

# CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES

RENÉ GUITART

LUC VAN DEN BRIL

## **Calcul des satellites et présentations des bimodules à l'aide des carrés exacts**

*Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques*, tome  
24, n° 3 (1983), p. 299-330

[http://www.numdam.org/item?id=CTGDC\\_1983\\_\\_24\\_3\\_299\\_0](http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1983__24_3_299_0)

© Andrée C. Ehresmann et les auteurs, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**CALCUL DES SATELLITES ET PRÉSENTATIONS DES BIMODULES  
À L'AIDE DES CARRÉS EXACTS**

par René GUITART et Luc VAN DEN BRIL

**SOMMAIRE.** <sup>1)</sup>

0. Introduction
1. Carrés exacts dans  $Ab$ -CAT et zig-zags de matrices (test)
2. Composition des bimodules et platitude (calcul)
3. Satellites droits ou inductifs (formalisme général)
4. Satellites ponctuels, extensions ponctuelles, cotenseurs
5. Satellites gauches ou projectifs
6. Présentations de bimodules et exemples de satellites
7. Prébifibrations (et itération de  $Sat_E$  par produits fibrés).
8. Le rôle (externe) des carrés exacts dans le calcul explicite des satellites
9. Présentations de  $EXT^n$  en longues suites exactes et satellites classiques
10. Systèmes de facteurs dans  $Ab$  (l'équivalence  $EXA \sim FAC$ )
11. Présentation de  $EXT$  dans le cas des complexes de chaînes
12.  $E\tilde{X}A$  et  $E\tilde{X}T$  (calcul des paires exactes)
13. Lax-bimodules (calcul des recollements)
14. Systèmes de facteurs dans  $C\dot{A}T$  et second rôle (interne) des carrés exacts
15. Références.

Les sections 9 à 15 seront publiées dans le Volume XXIV-4

<sup>1)</sup> Ce travail a fait l'objet de trois exposés au Séminaire de Catégories de l'Université Paris 7 en janvier 1982 et d'une conférence au 22<sup>ème</sup> P. S. S. L. à Louvain-la-Neuve le 22 Mai 1982. Cette version finale augmentée est de Février 1983.

## 0. INTRODUCTION.

0. Le but de cet article est de fournir une méthode de définition *et* une méthode de calcul des foncteurs satellites et dérivés basées sur l'usage dans  $CAT$  et  $Ab\text{-}CAT$  des carrés exacts au sens de [8], et valides aussi bien pour  $Ab$  que pour des cas non-abéliens comme  $Gr$ ,  $CAT$  ou  $\hat{C}AT$ .

1. Dans les sections 1 et 2 sont mis en place des *outils pour reconnaître l'exactitude* des carrés de foncteurs ou de foncteurs additifs. Au paragraphe 1 on montre que l'exactitude des carrés de foncteurs additifs se teste en recherchant des zig-zags de matrices, et que le foncteur «Matrice»,  $Mat: Ab\text{-}CAT \rightarrow CAT$  préserve et réfléchit l'exactitude. Joint à l'usage de  $Z: CAT \rightarrow Ab\text{-}CAT$  cela permet de prouver des résultats dans  $CAT$  par additivisation et puis calculs de produits tensoriels dans  $Ab$  (par exemple le théorème du zig-zag d'Isbell comme le fait B. Mitchell [13]).

Au paragraphe 2 on précise comment la platitude des bimodules permet dans le calcul de la composition de n'utiliser que des zig-zags de longueur au plus 2. Et en général on indique comment la composition des  $Ab$ -bimodules se fait au-dessus des bimodules sous-jacents si la catégorie intermédiaire est à sommes finies.

2. Dans les paragraphes 3 à 8 on présente une *théorie générale des satellites* relatifs à des bimodules arbitraires.

Au paragraphe 3 est introduite la distinction entre satellites et satellites ponctuels (ou «pointwise»), qui prolonge la distinction entre extensions de Kan et extensions de Kan «pointwise», et ces notions de satellites et satellites ponctuels sont définies en général. On montre comment les satellisations s'itèrent.

Au paragraphe 4 on montre que les extensions de Kan, les cotenseurs moyens (Borceux & Kelly) et limites indexées (Street) sont des exemples de satellites (ponctuels) et on montre comment calculer les satellites par extensions de Kan *et* compositions.

Au paragraphe 5 on introduit les satellites à gauche et on montre que  $\underline{\text{Sat}}_E \dashv \underline{\text{Sat}}_E$  (formule donnant par exemple

$$\text{Tor}^n(A, B) \approx \text{Hom}(\text{Ext}^n(A, -), B \otimes -).$$

Au paragraphe 6 est introduite l'idée principale de l'article, qui est que *pour effectivement calculer les satellites relatifs à un bimodule  $E$ , il faut se donner une présentation de  $E$* , et une présentation de  $E$  est justement un carré exact

$$\phi : S \begin{array}{c} T \\ \hline U \end{array} \rightarrow V \text{ tel que } S \cdot T^o \cong U^o \cdot V \approx E$$

(cf. 1.3). (Dans le cas des modules on retrouve bien la notion usuelle de présentation.) Alors on voit que diverses « théories » des satellites (Freyd, Fischer, Buchsbaum [3], Ulmer) se retrouvent en appliquant notre définition générale dans des cas spéciaux et en travaillant avec des présentations spéciales. Les résultats de calcul des paragraphes 1 et 2 sont ré-exprimés en termes de présentations, et d'autres exemples (calcul de relations, de fractions) sont indiqués.

Au paragraphe 7 on souligne l'importance d'un type particulier de présentation de bimodules appelé *prébifibration* qui offre deux avantages: il est stable par exponentiation, et il s'itère par simples produits fibrés (au lieu de commas).

Au paragraphe 8 on exprime cette idée que les calculs de satellites sont au niveau syntaxique le jeu de dominos avec les carrés exacts et que les résultats d'algèbre homologique s'expriment naturellement par l'exactitude d'un carré. Un lemme de comparaison est donné.

3. Dans les paragraphes 9 et 10 on expose *comment la théorie classique se laisse mieux comprendre* du point de vue que nous avançons et comment les divers aspects (longue suite exacte des  $EXT$ , calcul par résolutions injectives, formule de Buchsbaum) relèvent toujours du même principe et consistent en l'exactitude de carrés.

Au paragraphe 9 cela est exposé en reposant sur la présentation de  $EXT$  (puis des  $Ext^n$ ) à l'aide du span

$$\underline{C} \longleftarrow EXA(\underline{C}) \longrightarrow \underline{C}$$

où  $EXA(\underline{C})$  a pour objets les suites exactes courtes dans  $\underline{C}$ , qui est une prébifibration (cf. section 7), de sorte que (et c'est le sens de la théorie de Yoneda) les  $Ext^n$  s'obtiennent à l'aide des  $EXA^n(\underline{C})$  (obtenues, elles,

à partir de  $EXA(\underline{C})$  par produits fibrés à équivalences près).

Au paragraphe 10 on montre que  $EXT$  se calcule par systèmes de facteurs parce que  $EXA \approx FAC$ , catégorie des systèmes de facteurs (dont les morphismes sont définis ici).

Au paragraphe 11 on montre comment dans la catégorie  $c\underline{C}$  des complexes de chaînes dans  $\underline{C}$  le calcul des  $EXT$  est via la translation et la conification lié à l'homotopie, puis on montre que  $EXA(c\underline{C})$  admet une présentation au sens du paragraphe 6 par les suites exactes de milieu acyclique (de même qu'on a vu en 9.8 que  $EXA(\underline{C})$  admet une présentation par les suites exactes de milieu injectif lorsque  $C$  a assez d'injectifs). On retrouve alors le résultat de Mitchell que  $\underline{Sat}H_n = H_{n-1}$ .

Au paragraphe 12 on indique quelques variantes utiles de  $EXT$ , et en particulier  $\tilde{EXT}$ , dont  $EXT$  est la partie inversible, qui se présente par  $\tilde{EXA}$ , dont les objets sont les suites exactes

$$A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$$

et les morphismes les transformations naturelles « exactes ».

4. Dans les paragraphes 13 et 14 on propose une présentation d'un bimodule  $CAT \dashv \vdash CAT$  et d'un bimodule  $\dot{C}AT \dashv \vdash \dot{C}AT$  tels que les satellisations vis à vis de ces bimodules fournissent des cohomologies non-abéliennes d'ordre arbitraire, avec l'équivalent syntaxique de la longue suite exacte des  $EXT$ . (Mais la méthode générale des paragraphes 3 à 8 devrait s'appliquer à des exemples variés et spécialement à l'homotopie des catégories; ceci sera étudié ultérieurement.)

Au paragraphe 13 on montre comment recoller les fibres de lax-bimodules, et en particulier pour des lax-foncteurs  $X \dashv \langle W, \omega \rangle \rightarrow CAT$  cela donne un « produit croisé lax »  $KlW$ . On donne alors une généralisation au niveau lax de l'adjonction  $K \dashv d$  de [6] (voir aussi [10]).

Au paragraphe 14 on montre que non seulement les systèmes de facteurs sont, comme on sait, des lax-foncteurs, mais que les morphismes entre systèmes de facteurs (cf. Section 10) correspondent bien aux transformations lax-naturelles. D'où le candidat  $\dot{F}AC$  à jouer pour  $\dot{C}AT$  le rôle joué par  $FAC$  pour  $Ab$ . On montre aussi que  $Kl$  est un 2-foncteur  $Kl$ :

$FAC \rightarrow CAT$  (cf. Definition 14.5 de  $FAC$ ) donnant lieu à un lemme de Yoneda « lax », qui permet de représenter  $FAC$  comme sous-2-catégorie pleine de  $EXA$  (cf. 14.8.2) (ce qui généralise  $FAC \approx EXA$  du paragraphe 10). D'où le candidat  $\widetilde{EXA}$  pour  $CAT$ , que l'on raffine en un  $EXA$  grâce aux carrés fibrants que l'on définit. De même que dans la théorie classique les suites exactes ont deux rôles (fournir une définition de  $EXT$  et permettre l'expression des calculs et résultats liant les  $R_n F$ ), les carrés exacts ont deux rôles à jouer en cohomologie des catégories :

- 1° Fournir une définition de  $EXA$  (cf. section 14) ;
- 2° Permettre les calculs des  $Sat_{Exa^n} F$  (cf. Section 8).

