j\leq n,\ i\neq r\neq j,$$

alors il existe un remplissage qui est donné par un $h_T(A\times[n])$-diagramme σ, c'est-à-dire $d_i\sigma = h_i$ pour $i\neq r$.

Ainsi suivant Vogt, nous dirons que deux h_T-morphismes h et h' sont *simplicialement homotopes* s'il existe un $h_T(A\times[2])$-diagramme σ tel que $d_2\sigma = h$, $d_1\sigma = h'$ et $d_0\sigma$ est dégénéré. Pour deux A-diagrammes F et G, nous noterons par $H_TA(\mathrm{F},\mathrm{G})$ l'ensemble des classes d'homotopie de h_T-morphismes ainsi obtenues. Comme pour deux h_T-morphismes $h:\mathrm{F}\to\mathrm{G}$ et $h':\mathrm{G}\to\mathrm{H}$ le $h_T(A\times[2])$-diagramme σ tel que $d_2\sigma = h$, $d_0\sigma = h'$ nous donne, par $d_1\sigma$, un h_T-morphisme composé $h'\circ h$, nous avons d'après Vogt:

PROPOSITION 4. *Pour* F *et* G *de* A *dans Top, il existe une correspondance bijective naturelle entre* $H_TA(\mathrm{F},\mathrm{G})$ *et* $H_fA(\mathrm{F},\mathrm{G})$.

PREUVE. Voir Vogt [8], Lemma 5.7. ∎

Par cette proposition, nous pouvons identifier $H_TA(\mathrm{F},\mathrm{G})$ et $H_fA(\mathrm{F},\mathrm{G})$.

3. COMPARAISON.

3.1. La correspondance bijective qui, à un diagramme cohérent $c:\mathrm{F}\to\mathrm{G}$, associe un h_T-morphisme que nous noterons $\beta(c)$: $\mathrm{F}\to\mathrm{G}$ est compatible avec les homotopies d'après la Proposition 4.1 de Vogt [8]. Nous obtenons ainsi une bijection

$$\beta^*:\ HCo(A)(\mathrm{F},\mathrm{G}) \to H_fA(\mathrm{F},\mathrm{G}) \text{ définie par } \beta^*([c]) = [\beta(c)].$$

Nous allons montrer que l'application $\beta^*: HCo(A)\to H_fA$ que nous en déduisons est fonctorielle et détermine donc un isomorphisme de $HCo(A)$ sur H_fA.

Pour une transformation naturelle $m:\mathrm{F}\to\mathrm{G}$, soit $\tilde{m}$ le h_T-morphisme associé défini par

$$\tilde m_{n+1}((f_0,0),\dots,(f_{i-1},0),(f_i,j),(f_{i+1},1),\dots,(f_n,1))(t_1,\dots,t_n)$$
$$= m_{A_{n+1}} F(f_n \cdots f_i \cdots f_0) = G(f_n \cdots f_0)\, m_{A_0}.$$

Soit $\bar m$: F→G le morphisme cohérent associé à m. Nous avons

$$\beta(\bar m)_{n+1}((f_0,0),\dots,(f_i,j),\dots,(f_n,1))(t_1,\dots,t_n)$$
$$= G(f_n \cdots f_i)\, \bar m(f_0,\dots,f_{i-1})(t_1,\dots,t_i)$$
$$= G(f_n \cdots f_i) G(f_{i-1} \cdots f_0)\, m_{A_0}.$$

Par conséquent $\beta(\bar m) = \tilde m$. En particulier pour $F: A \to Top$, l'élément unité associé $s_0(F)$ de $H_f A$ est tel que $s_0(F) = \tilde 1_F = \beta(\bar 1_F)$.

Soit D et E des A-diagrammes, h: D→E un h_T-morphisme et m: E→F une transformation naturelle. Soit h': D→F le h_T-morphisme défini par

$$h'_{n+1}((f_0,0),\dots,(f_i,j),\dots,(f_n,1))(t_1,\dots,t_n)$$
$$= m_{A_{n+1}} h_{i+1}((f_0,0),\dots,(f_{i-1},0),(f_n \cdots f_i,j))(t_1,\dots,t_i).$$

