CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

F.-M. CLÉMENT

Systèmes dynamiques et fibrations. Concept d'opt-automate

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 23, n° 2 (1982), p. 193-196

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1982__23_2_193_0>

© Andrée C. Ehresmann et les auteurs, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMETRIE DIFFÉRENTIELLE
Vol. XXIII-2 (1982)

3^e COLLOQUE SUR LES CATÉGORIES DÉDIÉ À CHARLES EHRESMANN
Amiens, Juillet 1980

SYSTÈMES DYNAMIQUES ET FIBRATIONS CONCEPT D'OPT-AUTOMATE

par F.-M. CLÉMENT

A la mémoire de Charles Ehresmann, pionnier en Mathématiques et homme de coeur

1. Un *opt-automate* est une donnée $(C, \pi, V, \underline{O})$ où:

a) *C est une catégorie et $\pi : C \to ENS$ un foncteur.* Alors la catégorie cofibrée discrète associée à π, notée $K\pi$, a pour morphismes les couples (f, z) où $z \in \pi(d_0(f))$, et la composition s'y effectue suivant la formule :

$$(f', z').(f, z) = (f'.f, z) \quad \text{ssi} \quad z' = \pi(f)(z).$$

Chez Ehresmann $K\pi$ est appelée catégorie d'hypermorphismes de l'action (définie par π) de C sur $E = \coprod_{c \in C_0} \pi(c)$; le composé $\pi(f)(z)$ est noté fz, et (f, z) est appelé un hypermorphisme. (Voir [9].)

b) *$\underline{O} = (O, \leq)$ est une catégorie enrichie dans les ordres totaux,* i.e. $\leq$ est un ordre sur O compatible avec la composition et somme d'ordres totaux sur les Hom(o, o').

c) *$V : K\pi \to O$ est un foncteur,* dit «foncteur de valuation».

2. Un *système guidable préférentiel* au sens de Bastiani [8] est un peu plus général qu'un opt-automate car ce n'est plus nécessairement une catégorie qui opère, mais un graphe multiplicatif. De plus il y a des topologies.

Une *machine* au sens de Guitart [10] est plus générale qu'un opt-automate, mais dans une autre direction; les «états» ne sont pas seulement organisés en un ensemble E, mais constituent eux-mêmes une famille de catégories; autrement dit, $\pi : C \to CAT$ (π est un foncteur à valeurs dans CAT). Par contre dans une machine il n'y a pas d'ordre sur O.

3. Dans un opt-automate les morphismes f de C sont pensés comme des *commandes* (ou décisions) et les éléments z de E sont des *états*. Dans les hypermorphismes (f, z) se trouvent donc bloqués en un seul concept les deux anciens concepts de «système observé» ou système des états et de «système observateur» ou système des opérateurs. Actuellement les physiciens de la microphysique considèrent comme indissociables l'ensemble de particules observées et l'observateur. Pour affiner l'analyse il y aurait lieu d'introduire un outil mathématique permettant de *pondérer* l'importance relative des deux systèmes composants (états et commandes). Dans [12] une *décomposition* d'une catégorie X en une base C' et des fibres $(\pi'(c'))_{c' \in C'_0}$ est définie par la donnée d'un foncteur $\pi' : C' \to ENS$ et d'un isomorphisme $X \approx K\pi'$. La pondération souhaitée p est alors une fonction donnant un poids à chaque décomposition de $K\pi$:

$$p : \{(C', \pi') \mid K\pi' \approx K\pi\} \to [0, 1] .$$

L'étude systématique de la pondération des opt-automates reste à faire.

4. Dans la pratique, i.e. dans les situations courantes de modélisation, on bâtit d'abord C et π, donnant ainsi une description algébrique de nature phénoménologique d'un système, exhibant les propriétés formellement observables, i.e. la forme, la géométrie du système. Puis dans un second temps on cherche un «bon» foncteur de valuation V permettant de résoudre le problème.

