CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

DOMINIQUE BOURN
JEAN-MARC CORDIER

Distributeurs et théorie de la forme

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 21, n° 2 (1980), p. 161-189

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1980__21_2_161_0>

© Andrée C. Ehresmann et les auteurs, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

CAHIERS DE TOPOLOGIE
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

Vol. XXI-2 (1980)

DISTRIBUTEURS ET THEORIE DE LA FORME

par Dominique BOURN et Jean-Marc CORDIER

INTRODUCTION.

La notion de forme a été introduite par Borsuk [Bo] pour l'étude des propriétés d'homotopie des compacts. Plusieurs auteurs ont continué ce travail dans un contexte plus général : métrique [Fo], compact [H, S], topologique général [Ma, Ho]. Le principe est de travailler sur une catégorie d'approximation ; précisément, étant donné une catégorie d'homotopie $\mathcal{H}$ et $\mathcal{W}$ une sous-catégorie pleine (généralement on choisit pour $\mathcal{W}$ la sous-catégorie pleine des espaces ayant le type d'homotopie d'un CW-complexe) on forme une nouvelle catégorie $\mathcal{S}$, ayant les mêmes objets que $\mathcal{H}$ et un ensemble de morphismes plus large : un morphisme dans $\mathcal{S}$ étant un «système de morphismes de $\mathcal{H}$». Le lien entre $\mathcal{H}$ et $\mathcal{S}$ est un foncteur S bijectif sur les objets (on notera cette propriété S1), l'approximation s'exprimant par le fait que, pour tout objet X de $\mathcal{H}$ et P de $\mathcal{W}$, le foncteur S induit une bijection de $\mathcal{H}(X,P)$ sur $\mathcal{S}(X,P)$ (on notera cette propriété S2).

Différentes approches catégoriques de la forme ont été faites relativement à une sous-catégorie pleine [Ho, Ba]. Par la suite d'autres auteurs (Deleanu-Hilton [D-H] et Frei [F]) ont étudié une formulation purement catégorique de cette théorie. Ces approches ont permis, d'une part une description plus simple de la catégorie $\mathcal{S}$, puisque l'on montre [Ho, Ma] que, si on note K l'inclusion de $\mathcal{W}$ dans $\mathcal{H}$, on a un isomorphisme

$$\mathcal{S}(X,Y) \approx \mathcal{N}at(\mathcal{H}(Y,K-), \mathcal{H}(X,K-)),$$

d'autre part elles ont abouti à une caractérisation axiomatique en ajoutant à S1 et S2 un axiome S3 (voir rappel Chapitre II).

Lorsque l'on connait la théorie des distributeurs [Be] on ne peut pas ne pas être frappé par l'analogie qui existe entre la formule précédente concernant $\mathcal{S}(X, Y)$ et le calcul des extensions de Kan dans les distributeurs (voir rappel Chapitre I, 4). Le but de cet article est donc de montrer qu'un certain nombre de résultats de la théorie de la forme, aussi bien sous son aspect axiomatique que sous son approche «à la Čech» reposent en fait sur des propriétés de la catégorie des distributeurs. Cette (bi-)catégorie *Dist* est un élargissement de la (2-)catégorie *Cat* des catégories et foncteurs ayant les propriétés avantageuses :

- d'admettre des extensions de Kan le long de toute flèche,
- que tout foncteur admet alors un adjoint à droite.

On construit *Dist* de la façon suivante : étant donné deux catégories $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ on pose :

$$Hom_{Dist}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = Hom_{Cat}(\mathfrak{B}^{op} \times \mathfrak{A}, Ens).$$

La construction essentielle est la composition des distributeurs, notée $\otimes$ et rappelée en I, 2.

Le Chapitre I contient naturellement un certain nombre de rappels sur les distributeurs, en particulier en ce qui concerne les monades et la construction de Kleisli associée, et sur le fait que l'inclusion de *Cat* dans *Dist* préserve les extensions de Kan ponctuelles de *Cat*, ainsi que les constructions de Kleisli.

On montre dans II que les trois axiomes S1, S2 et S3 correspondent à une propriété universelle de $\mathcal{S}$ dans *Dist*, à savoir : Une catégorie forme est l'objet de Kleisli d'une certaine monade associée à K appelée monade de codensité, car lorsque cette monade existe déjà dans *Cat*, c'est la monade de codensité [ML] normalement associée à K.

Le Chapitre III est consacré à l'approche à la Čech de la théorie de la forme. Pour cela, rappelons la définition [Ho] d'un système inverse K-associé : On dit que le couple (I, F) d'une catégorie I cofiltrante et d'un foncteur F de I vers $\mathfrak{P}$ est K-associé à l'élément X de $\mathfrak{H}$ s'il existe un cône $\pi = \{p_i : X \to KF(i)\}$ tel que pour tout élément P de $\mathfrak{P}$, l'application

$$\bar{\pi}(P) : \varinjlim_I \mathfrak{P}(F(i), P) \to \mathfrak{H}(X, KP)$$

est un isomorphisme, où $\bar{\pi}(P)$ associe à la classe d'un $f_i : F(i) \to P$ le composé $K(f_i).p_i : X \to KP$. On remarque alors qu'un système inverse K-associé à X détermine un carré

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r] \arrow[d, "F"'] & 1 \arrow[d, "X"] \arrow[dl, phantom, "\pi \swarrow"] \\ \mathfrak{C} \arrow[r, "K"'] & \mathfrak{H} \end{tikzcd}$$

exact au sens de [G, V], c'est-à-dire vérifiant dans *Dist* une propriété à la Beck-Chevalley. A partir d'une caractérisation des carrés exacts, comme étant précisément ceux qui préservent les extensions de Kan dans *Dist*, on retrouve aisément l'isomorphisme usuel entre la catégorie $\mathcal{S}$ et une sous-catégorie pleine de la catégorie des pro-objets de $\mathfrak{C}$. On peut même étendre ce résultat aux pro-objets (I, F), où I n'est plus cofiltrante, et répondre ainsi à une question implicitement posée dans l'introduction de [D-H 2].

