

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES

LUIS ESPAÑOL

Le spectre d'un anneau dans l'algèbre constructive et applications à la dimension

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome
24, n° 2 (1983), p. 133-144

http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1983__24_2_133_0

© Andrée C. Ehresmann et les auteurs, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LE SPECTRE D'UN ANNEAU DANS L'ALGÈBRE CONSTRUCTIVE ET APPLICATIONS À LA DIMENSION

par Luis ESPAÑOL

INTRODUCTION.

A. Joyal a défini [7] le spectre premier constructif d'un anneau (commutatif et unitaire) A comme un treillis distributif (avec 0 et 1) $D(A)$ muni d'une notion de zéros $A \rightarrow D(A)$ universelle. Le spectre booléen est le treillis booléen $B(A)$ librement engendré par $D(A)$ [2]. Dans le domaine classique, une notion de zéros pour A dans le treillis distributif à deux éléments est la fonction caractéristique d'un idéal premier; $D(A)$ est [6] le treillis dual des ouverts quasi-compacts de $\text{Spec}(A)$ et $B(A)$ est le même treillis pour la topologie constructible [1].

Le but de ce travail est de présenter des démonstrations constructives de quelques théorèmes classiques. Tout d'abord la caractérisation des anneaux A tels que $D(A) = B(A)$; puis l'égalité parmi les spectres booléens de A et de $R(A)$, où $R(A)$ est l'anneau régulier (Von Neumann ou absolument plat [8]) librement engendré par A .

De plus, nous définissons la dimension (Krull) constructive de A , comme étant celle de $D(A)$ [4], et nous proposons une démonstration constructive de la formule $\dim K[X] = 1$ pour la dimension de l'anneau des polynômes sur un corps («géométrique» dans [5]).

Je voudrais remercier A. Joyal qui m'a fourni les idées de base de ce travail lors du 2^e Colloque sur l'Algèbre des Catégories, Amiens 1975 et m'a aidé à les développer. Cet article est le résumé d'une partie de ma thèse [3] soutenue à la Universidad de Zaragoza (Espagne) en Juin 1978. Je dois aussi remercier M. Viviente, mon directeur de recherche, qui a présenté la thèse et pour l'encouragement qu'il m'a accordé.

1. NOTIONS DE ZÉROS ET SPECTRES.

(1.1) DEFINITION. Une *notion de zéros* d'un anneau A dans un treillis distributif D est une application $z : A \rightarrow D$ satisfaisant les conditions :

- (i) $z(1) = 0, \quad z(0) = 1,$
- (ii) $z(xy) = z(x) \vee z(y),$
- (iii) $z(x+y) \geq z(x) \wedge z(y).$

(1.2) PROPRIÉTÉS. On vérifie aisément les propriétés suivantes :

- (1) x unité $\Rightarrow z(x) = 0.$
- (2) x nilpotent $\Rightarrow z(x) = 1.$

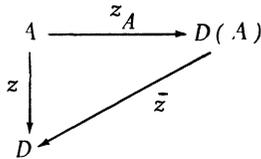
Notant $N(a)$ le radical de $a \in A,$

- (3) $x \in N(a) \Rightarrow z(x) \geq z(a).$
- (4) $z(a) = 1 \Leftrightarrow \forall x \in N(a), \quad z(x) = 1.$
- (5) $xy = 0 \Rightarrow z(x+y) = z(x) \wedge z(y).$
- (6) $x^2 = x, \quad y^2 = y \Rightarrow z(x+y-xy) = z(x) \wedge z(y).$
- (7) x régulier $\Rightarrow z(x)$ a un complément (noté $\neg z(x)$).