On interprète $V(f, z)$ comme le coût d'exécution de la commande f en partant de l'état z (et pour aboutir donc à fz). Le coût minimal de z en z' en une commande est donc :

$$V^1_{min}(z', z) = Min\{V(f, z) \mid fz = z'\} .$$

PROBLÈME. *Trouver une commande f qui minimisera le coût de transformation d'un état initial z en un état final z'' en passant par un état intermédiaire.* Ce coût minimum sera noté $V^2_{min}(z'', z)$.

THÉORÈME. *Supposons que z et z' soient donnés et que :*

(i) Toute commande f telle que $fz = z''$ puisse se factoriser sous

la forme $f = f'' . f'$.

(ii) Pour chaque paire (z_1, z_2) *où* $z_2 = g z_1$, *il existe un* f_1 *tel que*

$$f_1 z_1 = z_2 \quad \text{et} \quad V(f_1, z_1) = V^1_{min}(z_2, z_1).$$

Alors on a:

$$[\beta] \qquad V^2_{min}(z'', z) = \underset{f'}{Min}\,(V^1_{min}(z'', f'z) . V(f', z)).$$

Pour la preuve de ce théorème, et son extension au cas de N commandes non concaténées, on se reportera à [6]. (Voir aussi [8], où ce théorème a été introduit sous une forme un peu différente.)

Ainsi le principe [β] d'optimalité de Bellman [1], souvent accepté comme «évident», reçoit une explicitation algébrique. Par applications successives de [β] au cours d'une analyse rétrograde en partant de l'objectif, on calcule les coûts minimaux et les décisions optimales à prendre. Pour plus de détails, voir [6,7].

RÉFÉRENCES.

1. R. BELLMAN, *Dynamic Programing*, Princeton Univ. Press, 1957.
2. F.-M. CLEMENT, Conditions d'automatisation des systèmes et optimisation de ces systèmes, *C. R. A. S. Paris* 256 (1963), 340-342.
3. F.-M. CLEMENT, *Recherches sur les conditions d'automatisation des systèmes*, Thèse Dr Ingénieur de Paris (Janvier 1963).
4. F.-M. CLEMENT, Algèbre des catégories appliquée à la théorie des systèmes, *Laboratoire Math. App. Ec. Centrale* Paris, multigraphié, 1968.
5. F.-M. CLEMENT, Modèle catégorique de processus de décisions. Théorème de Bellman. Applications, *C. R. A. S. Paris* 268 (1969), 1-3.
6. F.-M. CLEMENT, Categorical axiomatics of dynamic programing, *J. Math. Analysis and Appl.* 51-1 (1975).
7. F.-M. CLEMENT, Approche catégorique des systèmes, *Colloque 4^e^ Journées de Contrôle*, Univ. Metz (1976).
8. A. EHRESMANN (-Bastiani), *Systèmes guidables et problèmes d'optimisation*, I-IV, Labo. Automatique Théor. Univ. Caen, Multigraphié, 1963-65.
9. C. EHRESMANN, *Catégories et Structures*, Dunod, Paris, 1965.
10. R. GUITART, Remarques sur les machines et les structures, *Cahiers Top. et Géom. Diff.* XV-2 (1974).
11. R. GUITART, Tenseurs et machines, *Idem* XXI-1 (1980).
12. R. GUITART & L. VANDENBRIL, Décompositions et lax-complétions, *Idem* XVIII-4 (1977).
13. H. KARKAR, Nouveaux aspects de la théorie des polysytèmes dynamiques, *Labo. d'Automatique Théor. Univ. Paris 7*, 1975.
14. M. QUADRAT, Analyse numérique de l'équation de Bellman stochastique, *Cahiers de l'I. R. I. A.*, Paris (1975).
15. M. VANDERVET, On the Bellman principle for decision problem with random decision policies, *J. Engin. Math.* 2 (1976).

Laboratoire de Math. Appliquées
Ecole Centrale
92290 CHATENAY-MALABRY