On consacre le Chapitre IV à la révision, sous l'angle des distributeurs, de quelques résultats classiques concernant:

- la comparaison des théories de forme, ce qui nous permet grâce aux carrés exacts de déterminer des conditions plus générales que [C-P] ;

- la démonstration que les extensions de Čech le long de K sont des extensions de Kan le long de K ; ce qui nous amène à prouver que les systèmes inverses K-associés sont exactement donnés par les cônes qui sont transformés en limites par toute extension de Kan ponctuelle le long de K ;

- une condition nécessaire et suffisante pour qu'un objet K-dominé soit K-stable, à savoir: un système inverse K-dominé (I, F) est K-stable ssi F admet une limite.

Cette liste n'est évidemment pas exhaustive. Par exemple le point de vue des distributeurs relie entre eux de nombreux résultats de [Fr] qui semblent disparates mais sont en fait des cas particuliers d'une situation très générale puisque dans *Dist* tout foncteur admet un coadjoint. De même, toute la première partie de [Fr-K] (où l'on applique la méthode de la forme à la théorie des modules) peut être éclairée par la remarque suivante: il y a une très forte dualité sur *Dist* et tout objet de Kleisli d'une monade dans *Dist* est aussi un objet d'Eilenberg-Moore; aussi le foncteur $K: \mathfrak{W} \to \mathcal{H}$ se factorise-t-il au moyen d'un distributeur à travers $\mathcal{S}$. Le foncteur R_K de [Fr-K] n'est pas autre chose que le foncteur extension de Kan le long de ce distributeur. Peut-être serait-il utile d'aller plus loin dans cette direction si l'on songe que la composition des distributeurs ($\otimes$) a été définie en quelque sorte ([Be] page 4 ex. d) pour généraliser le produit tensoriel des bimodules?

NOTATIONS.

Si $\mathcal{A}$ est une catégorie, on note $|\mathcal{A}|$ la classe des objets de $\mathcal{A}$. Si F et G sont des foncteurs de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$, $Nat(F, G)$ est l'ensemble des transformations naturelles de F vers G et $Fonc(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ la catégorie ayant pour objets les foncteurs de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{B}$, et pour morphismes les transformations entre ces foncteurs. On notera par ‹.» le composé des transformations.

1. RAPPELS SUR LES DISTRIBUTEURS.

Les distributeurs ont été introduits par Bénabou [Be] dans le but d'ajouter des adjoints à tous les foncteurs, en plongeant la 2-catégorie *Cat* dans une bicatégorie; une bicatégorie [Be] est une 2-catégorie généralisée, où les égalités sont remplacées par des isomorphismes cohérents au niveau de l'associativité et de l'unitarité; souvent par la suite on oubliera, pour simplifier l'écriture des formules et sans inconvénient majeur, l'expression de ces isomorphismes de cohérence.

Les objets de cette bicatégorie, notée *Dist*, sont les catégories; les 1-cellules sont définies de la façon suivante :

1. DEFINITION. Soit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux catégories; un *distributeur* ϕ *de* $\mathcal{A}$ *vers* $\mathcal{B}$ est un foncteur de $\mathcal{B}^{op} \times \mathcal{A}$ dans *Ens*, noté $\phi : \mathcal{A} \dashrightarrow \mathcal{B}$.

EXEMPLE. Si F est un foncteur d'une catégorie $\mathcal{A}$ vers une catégorie $\mathcal{B}$, on peut associer à F : un distributeur

$$\phi_F : \mathfrak{A} \dashrightarrow \mathfrak{B} \quad \text{défini par} \quad \phi_F(B, A) = \mathfrak{B}(B, FA)$$

et un distributeur

$$\phi^F : \mathfrak{B} \dashrightarrow \mathfrak{A} \quad \text{défini par} \quad \phi^F(B, A) = \mathfrak{B}(FA, B).$$

Les 2-cellules sont les transformations de distributeurs. Si $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ sont des catégories, on a donc :

$$Dist(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = Fonc(\mathfrak{B}^{op} \times \mathfrak{A}, \ Ens)$$

et

$$Dist(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})(\phi, \phi') = Nat(\phi, \phi') ;$$

la 2-cellule t de ϕ vers ϕ' est représentée par

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{A} \arrow[r, dashed, bend left=50, "\phi"{name=U}] \arrow[r, dashed, bend right=50, "\phi'"'{name=D}] & \mathfrak{B} \arrow[from=U, to=D, Rightarrow, "t"] \end{tikzcd}$$

2. *Composition des distributeurs.* Soit

$$\phi : \mathfrak{A} \dashrightarrow \mathfrak{B} \quad \text{et} \quad \psi : \mathfrak{B} \dashrightarrow \mathfrak{C} :$$

à (ψ, ϕ) est associé un distributeur de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{C}$, noté $\psi \otimes \phi$ défini de la façon suivante :

$$\psi \otimes \phi(C, A) = \bigcup_{B \in |\mathfrak{B}|} \psi(C, B) \times \phi(B, A) / R$$

où R est la relation d'équivalence engendrée par les relations

$$(\psi(C, b)(\beta), a) \approx (\beta, \phi(b, A)(a)),$$

$$\text{où } a \in \phi(B, A), \quad \beta \in \psi(C, B') \quad \text{et} \quad b \in \mathfrak{B}(B', B) ;$$

on notera $y \otimes x$ la classe déterminée par (x, y).