De fait, il existe [8] un et un seul $x' \in A$ tel que $xx'^2 = x', \quad x^2x' = x$ et $e = xx'$ est un idempotent, d'où

$$z(x) = z(x') = z(e), \quad \neg z(x) = z(1 - e).$$

(1.3) DÉFINITION. Le *spectre premier* d'un anneau A est un treillis distributif $D(A)$ muni d'une notion de zéros $z_A : A \rightarrow D(A)$ telle que, pour toute notion de zéros $z : A \rightarrow D$ il existe un et un seul homomorphisme de treillis $\bar{z} : D(A) \rightarrow D$ qui rende commutatif le diagramme



Le *spectre booléen* de A est le treillis booléen $B(A)$ librement engendré par $D(A)$. On a une notion de zéros évidente de A dans $B(A)$

$$A \longrightarrow D(A) \longrightarrow B(A)$$

qui est universelle parmi les notions de zéros de A dans les treillis booléens.

Dans le domaine classique cette définition nous donne une bijection monotone entre les idéaux premiers de A et les filtres premiers de $D(A)$. Les filtres premiers de $B(A)$ sont ceux de $D(A)$ mais avec l'ordre trivial.

(1.4) THÉORÈME. *Quel que soit l'anneau A , le spectre premier de A existe.*

DÉMONSTRATION. Soit Q l'ensemble des suites finies (x_1, \dots, x_m) d'éléments de A . On vérifie aisément que Q est préordonné par la relation :

$$(x_1, \dots, x_m) \leq (y_1, \dots, y_n) \text{ s'il existe des éléments } a_{ji} \in A \text{ et des entiers } r_j \geq 1, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n \text{ tels que } y_j^{r_j} = \sum_{i=1}^m a_{ji} x_i.$$

Pour prouver la transitivité on doit utiliser le fait que dans un anneau toute expression $(b_1 y_1 + \dots + b_n y_n)^{r_1 + \dots + r_n}$ peut se mettre sous la forme

$$d_1 y_1^{r_1} + \dots + d_n y_n^{r_n}.$$

Soit $D(A)$ l'ensemble ordonné associé à Q . Un élément de $D(A)$ est une classe d'équivalence $[x_1, \dots, x_m]$. On voit immédiatement que $D(A)$ est un treillis distributif pour les opérations

$$[x_1, \dots, x_m] \wedge [y_1, \dots, y_n] = [x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n],$$

$$[x_1, \dots, x_m] \vee [y_1, \dots, y_n] = [x_1 y_1, \dots, x_1 y_n, x_2 y_1, \dots, x_m y_n].$$

On peut alors définir une notion de zéros :

$$z_A : A \longrightarrow D(A), \quad z_A(x) = [x].$$

Etant donné une autre notion de zéros $z : A \rightarrow D$ nous définissons par

$$\bar{z}[x_1, \dots, x_m] = z(x_1) \wedge \dots \wedge z(x_m)$$

l'unique homomorphisme $\bar{z} : D(A) \rightarrow D$ tel que $\bar{z} z_A = z$. Donc z_A est universel et $D(A)$ est le spectre premier de A . //

Soit $f : A \rightarrow A'$ un homomorphisme d'anneaux. Le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{z_A} & D(A) \\
 f \downarrow & & \downarrow D(f): [x] \mapsto [f(x)] \\
 A' & \xrightarrow{z_{A'}} & D(A')
 \end{array}$$

définit un homomorphisme de treillis, donc on obtient le foncteur spectre premier $D: Ann \rightarrow Dist$ des anneaux dans les treillis distributifs. Par composition avec le foncteur *inclusion*: $Dist \rightarrow Boo$ dans les treillis booléens on en déduit le foncteur spectre booléen $B: Ann \rightarrow Boo$.

(1.5) PROPOSITION. Soit $f: A \rightarrow A'$ un homomorphisme d'anneaux. Alors $D(f)$ est un isomorphisme de treillis ssi, quelle que soit la notion de zéros $z: A \rightarrow D$ il existe une et une seule notion de zéros $z': A' \rightarrow D$ qui rende commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{f} & A' \\
 z \downarrow & & \swarrow z' \\
 & & D
 \end{array}$$

DÉMONSTRATION. Soit g l'isomorphisme inverse de $D(f)$. Il est clair que $z' = \bar{z} g z_A$, est la notion de zéros cherchée.