Suivant Vogt, il existe un $h(A\times[2])$-diagramme σ tel que $d_2\sigma = h$, $d_0\sigma = \tilde m$, $d_1\sigma = h'$ et

$$\sigma_{n+1}((f_0,0),\dots,(f_{i-1},0),(f_i,k_2),(f_{i+1},1),\dots,(f_{j-1},1),\dots$$
$$\dots,(f_j,k_0),(f_{j+1},2),\dots,(f_n,2))(t_1,\dots,t_n)$$
$$= m_{A_{n+1}}((f_0,0),\dots,(f_i,j),(f_{i+1},1),\dots,(f_j,1),\dots,(f_n,1))(t_1,\dots,t_n)$$
$$= m_{A_{n+1}} h_{i+1}((f_0,0),\dots,(f_{i-1},0),(f_n \cdots f_i,j))(t_1,\dots,t_i)$$

où $k_0 = (1<2)$ et $k_2 = (0<1)$.

Le h_T-morphisme h' est un composé de $\tilde m$ et de h, appelé *composé canonique* de $\tilde m$ et h; nous le noterons $m \bar\circ h$. Il est clair que si m': D'→D est une transformation, nous avons également un composé canonique $h \bar\circ m'$.

Notons que pour des transformations m: E→F et m': F→G, nous avons

$$m' \bar\circ \tilde m = (m' \cdot m)^\sim = \tilde m' \bar\circ m;$$

on a alors dans $H_f A$:

$$[\tilde m'] \circ [\tilde m] = [\tilde m' \bar\circ \tilde m] = [m' \bar\circ \tilde m] = [\tilde m \bar\circ m] = [(m' \cdot m)^\sim].$$

On en déduit que

$$\beta^*([\bar m'] + [\bar m]) = \beta^*([\bar m' + \bar m]) = \beta^*([\overline{m' \cdot m}]) = [\beta(\overline{m' \cdot m})]$$
$$[(m' \cdot m)^\sim] = [\tilde m'] \circ [\tilde m] = \beta'([m']) \circ \beta'([m]).$$

Soit ν_F: F→MF le morphisme cohérent défini par

$$\nu_F(f_1,\dots,f_n)(t_1,\dots,t_n)(x) = [f_1,t_1,\dots,f_n,t_n,1_{A_n}; x],$$

de $[0,1]^n \times FA_0$ dans MFA_n. Soit ν'_F: F→MF le h_T-morphisme défini par $\nu'_F = \beta(\nu_F)$. Nous avons

$$
\begin{aligned}
&(\nu'_F)_{n+1}((f_0,0),\dots,(f_i,j),\dots,\ (f_n,1))(t_1,\dots,t_n)(x)\\
&\quad = MF(f_n\cdots f_i)\,\nu_F(f_0,\dots,f_{i-1})(t_1,\dots,t_i)(x)\\
&\quad = MF(f_n\cdots f_i)\,[f_0,t_1,\dots,f_{i-1},t_i,1_{A_i};\ x]\\
&\quad = [f_0,t_1,\dots,f_{i-1},t_i,\ f_n,\dots,f_i;\ x];
\end{aligned}
$$

d'où

PROPOSITION 1. *Si* $c: F \to G$ *est un morphisme cohérent, alors*

$$\alpha(c)\,\bar{\circ}\,\nu'_F = \beta(c).$$

PREUVE. Par construction, nous avons

$$
\begin{aligned}
&\beta(c)_{n+1}((f_0,0),\dots,(f_i,j),\dots,\ (f_n,1))(t_1,\dots,t_n)(x)\\
&\quad = G(f_n\cdots f_i)\,c(f_0,\dots,f_{i-1})(t_1,\dots,t_i)(x).
\end{aligned}
$$

De même

$$
\begin{aligned}
&(\alpha(c)\,\bar{\circ}\,\nu'_F)_{n+1}((f_0,0),\dots,(f_i,j),\dots,\ (f_n,1))(t_1,\dots,t_n)(x)\\
&= \alpha(c)_{A_{n+1}}(\nu'_F)_{i+1}((f_0,0),\dots,(f_{i+1},0),(f_n\cdots\ f_i,j\ )(t_1,\dots,t_n)(x)\\
&= \alpha(c)_{A_{n+1}}[f_0,t_1,\dots,f_{i-1},t_i,f_n\cdots f_i;\ x]\\
&= G(f_n\cdots f_i)\,c(f_0,\dots,f_{i-1})(t_1,\dots,t_i)(x). \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

D'après la construction de la comonade $(\mathbf{B},\eta,\mu)$, donc de la comonade (M,η,μ), il résulte que $\eta: MD \to D$ est tel que pour tout A, $\eta_D A: MDA \to DA$ est une équivalence d'homotopie. Nous savons alors d'après Vogt que $\tilde{\eta}_D: MD \to D$ est inversible dans H_fA. Il existe donc un h-morphisme k tel que

$$[k]\circ[\tilde{\eta}_D] = [\tilde{1}_{MD}] \text{ et } [\tilde{\eta}_D]\circ[k] = [\tilde{1}_D].$$

Nous avons:

PROPOSITION 2. *Pour tout A-diagramme* D, *le* h_T-*morphisme* $\tilde{\eta}_D: MD \to D$ *est inversible dans* H_fA, *d'inverse* $\nu'_D: D \to MD$.