REMARQUE SUR LE STYLE. Nous avons choisi de rédiger les énoncés dans un style très « articulé », où en fait toutes les idées non triviales des preuves soient explicitement présentes ; ceci nous a permis de ne reproduire ici aucune des démonstrations et vérifications parfois longues que nous avons faites, et de ramener notre texte à une taille raisonnable. Nous espérons que le lecteur saura pour son plaisir redéployer l'éventail.

**1. CARRÉS EXACTS DANS  $Ab$ - $CAT$  ET ZIG-ZAGS DE MATRICES (test).**

Nous désignons par  $Ab$  la catégorie des groupes abéliens et par  $Ab$ - $CAT$  la 2-catégorie des catégories pré-additives ou enrichies dans  $Ab$ , i. e. équipées d'un relèvement dans  $Ab$  de leur foncteur  $\text{Hom}$ , foncteurs additifs et transformations naturelles.

Un  $Ab$ -bimodule de  $\underline{X}$  à  $\underline{Y}$  est un foncteur additif  $M : \underline{Y}^{op} \times \underline{X} \rightarrow Ab$  et si  $N : \underline{Z}^{op} \times \underline{Y} \rightarrow Ab$  est un  $Ab$ -bimodule de  $\underline{Y}$  vers  $\underline{Z}$ , le composé  $N \otimes M$  de  $\underline{X}$  vers  $\underline{Z}$  est donné par

$$(N \otimes M)(Z, X) = \int^Y N(Z, Y) \otimes M(Y, X),$$

où le second membre est la cofin du foncteur additif  $H_{Z,X} : \underline{Y}^{op} \times \underline{Y} \rightarrow Ab$  décrit par

$$H_{Z,X}(Y_2, Y_1) = N(Z, Y_2) \otimes M(Y_1, X).$$

Pour un  $H : \underline{Y}^{op} \times \underline{Y} \rightarrow Ab$  additif quelconque, la cofin  $\int^Y H(Y, Y)$  est définie comme la limite inductive du diagramme

$$[ H(Y', Y') \xleftarrow{H(Y', y)} H(Y', Y) \xrightarrow{H(y, Y)} H(Y, Y) ]_{y: Y \rightarrow Y' \in \underline{Y}}$$

ou encore comme le conoyau de

$$\bigoplus_{y: Y \rightarrow Y' \in \underline{Y}} H(Y', Y) \rightrightarrows \bigoplus_{Y' \in \underline{Y}_0} H(Y, Y).$$

1.1. LEMME. Soit  $B \subset \underline{Y}$  une partie génératrice de  $\underline{Y}$ , i. e. telle que

i. tout objet de  $\underline{Y}$  est somme d'une famille finie d'objets de  $B$ ,

ii. si  $B_1, B_2 \in B$ , tout  $y: B_1 \rightarrow B_2 \in \underline{Y}$  est somme d'une famille finie de morphismes de  $B$  de  $B_1$  vers  $B_2$ .

Alors, pour tout  $H: \underline{Y}^{op} \times \underline{Y} \rightarrow Ab$  de la forme  $S \otimes T$  pour  $S: \underline{Y}^{op} \rightarrow Ab$  et  $T: \underline{Y} \rightarrow Ab$ ,  $\int^Y H(Y, Y)$  peut être calculée sur  $B$ , i. e. est la limite inductive du diagramme

$$[ H(Y', Y') \xleftarrow{H(Y', y)} H(Y', Y) \xrightarrow{H(y, Y)} H(Y, Y) ]_{y: Y \rightarrow Y' \in B}$$

1.2. LEMME. Soit dans  $Ab-CAT$  un span

$$\underline{X} \xleftarrow{S} \underline{A} \xrightarrow{T} \underline{Y}.$$

On peut construire un objet co-comma de  $(S, T)$  dans la 2-catégorie  $Ab-CAT$ , noté  $S \uparrow T$ , comme étant la  $Ab$ -catégorie contenant  $\underline{X} \amalg \underline{Y}$  et telle que:  $(S \uparrow T)(e_1 Y, e_0 X) = \{0\}$ ,

$$(S \uparrow T)(e_0 X, e_1 Y) = \int^A \underline{X}[X, SA] \otimes \underline{Y}[TA, Y]$$

$$\begin{array}{ccc} \underline{A} & \xrightarrow{T} & \underline{Y} \\ S \downarrow & \text{co-comma} & \downarrow e_1 \\ \underline{X} & \xrightarrow{e_0} & S \uparrow T \end{array}$$

$\lambda$  (curved arrow from  $\text{co-comma}$  to  $S \uparrow T$ )

1.3. LEMME. Soit

$$\begin{array}{ccc} \underline{A} & \xrightarrow{T} & \underline{Y} \\ S \downarrow & & \downarrow V \\ \underline{X} & \xrightarrow{U} & \underline{B} \end{array}$$

$\phi$  (curved arrow from  $\underline{X}$  to  $\underline{B}$ )

noté aussi  $\phi: S \frac{T}{U} \rightarrow V$  un 2-carré dans  $Ab-CAT$ . Alors les propriétés 1 à 3 sont équivalentes, et si elles sont satisfaites on dit (Guitart [8]) que  $\phi$  est *Ab-exact*:

(1) Soit  $\bar{\phi}: S \uparrow T \rightarrow \underline{B}$  l'unique factorisation de  $\phi$  à travers  $\lambda$  et soit  $\underline{X} \xleftarrow{F} \underline{Z} \xrightarrow{G} \underline{Y}$  un span de  $Ab\text{-}CAT$  ; alors la fonction

$$\theta \mapsto \bar{\phi} \cdot \theta : \{ \theta : e_0.F \rightarrow e_1.G \} \rightarrow \{ \mu : U.F \rightarrow V.G \}$$

est une bijection.

(2) Pour  $x \in \underline{X}_0$  et  $Y \in \underline{Y}_0$  on a

$$\int^A \underline{X}[X, SA] \otimes \underline{Y}[TA, Y] \approx \underline{B}[UX, UY].$$

(3) Avec  $S =: \underline{X}[\cdot, S-]$  et  $T^o =: \underline{Y}[T\cdot, -]$  on a  $S \otimes T^o \xrightarrow{\tilde{\phi}} U^o \otimes V$ .

Nota. Dans la bicatégorie des  $Ab$ -bimodules, on a  $T \dashv T^o$ . Voir n° 3.

1.4. REMARQUE. Si  $X' \subset \underline{X}$  et  $Y' \subset \underline{Y}$  sont tels que tout objet de  $\underline{X}$  (resp.  $\underline{Y}$ ) est une somme d'objets de  $X'$  (resp. de  $Y'$ ) alors dans le Lemme 3 (2) il suffit de tester les  $X \in X'_0$  et  $Y \in Y'_0$ .

1.5. LEMME. Soit  $\underline{X} \xleftarrow{S} \underline{A} \xrightarrow{T} \underline{Y}$  un span de  $Ab\text{-}CAT$ , où  $\underline{A}$  est à sommes finies. Alors

$$G = \int^A \underline{X}[X, SA] \otimes \underline{Y}[TA, Y]$$

est le groupe abélien suivant:

1° Son ensemble sous-jacent est

$$UG = \int^A U \underline{X}[X, SA] \times U \underline{Y}[TA, Y]$$

avec  $U: Ab \rightarrow Ens$  le foncteur d'oubli.

2° Si  $[m, A, n]$  et  $[u, B, v]$  représentent deux éléments de  $UG$  avec

$$X \xrightarrow{m} SA, \quad TA \xrightarrow{n} Y, \quad X \xrightarrow{u} SB, \quad TB \xrightarrow{v} Y,$$

alors

$$[m, A, n] + [u, B, v] = \left[ \begin{pmatrix} m \\ u \end{pmatrix}, A \oplus B, (n, v) \right]$$

avec

$$X \xrightarrow{\begin{pmatrix} m \\ u \end{pmatrix}} S(A \oplus B), \quad T(A \oplus B) \xrightarrow{(n, v)} Y.$$

Plus précisément, on peut énoncer: soit  $G'$  un groupe tel que  $UG' = UG$  et tel que les morphismes canoniques

$$\psi_A: \underline{X}[X, SA] \times \underline{Y}[TA, Y] \rightarrow UG'$$



soient bilinéaires ; alors on a  $G' \approx G$ .

Maintenant en utilisant les diverses caractérisations de [8] des carrés exacts dans  $CAT$  analogues à celles du Lemme 3 et en particulier

$$f^A \underline{X}[X, SA] \times \underline{Y}[TA, Y] \approx \underline{B}[UX, VY]$$

on obtient :

1.6. THÉORÈME. Soit dans  $Ab-CAT$  un carré  $\phi : S \xrightarrow{T} V$  où  $\underline{A}$  (source de  $S$  et  $T$ ) est à sommes finies ; alors, en désignant par  $W = U-CAT : Ab-CAT \rightarrow Ens-CAT = CAT$  le foncteur d'oubli, on a :

$\phi$  est  $Ab$ -exact ssi  $W\phi$  est exact.

Si  $\underline{A}$  est une catégorie pré-additive, on désignera par  $Mat \underline{A}$  la catégorie additive (i.e. pré-additive et à sommes finies) constituée pour ses objets par les familles finies  $(A_i)_{i \leq n}$  d'objets de  $\underline{A}$  et pour ses morphismes de  $(A_i)_{i \leq n}$  vers  $(B_j)_{j \leq m}$  par les matrices  $(f_{ij} : A_i \rightarrow B_j)_{\substack{i \leq n \\ j \leq m}}$ , et où la composition est donnée par :

$$(g_{jk}) \cdot (f_{ij}) = \sum_k g_{jk} \cdot f_{ij}.$$

Si  $M$  est un bimodule de  $\underline{X}$  à  $\underline{Y}$  on définit  $Mat M$ , bimodule de  $Mat \underline{X}$  vers  $Mat \underline{Y}$ , par

$$(Mat M)[(Y_j), (X_i)] = \bigoplus_{j,i} M(Y_j, X_i).$$

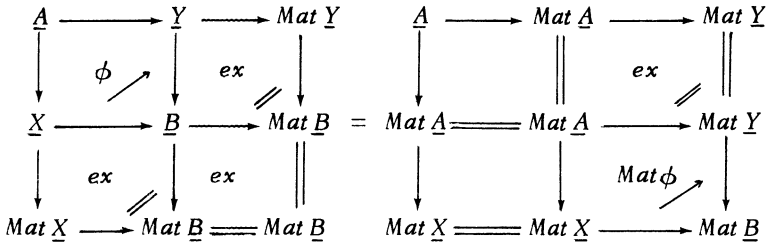
1.7. LEMME. On a  $Mat(N \otimes M) = Mat N \otimes Mat M$ .