Réciproquement, on prend $z = z_A$, donc il en résulte une notion de zéros z' telle que $z' f = z_A$. Alors $g = z'$ est l'isomorphisme inverse de $D(f)$ car

$$g D(f) z_A = z' f = z_A, \quad D(f) g z_{A'} = D(f) z' = z_{A'}$$

donc

$$g D(f) = id \quad \text{et} \quad D(f) g = id,$$

puisque z_A et $z_{A'}$ sont universels. //

(1.6) THÉORÈME. Si N est le nilradical de l'anneau A , alors

$$D(A/N) = D(A).$$

DÉMONSTRATION. Soit $p: A \rightarrow A/N$ l'homomorphisme canonique. Montrons que $D(p)$ est un isomorphisme de treillis en utilisant (1.5). Pour toute notion de zéros $z: A \rightarrow D$ on a

$$x \cdot y \in N \implies z(x) = z(y).$$

En effet, $x - y \in N$ entraîne $z(x - y) = 1$, ainsi que

$$z(x) = z(y + x - y) \geq z(y) \wedge z(x - y) = z(y).$$

De même

$$z(y) \geq z(x), \text{ car } y - x \in N.$$

Ceci montre que l'égalité $z'(x + N) = z(x)$ définit une application $z' : A/N \rightarrow D$. Enfin on voit aisément que z' est l'unique notion de zéros telle que $z'p = z$. //

(1.7) EXEMPLES. (1) $D(Z)$ est le treillis des parties finies de $X = P \cup \{P\}$ (où P est l'ensemble des entiers premiers) et $B(Z)$ est le treillis des parties finies et cofinies de X .

(2) $D(Z/4Z) = B(Z/4Z)$ est le treillis booléen à deux éléments.

(3) Soit R un anneau régulier. Alors

$$D(R) = B(R) = \{e \in R \mid e^2 = e\}$$

qui est un treillis booléen pour les opérations

$$e_1 \wedge e_2 = e_1 e_2, \quad e_1 \vee e_2 = e_1 + e_2 - e_1 e_2, \quad \neg e = 1 - e.$$

La notion de zéros universelle est (cf. (7) dans (1.2))

$$z_R(x) = 1 - xx'.$$

On appelle corps un anneau non nul tel que [5]

$$(x = 0) \vee (x \text{ unité}).$$

Il est clair que tout corps est un anneau régulier.

(4) Si K est un corps, alors $D(K) = B(K)$ est le treillis booléen à deux éléments.

Remarquons que l'anneau $Z/4Z$ dans l'Exemple (2) n'est pas régulier. Par contre, $Z/6Z$ est régulier et l'on a

(5) $D(Z/6Z) = B(Z/6Z)$ est le treillis booléen à 4 éléments.

(1.8) THÉORÈME. On a $D(A) = B(A)$ ssi A/N est régulier.

DÉMONSTRATION. Si A/N est régulier, alors (cf. (1.6) et (3) dans (1.7)) $D(A) = D(A/N)$ est un treillis booléen.

Réciproquement, pour tout $a \in A$ il existe $\neg[a] = [x_1, \dots, x_m]$, et

l'on a (cf. (1.4))

$$[a, x_1, \dots, x_m] = 0 = [1] \text{ et } [ax_1, \dots, ax_m] = 1 = [0].$$

Cela veut dire qu'on peut écrire des égalités de la forme

$$1 = ba + \sum_{i=1}^m t_i x_i \text{ et } (ax_i)^{r_i} = 0 \quad (1 \leq i \leq m)$$

Notons $r = r_1 + \dots + r_m$. Alors

$$(a^2 b - a)^r = a^r (-\sum_{i=1}^m t_i x_i)^r = (-1)^r \sum_{i=1}^m a^{r-r_i} s_i (ax_i)^{r_i} = 0,$$

donc A/N est régulier. //

2. RÉGULARISATION ET SPECTRE BOOLÉEN.

Soit A un anneau, $a \in A$. On a les épimorphismes canoniques d'anneaux [1]

$$p: A \rightarrow A/(a): x \mapsto x + (a), \quad l: A \rightarrow A_a: x \mapsto \frac{x}{1}$$

qui sont universels pour les propriétés $p(a) = 0$, $l(a) = 1$ resp.