Cette composition des distributeurs a les propriétés suivantes :

1° Si

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{A} \arrow[r, "G"] \arrow[r, dashed, bend right, "\phi_G"'] & \mathfrak{B} \arrow[r, "F"] \arrow[r, dashed, bend right, "\phi_F"'] & \mathfrak{C} \end{tikzcd} ,$$

on a $\phi_F \otimes \phi_G \approx \phi_{FG}$, c'est-à-dire il existe une équivalence naturelle entre ces deux distributeurs.

2° Si

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{A} \arrow[r, "F"] \arrow[r, dashed, bend right, "\phi_F"'] & \mathfrak{B} \arrow[r, dashed, "\phi"] & \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

on a de façon naturelle $\phi \otimes \phi_F(C, A) \approx \phi(C, FA)$, et si

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{B} \arrow[r, dashed, "\phi"] & \mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[r, dashed, bend right, "\phi^F"'] & \mathfrak{A} \end{tikzcd}$$

$\phi^F \otimes \phi(A, B) \approx \phi(FA, B)$.

L'associativité de cette composition est seulement cohérente à isomorphisme près. De plus, dans la situation suivante :

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{A} \arrow[r, dashed, bend left, "\phi"] \arrow[r, dashed, bend right, "\phi'"'] \arrow[r, phantom, "t_1 \Downarrow"] & \mathfrak{B} \arrow[r, dashed, bend left, "\psi"] \arrow[r, dashed, bend right, "\psi'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow t_2"] & \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

on a toujours la formule

$$t_2 \otimes t_1 = t_2 \otimes \phi' . \psi \otimes t_1 = \psi' \otimes t_1 . t_2 \otimes \phi .$$

3. Il en résulte le plongement de *Cat* dans *Dist* qui à $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ associe $\phi_F : \mathfrak{A} \dashrightarrow \mathfrak{B}$. On montre alors que ϕ_F a pour adjoint à droite ϕ^F, l'adjonction étant définie par $\eta : 1_{\mathfrak{A}} \Rightarrow \phi^F \otimes \phi_F$, où

$$\eta(A, A') : \mathfrak{A}(A, A') \to \phi^F \otimes \phi_F(A, A') : a \mapsto F(a),$$

et par $\epsilon : \phi_F \otimes \phi^F \Rightarrow 1_{\mathfrak{B}}$, où

$$\epsilon(B, B') : \phi_F \otimes \phi^F(B, B') \to \mathfrak{B}(B, B') : b' \otimes b \mapsto b' . b .$$

EXEMPLE. Si $\mathcal{H}$ est la catégorie d'homotopie des espaces topologiques $\mathfrak{W}$ la sous-catégorie pleine des espaces ayant le type d'homotopie d'un CW-complexes, K l'insertion de $\mathfrak{W}$ dans $\mathcal{H}$, on a sur $\mathcal{H}$ un endodistributeur Ω qui à (X, Y) associe le $Nat(\mathcal{H}(Y, K-), \mathcal{H}(X, K-))$ utilisé dans les théories de forme de Holstynski et de Mardesič.

Si l'on note $\mathcal{S}$ la catégorie forme, S le foncteur forme de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{S}$, la propriété de bijection sur les Hom :

$$\mathcal{H}(X, KP) \approx \mathcal{S}(SX, SKP)$$

peut s'exprimer par $\phi_K(X, P) \approx \phi^S \otimes \phi_{SK}(X, P)$, et comme

$\phi^S \otimes \phi_S(X,Y) \approx \mathcal{S}(SX,SY) = Nat(\mathcal{H}(Y,K-),\mathcal{H}(X,K-)) = \Omega(X,Y),$

on obtient

$$\phi_K \approx \phi^S \otimes \phi_{SK} \approx \phi^S \otimes (\phi_S \otimes \phi_K) \approx (\phi^S \otimes \phi_S) \otimes \phi_K \approx \Omega \otimes \phi_K .$$

Ainsi cette propriété de la forme s'exprime par une commutation dans Dist.

4. Une propriété essentielle est le fait que dans *Dist* toute flèche ϕ est une flèche de Kan à droite, c'est-à-dire que pour tout couple

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{A} \arrow[r, dashed, "\phi"] \arrow[d, dashed, "\psi"'] & \mathfrak{B} \\ \mathcal{C} & \end{tikzcd}$$

il existe un distributeur $\tilde{\psi}_\phi : \mathfrak{B} \dashrightarrow \mathcal{C}$, appelé *extension à droite de* ψ *le long de* ϕ, tel que pour tout $\gamma : \mathfrak{B} \dashrightarrow \mathcal{C}$, on ait une bijection naturelle

$$Dist(\mathfrak{B},\mathcal{C})(\gamma, \tilde{\psi}_\phi) \approx Dist(\mathfrak{A},\mathcal{C})(\gamma \otimes \phi, \psi) .$$

Un tel distributeur est donné, par exemple, par la formule

$$\tilde{\psi}_\phi(C,B) = Nat(\phi(B,-), \psi(C,-)).$$

En particulier, si dans *Cat* on a le triplet

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{A} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "G"'] & & \mathfrak{B} \arrow[dl, "R"] \\ & \mathcal{C} & \end{tikzcd}$$

on obtient:

PROPOSITION 1. *ϕ_R est une extension à droite de ϕ_G le long de ϕ_F ssi $R = Ran_F G$ et $Ran_F G$ préservée par tous les représentables, c'est-à-dire, pour tout objet C de $\mathcal{C}$,*

$$h^C R = Ran_F\, h^C G, \quad où \quad h^C(C') = \mathcal{C}(C,C').$$

Un telle extension est appelée une extension ponctuelle.