1.8. LEMME. Le plongement  $\underline{A} \hookrightarrow Mat \underline{A}$  est pleinement fidèle et complètement fidèle dans  $Ab-CAT$  (mais non dans  $CAT$ ), de sorte que, pour tout  $F : \underline{A} \rightarrow \underline{B}$ ,

$$\begin{array}{ccc} \underline{A} & \longrightarrow & Mat \underline{A} \\ \downarrow F & & \downarrow Mat F \\ \underline{B} & \longrightarrow & Mat \underline{B} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \underline{A} & \xrightarrow{F} & \underline{B} \\ \downarrow & & \downarrow \\ Mat \underline{A} & \xrightarrow{Mat F} & Mat \underline{B} \end{array}$$

sont  $Ab$ -exact.

Avec le Lemme 7 ou le Lemme 8, on obtient, en écrivant



1.9. LEMME. Le 2-foncteur  $Mat : Ab-CAT \rightarrow Ab-CAT$  préserve et reflète l'exactitude.

En rapprochant le Théorème 6 et le Lemme 9 on obtient :

1.10. THÉORÈME. Soit  $\phi : S \xrightarrow{T} V$  un 2-carré dans  $Ab-CAT$ . Les conditions suivantes sont équivalentes.

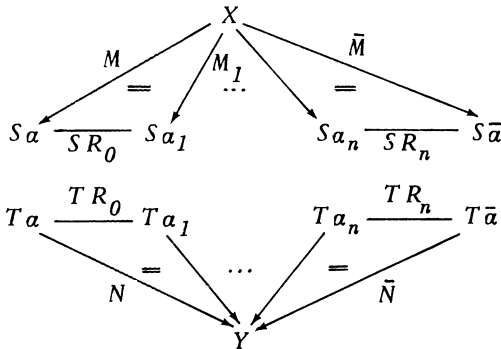
- (1)  $\phi$  est  $Ab$ -exact (dans  $Ab-CAT$ ).
- (2)  $Mat \phi$  est  $Ab$ -exact (dans  $Ab-CAT$ ).
- (3)  $WMat \phi$  est exact dans  $CAT$ .
- (4) Les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(i) Pour tout  $b : UX \rightarrow VY$  il existe un entier  $p$  et des familles

$$X \xrightarrow{m_i} SA_i, \quad TA_i \xrightarrow{n_i} Y, \quad A_i, \quad i = 1, \dots, p$$

tels que  $b = \sum_{i=1}^p Vn_i \cdot \phi_{A_i} \cdot Um_i$ .

(ii) Si  $\sum_{i=1}^p Vn_i \cdot \phi_{A_i} \cdot Um_i = \sum_{j=1}^q V\bar{n}_j \cdot \phi_{\bar{A}_j} \cdot U\bar{m}_j$ , il existe



où  $a = (A_1, \dots, A_p), \dots, \bar{a} = (\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_q)$ ,

$$M = (m_1, \dots, m_p), \dots, \bar{M} = (\bar{m}_1, \dots, \bar{m}_q),$$

$$N = (n_1, \dots, n_p), \dots, \bar{N} = (\bar{n}_1, \dots, \bar{n}_q)$$

et où  $R_0, \dots, R_n$  sont des  $\underline{A}$ -matrices ( $\underline{A}$  étant la source de  $S$  et  $T$ ).

La condition (4) qui s'obtient en explicitant pour (3) le critère du zig-zag de [8] dit que l'exactitude dans  $Ab$ - $CAT$  se vérifie en cherchant des « zig-zags de matrices ».

**2. COMPOSITION DES BIMODULES ET PLATITUDE (calcul).**

Le Lemme 5 du n° 1 est un cas particulier du résultat suivant :

2.1. LEMME. Soit  $M: \underline{A}^{op} \times \underline{Y} \rightarrow Ab$  et  $N: \underline{X}^{op} \times \underline{A} \rightarrow Ab$  deux  $(Ab)$ -bimodules  $M: \underline{Y} \dashv \vdash \underline{A}$  et  $N: \underline{A} \dashv \vdash \underline{X}$ . On suppose que  $\underline{A}$  admet des sommes finies. Alors on a: sur l'ensemble  $\int^A N(X, A) \times M(A, Y)$  (cofin ensembliste) il existe une unique structure  $G$  de groupe abélien telle que les injections

$$N(X, A) \times M(A, Y) \xrightarrow{\psi_A} \int^A N(X, A) \times M(A, Y)$$

soient bilinéaires. De plus les linéarisées

$$N(X, A) \otimes M(A, Y) \longrightarrow G$$

définissent  $G$  comme cofin dans  $Ab$ - $CAT$ .

Cette structure  $G$  est donnée par

$$[m, A, n] + [u, B, v] = \left[ \begin{pmatrix} m \\ u \end{pmatrix}, A \oplus B, (n, v) \right] \quad (*)$$

(avec  $m \in N(X, A)$ ,  $n \in M(A, Y)$ ).

Ainsi le groupe abélien  $(N \otimes M)(X, Y)$  est obtenu en munissant l'ensemble  $\int^A N(X, A) \times M(A, Y)$  de la loi (\*).

Considérons le cas particulier  $\underline{X} = \underline{Y} = 1$ , de sorte que  $M: \underline{Z} \dashv \vdash \underline{A}$  et  $N: \underline{A} \dashv \vdash \underline{Z}$  sont définis par  $M: \underline{A}^{op} \rightarrow Ab$  et  $N: \underline{A} \rightarrow Ab$ , et  $N \otimes M \in Ab$  vaut

$$N \otimes M = \int^A N(A) \times M(A).$$

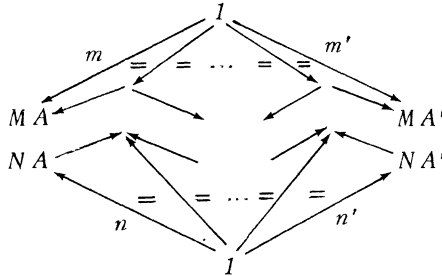
Si  $m \in M(A)$  et  $n \in N(A)$ , l'élément  $[m, A, n]$  de  $N \otimes M$  sera noté aussi  $m \otimes_A n$ .

Le calcul explicite de  $N \otimes M$  est réduit alors au problème: Etant donné

$$A \in \underline{A}_0, m \in M(A), n \in N(A) \text{ et } A' \in \underline{A}_0, m' \in M(A'), n' \in N(A')$$

quand a-t-on  $m \otimes_A n = m' \otimes_{A'} n'$  ?

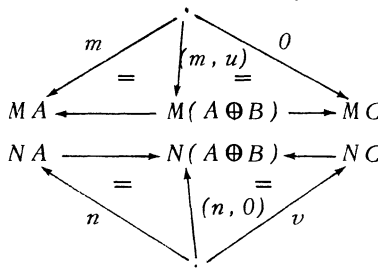
La réponse à cette question est donc, vu le calcul des cofins comme limites inductives dans  $Ens$ , que  $m \otimes_A n = m' \otimes_{A'} n'$  ssi: il existe dans  $\underline{A}$  un zig-zag  $A \nearrow \dots \nearrow A'$  se complétant en une «lanterne»



En fait on peut borner la longueur du zig-zag intervenant :

2.2. LEMME. Soit  $\underline{A}$  à sommes finies,  $M: \underline{A}^{op} \rightarrow Ab$  et  $N: \underline{A} \rightarrow Ab$ . Alors on montre par récurrence que :

1°  $m \otimes_A n = 0$  ssi il existe



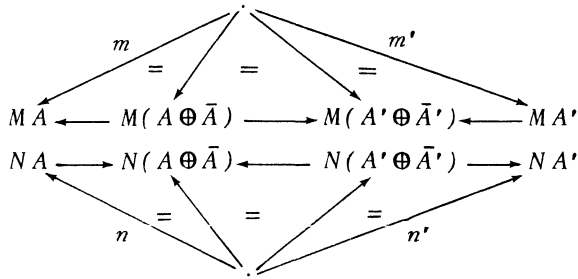
où  $A \rightarrow A \oplus B$  est l'injection.

Ensuite, en appliquant 1 à  $\begin{pmatrix} m \\ m' \end{pmatrix} \otimes_{A \oplus A'} (n, n')$  on obtient :

2°  $m \otimes_A n = m' \otimes_{A'} n'$  ssi il existe  $A' \oplus \bar{A}' \rightarrow A \oplus \bar{A}$  et, avec

$$A \rightarrow A \oplus \bar{A} \text{ et } A' \oplus \bar{A}' \rightarrow A'$$

les injections et projections, une lanterne

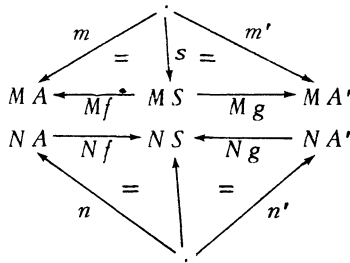


La longueur des chemins peut donc être réduite à 3.

On dira que  $M$  est plat pour  $N$  si dans le calcul de  $N \otimes M$  les chemins à utiliser sont de la forme  $\rightarrow \leftarrow$ . ( $\underline{A}$  étant supposée à sommes finies; sinon on remplace d'abord  $\underline{A}$  par  $Mat \underline{A}$  et  $M$  et  $N$  par leurs prolongements additifs

$$M: (Mat \underline{A})^{op} \rightarrow Ab \quad \text{et} \quad N: Mat \underline{A} \rightarrow Ab).$$

Donc  $M$  est plat pour  $N$  ssi  $m \otimes_A n = m' \otimes_{A'} n'$  équivaut à l'existence dans  $\underline{A}$  d'un zig-zag  $A \xrightarrow{f} S \xleftarrow{g} A'$  (de longueur 2) tel qu'il existe  $s \in M(S)$  tel que



On dira que  $M$  est plat si  $M$  est plat pour tout  $N$ .