PREUVE. Nous avons

$$\alpha(\bar{1}_D) = \eta_D \text{ et } \alpha(\bar{1}_D)\,\bar{\circ}\,\nu'_D = \beta(\bar{1}_D) = \tilde{1}_D.$$

c'est-à-dire $\eta_D\,\bar{\circ}\,\nu'_D = \tilde{1}_D$. Le passage aux classes d'homotopie nous donne:

$$[\tilde{1}_D] = [\eta_D\,\bar{\circ}\,\nu'_D] = [\tilde{\eta}_D]\circ[\nu'_D] = [\tilde{\eta}_D]\circ[k].$$

Par conséquent $[k] = [\nu'_D]$. $\blacksquare$

COROLLAIRE 1. *Pour tout A-diagramme* D *le* h_T-*morphisme* $\tilde{\mu}_D: MD \to M^2D$ *est homotope à* $\nu'_{MD}: MD \to M^2D$.

PREUVE. D'après les propriétés d'une comonade, nous avons dans $\pi_0(Top^A_s)$: $\eta_{MD}\cdot\mu_D \approx 1_{MD}$. Nous avons alors

$$\alpha^{-1}(\eta_{MD}\cdot\mu_D) = \overline{\eta_{MD}\cdot\mu_D} \approx \bar{\alpha}^{1}(1_{MD}) = \bar{1}_{MD},$$

d'où $\bar{\eta}_{MD} * \bar{\mu}_D \approx \bar{\mu}_{MD}$. Comme

$$\beta^*([\bar{\eta}_{MD}]*[\bar{\mu}_D]) = \beta^*([\bar{\eta}_{MD}*\bar{\mu}_D]) = \beta^*([\bar{1}_{MD}])$$
$$= [\tilde{1}_{MD}] = [\tilde{\eta}_{MD}]\circ[\tilde{\mu}_D]$$

et comme $\tilde{\eta}_{MD}$ est inversible d'inverse ν'_{MD}. nous avons $[\tilde{\mu}_D] = [\nu'_{MD}]$. ■

COROLLAIRE 2. *Pour une transformation naturelle* $m : \mathrm{D}\to\mathrm{E}$ *nous avons dans* H_fA

$$[\nu'_E]\circ[\tilde{m}] = [\nu'_E \,\bar{\circ}\, m] = [(M(m)^{\sim}]\circ[\nu'_D] = [M(m)\,\bar{\circ}\,\nu'_D].$$

PREUVE. D'après le paragraphe 1. nous avons dans $HCo(A)$:

$$[\bar{\eta}_E]*[\overline{M(m)}] = [\bar{m}]*[\bar{\eta}_D].$$

Comme $[\nu_E]$ et $[\nu_D]$ sont les inverses de $[\bar{\eta}_E]$ et $[\bar{\eta}_D]$. nous obtenons

$$[\nu_E]*[\bar{m}] = [\overline{M(m)}]*[\nu_D].$$

La transformation par β^* nous donne l'identité cherchée. ■

THEOREME 2. *L'application* β^* *définit un isomorphisme de la catégorie d'homotopie* $HCo(A)$ *sur la catégorie d'homotopie* H_fA.