PREUVE. Supposons que $R = Ran_F G$ (extension à droite) préservée par tous les représentables. On a alors :

$$\phi_R(C,B) = \mathcal{C}(C,RB) \approx Nat(h^B, h^C R) \approx Nat(h^B F, h^C G) =$$
$$= Nat(\phi_F(B,-), \phi_G(C,-)).$$

Inversement, soit H un foncteur de $\mathfrak{B}$ dans $\mathcal{C}$; on a

$$Nat(H,R) \approx Nat(\mathcal{C}(-,H-),\ \mathcal{C}(-,R-)) = Nat(\phi_H,\phi_R) \approx$$
$$\approx Nat(\phi_{HF},\phi_G) \approx Nat(HF,G),$$

c'est-à-dire $R = Ran_F\, G$. Soit C un objet de $\mathcal{C}$; le foncteur $h^C G$ de $\mathfrak{A}$ dans Ens a pour extension de Kan à droite le foncteur R' défini par: $R'B = Nat(\mathfrak{B}(B,F-),\ \mathcal{C}(C,G-))$, c'est-à-dire

$$R'B = Nat(\phi_F(B,-),\ \phi_G(C,-)) \approx \phi_R(C,B) = (h^C R)(B),$$

par conséquent $h^C R = Ran_F\, h^C G$.

5. *Monade dans Dist.* La donnée d'une monade dans $Dist$ est la donnée d'un endodistributeur $T: \mathfrak{A} \dashrightarrow \mathfrak{A}$, de 2-cellules

$$\eta: 1_{\mathfrak{A}} \Rightarrow T \quad \text{et} \quad \mu: T\otimes T \Rightarrow T,$$

tels que

$$\mu . T\otimes\eta = \eta\otimes T.\mu = T, \quad \mu . T\otimes\mu = \mu.\mu\otimes T.$$

Toute monade dans Cat (qu'on appelle aussi un triple) est donc évidemment une monade dans $Dist$ par l'inclusion décrite précédemment.

EXEMPLES. Si F est un foncteur de $\mathfrak{A}$ vers $\mathfrak{B}$, alors F engendre sur $\mathfrak{A}$ une monade dans $Dist$, notée ${}_F\mathbb{T}$, déterminée par l'adjonction de ϕ_F et ϕ^F, à savoir:

$$T = \phi^F\otimes\phi_F, \quad \eta: 1_{\mathfrak{A}} \Rightarrow \phi^F\otimes\phi_F, \quad \mu = \phi^F\otimes\epsilon\otimes\phi_F.$$

On a toujours une monade dans $Dist$ sur $\mathfrak{B}$, notée $\mathbb{T}_F$, engendrée par l'extension de ϕ_F le long de lui-même, et appelée, par analogie avec ce qui se passe dans Cat, *monade de codensité de* F. On a donc, si $\tilde{\phi}_F$ est l'extension de ϕ_F le long de lui-même, $\mathbb{T}_F = (\tilde{\phi}_F,\eta,\mu)$, où, en désignant par $\delta_{\mathfrak{B}}(\psi)$, pour tout ψ, l'isomorphisme de $Nat(\psi,\tilde{\phi}_F)$ sur $Nat(\psi\otimes\phi_F,\phi_F)$ et $\theta = \delta_{\mathfrak{B}}(\tilde{\phi}_F)(1_{\tilde{\phi}_F})$,

$$\eta = \delta_{\mathfrak{B}}(1_{\mathfrak{B}})^{-1}(1_{\phi_F}) \quad \text{et} \quad \mu = \delta_{\mathfrak{B}}(\tilde{\phi}_F\otimes\phi_F)^{-1}(\theta.\theta\otimes\tilde{\phi}_F).$$

6. *Catégorie de Kleisli d'une monade.* Ftant donné un triple $\mathbb{T} = (T,\eta,\mu)$ sur $\mathfrak{A}$ (où T est un endofoncteur de $\mathfrak{A}$), on sait (voir par exemple [ML] page 143) qu'on peut lui associer une catégorie $Kl\,\mathbb{T}$ qui a les mêmes objets que $\mathfrak{A}$, telle que $Kl\,\mathbb{T}(A,A') = \mathfrak{A}(A,TA')$ et où la composition est

donnée de la façon suivante : si

$$g \in \mathcal{A}(A', TA'') \quad \text{et} \quad f \in \mathcal{A}(A, TA'),$$

le composé dans $Kl\mathrm{T}$ *vaut* $\mu(A'')T(g)f$. On a de plus un foncteur $U_{\mathrm{T}}: Kl\mathrm{T} \to \mathcal{A}$ qui admet un adjoint L_{T} et la catégorie de Kleisli $Kl\mathrm{T}$ a la propriété universelle suivante :

Pour tout couple (U, L), U foncteur de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{A}$ et L adjoint de U, qui engendre le triple T sur $\mathcal{A}$, il existe un unique foncteur $\hat{L}$ de $Kl\mathrm{T}$ vers $\mathcal{B}$ tel que $L = \hat{L} . L_{\mathrm{T}}$.

Cette construction peut s'étendre de la façon suivante [T] : étant donné une monade T dans *Dist*, appelons *Catégorie de Kleisli de* T, encore notée $Kl\mathrm{T}$, la catégorie qui a les mêmes objets que $\mathcal{A}$ et telle que $Kl\mathrm{T}(A, A') = T(A, A')$, la loi de composition associant

$\mu(a' \otimes a)$ à $(a, a') \in T(A, A') \times T(A', A'')$,

$\eta(A)(1_A)$ à l'objet A.