2.3. LEMME. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1°  $M$  est plat pour  $N$ .
- 2° Pour tout sous-module  $N' \twoheadrightarrow N$  le morphisme

$$f^A M(A) \otimes N'(A) \longrightarrow f^A M(A) \otimes N(A)$$

est un monomorphisme.

Ces conditions entraînent :

3° Pour tout  $N' \twoheadrightarrow N$  et tout  $M' \twoheadrightarrow M$  on a, ou bien

$$\text{Ker}(f^A M' A \otimes N' A \rightarrow f^A M A \otimes N A) = \text{Ker}(f^A M' A \otimes N' A \rightarrow f^A M' A \otimes N A)$$

ou bien

$$\text{Ker}(f^A M' A \otimes N' A \rightarrow f^A M A \otimes N A) = \text{Ker}(f^A M' A \otimes N' A \rightarrow f^A M A \otimes N' A).$$

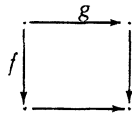
2.4. LEMME. Soit  $\underline{A}$  à sommes finies et  $M: \underline{A}^{op} \rightarrow Ab$  un foncteur additif.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1°  $M$  est plat (au sens ci-dessus), i. e. plat pour tout  $N: \underline{A} \rightarrow Ab$ .

2°  $M$  est plat pour les représentables  $\underline{A}[A, -]: \underline{A} \rightarrow Ab$ .

3° Soit  $K'M$  le produit croisé de  $\underline{A}^{op} \rightarrow Ab \rightarrow Ens$  (ayant pour objets les  $(A, m)$  avec  $A \in \underline{A}_0$  et  $m \in M(A)$ , et pour morphismes de  $(A, m)$  vers  $(B, n)$  les  $f: A \rightarrow B$  tels que  $M(f)(n) = m$ ). Alors dans  $K'M$  tout diagramme  $\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{f} & \\ \downarrow & & \downarrow \\ & \xrightarrow{g} & \end{array}$  peut être complété en un carré commutatif

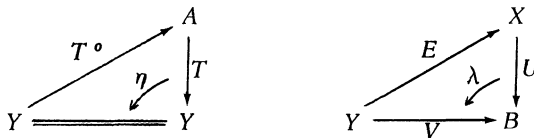


4°  $K'M$  est finielement cofiltrante (c'est-à-dire tout diagramme fini dans  $K'M$  est base d'un cône inductif).

### 3. SATELLITES DROITS OU INDUCTIFS (formalisme général).

3.1. On se place dans une bicatégorie  $\underline{B}$  fermée à gauche, i. e. où, pour tout 1-morphisme  $F$ , le foncteur  $F \circ ?$  admet un adjoint à droite  $F \setminus ?$ .

Alors, considérant un 2-carré  $\phi: S \frac{T}{U} \rightarrow V$  dans  $\underline{B}$  on peut construire les relèvements



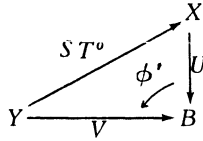
par  $T^\circ = T \setminus I$  et  $E = U \setminus V$  ; et puis on pose

$$\phi_I = U(ST^\circ) \xrightarrow{\cong} (US)T^\circ \xrightarrow{\phi T^\circ} (VT)T^\circ \xrightarrow{\cong} V(TT^\circ) \xrightarrow{V\eta} VI \xrightarrow{\cong} V$$

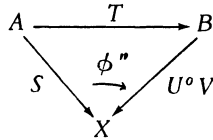
et on déduit

$$\bar{\phi} : ST^{\circ} \rightarrow U \setminus V \quad \text{tel que} \quad \lambda \cdot U\bar{\phi} = \phi_I.$$

On dira que  $\phi$  est exact si  $\bar{\phi}$  est un isomorphisme. Si en particulier  $T \dashv T^{\circ}$  et  $U \dashv U^{\circ}$ , alors l'exactitude de  $\phi$  équivaut, avec  $\phi' : U(ST^{\circ}) \rightarrow V$  transposé de  $\phi$ , à ce que

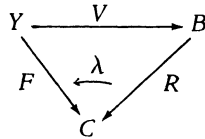


soit un relèvement, et équivaut aussi, avec  $\phi'' : S \rightarrow (U^{\circ} V)T$  transposé de  $\phi$ , à ce que

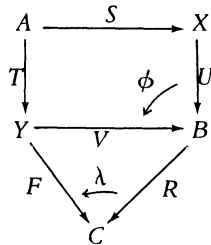


soit une extension.

3.2. LEMME. Soit dans une bicatégorie fermée à gauche un carré exact  $\phi : S \xrightarrow{T} V$  avec  $T \dashv T^{\circ}(\epsilon, \eta)$  et  $U \dashv U^{\circ}(\alpha, \beta)$ , et soit



une extension projective. Alors le diagramme composé



est une extension projective.

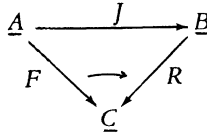
3.3. On se restreint maintenant au cas où  $\underline{B} = Ab\text{-}BIM$ , la bicatégorie des  $Ab$ -bimodules. On a  $N \circ M \equiv N \otimes M$  (voir n° 1) et :

1°  $Ab\text{-}BIM$  est fermée à gauche par

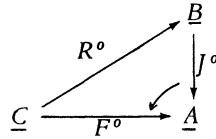
$$(F \setminus E)(Y, X) = \int_B Ab[F(B, Y), E(B, X)] ,$$

(avec  $\underline{X} \xrightarrow{E} \underline{B} \xleftarrow{F} \underline{Y}$ ).

2°

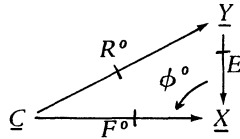


est une *Ab*-extension ponctuelle («pointwise») ssi



est un relèvement dans *Ab*-*BIM*.

3.4. DÉFINITION. Soit  $E: \underline{Y} \dashrightarrow \underline{X}$  un *Ab*-bimodule et  $F: \underline{X} \rightarrow \underline{C}$  un foncteur additif. On appellera *E-satellite droit ponctuel de F* un couple  $(R, \phi)$  où  $R: \underline{Y} \rightarrow \underline{C}$  est un foncteur additif et  $\phi: F \cdot E \rightarrow R$  tel que



soit un relèvement dans *Ab*-*BIM*, c'est-à-dire  $R^o \approx E \setminus F^o$ , id est: pour tout *Ab*-bimodule  $M: \underline{C} \dashrightarrow \underline{Y}$  la composition

$$\{ \lambda : M \rightarrow R^o \} \rightarrow \{ \mu : E \cdot M \rightarrow F^o \} : \lambda \mapsto \phi^o \cdot (E\lambda)$$

est bijective.

Parfois  $R$  est noté  $R = \mathop{Sat}_E F$ , ou encore  $\dot{R}F$ .

3.5. DÉFINITION. Soit  $E: \underline{Y} \dashrightarrow \underline{X}$  un *Ab*-bimodule et  $F: \underline{X} \rightarrow \underline{C}$  un foncteur additif. On appellera *E-satellite droit de F* un couple  $(R, \phi)$  où  $R: \underline{Y} \rightarrow \underline{C}$  est un foncteur additif et  $\phi: F \cdot E \rightarrow R$  tel que, pour tout foncteur additif  $H: \underline{Y} \rightarrow \underline{C}$  la composition

$$\{ n : R \rightarrow H \} \rightarrow \{ p : F \cdot E \rightarrow H \} : n \mapsto n \cdot \phi$$

est bijective.

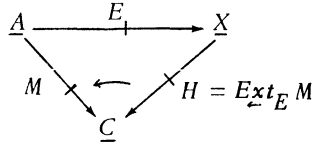
Parfois  $R$  est noté  $R = \mathop{Sat}_E F$ , ou encore  $RF$ .



3.6. LEMME. On a  $R = \dot{S}at_E F$  ssi pour tout  $C \in \underline{C}_0$  on a

$$[Hom_{\underline{C}}(\cdot, C) \cdot R] \approx \dot{S}at_E [Hom_{\underline{C}}(\cdot, C) \cdot F].$$

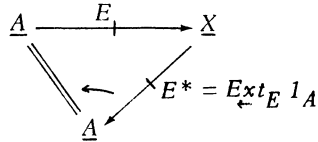
3.7. Dans  $Ab\text{-}BIM$  les extensions projectives, à des questions de taille près



existent toujours et sont données par

$$H(C, X) = Nat[E(X, \cdot), M(C, \cdot)]$$

si ce groupe est petit. En particulier on définit le dual de  $E$  par



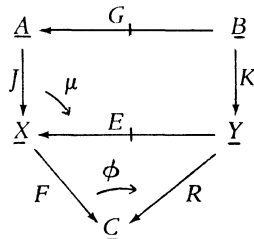
soit

$$E^*(A, X) = Nat[E(X, \cdot), Hom_A(A, \cdot)].$$

Un bimodule de la forme  $E^*$  pour un certain  $E$  sera appelé *un bimodule dual*. Par exemple si  $N$  admet un adjoint à droite  $N^o$  on a  $N \approx (N^o)^*$ .

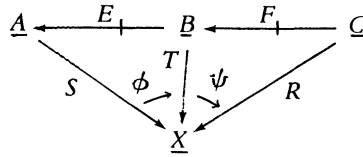
3.8. LEMME. On a  $R = \dot{S}at_E F$  ssi la propriété de satellite est vérifiée pour les foncteurs additifs  $H: \underline{Y} \rightarrow \underline{C}$  mais aussi pour les  $Ab$ -bimodules duaux  $K^*: \underline{Y} \dashrightarrow \underline{C}$ . Si la propriété est vérifiée pour tous les  $Ab$ -bimodules alors  $R$  est absolu, i. e.  $\phi$  est un isomorphisme.

3.9. THÉORÈME. Soit dans  $Ab\text{-}CAT$  le diagramme



Si  $\mu$  est un isomorphisme et si  $R = \dot{S}at_E F$ , alors  $RK = \dot{S}at_C(FJ)$ .