PREUVE. Soit $c: \mathrm{D}\to\mathrm{E}$ et $c': \mathrm{E}\to\mathrm{F}$ des morphismes cohérents. D'après le paragraphe 1. nous avons

$$\alpha(c' * c) = \alpha(c')\cdot M(\alpha(c))\cdot\mu_D.$$

d'où

$$\beta(c' * c) = (\alpha(c')\cdot M(\alpha(c))\cdot\mu_D)\,\bar{\circ}\,\nu'_D.$$

Nous avons donc

$$\beta^*([c'] * [c]) = [(\alpha(c')\cdot M(\alpha(c))\cdot\mu_D)^{\sim}\circ\nu_D];$$

soit la situation suivante au niveau des h_T-morphismes

$$\begin{tikzcd}
 & & M^2D \arrow[dr, "(M(\alpha(c)))^{\sim}"] & & \\
 & MD \arrow[ur, shift left, "\tilde{\mu}_D"] \arrow[ur, shift right, "\nu'_{MD}"'] \arrow[dr, "\alpha(c)"] & & ME \arrow[dr, "\alpha(c')"] & \\
D \arrow[ur, "\nu'_D"] \arrow[rr, "\beta(c)"'] & & E \arrow[ur, "\nu'_E"] \arrow[rr, "\beta(c')"'] & & F
\end{tikzcd}$$

Comme $\tilde{\mu}_D$ est homotope à ν'_{MD}. nous avons

$$[(M(\alpha(c)))^{\sim}]\circ[\tilde{\mu}_{D}] = [(M(\alpha(c))\cdot\mu_{D})^{\sim}] = [\nu'_{E}]\circ[\alpha(c)^{\sim}] =$$
$$[\nu'_{E}\circ\alpha(c)^{\sim}] = [\nu'_{E}\,\bar{\circ}\,\alpha(c)].$$

Soit τ le 2-simplexe définissant l'homotopie entre $(M(\alpha(c))\cdot\mu_{D})^{\sim}$ et $\nu'_{E}\circ\alpha(c)^{\sim}$: soit σ le 2-simplexe donnant le composé canonique $\alpha(c)\,\bar{\circ}\,\nu'_{D}=\beta(c)$, et soit $\nu'_{E}\sigma$ le 2-simplexe défini par la face d_2 d'un 3-simplexe remplissant l'entonnoir

$$\begin{tikzcd}
& MD \arrow[dr, "\nu'_{E}\circ\alpha(c)^{\sim}"] \arrow[dd, "\alpha(c)^{\sim}" near end] & \\
D \arrow[ur, "\nu'_{D}"] \arrow[rr, "\nu'_{E}\circ\beta(c)" near start] \arrow[dr, "\beta(c)"'] & & ME \\
& E \arrow[ur, "\nu'_{E}"'] &
\end{tikzcd}$$

Nous avons alors un 3-simplexe Ω qui remplit l'entonnoir suivant

$$\begin{tikzcd}
& MD \arrow[d, equal] \arrow[ddr, bend left, "(M(\alpha(c))\cdot\mu_{D})^{\sim}"] \arrow[dr, phantom, "\tau"] & \\
& MD \arrow[dr, "\nu'_{E}\circ\alpha(c)^{\sim}"] \arrow[d, phantom, "\nu'_{E}\sigma"] & \\
D \arrow[uur, "="] \arrow[ur, "\nu'_{D}"] \arrow[rr, "\nu'_{E}\circ\beta(c)"'] & & ME
\end{tikzcd}$$

Soit σ' le 2-simplexe donnant le composé canonique

$$\alpha(c')^{\sim}\circ\nu'_{E} = \alpha(c')\,\bar{\circ}\,\nu'_{E} = \beta(c')$$

et soit $\sigma'\beta(c)$ le 2-simplexe donné par la face d_1 d'un 3-simplexe remplissage de l'entonnoir

$$\begin{tikzcd}
& ME \arrow[dr, "\alpha(c')^{\sim}"] & \\
D \arrow[ur, "\nu'_{E}\circ\beta(c)"] \arrow[rr, "\beta(c')\circ\beta(c)"' near end] \arrow[dr, "\beta(c)"'] & & F \\
& E \arrow[uu, "\nu'_{E}" near start] \arrow[ur, "\beta(c')"'] &
\end{tikzcd}$$

Nous obtenons alors un 3-simplexe Ω' qui remplit l'entonnoir

$$\begin{tikzcd}
& MD \arrow[d, "(M\alpha(c)\cdot\mu_D)^\sim"] \arrow[ddr, bend left, "(\alpha(c')\cdot\mu(\alpha(c))\cdot\mu_D)^\sim = \alpha(c'*c)^\sim"] \arrow[dr, phantom, "="] & \\
& ME \arrow[dr, "\alpha(c')^\sim"] \arrow[d, phantom, "\sigma'\beta(c)"] & \\
D \arrow[uur, bend left, "\nu'_D"] \arrow[ur, "\nu'_E \circ \beta(c)"] \arrow[ur, phantom, bend left, "d_2\Omega"] \arrow[rr, "\beta(c')\circ\beta(c)"'] & & F
\end{tikzcd}$$