De plus, on a un foncteur L_{T} de $\mathcal{A}$ vers $Kl\mathrm{T}$, bijectif sur les objets, défini par :

$$L_{\mathrm{T}}(a) = \eta(A, A')(a) \quad \text{pour tout} \quad a \in \mathcal{A}(A, A').$$

Cette catégorie a la propriété universelle suivante :

Pour tout foncteur L de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{B}$ tel que l'adjonction (ϕ_L, ϕ^L) détermine la monade T sur $\mathcal{A}$, il existe un unique foncteur $\hat{L}$ de $Kl\mathrm{T}$ vers $\mathcal{B}$ vérifiant $L = \hat{L} . L_{\mathrm{T}}$.

La categorie de Kleisli de ${}_F\mathrm{T}$ est la catégorie de décomposition du foncteur F comme composé d'un foncteur bijectif sur les objets et d'un foncteur pleinement fidèle.

La catégorie de Kleisli de T_F est la catégorie qui a les mêmes objets que $\mathcal{B}$ et comme morphismes de B vers B' les éléments de : $Nat(\mathcal{B}(B', F-), \mathcal{B}(B, F-))$.

On aura plus précisément besoin dans la suite de la définition et du résultat suivants [T] :

DEFINITION. Soit $\mathrm{T} = (T, \eta, \mu)$ et $\mathrm{T}' = (T', \eta', \mu')$ deux monades dans

Dist sur $\mathfrak{A}$, un morphisme de T vers T' est la donnée d'une 2-cellule $\tau : T \Rightarrow T'$ telle que

$$\tau \cdot \eta = \mu', \quad \tau \cdot \mu = \mu' \cdot \tau \otimes \tau .$$

PROPOSITION 2. *Soit* T *une monade dans Dist sur* $\mathfrak{A}$ *et* F *un foncteur de* $\mathfrak{A}$ *vers* $\mathfrak{B}$ *; il existe une bijection entre l'ensemble des foncteurs* G *de* KlT *dans* $\mathfrak{B}$ *tels que* $GL_{\mathrm{T}} = F$ *et l'ensemble des morphismes entre monades dans Dist de* T *vers* T'.

COROLLAIRE. *Soit* T *et* T' *deux monades dans Dist sur* $\mathfrak{A}$*, il existe une bijection entre l'ensemble des morphismes de* T *vers* T' *et l'ensemble des foncteurs* G *de* KlT *vers* KlT' *tels que* $G.L_{\mathrm{T}} = L_{\mathrm{T}'}$.

2. THEORIE DE FORME ET DISTRIBUTEURS.

Dans la théorie de la forme des métriques compacts de [Bo] on introduit une nouvelle catégorie dont les objets sont les espaces compacts et dont les morphismes, appelés applications forme, sont des modifications de classes d'applications homotopes. Deux métriques sont dits avoir la même forme s'ils sont isomorphes dans cette catégorie. On a naturellement un foncteur S de la catégorie des espaces compacts dans cette catégorie qui applique objets sur objets et qui se factorise à travers la catégorie d'homotopie. Cette catégorie forme et le foncteur S ont les propriétés caractéristiques suivantes:

1° Si Y est un ANR (donc a le type d'homotopie d'un CW-complexe), il existe une bijection de l'ensemble des classes d'homotopie de X sur Y sur l'ensemble des applications forme de X dans Y.

2° S est un foncteur continu pour les limites de systèmes inverses.

Les différentes extensions de la théorie de la forme qui ont été considérées mettent en évidence ces deux caractéristiques; leur équivalence repose justement sur ces propriétés. Elles ont conduit aux différentes études catégoriques précédemment citées: la propriété 1 par exemple, qui est appelée condition C dans [Fr].

Si donc $K: \mathfrak{C} \to \mathfrak{K}$ est un foncteur, une théorie de forme pour K

sera donc un couple $(\mathcal{S}, S)$, où S est un foncteur de $\mathcal{H}$ vers $\mathcal{S}$ tel que les axiomes S1, S2, S3 soient vérifiés :

S1. Le foncteur S est bijectif sur les objets.

S2. Pour tout objet X de $\mathcal{H}$ et P de $\mathfrak{W}$, le foncteur S induit une bijection de $\mathcal{H}(X, KP)$ sur $\mathcal{S}(SX, SKP)$; ceci est l'expression catégorique de la condition 1.

S3. S est Kan-continu, i.e.: pour tout objet X de $\mathcal{H}$ et tout objet Z de $\mathcal{S}$, l'application

$$\alpha(Z, X): \mathcal{S}(Z, SX) \to Fonc_{\mathfrak{W}}(X\!\downarrow\! K,\ Z\!\downarrow\! SK)$$

est bijective, où $X\!\downarrow\! K$ désigne la catégorie des K-objets au-dessous de X et $Z\!\downarrow\! SK$ celle des SK-objets au-dessous de Z, où

$$Fonc_{\mathfrak{W}}(X\!\downarrow\! K,\ Z\!\downarrow\! SK)$$

est l'ensemble des foncteurs $V: X\!\downarrow\! K \to Z\!\downarrow\! SK$ faisant commuter le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd} X\!\downarrow\! K \arrow[rr, "V"] \arrow[dr] & & Z\!\downarrow\! SK \arrow[dl] \\ & \mathfrak{W} & \end{tikzcd}$$

où enfin $\alpha(Z, X)$ est défini de la façon suivante: Si $s \in \mathcal{S}(Z, SX)$, il détermine par composition un foncteur évident:

$$s^*: SX\!\downarrow\! SK \to Z\!\downarrow\! SK$$

qui commute au-dessus de $\mathfrak{W}$. D'autre part, pour tout objet X de $\mathcal{H}$, on a un foncteur

$$S^*: X\!\downarrow\! K \to SX\!\downarrow\! SK$$

qui commute au-dessus de $\mathfrak{W}$; par définition, on pose

$$\alpha(Z, X) = s^* . S^* .$$

Cette propriété, donnée dans [Ba], est l'analogue catégorique de la condition 2.

Nous allons d'abord considérer séparément la signification de ces trois axiomes dans *Dist*.