3.10. THÉORÈME. Soit dans  $Ab-CAT$  le diagramme



Si  $T = \underline{Sat}_E S$ , alors

$$R = \underline{Sat}_F T \text{ ssi } R = \underline{Sat}_{EF} S.$$

En particulier,  $\underline{Sat}_E^n S \approx \underline{Sat}_{E^n} S$ .

4. SATELLITES PONCTUELS, EXTENSIONS PONCTUELLES, COTENSEURS.

Le concept de satellite ponctuel introduit au n° 3 résoud la difficulté signalée par Borceux dans son article [1] à propos de la définition d'une limite enrichie relativement à un couple de V-foncteurs

$$\underline{C} \xleftarrow{F} \underline{B} \dashrightarrow^G \underline{A}$$

Borceux et Kelly (*Bull. Austr. Math. Soc.* 12, 1975) ont introduit une notion de limite enrichie englobant les limites, les tenseurs et les fins et permettant de définir les extensions ponctuelles. Ici nous obtenons :

4.1. PROPOSITION. Soit dans  $Ab-CAT$

$$\underline{C} \xleftarrow{F} \underline{B} \dashrightarrow^E \underline{A}.$$

1° Si  $\underline{A} = Z$ , alors  $E$  est un foncteur additif  $E: \underline{B}^{op} \rightarrow Ab$  et  $\underline{Sat}_E F$  est le cotenseur moyen  $E * F = \{E, F^{op}\}$ , de Borceux & Kelly.

2° Si  $E = T^\circ$  avec  $T: \underline{B} \rightarrow \underline{A}$  un foncteur additif, alors  $\underline{Sat}_E F$  est  $\underline{Ext}_T F$  (extension inductive ponctuelle le long de  $T$ ).

4.2. PROPOSITION. Soit  $\underline{C}$  telle que les cofins soient transformées en fins par les  $\underline{C}[-, C]$ .

1° Soit dans  $Ab-CAT$

$$\underline{C} \xleftarrow{F} \underline{B} \xleftarrow{E} \underline{A}$$

avec  $\underline{C}$  admettant des cotenseurs (i.e. pour tout  $C \in \underline{C}_0$  et  $G \in Ab_0$ , il

existe  $G \bullet C \in \underline{C}_0$  tel que

$$\underline{C}(G \bullet C, C') \approx Ab(G, [C, G']).$$

Alors on a

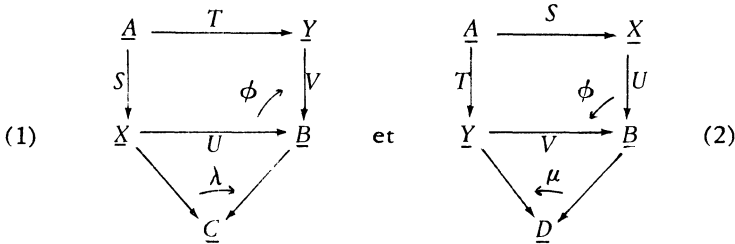
$$R = \underline{Sat}_E F \text{ ssi pour tout } A \in \underline{A}_0, RA \approx \int^B E[B, A] \bullet FB.$$

2° Si  $\underline{C}$  admet des tenseurs, i. e. si  $\underline{C}^{op}$  admet des cotenseurs (i. e.

$$\underline{C}(C', G \bullet C) \approx Ab[G, [C', C]]),$$

alors  $R = \underline{Sat}_E F$  ssi  $R = \underline{Sat}_E F$ .

4.3. PROPOSITION. Soit dans  $Ab-CAT$  les diagrammes



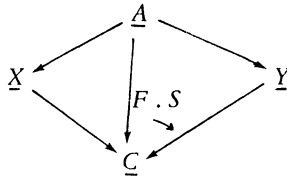
1° Si  $\phi$  est  $Ab$ -exact et  $\lambda$  extension ponctuelle, alors le composé (1) est encore une extension ponctuelle.

2° Si  $\phi$  est  $Ab$ -exact et  $\mu$  extension ponctuelle, alors le composé (2) est encore une extension ponctuelle (voir le Lemme 3.2).

4.4. PROPOSITION. 1° Si  $E = S \cdot T^0$  et

$$\underline{X} \xleftarrow{S} \underline{A} \xrightarrow{T} \underline{Y},$$

alors pour  $F: \underline{X} \rightarrow \underline{C}$  on a  $R = \underline{Sat}_E F$  ssi  $R = \underline{Ext}_T(F.S)$ .

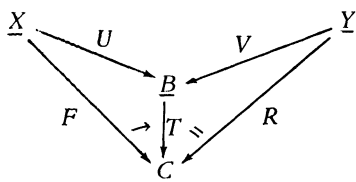


2° Si  $E = U^0 V$  et

$$\underline{X} \xrightarrow{U} \underline{B} \xleftarrow{V} \underline{Y},$$

alors pour  $F: \underline{X} \rightarrow \underline{C}$  on a

$$R = \underline{Sat}_E F \text{ ssi } R = (\underline{Ext}_U F), V.$$

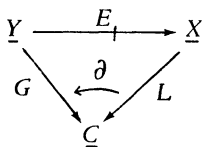


3° Si  $E = U \circ V \approx S \circ T \circ$  (carré exact), on pourra donc calculer les satellites ponctuels par les deux procédés 1 et 2.

**5. SATELLITES GAUCHES OU PROJECTIFS.**

Voici des définitions duales des définitions 3.4 et 3.5.

5.1. DÉFINITION. Soit  $E: \underline{Y} \dashrightarrow \underline{X}$  un  $Ab$ -bimodule et  $G: \underline{Y} \rightarrow \underline{C}$  un foncteur additif. On appellera  $E$ -satellite gauche ponctuel de  $G$  un couple  $(L, \partial)$  où  $L: \underline{X} \rightarrow \underline{C}$  est un foncteur additif et  $\partial: L.E \rightarrow G$ , tel que



soit une extension gauche dans  $Ab\text{-}BIM$ , c'est-à-dire: pour tout  $Ab$ -bimodule  $N: \underline{X} \dashrightarrow \underline{C}$  la composition

$$\{ \nu: N \rightarrow L \} \longrightarrow \{ \rho: N.E \rightarrow G \}: \nu \mapsto \partial(\nu E)$$

est bijective. Parfois  $L$  est noté  $L = \underline{Sat}_E G$ , ou encore  $\dot{L} G$ .

5.2. DÉFINITION. Soit  $E: \underline{Y} \dashrightarrow \underline{X}$  un  $Ab$ -bimodule et  $G: \underline{Y} \rightarrow \underline{C}$  un foncteur additif. On appellera  $E$ -satellite gauche de  $G$  un couple  $(L, \partial)$ , où  $L: \underline{Y} \rightarrow \underline{C}$  est un foncteur additif et  $\partial: L.E \rightarrow G$  tel que, pour tout foncteur additif  $T: \underline{X} \rightarrow \underline{C}$  la composition

$$\{ t: T \rightarrow L \} \longrightarrow \{ \nu: T.E \rightarrow G \}: t \mapsto \partial(tE)$$

est bijective. Parfois  $L$  est noté  $L = \underline{Sat}_E G$ , ou encore  $L G$ .

5.3. LEMME. On a  $L = \underline{Sat}_E G$  ssi pour tout  $C \in \underline{C}_o$  on a

$$[Hom_{\underline{C}}(C, \cdot).L] \approx \underline{Sat}_E [Hom_{\underline{C}}(C, \cdot).G].$$

5.4. D'après 3.7,  $\underline{Sat}_E G = L$  est un représentant du bimodule

$$\text{Nat}[E(X, \cdot), \underline{C}(C, G.)],$$

c'est-à-dire que

$$\underline{C}[C, LX] \simeq \text{Nat}[E(X, \cdot), \underline{C}[C, G.]],$$

5.5. PROPOSITION. Soit dans *Ab-CAT*

$$\underline{C} \xleftarrow{G} \underline{Y} \xrightarrow{E} \underline{X}$$

avec  $\underline{C}$  admettant des tenseurs et des fins préservées par les représentables. Alors on a

$$L = \underline{\text{Sat}}_E G \text{ ssi pour tout } X \in \underline{X}_o, LX = \int_Y E(X, Y) \bullet GY.$$

5.6. COROLLAIRE. Soit  $\underline{C} = \text{Ab}$ ,  $E: \underline{Y} \dashrightarrow \underline{X}$  et  $G: \underline{Y} \rightarrow \text{Ab}$ . Alors on a

$$(\underline{\text{Sat}}_E G)(X) = \text{Nat}[E(X, \cdot), G].$$

Les calculs des satellites droits et des satellites gauches sont « en dualité » comme suit.

5.7. THÉORÈME. Soit dans *Ab-CAT* la situation

$$\begin{array}{ccc} \underline{X} & \xleftarrow{E} & \underline{Y} \\ & \searrow F & \swarrow G \\ & \underline{C} & \end{array}$$

Si le satellite droit de  $F$  existe

$$\begin{array}{ccc} \underline{X} & \xleftarrow{E} & \underline{Y} \\ & \searrow F & \swarrow G \\ & \underline{C} & \end{array} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\phi} \\ \underline{\text{Sat}}_E F \end{array}$$

et si le satellite gauche de  $G$  existe

$$\begin{array}{ccc} \underline{X} & \xleftarrow{E} & \underline{Y} \\ & \searrow F & \swarrow G \\ & \underline{C} & \end{array} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\partial} \\ \underline{\text{Sat}}_E G \end{array}$$

alors on a les isomorphismes

$$\text{Nat}[F, \underline{\text{Sat}}_E G] \simeq \text{Nat}(F \otimes_E, G) \simeq \text{Nat}(\underline{\text{Sat}}_E F, G)$$

et on a donc une adjonction

$$(\underline{Sgt}_E : \underline{C}^{\underline{X}} \rightarrow \underline{C}^{\underline{Y}}) \dashv (\underline{Sgt}_E : \underline{C}^{\underline{Y}} \rightarrow \underline{C}^{\underline{X}}).$$

**6. PRÉSENTATIONS DE BIMODULES ET EXEMPLES DE SATELLITES.**

On introduit ici le concept de «présentation» qui étend bien aux bimodules la notion classique de présentation d'un module, et dont le rôle dans ce travail est essentiel.