De même, étant donné un treillis distributif D et $d \in D$, on a les treillis distributifs associés [2]

$$D_{\leq d} = \{x \in D \mid x \leq d\}, \quad D_{\geq d} = \{x \in D \mid x \geq d\}$$

et leurs épimorphismes de treillis

$$p: D \rightarrow D_{\leq d}: x \mapsto x \wedge d, \quad l: D \rightarrow D_{\geq d}: x \mapsto x \vee d$$

qui sont universels pour les propriétés $p(d) = 1$, $l(d) = 0$ resp.

(2.1) PROPOSITION. Soit $a \in A$. Pour toute notion de zéros $z: A \rightarrow D$ il existe une unique notion de zéros z' telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{p} & A/(a) \\ \downarrow z & & \downarrow z' \\ D & \xrightarrow{p} & D_{\leq z(a)} \end{array} \quad (\text{resp.}) \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{l} & A_a \\ \downarrow z & & \downarrow z' \\ D & \xrightarrow{l} & D_{\geq z(a)} \end{array}$$

soit commutatif.

DÉMONSTRATION. (i) Cas $A/(a)$. On pose

$$z'(x + (a)) = z(x) \wedge z(a).$$

Remarquons que

$$x \cdot y \in (a) \implies z(x) \wedge z(a) = z(y) \wedge z(a).$$

En effet, on a (cf. (1.2)) $z(a) \leq z(x \cdot y)$, donc

$$z(x) \wedge z(a) \leq z(x) \wedge z(x \cdot y) \leq z(y),$$

ainsi que

$$z(x) \wedge z(a) \leq z(y) \wedge z(a).$$

De même

$$z(a) \leq z(y \cdot x), \text{ donc } z(y) \wedge z(a) \leq z(x) \wedge z(a).$$

Ceci montre que l'application

$$z' : A/(a) \rightarrow D_{\leq z(a)}$$

est bien définie comme ci-dessus. Il est clair que z' est la notion de zéros cherchée.

(ii) Cas A_a . On pose, pour $m \geq 0$,

$$z'(x/a^m) = z(x) \vee z(a)$$

et l'on a

$$x/a^m = y/a^n \implies z(x) \vee z(a) = z(y) \vee z(a),$$

puisque l'égalité $a^h (a^n x - a^m y) = 0$ implique

$$z(x) \vee z(a) = z(x a^{h+n}) = z(y a^{h+m}) = z(y) \vee z(a).$$

Ceci montre que l'application $z' : A_a \rightarrow D_{\geq z(a)}$ est bien définie comme ci-dessus. Il est clair que z' est la notion de zéros cherchée. //

Notons que les carrés commutatifs dans (2.1) sont «cocartésiens» dans un sens évident.

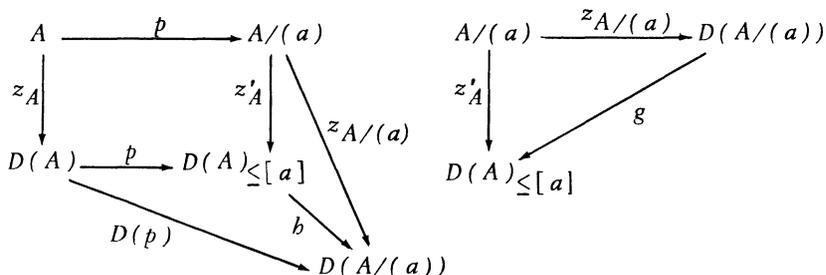
(2.2) COROLLAIRE. Pour toute notion de zéros $z : A \rightarrow D$ telle que l'on ait $z(a) = 1$ (resp. $z(a) = 0$) il existe une unique notion de zéros $z' : A/(a) \rightarrow D$ (resp. $z' : A_a \rightarrow D$) qui vérifie $z'p = z$ (resp. $z'l = z$).