Axiome S1. *$(\mathcal{S}, S)$ vérifie S1 ssi $\mathcal{S}$ est l'objet de Kleisli de* ${}_S\mathrm{T}$.

D'après la Proposition 2 il existe une correspondance bijective entre les monades dans *Dist* sur $\mathcal{A}$ et les foncteurs de source $\mathcal{A}$ bijectifs sur les objets. Maintenant soit S un foncteur de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{S}$ bijectif sur les objets, et ${}_S\mathrm{T} = (\phi^S \otimes \phi_S, \eta', \mu')$ la monade dans *Dist* sur $\mathcal{H}$ engendrée par l'adjonction définie par S dans *Dist* ; alors, comme on l'a vu, on a

$$Kl_S\,\mathrm{T}(X, X') = \phi^S \otimes \phi_S(X, X') \approx \mathcal{S}(X, X') ;$$

et S est un objet de Kleisli pour la monade dans *Dist* associée à $\mathcal{S}$.

Axiome S2. *$(\mathcal{S}, S)$ vérifie S2 ssi $\eta' \otimes \phi_K$ est inversible.*

Soit $K: \mathcal{W} \to \mathcal{H}$ un foncteur et $S: \mathcal{H} \to \mathcal{S}$ un foncteur tel que, pour tout $X \in |\mathcal{H}|$ et $P \in |\mathcal{W}|$, S induit une bijection de $\mathcal{H}(X, KP)$ sur

$$\mathcal{S}(SX, SKP) \approx \phi^S \otimes \phi_{SK}(X, P),$$

c'est-à-dire il existe une 2-cellule inversible $\sigma : \phi_K \Rightarrow \phi^S \otimes \phi_S \otimes \phi_K$. On peut remarquer que σ n'est rien d'autre que

$$\eta' \otimes \phi_K \quad \text{de} \quad \phi_K \quad \text{dans} \quad \phi^S \otimes \phi_S \otimes \phi_K .$$

Par conséquent l'axiome S2 (cf. Introduction) signifie simplement que $\eta' \otimes \phi_K$ est inversible, et donc S2 s'exprime à partir de la monade ${}_S\mathrm{T}$.

REMARQUE. *S2 induit une comparaison entre* ${}_S\mathrm{T}$ *et* T_K .

En effet, soit $\mathrm{T}_K = (\phi_K, \eta, \mu)$ la monade de codensité de K ; la 2-cellule $(\eta' \otimes \phi_K)^{-1}$ détermine une 2-cellule τ de $\phi^S \otimes \phi_S$ vers l'extension $\tilde{\phi}_K$ de ϕ_K le long de ϕ_K (dont la counité est notée ρ)

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{W} \arrow[rr, dashed, "\phi_K"] \arrow[d, dashed, "\phi_K"'] & \arrow[dl, phantom, "\overset{\rho}{\Longleftarrow}"] & \mathcal{H} \arrow[dll, dashed, "\tilde{\phi}_K"] \\
\mathcal{H} & &
\end{tikzcd}$$

En effet, τ est associée au triplet

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{W} \arrow[rr, dashed, "\phi_K"] \arrow[d, dashed, "\phi_K"'] & & \mathcal{H} \arrow[dll, dashed, "\phi^S \otimes \phi_S"] \arrow[dll, phantom, bend right=20, "\overset{(\eta'\otimes\phi_K)^{-1}}{\Leftarrow}"] \\
\mathcal{H} & &
\end{tikzcd}$$

c'est l'unique flèche de comparaison de $\phi^S \otimes \phi_S$ dans $\tilde{\phi}_K$ telle que $\rho.(\tau \otimes \phi_K) = (\eta' \otimes \phi_K)^{-1}$. De plus τ est un morphisme de monades.

Axiome S3. $(\mathcal{S}, S)$ *vérifie S3 ssi* ϕ_S *est une extension à droite de* $\phi_S \otimes \phi_K$ *le long de* ϕ_K, *ou encore ssi* S *est une extension de Kan ponctuelle de* SK *le long de* K.

Soit $K: \mathfrak{W} \to \mathcal{H}$ un foncteur et $S: \mathcal{H} \to \mathcal{S}$ un foncteur tel que S est Kan-continu. On peut d'abord remarquer que

$$Fonc_{\mathfrak{W}}(X{\downarrow}K,\ Z{\downarrow}SK) \approx Nat(\mathcal{H}(X, K-),\ \mathcal{S}(Z, SK-)),$$

que nous noterons pour faciliter l'écriture $\phi(Z, X)$.

$\phi : \mathcal{S}^{op} \times \mathcal{H} \to Ens$ définit évidemment un distributeur et sa définition même prouve que, dans $Dist$, le diagramme suivant est une extension

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{W} \arrow[rr, dashed, "\phi_K"] \arrow[d, dashed, "\phi_K"'] & & \mathcal{H} \arrow[ddll, dashed, "\phi"] \\
\mathcal{H} \arrow[d, dashed, "\phi^S"'] \arrow[r, phantom, "\overset{\rho'}{\Leftarrow}"] & & \\
\mathcal{S} & &
\end{tikzcd}$$

où $\rho': \phi \otimes \phi_K \Rightarrow \phi_{SK}$ est défini par: $\rho'(Z, KP)$

de $\phi(Z, KP) \approx \phi \otimes \phi_K(Z, P)$ dans $\phi_{SK}(Z, P) \approx \mathcal{S}(Z, SKP)$

associe à t l'élément $t(1_{KP})$.