6.1. DÉFINITION. Soit  $M : \underline{Y} \dashv\vdash \underline{X}$  un  $Ab$ -bimodule. Une *bi-présentation* de  $M$  est un carré exact

$$\begin{array}{ccc} \underline{A} & \xrightarrow{T} & \underline{Y} \\ \downarrow S & \searrow \phi & \downarrow V \\ \underline{X} & \xrightarrow{U} & \underline{B} \end{array}$$

tel que

$$S \cdot T^\circ \overset{\cong}{\approx} U^\circ \cdot V \approx M.$$

On dira que  $\phi$  est une *A-présentation* de  $M = U^\circ \cdot V$  et que  $\phi$  est une *B-co-présentation* de  $M = S \cdot T^\circ$ .

Les formules

$$E = Y^\circ \cdot \hat{E}, \quad E = \check{E}^\circ \cdot J, \quad E = U^\circ \cdot V$$

de la Proposition 6.2 sont des *co-présentations canoniques*, et  $E = S \cdot T^\circ$  de la Proposition 6.3 est une *présentation canonique*. L'existence de présentations ou coreprésentations plus particulières exprimera des propriétés spécifiques du bimodule considéré. Voir par exemple n° 6.4 et 6.5.

6.2. PROPOSITION. Pour tout co-span  $\underline{B} \xrightarrow{U} \underline{X} \xleftarrow{V} \underline{A}$  on a

$$(U^\circ \cdot V)(B, A) = \underline{X}(UB, VA).$$

Réciproquement, pour tout  $Ab$ -catégorie  $\underline{A}$ , soit  $\hat{\underline{A}} = [ \underline{A}^{op}, Ab ]$  la catégorie abélienne des foncteurs additifs de  $\underline{A}^{op}$  vers  $Ab$ , et soit  $\check{\underline{A}} = \widehat{\underline{A}^{op} op}$ . Le plongement de Yoneda  $J_{\underline{A}} : \underline{A} \rightarrow \check{\underline{A}}$  est additif, pleinement fidèle et co-dense, Si  $E : \underline{B}^{op} \times \underline{A} \rightarrow Ab$  est un  $Ab$ -bimodule  $E : \underline{A} \dashv\vdash \underline{B}$ , il lui est associé  $\check{E} : \underline{B} \rightarrow \check{\underline{A}}$ . De même on a le plongement  $Y_{\underline{A}} : \underline{A} \rightarrow \hat{\underline{A}}$  et,

associé à  $E$ ,  $\hat{E}: \underline{A} \rightarrow \hat{\underline{B}}$ . On a alors que tout  $Ab$ -bimodule  $E: \underline{A} \dashv \rightarrow \underline{B}$  admet trois représentations canoniques sous forme de co-spans:

(1) le joint de  $E$ , soit

$$\underline{B} \xrightarrow{U} \underline{X}_E \xleftarrow{V} \underline{A}, \text{ avec } \underline{X}_E(UB, VA) = E(B, A),$$

$U$  et  $V$  pleinement fidèles,  $E = U^\circ \cdot V$ .

(2) La représentation de Yoneda

$$\underline{B} \xrightarrow{Y_B} \hat{\underline{B}} \xleftarrow{\hat{E}} \underline{A} : E = Y^\circ \cdot \hat{E}.$$

(3) La représentation de co-Yoneda

$$\underline{B} \xrightarrow{\check{E}} \underline{A} \xleftarrow{J_A} \underline{A} : E = \check{E}^\circ \cdot J.$$

6.3. PROPOSITION. 1° Soit

$$\underline{X} \xrightarrow{U} \underline{B} \xleftarrow{V} \underline{Y}$$

dans  $Ab\text{-}CAT$ . Alors la catégorie comma  $U \downarrow V$  est une  $Ab$ -catégorie avec

$$(m_1, n_1) + (m_2, n_2) = (m_1 + m_2, n_1 + n_2),$$

et  $(U \downarrow V, d_0, d_1)$  est un  $Ab$ -objet comma, mais ce n'est pas un carré  $Ab$ -exact en général; d'après le Théorème 1.6, ce carré comma sera néanmoins exact si  $\underline{X}$  et  $\underline{Y}$  sont à sommes, car alors  $U \downarrow V$  est à sommes finies.

2° Un  $Ab$ -bimodule  $E$  n'admet pas toujours une présentation sous la forme  $E = S \cdot T^\circ$  (avec

$$\underline{X} \xleftarrow{S} \underline{A} \xrightarrow{T} \underline{Y}$$

mais en admet dès que  $\underline{X}$  et  $\underline{Y}$  sont à sommes, ceci grâce au 1° et à la Proposition 6.2.

6.4. PROPOSITION. Considérons la situation non additive, avec  $\underline{Y} = 1$ . Alors une  $\underline{A}$ -présentation de  $M = U^\circ \cdot \ulcorner B^\urcorner$  équivaut à la donnée d'un foncteur final  $\underline{A} \rightarrow U \downarrow \ulcorner B^\urcorner$ . En particulier si  $\underline{B} = 1$ , un foncteur final  $\underline{A} \rightarrow \underline{X}$  est une  $\underline{A}$ -présentation de  $\underline{X}$ .

Plus particulièrement encore, soit  $M: \underline{X}^{op} \rightarrow ENS$  et  $M: 1 \dashv \rightarrow \underline{X}$  le bimodule associé, co-représenté par

$$\underline{X} \xrightarrow{\text{Yoneda}} \hat{\underline{X}} \xleftarrow{\ulcorner M^\urcorner} 1.$$

Une  $\underline{A}$ -présentation de  $M = (Yoneda)^0 \cdot \ulcorner M \urcorner$  équivaut à la donnée d'un foncteur final  $\underline{A} \rightarrow K' M$ . Par suite  $M$  est  $\underline{A}$ -présentable ssi  $M$  est une  $\underline{A}$ -colimite de représentables.

Pour  $\underline{A} = 1$  on obtient les représentables (et pour  $\underline{A}$  discrète on obtient les localement représentables).

Pour  $\underline{A}$  variable dans la classe des ordres filtrants, on démontre (en utilisant le Lemme 2.4,4 en particulier) que l'on obtient pour  $\underline{A}$ -présentables de la forme

$$Mat \underline{X} \xrightarrow{M} Ab \rightarrow Ens$$

les  $\underline{X}$ -modules plats. Dans ce cas les 1-présentables sont les  $\underline{X}$ -modules libres de type fini.

6.5. PROPOSITION. Pour donner un exemple de co-présentation spéciale, soit  $M: \underline{Y} \dashrightarrow \underline{X}$  avec  $M = S \cdot T^0$  et soit  $J: \underline{X} \rightarrow \bar{\underline{X}}$  le plongement de  $\underline{X}$  dans sa « complétion aux idempotents »  $\bar{\underline{X}}$ . On montre alors que  $M$  dans  $ENS\text{-}BIM$  admet un adjoint à droite ssi il admet une co-présentation  $M = J^0 \cdot V$ .

Voici maintenant des exemples de satellites.

6.6. PROPOSITION. Le calcul des satellites droits ponctuels « contient » le calcul de la composition des  $Ab$ -bimodules : soit

$$\underline{A} \xrightarrow{E} \underline{B} \text{ et } \underline{B} \xrightarrow{F} \underline{C}$$

Alors  $(F \hat{\cdot} E) = \hat{Sat}_E(\hat{F})$ .

Car  $E = Y_{\underline{B}}^0 \cdot \hat{E}$  et  $F \cdot E$  est le transposé de l'extension de  $\hat{F}$  le long de  $Y_{\underline{B}}$ , suivi de  $\hat{E}: \underline{A} \rightarrow \underline{B}$ .

6.7. PROPOSITION. 1° Soit

$$\begin{array}{ccccc} \underline{A} & \xrightarrow{b} & \underline{B} & \xleftarrow{T} & \underline{C} \\ & \searrow F & & & \nearrow F \otimes_b T \\ & & \underline{X} & & \end{array}$$

Le produit tensoriel de  $F$  et  $T$  relativement à  $b$  (au sens de Freyd, Fischer, Buchsbaum, Ulmer) est  $F \otimes_b T = \hat{Sat}_{h^0.T}(F)$ .



2° Réciproquement en écrivant  $E = U^0 \cdot V$ , on a  $\underline{Sat}_E(F) = F \otimes V$ .

3° On a toujours

$$\underline{Sat}_E(F) = \underline{Ext}_Y(F) \cdot \hat{E} = F \otimes \hat{E}$$

et aussi

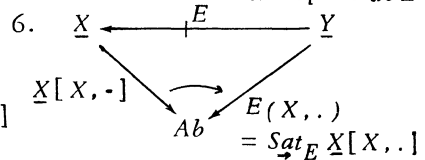
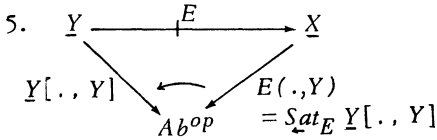
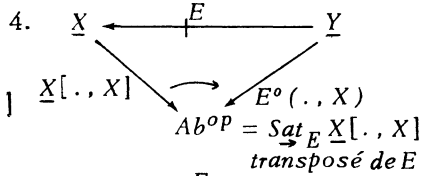
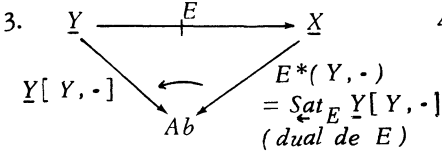
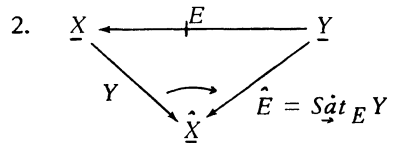
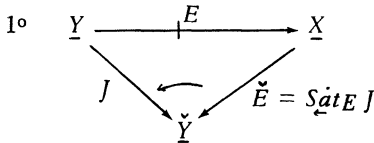
$$\underline{Sat}_E(F) = \underline{Ext}_E(F) \cdot J = F \otimes_E J$$

(où  $Y = Yoneda$  et  $J = co\text{-}Yoneda$ ).