Le 2-simplexe σ'' donnant le composé canonique $\alpha(c'*c)\bar{\circ}\nu'_D = \beta(c'*c)$ et le 2-simplexe $d_2\Omega'$ déterminent l'entonnoir suivant:

$$\begin{tikzcd}
& F \arrow[ddr, equal, bend left] \arrow[dr, phantom, "="] & \\
& MD \arrow[u] \arrow[dr, "\alpha(c'*c)^\sim"] \arrow[d, phantom, "\sigma''"] & \\
D \arrow[uur, bend left, "\beta(c')\circ\beta(c)"] \arrow[ur, "\nu'_D"] \arrow[ur, phantom, bend left, "d_2\Omega'"] \arrow[rr, "\beta(c'*c)"'] & & F
\end{tikzcd}$$

La face d_1 d'un 3-simplexe remplissage nous donne une homotopie entre $\beta(c'*c)$ et $\beta(c')\circ\beta(c)$. Par conséquent

$$\begin{aligned}\beta^*([c']*[c]) &= [\beta(c'*c)] = [\beta(c')\circ\beta(c)]\\ &= [\beta(c')]\circ[\beta(c)] = \beta^*([c'])\circ\beta^*([c]).\end{aligned}$$

Comme $\beta_*([\bar{1}_F]) = [\beta(\bar{1}_F)] = [\tilde{1}_F]$. β^* est un isomorphisme de $HCo(A)$ sur H_fA.

3.2. Soit $Ho(Top^A)$ la catégorie localisée par l'ensemble des transformations $m: F\to G$ telles que $m_A: FA\to GA$ est une équivalence d'homotopie pour tout A. Soit I le foncteur de Top^A dans $HCo(A)$ qui à $m: F\to G$ associe $I(m) = [\bar{m}]$ et soit $I' = \beta^* I$ de Top^A dans H_fA. Comme $I'(m) = [\tilde{m}]$. nous avons d'après Vogt (ou. pour une démonstration dans le cadre simplicial du nerf cohérent. voir [5]) que $I'(m)$ est inversible dans H_fA si. pour tout A. $m_A: FA\to GA$ est une équivalence d'homotopie. β^* étant un isomorphisme. $I(m)$ est inversible dans $HCo(A)$ si. pour tout A. $m_A: FA\to GA$ est une équivalence d'homotopie. Il existe donc un unique foncteur $\bar{I}$ de $Ho(Top^A)$ dans $HCo(A)$ tel que $\bar{I}\gamma = I$. où γ est le foncteur canonique de Top^A dans $Ho(Top^A)$.

Notons tout d'abord que. si c et c' sont deux morphismes cohérents tels que $[c] = [c']$. alors $\gamma(c') = \gamma(c)$. En effet, comme

$[c] \simeq [c']$ est équivalent à $[\alpha(c)] = [\alpha(c')]$ dans $\pi_0(Top_s^A)$, il existe une transformation $h: \Delta_1 \times F \to G$ telle que pour i_0 et i_1 on ait $hi_0 = \alpha(c)$ et $hi_1 = \alpha(c')$; il est immédiat que $\gamma(i_0)$ et $\gamma(i_1)$ sont inversibles et que $\gamma(i_0) = \gamma(i_1)$.

Soit donc $J: HCo(A) \to Ho(Top^A)$ l'application définie par, pour $c: F \to G$, $J([c]) = \gamma(\alpha(c)) \cdot \gamma(\eta_F)^{-1}$. Nous avons:

PROPOSITION 3. *L'application* J *de* *HCo(A)* *dans* *Ho(Top^A)* *est fonctorielle.*

PREUVE. On a

$$J([\bar{1}_F]) = \gamma(\alpha(\bar{1}_F)) \cdot \gamma(\eta_F)^{-1} = \gamma(\eta_F) \cdot \gamma(\eta_F)^{-1} = 1_F.$$