Comme ϕ_S est un distributeur de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{S}$, il existe une unique 2-cellule

$$a : \phi_S \Rightarrow \phi \quad \text{telle que} \quad \rho'.(a \otimes \phi_K) = Id(\phi_S \otimes \phi_K).$$

$a(Z, X)$ de $\phi_S(Z, X) = \mathcal{S}(Z, SX)$ dans

$$\phi(Z,X) = Nat(\mathcal{H}(X,K-), \mathcal{S}(Z,SK-))$$

est l'application qui à $s \in \mathcal{S}(Z,SX)$ associe s^*S^* de $Fonc(X{\downarrow}K, Z{\downarrow}SK)$ où

$$\begin{tikzcd}
X{\downarrow}K \arrow[rr] \arrow[dr, "S^*"'] & & Z{\downarrow}SK \\
& SX{\downarrow}SK \arrow[ur, "s^*"'] &
\end{tikzcd}$$

Par conséquent pour S la Kan-continuité s'exprime par le fait que α est un isomorphisme, ou encore ϕ_S une extension à droite de $\phi_S \otimes \phi_K$ le long de ϕ_K, ou encore évidemment par le fait que S est une extension de Kan ponctuelle le long de K dans *Cat*.

REMARQUE. *S3 induit une comparaison entre* T_K *et* ${}_S\mathrm{T}$.

En effet, ce résultat entraîne le fait suivant dans *Dist* : puisque ϕ^S est un adjoint de ϕ_S, ϕ^S préserve les extensions, donc $\phi^S \otimes \phi_S$ est une extension à droite de $\phi^S \otimes \phi_S \otimes \phi_K$ le long de ϕ_K de counité $\phi^S \otimes \rho'$.

Par conséquent S3 implique que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{C} \arrow[rr, dashed, "\phi_K"] \arrow[d, dashed, "\phi_K"'] & & \mathcal{H} \arrow[ddll, dashed, "\phi^S \otimes \phi"] \\
\mathcal{H} \arrow[d, dashed, "\phi^S \otimes \phi_S"'] \arrow[r, phantom, "\Leftarrow \phi^S \otimes \rho'"] & & \\
\mathcal{H} & &
\end{tikzcd}$$

est une extension ou encore $\phi^S \otimes \alpha : \phi^S \otimes \phi_S \Rightarrow \phi^S \otimes \phi$ est inversible. Et donc le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{C} \arrow[rr, dashed, "\phi_K"] \arrow[drr, dashed, "\tilde{\phi}_K"] \arrow[dd, dashed, "\phi^S \otimes \phi_S \otimes \phi_K"'] & & \mathcal{H} \arrow[d, dashed, "\tilde{\phi}_K"] \arrow[dl, phantom, "\Leftarrow \rho"] \\
& \Leftarrow \eta' \otimes \phi_K & \mathcal{H} \\
\mathcal{H} \arrow[urr, equal] & &
\end{tikzcd}$$

induit un morphisme de comparaison entre $\tilde{\phi}_K$ et $\phi^S \otimes \phi_S$ qui n'est autre que $(\widetilde{\eta' \otimes \phi_K})$ et qui est bien un morphisme entre monades.

Réciproquement supposons S1 et $\phi^S \otimes \alpha$ inversible ; alors α est inversible. En effet, pour tout (X, X') le morphisme $\phi^S \otimes \alpha(X, X')$, de $\phi^S \otimes \phi_S(X, X')$ dans $\phi^S \otimes \phi(X, X')$ est simplement $\alpha . (S^{op} \times 1_{\mathcal{H}})(X, X')$ de $\phi^S (S^{op} \times 1_{\mathcal{H}})(X, X')$ dans $\phi(S^{op} \times 1_{\mathcal{H}})(X, X')$ et donc la 2-cellule $\phi^S \otimes \alpha$ est donnée dans Cat par

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}^{op} \times \mathcal{H} \arrow[r, dashed] & \mathcal{S}^{op} \times \mathcal{H} \arrow[r, dashed, bend left, "\phi^S"] \arrow[r, dashed, bend right, "\phi_S"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \alpha"] & Ens \end{tikzcd}$$

Comme S est bijectif sur les objets, $S^{op} \times 1_{\mathcal{H}}$ est bijectif sur les objets, et comme pour tout $(X, X') \in \mathcal{H}^{op} \times \mathcal{H}$, $\alpha . (S^{op} \times 1_{\mathcal{H}})(X, X')$ est inversible, α est inversible.

En considérant maintenant les trois axiomes, on peut énoncer :

THEOREME 1. *Soit K un foncteur de $\mathcal{W}$ dans $\mathcal{H}$, alors $(\mathcal{S}, S)$ est une théorie de forme pour K ssi la counité $\rho : \tilde{\phi}_K \otimes \phi_K \Rightarrow \phi_K$ est inversible et $\mathcal{S}$ est la catégorie de Kleisli de la monade de codensité dans Dist $\mathrm{T}_K = (\tilde{\phi}_K, \eta, \mu)$ de K.*

PREUVE. Soit $(\mathcal{S}, S)$ une théorie de forme ; on va d'abord montrer que ${}_S\mathrm{T} = \mathrm{T}_K$; en effet, le morphisme de monade r de ${}_S\mathrm{T}$ vers T_K donné par S2 peut s'écrire, grâce à S3 :

$$r = (\widetilde{\eta' \otimes \phi_K})^{-1} . (\phi^S \otimes \alpha), \quad \text{où} \quad \widetilde{\eta' \otimes \phi_K} : \tilde{\phi}_K \Rightarrow \phi^S \otimes \phi_K$$

est la 2-cellule extension donnée par

$$(\phi^S \otimes \rho') . ((\widetilde{\eta' \otimes \phi_K}) \otimes \phi_K) = (\eta' \otimes \phi_K) . \rho,$$

puisque l'on a

$$\begin{aligned} \rho . ((\widetilde{\eta' \otimes \phi_K})^{-1} . (\phi^S \otimes \alpha)) \otimes \phi_K &= \rho . (\widetilde{\eta' \otimes \phi_K})^{-1} \otimes \phi_K . (\phi^S \otimes \alpha) \otimes \phi_K \\ &= (\eta' \otimes \phi_K)^{-1} . (\phi^S \otimes \rho') . (\phi^S \otimes \alpha) \otimes \phi_K = \\ &= (\eta' \otimes \phi_K)^{-1} . \phi^S \otimes (\rho' . (\alpha \otimes \phi_K)) = (\eta' \otimes \phi_K)^{-1} . \end{aligned}$$