4° On peut retrouver  $E$  connaissant  $\underline{Sat}_E$  par exemple par

$$E(X, \cdot) = \underline{Sat}_E(\text{Hom}_X(E, \cdot)).$$

6.8. PROPOSITION. Les situations suivantes sont des satellites :



Ainsi les divers avatars de  $E$  ( $\check{E}$ ,  $\hat{E}$ ,  $E^*$ ,  $E^o$ ) résultent directement de la connaissance de  $\underline{Sat}_E$  et  $\underline{Sat}_E$ .

6.9. On trouvera d'autres exemples de présentations dans le reste du texte ( $EXA$ ,  $EXA_{inj}$ ,  $\check{EXA}$ ,  $EXO$ ,  $FAC$ ,  $EXA_{cone}$ ,  $EXA_{contra}$ ,  $EXA_{Acy}$ ) pour le bimodule «classique»  $EXT$  ou ses élargissements  $\check{EXT}$  et  $\hat{EXT}$  (dans le paragraphe 12).

On verra aussi en 12.1 comment le calcul des relations se retrouve de ce point de vue.

6.10. PROPOSITION. 1° Soit  $\underline{C}$  une catégorie et  $\underline{J}$  une sous-catégorie de

$\underline{C}$  telle que  $\underline{S}_0 = \underline{C}_0$ . On note  $\underline{S} \square \underline{C}$  la catégorie ayant pour objets les  $s: X \rightarrow Y \in \underline{S}$  et pour morphismes de  $s$  à  $s': X' \rightarrow Y'$  les  $(u, v)$ ,

$$u: X' \rightarrow X, \quad v: Y \rightarrow Y' \quad \text{tels que} \quad s' = v \cdot s \cdot u.$$

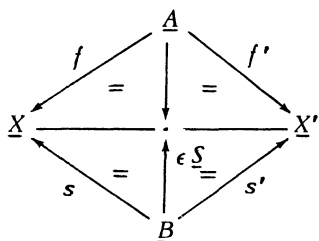
On pose  $P(u, v) = u$ ,  $Q(u, v) = v$ , d'où un bimodule  $QP^0: \underline{S}^{op} \rightarrow \underline{C}$ , dont  $\underline{S} \square \underline{C}$  est une présentation:  $QP^0(A, B)$  est l'ensemble des couples

$$\underline{A} \xrightarrow{f} \underline{X} \xleftarrow{s} \underline{B}$$

quotienté par l'équivalence engendrée par:

$$(f, s) \sim (k \cdot f, b \cdot s) \quad \text{si} \quad b: X \rightarrow Y \quad \text{est tel que} \quad b \cdot s \in \underline{S}.$$

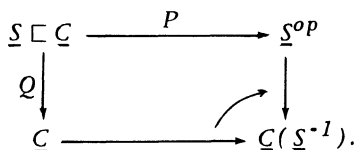
2° Si  $\underline{S}$  admet un calcul de fractions à gauche, alors les fibres  $P^{-1}(A)$  sont cofiltrantes, et dans  $QP^0(A, B)$  deux éléments sont équivalents s'ils peuvent être insérés dans un diagramme



3° Si  $\underline{S}$  admet un calcul de fractions à gauche, alors

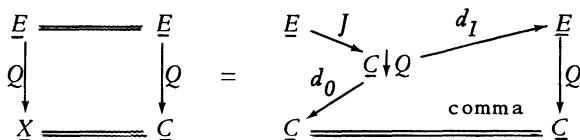
$$\underline{C}(\underline{S}^{-1})(A, B) = QP^0(A, B)$$

et on a un carré exact



**7. PRÉBIFIBRATIONS (et itération de  $Sat_E$  par produits fibrés).**

7.1. Etant donné  $Q: \underline{E} \rightarrow \underline{C}$  on note  $J$  le foncteur tel que



et on sait que  $Q$  est une *fibration* ssi on a un adjoint à droite  $L$  à  $J$ , naturalisé par  $(\epsilon, \eta)$  - ce que l'on écrit  $J \dashv L (\epsilon, \eta)$  - tel que  $d_0 \eta = id$ .

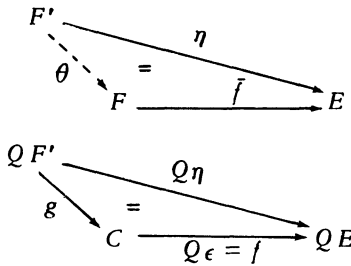
Autrement dit,  $Q$  est une fibration ssi :

- Pour tout  $f: C \rightarrow QE$  il existe un

$$\bar{f}: F \rightarrow E \text{ tel que } Q\bar{f} = f$$

et tel que, si  $g, \eta$  sont tels que  $f \cdot g = Q\eta$ , alors il existe un unique

$$\theta: F' \rightarrow F \text{ tel que } Q\theta = g \text{ et } \bar{f} \cdot \theta = \eta.$$



(Autrement dit, dans la terminologie d'Ehresmann,  $F$  est la *structure induite par  $E$  sur  $f$* . Nous noterons éventuellement  $F = f^*E$ .)

Un foncteur  $P: \underline{E} \rightarrow \underline{C}$  est une *cofibration* ssi  $P^{op}: \underline{E}^{op} \rightarrow \underline{C}^{op}$  est une fibration.

7.2. DÉFINITION. On dira que

$$\underline{X} \xleftarrow{Q} \underline{A} \xrightarrow{P} \underline{Y}$$

est une *préfibration* ssi :

1°  $Q$  est une fibration, i. e. pour tout  $f: X \rightarrow QA$  il existe un morphisme universel  $\bar{f}: f^*A \rightarrow A$ , avec de plus  $P(\bar{f}) = id$ .

2°  $P$  est une cofibration, i. e. pour tout  $g: PA \rightarrow Y$  il existe un morphisme co-universel  $\underline{g}: A \rightarrow g_*A$ , avec de plus  $Q(\underline{g}) = id$ .

7.3. PROPOSITION. Les préfibrations sont plus générales que les bifibrations : par exemple on voit que les préfibrations se composent par produits fibrés (composition des spans). En fait une préfibration

$$\underline{X} \xleftarrow{Q} \underline{A} \xrightarrow{P} \underline{Y}$$

équivalent à un lax-bifoncteur  $\pi: \underline{X}^{op} \times \underline{Y} \rightarrow CAT$  tel que  $\pi(X, \cdot)$  et  $\pi(\cdot, Y)$  soient des pseudofoncteurs (où donc les 2-morphismes de cohérence sont des isomorphismes), donné par

$$\pi(X, Y)_o = \{ A \in \underline{A}_o : QA = X \text{ et } PA = Y \},$$

$$\pi(X, Y)(A, B) = \{ a: A \rightarrow B \in \underline{A} : Qa = id_X \text{ et } Pa = id_Y \}.$$

Si

$$\underline{X} \xleftarrow{S} \underline{A} \xrightarrow{T} \underline{Y}$$

est une préfibration, tout  $t: A \rightarrow B \in \underline{A}$  se décompose en

$$t = A \xrightarrow{n} A_1 \xrightarrow{t_1} B_1 \xrightarrow{m} B$$

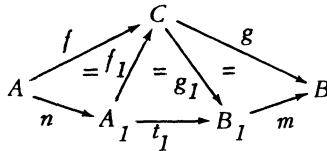
avec  $n$   $T$ -cocartésien et  $Sn = id$ ,  $m$   $S$ -cartésien et

$$Tm = id, \quad St_1 = id, \quad Tt_1 = id.$$

Par suite si

$$t: A \rightarrow B = A \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} B \quad \text{avec } Sf = id, \quad Tg = id,$$

il existe un unique  $f_1$  tel que  $Tf_1 = id$  et  $f_1 n = f$ , et un unique  $g_1$  tel que  $St_1 = id$  et  $mg_1 = g$ .



De plus  $t_1 = g_1 f_1$ ,  $Tg_1 = id$  et  $Sf_1 = id$ . Il en résulte que :

7.4. PROPOSITION. 1° Le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} S^{-1} \underline{X} \cap T^{-1} \underline{Y} & \xrightarrow{\quad} & T^{-1} \underline{Y} \\ \downarrow & \text{cartésien} & \downarrow \\ S^{-1} \underline{X} & \xrightarrow{\quad} & \underline{A} \end{array}$$

est exact si

$$\underline{X} \xleftarrow{S} \underline{A} \xrightarrow{T} \underline{Y}$$

est une préfibration.

2° Lorsque

$$\underline{X} \xleftarrow{S} \underline{A} \xrightarrow{T} \underline{Y}$$

est une préfibration, le bimodule  $S.T^0$  se calcule « sur les fibres », i. e.

$$S.T^0(X, Y) = \{ A \in \underline{A}_0 : SA = X \text{ et } TA = Y \} / \sim$$

avec  $\sim$  engendrée par

$$A \sim B \text{ ssi il existe } f: A \rightarrow B \in \underline{A} \text{ tel que } Sf = id_X \text{ et } Tf = id_Y .$$

Autrement dit :

$$S.T^0(X, Y) = \pi_0(S^{-1}X \cap S^{-1}Y).$$

3° Par suite les préfibrations s'itèrent (comme bimodules) par produits fibrés.

7.5. PROPOSITION. Si  $\underline{I}$  est une catégorie et

$$\underline{X} \xleftarrow{Q} \underline{A} \xrightarrow{P} \underline{Y}$$

une préfibration, alors

$$\underline{X}^{\underline{I}} \xleftarrow{Q^{\underline{I}}} \underline{A}^{\underline{I}} \xrightarrow{P^{\underline{I}}} \underline{Y}^{\underline{I}}$$

est une préfibration (les préfibrations s'exponentient).