De même pour des morphismes cohérents $c: F \to G$ et $c': G \to H$:

$$\begin{aligned} J([c'] * [c]) &= J([c' * c]) = \gamma(\alpha(c' * c))) \cdot \gamma(\eta_F)^{-1} \\ &= \gamma(\alpha(c') \cdot M\alpha(c) \cdot \mu_F) \cdot \gamma(\eta_F)^{-1} \\ &= \gamma(\alpha(c')) \cdot \gamma(\eta_G)^{-1} \cdot \gamma(\eta_G \cdot M\alpha(c) \cdot \mu_F) \cdot \gamma(\eta_F)^{-1} \\ &= \gamma(\alpha(c')) \cdot \gamma(\eta_G)^{-1} \cdot \gamma(\alpha(c) \cdot \eta_{MF} \cdot \mu_F) \cdot \gamma(\eta_F)^{-1} \\ &= \gamma(\alpha(c')) \cdot \gamma(\eta_G)^{-1} \cdot \gamma(\alpha(c) \cdot \gamma(\eta_F)^{-1} = J([c']) \cdot J([c]). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Nous en déduisons, en reprenant la comonade sous la forme $(\mathbf{B}, \eta, \mu)$ du paragraphe 1:

PROPOSITION 4. *Pour toute petite catégorie A, les catégories d'homotopie Ho(Top^A) et HCo(A) sont isomorphes. Nous avons alors, pour des foncteurs* F *et* G *de A dans Top:*

$$Ho(Top^A)(F, G) = \pi_0(\int_A \underline{Top_s}(\mathbf{B}FA, GA)) = HCo(A)(F, G).$$

PREUVE. Soit $m: F \to G$ une transformation; comme $\bar{m} = \alpha^{-1}(\eta_G . \mathbf{B}m)$ nous avons

$$JI(m) = J(\bar{m}) = \gamma(\alpha(\bar{m})) \cdot \gamma(\eta_F)^{-1} = \gamma(\eta_G \cdot \mathbf{B}m)\gamma(\eta_F)^{-1} = \gamma(m).$$

Par conséquent $J\bar{I}$ est l'identité sur $Ho(Top^A)$.
Inversement, soit $c: F \to G$ un morphisme cohérent, alors

$$\bar{I}J([c]) = \bar{I}(\gamma(\overline{\alpha(c)}) \cdot \gamma(\eta_F)^{-1}) = I(\alpha(c)) * I(\eta_F)^{-1} = [\overline{\alpha(c)}] * [\bar{\eta}_F]^{-1}.$$

Comme d'après la Proposition 1.2, $\bar{\eta}_F$ est inversible dans la catégorie $HCo(A)$ d'inverse ν_F, l'isomorphisme β^* donne dans H_fA:

$$\begin{aligned} \beta^*([\overline{\alpha(c)}] * [\bar{\eta}_F]^{-1}) &= \beta^*([\overline{\alpha(c)}] * [\nu_F]) = [\beta(\overline{\alpha(c)})] \circ [\beta(\nu_F)] \\ &= [\alpha(c)^\sim] \circ [\nu'_F] = [\alpha(c) \bar{\circ} \nu'_F] = [\beta(c)] = \beta^*([c]). \end{aligned}$$

Par conséquent $\bar{I}J([c]) = [c]$. Ainsi $\bar{I}$ est un isomorphisme d'inverse J.

BIBLIOGRAPHIE.

1. J.M. BOARDMANN & R.M. VOGT. Homotopy invariant algebraic structures on topological spaces. *Lecture Notes in Math.* 347, Springer (1973).
2. J.-M. CORDIER, Sur la notion de diagramme homotopiquement cohérent, *Cahiers Top. et Géom. Diff.* XXIII (1982), 93-112.
3. J.-M. CORDIER, Sur les limites homotopiques de diagrammes homotopiquement cohérents. *Comp. Math.* 62 (1987), 367-388.
4. J.-M. CORDIER, Extension de Kan simplicialement cohérente, Prépublication, Univ. Amiens 1985.
5. J.-M. CORDIER & T. PORTER, Vogt's Theorem on categories of homotopy coherent diagrams, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* 100 (1986), 65-90.
6. D.A. EDWARDS & H.M. HASTINGS, Čech and Steenrod homotopy theories, *Lecture Notes in Math.* 542, Springer (1976).
7. J.T. LISICA & S. MARDEŠIČ. Coherent prohomotopy and a strong shape category of topological spaces, *Lecture Notes in Math.* 1060, Springer (1984), 164-173 [et *Glasnik Mate.* IX (39), 1984, 335-399].
8. R.M. VOGT. Homotopy limits and colimits, *Math. Z.* 134 (1973), 11-52.

Universite de Picardie
U.F.R. de Mathematiques et d'Informatique
33 rue Saint-Leu
80039 AMIENS. FRANCE