DÉMONSTRATION. Si $z(a) = 1$ (resp. $z(a) = 0$), alors p (resp. l) est un isomorphisme de treillis dans (2.1). //

(2.3) THÉORÈME. Soit A un anneau, $a \in A$. Alors

$$(i) D(A/(a)) = D(A)_{\leq [a]}, \quad (ii) D(A_a) = D(A)_{\geq [a]}.$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de prouver (i). On vérifie aisément que les homomorphismes de treillis b, g définis par les diagrammes commutatifs (cf. (2.1) avec $z = z_A$)



sont des isomorphismes inverses. //

L'épimorphisme d'anneaux

$$r: A \rightarrow R_a(A) = A/(a) \times A_a: x \mapsto r(x) = (x+(a), x/1)$$

est universel pour la propriété [8]: $r(a)$ est régulier. Notons $r(a) = (0, a)$. Alors

$$(0, a)(0, 1/a)^2 = (0, 1/a), \quad (0, a)^2(0, 1/a) = (0, a).$$

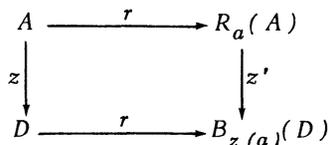
De même, l'épimorphisme de treillis

$$r: D \rightarrow B_d(D) = D_{\leq d} \times D_{\geq d}: x \mapsto r(x) = (x \wedge d, x \vee d)$$

est universel pour la propriété [2]: $r(d)$ a un complément. En effet, on a

$$\top(1, 0) = (0, 1), \quad \text{où } r(d) = (1, 0).$$

(2.4) PROPOSITION. Soit $a \in A$. Pour toute notion de zéros $z: A \rightarrow D$ il existe une unique notion de zéros z' qui rende commutatif le diagramme



DÉMONSTRATION. On fait le produit des deux cas dans (2.1). Donc

$$z'(x+(a), y/a^n) = (z(x) \wedge z(a), z(y) \vee z(a)). \quad //$$

Notons que le carré commutatif ci-dessus est aussi «cocartésien».

(2.5) COROLLAIRE. Pour toute notion de zéros $z: A \rightarrow D$ telle que $z(a)$

ait un complément il existe une unique notion de zéros $z' : R_a(A) \rightarrow D$ qui vérifie $z'r = z$.

DÉMONSTRATION. L'épimorphisme de treillis r dans (2.4) est un isomorphisme ssi $z(a)$ a un complément [2]. //

On a de fait

$$z'(x + (a), y/a^n) = [z(x) \wedge z(a)] \vee [z(y) \wedge \neg z(a)].$$

Dans le domaine classique, (2.5) exprime qu'il y a une bijection entre les idéaux premiers de A et ceux de $R_a(A)$ [8]. Remarquons que cette bijection n'est pas monotone, mais l'ordre est préservé sur les idéaux premiers contenant (resp. ne contenant pas) l'élément a . On peut interpréter de même (2.2).

(2.6) THÉORÈME. Soit A un anneau et $a \in A$. Alors

$$(i) D(R_a(A)) = B_{[a]}(D(A)), \quad (ii) B(R_a(A)) = B(A).$$

DÉMONSTRATION. (i) Voir (2.3) puis (2.4).