7.6. PROPOSITION. Soit

$$\underline{X} \xleftarrow{S} \underline{A} \xrightarrow{T} \underline{Y}$$

une préfibration entre  $Ab$ -catégories, où  $\underline{A}$  est additive. La structure du groupe abélien  $G = S.T^0(X, Y)$  décrite au Lemme 1.5 se précise ainsi: compte tenu de 1.5 et de 7.4 2°, l'ensemble  $UG$  sous-jacent à  $G$  est  $\pi_0(S^{-1}X \cap S^{-1}Y)$ ; et l'addition s'effectue comme suit: soit

$$A, B \in \underline{A}_0 \text{ avec } SA = SB = X, TA = TB = Y.$$

On construit  $i: C \rightarrow A \oplus B$  universel tel que

$$Si = \Delta: X \rightarrow S(A \oplus B) \text{ et } Ti = id,$$

et on construit  $p: A \oplus B \rightarrow D$  universel tel que

$$Sp = id \text{ et } Tp = \nabla: T(A \oplus B) \rightarrow Y.$$

Alors (voir avant la Proposition 7.4) on décompose

$$p \cdot i: C \rightarrow D = C \xrightarrow{n} V \xrightarrow{t} W \xrightarrow{m} D$$

avec  $n$   $T$ -cocartésien,  $m$   $S$ -cartésien,

$$S_n = id, \quad T_m = id, \quad S_t = id, \quad T_t = id,$$

et  $V$  (ou  $W$ ) représente  $A+B$ .

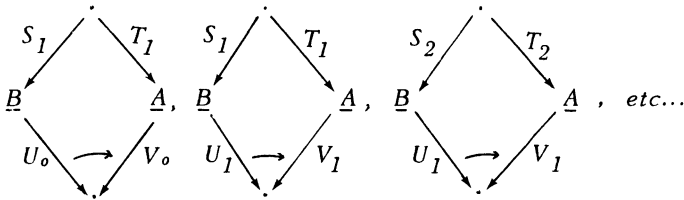
**8. LE RÔLE (EXTERNE) DES CARRÉS EXACTS DANS LE CALCUL EXPLICITE DES SATELLITES.**

8.1. Les carrés exacts sont aux bimodules ce que les esquisses sont aux types.

En général le calcul explicite des satellites s'effectuera en utilisant des *présentations* judicieuses de  $E$  (voir 6.1 à 6.5) puis la Proposition 4.4. Certaines présentations comme les *préfibres* rendent possible un calcul « léger » (voir n° 7) par produits fibrés à la place des carrés commas.

8.2. Par un « flip-flap » de carrés exacts successifs on peut modifier une présentation en une autre :

$$E = Y^{\circ} \hat{E} = U_0^{\circ} \cdot V_0 \approx S_1 \cdot T_1^{\circ} \approx U_1^{\circ} \cdot V_1 \approx S_2 \cdot T_2^{\circ}, \quad etc$$



Les Propositions 4.4 et 4.3 nous disent que les satellites sont inchangés.

8.3. Soit  $E: \underline{A} \dashrightarrow \underline{B}$  un bimodule,  $E = U^{\circ} \cdot V$ . Trouver

$$G: \underline{C} \dashrightarrow \underline{B} \quad \text{et} \quad F: \underline{A} \dashrightarrow \underline{C} \quad \text{avec} \quad G \cdot F = E$$

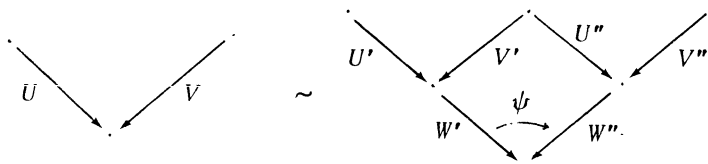
revient à présenter le cospan

$$\underline{B} \xrightarrow{U} \underline{X} \xleftarrow{V} \underline{A}$$

comme composé, dans  $Ab$ -BIM, de

$$F = \underline{A} \xrightarrow{U'} \underline{Z'} \xleftarrow{V'} \underline{C} \quad \text{et} \quad G = \underline{C} \xrightarrow{U''} \underline{Z''} \xleftarrow{V''} \underline{B}.$$

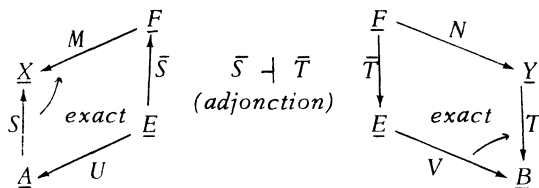
Or la composition dans  $Ab\text{-}BIM$  se fait en intercalant des carrés exacts, et ici il s'agit finalement de trouver  $U', V', U'', V''$  et un carré exact  $\psi: V' \xrightarrow{U''} W''$  de sorte que



Ici  $\psi$  est donc une *présentation de la composition de G et F*. Et de même si l'on considère des présentations de G et F par spans.

8.4. En composant des bimodules, c'est-à-dire, plus précisément, en « *jouant aux dominos* » avec les carrés exacts, on obtient des règles de calcul « classiques ». Voici un exemple utile.

LEMME (de comparaison des satellites). Soit les conditions



Alors pour  $F: \underline{A} \rightarrow \underline{C}$  on a

$$\underline{Sat}_{M,N^0} (Ext_S F) \simeq \underline{Sat}_{U,V^0} (F). T.$$

Et en particulier si  $F = \underline{A}[A, .]$  on obtient l'« extension d'adjonctions » :

$$M.N^0[SA, Y] \simeq U.V^0[A, TY].$$

8.5. De ce point de vue il n'y a plus de différence qualitative entre les satellites et les dérivés, les seconds étant seulement des présentations plus efficaces des premiers.

Dans cet esprit un « résultat » comme la longue suite exacte des  $Ext$  exprime seulement qu'un certain carré est exact (voir n° 9).

En général, les résultats d'Algèbre homologique s'exprimeront par l'exactitude d'un carré; et cette exactitude se teste par recherche de zig-zags de matrices (n° 1 et n° 2).

8.6. On a vu (6.6) que le calcul des satellites permet de retrouver la composition des bimodules, i. e. de décrire  $Ab\text{-}BIM$ . La philosophie des bimodules est de « plonger dans  $Ab\text{-}BIM$  » (sic) les problèmes initialement formulés dans  $Ab\text{-}CAT$  (ou même seulement dans  $CAT$ ). Mais une fois les problèmes « résolus » dans  $Ab\text{-}BIM$  il s'agit de revenir à  $Ab\text{-}CAT$ . Par exemple si  $M: \underline{Y} \dashrightarrow \underline{X}$  est un bimodule, on cherchera s'il est représentable ou à défaut s'il admet un *représentant libre*, i. e. s'il existe un  $Ab$ -foncteur  $L_M: \underline{Y} \rightarrow \underline{X}$  libre sur  $M$  (vis à vis du foncteur

$$B_{\underline{Y}, \underline{X}}: Ab\text{-}CAT(Y, X) \rightarrow Ab\text{-}BIM(Y, X).$$

Le calcul des satellites permet de trouver  $L_M$  par  $L_M = \underline{Sat}_M^1 X$ . Le calcul effectif dans  $Ab\text{-}BIM$  et le contrôle de retour dans  $Ab\text{-}CAT$  indiqués par le formalisme des satellites se réalise d'emblée par la combinatoire des carrés exacts présentant les bimodules et par le calcul des limites.

Si  $\phi: //S// \rightarrow //T//$  est un morphisme entre esquisses mixtes, le foncteur  $ENS\phi: ENS//T// \rightarrow ENS//S//$  admet toujours un « pro » adjoint, c'est-à-dire que pour tout  $A \in ENS//S//$  il existe un diagramme  $(L_I^{(A)})_{I \in I}$  induisant pour tout  $B \in ENS//T//$  un isomorphisme

$$ENS//S// (A, B, \phi) \simeq \lim_{\substack{\rightarrow \\ I \in I}} ENS//T// (L_I^{(A)}, B)$$

(Ceci est montré dans: Guitart & Lair, Existence de diagrammes localement libres I, II, *Diagrammes* 6 et 7 (1982), voir aussi *Diagrammes* 4, 1980).

Donc dans le cas où  $L_M$  n'existe pas, on peut chercher à présenter  $B_{\underline{Y}, \underline{X}}$  sous la forme  $ENS\phi$  pour ensuite avoir un calcul de *pro-satellites*. Ce formalisme sera utile pour satelliser des foncteurs à valeurs dans des catégories incomplètes (e. g. groupes finis, corps, etc...).



REFERENCES.

1. F. BORCEUX, Limites enrichies et existence de V-foncteur adjoint, *Cahiers Top. et Géom. Diff.* XVI-4 (1975), 395.
2. D. BOURN, Natural anadeses and catadeses, *Cahiers Top. et Géom. Diff.* XIV-4 (1973), 371.
3. D. BUCHSBAUM, Homological and commutative Algebra, in *Categories and commutative algebra*, C. I. M. E. III Ciclo 1971, Cremonese Roma (1973), 13-39.
4. A. & C. EHRESMANN, Multiple functors, I-IV, *Cahiers Top. et Géom. Diff.*: XV-3 (1974), 215; XIX-3 (1978), 295; XIX-4, 387; XX-1 (1979), 59.
5. J. W. GRAY, Formal category theory, *Lecture Notes in Math.* 391, Springer 1974.
6. R. GUITART, Remarques sur les machines et les structures, *Cahiers Top. et Géom. Diff.* XV-2 (1974), 113.
7. R. GUITART, *Des machines aux bimodules*, 1978, in: Thèse (chap. 30, 461-484), Université de Picardie, Amiens, Juin 1979.
8. R. GUITART, Relations et carrés exacts, *Ann. Sc. Math. Qué.* IV-2 (1980), 103.
9. R. GUITART & C. LAIR, Critères de rigidifications..., *Diagrammes* 6, Paris (1981), 17 p.
10. R. GUITART & L. VAN DEN BRIL, Décompositions et lax-complétions, *Cahiers Top. et Géom. Diff.* XVIII-4 (1977), 333-407.
11. G. M. KELLY, Various papers in: *Lecture Notes in Math.* 420, Springer (1974).
12. S. MACLANE, *Homology*, Springer, 1963.
13. B. MITCHELL, Cours donné à l'Université Paris 7 en 1971-72.
14. R. H. STREET, Various papers in: *Lecture Notes in Math.* 420, Springer (1974).
15. L. VAN DEN BRIL, Exposé 23, *Séminaire de catégories de Paris* 7 (1979).

R. GUITART: U. E. R. de Mathématiques  
 Tour 45-55, 5<sup>e</sup> étage  
 Université Paris 7  
 2 Place Jussieu  
 75005 PARIS

et

L. VANDENBRIL: Hogere Zeevaartschool  
 Skykensteenweg  
 OSTENDE. BELGIQUE