CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

PAUL VER EECKE

À propos d'un théorème de Charles Ehresmann sur les feuilletages

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 22, nº 4 (1981), p. 453-455

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1981__22_4_453_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE
Vol. XXII-4 (1981)

3^e COLLOQUE SUR LES CATEGORIES
DEDIE A CHARLES EHRESMANN
Amiens, Juillet 1980

À PROPOS D'UN THÉORÈME DE CHARLES EHRESMANN SUR LES FEUILLETAGES

par Paul VER EECKE

Une submersion surjective $f: V \to W$ de variétés séparées connexes de classe C^2 est une fibration pourvu que V soit compacte, ou que les $f^{-1}(x)$, $x \in W$, soient compacts et connexes. Tel est l'énoncé donné par C. Ehresmann [2, 3, 4]. Ces deux hypothèses alternatives peuvent être réunies en une seule, formulée dans le Théorème 2 ci-dessous, dont le Corollaire contient le résultat d'Ehresmann.

Etant donnée une variété V de dimension finie et de classe C^2, munie d'un feuilletage F définissant sur V la relation d'équivalence ouverte ρ, on sait que l'espace quotient V/ρ est une variété telle que l'application canonique $\psi: V \to V/\rho$ soit une submersion, pourvu qu'il existe une submersion f de V sur une variété W telle que les feuilles de F soient les composantes connexes des $f^{-1}(x)$, $x \in W$. On dit alors que F est simple [5]. On dira que F est une fibration si, en outre, $\psi: V \to V/\rho$ est une fibration. Au moyen du théorème de stabilité locale [7], et compte tenu de ce qu'un feuilletage simple est sans holonomie, on obtient aisément [8] le résultat classique suivant:

THEOREME 1. *Soit V une variété feuilletée séparée de classe C^r, $r \geq 2$, dont les feuilles sont supposées compactes. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

i) F est simple;
ii) F est sans holonomie;
iii) F est une fibration.

On peut alors énoncer:

THEOREME 2. *Soit* $f: V \to W$ *une submersion surjective de variétés connexes séparées de classe* C^r, $r \geq 2$, *telle que les* $f^{-1}(x)$, $x \in W$, *soient compacts. Alors* f *est une fibration si et seulement si* f *est fermée.*

Il est aisé de voir que la condition est nécessaire; montrons qu'elle est suffisante. Le feuilletage F défini par f étant simple, on a un diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\psi"'] & & W \\ & V/\rho \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

où ψ est une fibration de variétés d'après le théorème précédent et où $\bar{f}$ est un morphisme étale tel que les $\bar{f}^{-1}(x)$, $x \in W$, soient finis. D'autre part $\bar{f}$ est fermée parce que ψ est surjective et f fermée. Donc $\bar{f}$ est un revêtement de type fini [1, page 82]. Il en résulte que $f = \bar{f} \circ \psi$ est une fibration.

COROLLAIRE. *Pour qu'une surjection surjective* $f: V \to W$ *de variétés connexes séparées de classe* C^r, $r \geq 2$, *soit une fibration, il faut et il suffit que l'une des conditions suivantes soit vérifiée:*

i) V *est compacte;*

ii) les $f^{-1}(x)$, $x \in W$, *sont compacts connexes;*

iii) f *est propre.*

On remarque, en effet, que (ii) entraîne que le morphisme étale $\bar{f}: V/\rho \to W$ est un difféomorphisme.

BIBLIOGRAPHIE.

1. J. DIEUDONNÉ, *Eléments d'Analyse, Tome 3*, Gauthier-Villars, 1970.

2. C. EHRESMANN, Sur les espaces fibrés différentiables, *C.R.A.S. Paris* 224 (1947), 1611-1612.

3. C. EHRESMANN, Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable, *Colloque de Topologie Bruxelles*, C.B.R.M. (1950), 29-55.

4. C. EHRESMANN, Sur la théorie des variétés feuilletées, *Rend. Mat. e Appl.* Ser. V, X-1-2, Rome (1951), 64-83.

5. A. HAEFLIGER, Variétés feuilletées, *Ann, Scuola Norm. Sup. Pisa* (3) 16 (1962) 367-379.

6. H.B. LAWSON, The quantitative theory of foliations, *C.B.M.S. regional conference*, 1977.

7. R. REEB, *Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées*, A.S.I. 1183, Hermann, Paris, 1952.

8. P. VEREECKE, *Variétés feuilletées*, Monographies de l'Inst. de Math. Univ. Catholique de Louvain (à paraître).

U.E.R. de Mathématiques
33 rue Saint-Leu
80039 AMIENS CEDEX