(ii) On montre que $B(r)$ est un isomorphisme de treillis à l'aide de (2.5) et de la proposition analogue à (1.5) mais dans laquelle les notions de zéros sont à valeurs dans des treillis booléens. //

Étant donné un anneau A on a la famille de A -algèbres

$$\{r_a : A \rightarrow R_a(A) \mid a \in A\}$$

et leur produit tensoriel [1] $r : A \rightarrow R(A)$, où $R(A)$ est l'anneau régulier librement engendré par A [8]. On peut exprimer $R(A)$ comme la limite inductive filtrante des anneaux [1]

$$R_S(A) = R_{a_1}(A) \otimes \dots \otimes R_{a_n}(A),$$

où $S = \{a_1, \dots, a_n\}$ est une partie finie de A . Par ailleurs

$$R_a(A) \otimes R_b(A) = R_{r_a(b)}(R_b(A)).$$

(2.7) LEMME. Le foncteur spectre premier préserve les limites inductives filtrantes.

DÉMONSTRATION. Soit les systèmes inductifs filtrants

$$(A_i, f_{ij}), \quad (D(A_i), D(f_{ij})) \quad (j \leq i \in I)$$

et leurs limites $(A, f_i), (D, g_i) (i \in I)$. Il existe un unique homomorphisme de treillis $g: D \rightarrow D(\Delta)$ tel que $g g_i = D(f_i) (i \in I)$.

Par ailleurs les notions de zéros $z_i = g_i z_{A_i}$ vérifient évidemment $z_i f_{ij} = z_j (j \leq i \in I)$, d'où il existe une unique notion de zéros $z: A \rightarrow D$ telle que $z f_i = z_i (i \in I)$. En effet, étant donné $x \in A$ il existe $i \in I$ tel que $x = f_i(x_i)$ et on peut définir $z(x) = z_i(x_i)$ puisque la limite est filtrante. Il est clair que z est une notion de zéros.

Enfin, g et \bar{z} sont des isomorphismes inverses de treillis, car ils vérifient (pour tout $i \in I$)

$$\begin{aligned} \bar{z} g g_i &= \bar{z} D(f_i) = \bar{z} \bar{1}_i = \bar{z}_i = g_i, \\ g z f_i &= g z_i = g g_i z_{A_i} = D(f_i) z_{A_i} = z_A f_i. \quad // \end{aligned}$$

(2.8) COROLLAIRE. *Le foncteur spectre booléen préserve les limites filtrantes.*

DÉMONSTRATION. On a (2.7) et le foncteur libre $Dist \rightarrow Boo$ préserve les limites inductives [2]. //

(2.9) THÉORÈME. *Soit A un anneau. Alors $B(R(A)) = B(A)$.*

DÉMONSTRATION. D'après (2.6) on a

$$B(R_a(A) \otimes R_b(B)) = B(R_b(A)) = B(A)$$

et il en résulte par induction $B(R_S(A)) = B(A)$ pour toute partie finie S de A . Enfin il suffit d'appliquer (2.8). //

3. DIMENSION.

La dimension d'un treillis distributif est définie constructivement dans [4] où l'on trouve les résultats suivants :

$$\begin{aligned} \dim D = 0 &\Leftrightarrow D \text{ est un treillis booléen,} \\ \dim D \leq 1 &\Leftrightarrow \forall u \in B(D), \exists x, y \in D, u = x \wedge \bar{1} y. \end{aligned}$$

Dans le domaine classique, c'est la dimension de Krull de D : la borne supérieure des longueurs des chaînes d'idéaux (filtres) premiers de D .

(3.1) LEMME. *Si D est un treillis distributif tel que l'élément 1 est détachable (i. e. on peut décider $x \neq 1$ par un algorithme fini) et $D_{\leq x}$ est*

un treillis booléen pour tout $x \neq 1$, alors $\dim D \leq 1$.

DÉMONSTRATION. Si $x, y \in D$, on a $x \wedge \neg y = x \wedge \neg(y \wedge x)$, donc on peut supposer $y \leq x$ dans $x \wedge \neg y$. Alors

$$x \wedge \neg y \in \begin{cases} \neg D & \text{si } x = 1 \\ D & \text{sinon} \end{cases}$$

car $x \wedge \neg y$ est le complément de y dans $D_{\leq x}$. Donc tout élément $u \in B$ est de la forme $a \vee \neg b$ avec a, b dans D , car [2]

$$u = \bigvee_{i=1}^n x_i \wedge \neg y_i, \quad x_i, y_i \in D \quad (1 \leq i \leq n).$$

Mais cette propriété est équivalente à $\dim D \leq 1$. //

(3.2) DÉFINITION. On appelle *dimension d'un anneau* A la dimension de son spectre premier $D(A)$.

Dans le domaine classique, c'est la dimension de Krull de A : la borne supérieure des longueurs des chaînes d'idéaux premiers de A .

(3.3) PROPOSITION. Soit A un anneau. Alors

$$\dim A = 0 \iff A/N \text{ est régulier.}$$

DÉMONSTRATION. Voir (1.8) et la caractérisation de $\dim D = 0$ donnée ci-dessus. //

(3.4) THÉORÈME. Soit K un corps, A une K -algèbre finie. Alors

$$\dim A = 0.$$

DÉMONSTRATION. Pour tout $x \in A$ il existe une équation de la forme

$$x^r + t_{r-1}x^{r-1} + \dots + t_0 = 0 \quad (t_i \in K, 1 \leq i \leq r).$$

Si $t_0 \neq 0$, alors x est une unité. Sinon

$$x^r + \dots + t_k x^k = 0 \quad (0 < k, t_k \neq 0)$$

ainsi que $x^k = 0$ ou

$$x^k = (-1/t_k)(x^r + \dots + t_{k+1}x^{k+1})$$

qui est un multiple de x^{k+1} . Donc

$$x^k = x^{k+1}z = x^{k+2}z^2 = \dots = x^{2k}z^k.$$

Ceci montre que, pour tout $x \in A$, il existe $k \geq 1$ tel que x^k soit régulier. Donc $[x] = [x^k]$ a un complément, et $D(A)$ est un treillis booléen. //

(3.5) THÉORÈME. Soit K un corps. Alors $\dim K[X] = 1$.

DÉMONSTRATION. Selon (3.3) $\dim K[X] > 0$. Montrons que $\dim K[X] \leq 1$ à l'aide de (3.1). Soit $D = D(K[X])$. Il est clair que tout élément de D est de la forme $[f]$ avec f monic, car on a

$$[f_1, \dots, f_n] = [d], \quad d = \text{p.g.c.d.}(f_1, \dots, f_n),$$

et si $d = a_r x^r + \dots + a_0$ on prend $f = a_r^{-1} d$ ainsi que $[f] = [d]$. Mais $[f] \neq 1$ équivaut à $f \neq 0$, donc 1 est détachable dans D . Par ailleurs, si $f \neq 0$ le treillis (cf. (2.3)) $D_{\leq [f]} = D(K[X]/(f))$ est booléen (cf. (3.4)). Donc $\dim D \leq 1$. //

RÉFÉRENCES.

1. ATIYAH, M. F. & MACDONALD, I. G., *Introduction to commutative Algebra*, Addison-Wesley, 1969.
2. BALBES, R. & DWINGER, Ph., *Distributive lattices*, Univ. Missouri Press 1974.
3. ESPAÑOL, L., *Dimension en algebra constructiva*, Tesis, Univ. Zaragoza 1978.
4. ESPAÑOL, L., Constructive Krull dimension of lattices, *Rev. Acad. Ciencias Zaragoza* (to appear).
5. JOHNSTONE, P. T., Rings, fields and spectra, *J. Algebra* 49 (1977), 238-260.
6. JOYAL, A., Spectral spaces and distributive lattices, *Notices A.M.S.* 18 (1971), 393.
7. JOYAL, A., Les théorèmes de Chevalley-Tarski et remarques sur l'algèbre constructive, *Cahiers Top. et Géom. Diff.* XVI-3 (1975), 256-258.
8. OLIVIER, J., Anneaux absolument plats universels et épimorphismes à buts réduits, *Séminaire P. Samuel* 1967/68, n° 6.

Departamento de Geometría y Topología
 Colegio Universitario de La Rioja
 LOGROÑO (La Rioja)
 ESPAGNE