Comme de plus $\phi^S \otimes \alpha$ est inversible, r est un isomorphisme de monades. Alors la condition $\rho . (\eta \otimes \phi_K) = Id\, \phi_K$ et le fait que $\eta' \otimes \phi_K$ (et donc $\eta \otimes \phi_K$) est inversible, entraîne la condition voulue sur la counité.

Inversement, supposons que ${}_S\mathrm{T} = \mathrm{T}_K$ et que $\rho : \tilde{\phi}_K \otimes \phi_K \Rightarrow \phi_K$

est inversible. Remarquons tout d'abord que la codensité nous donne: $\tilde{\rho}.(\phi^S \otimes \alpha) = Id\,\bar{\phi}_K$ où, puisque $\phi^S \otimes \phi_S = \bar{\phi}_K$, $\tilde{\rho}$ est la 2-cellule extension donnée par:

$$\rho.(\tilde{\rho} \otimes \phi_K) = \rho.(\phi^S \otimes \rho') \;;$$

il nous suffit en effet de vérifier que

$$\rho.(\tilde{\rho} \otimes \phi_K).(\phi^S \otimes \alpha) \otimes \phi_K = \rho \;;$$

or

$$\rho.(\tilde{\rho} \otimes \phi_K).(\phi^S \otimes \alpha) \otimes \phi_K = \rho.(\phi^S \otimes \rho').(\phi^S \otimes \alpha) \otimes \phi_K =$$
$$= \rho.\phi^S \otimes (\rho'.\alpha \otimes \phi_K) = \rho \;.$$

On voit de plus que, si ρ est inversible, $\eta \otimes \phi_K$ est inversible et donc que S vérifie S2. Comme

$$\tau = (\widetilde{\eta \otimes \phi_K})^{-1}.(\phi^S \otimes \alpha) = \tilde{\rho}.(\phi^S \otimes \alpha) = Id(\bar{\phi}_K)$$

et comme $\tilde{\rho}$ est inversible, $\phi^S \otimes \alpha$ l'est aussi; par conséquent S3 est vérifié, S étant bijectif sur les objets.

REMARQUE. Nous venons de voir d'après le théorème précédent que l'on a une théorie de forme pour un foncteur K dès que $\rho : \bar{\phi}_K \otimes \phi_K \Rightarrow \phi_K$ est inversible; voyons qu'elle est la signification de cette inversibilité. On a

$$\rho(X,P) : \bar{\phi}_K \otimes \phi_K(X,P) \approx \bar{\phi}_K(X,KP) \to \phi_K(X,P)$$

où, comme

$$\bar{\phi}_K(X,KP) = Nat(\mathcal{H}(KP,K-), \mathcal{H}(X,K-)),$$

$\rho(X,P)$ associe $s(1_{KP})$ à $s \in Nat(\mathcal{H}(KP,K-), \mathcal{H}(X,K-))$. Comme ρ admet toujours pour section $\eta \otimes \phi_K$, c'est-à-dire $\rho.(\eta \otimes \phi_K) = Id\phi_K$ où $\eta \otimes \phi_K(X,P)$ associe $S(f)$ à f, où $S(f) : \mathcal{H}(KP,K-) \to \mathcal{H}(X,K-)$ est la transformation induite par f, dire que ρ est inversible est équivalent à dire que

$$s = S(s(1_{KP})) \quad \text{pour tout} \quad s \in Nat(\mathcal{H}(KP,K-), \mathcal{H}(X,K-)),$$

ou encore, pour tout $f : X \to KP$ dans $\mathcal{H}$ et pour toute transformation $s \in Nat(\mathcal{H}(X,K-), \mathcal{H}(Y,K-))$, on a la formule de commutation

$$s.S(f) = S(s(f)).$$

Un foncteur K vérifiant cette propriété sera dit *formel*.

Différents types de foncteurs vérifient cette propriété, en particulier les foncteurs pleins, les foncteurs très riches de [Fr] et les foncteurs riches de [D-H], Par conséquent les théories de forme considérées dans [H, M, Ba, D-H, Fr] ne sont pas autre chose que l'objet de Kleisli de la monade de codensité dans *Dist* de K, à savoir :

$$\mathcal{S}(X, Y) = \tilde{\phi}_K(X, Y) = Nat(\mathcal{H}(Y, K-), \mathcal{H}(X, K-)).$$

3. ASPECTS A LA ČECH.

L'idée de la théorie de la forme est de travailler sur des approximations d'un objet relativement à un foncteur, soit de type catégorique : Kan continuité, aspect que l'on vient de considérer, soit de type topologique : système inverse K-associé. Dans ce cadre la forme d'un espace apparait comme une sorte de type d'«homotopie de Čech», son lien au type d'homotopie ordinaire étant similaire au lien entre l'homologie singulière et l'homologie de Čech.

DEFINITION. Soit $K: \mathfrak{W} \to \mathcal{H}$ un foncteur; le couple (I, F) où I est une catégorie cofiltrante et F un foncteur de I vers $\mathcal{H}$ est dit *K-associé à* un $X \in |\mathcal{H}|$ s'il existe un cône projectif $\pi = \{p_i : X \to F(i)\}$ tel que

$$\tilde{\pi}(P) : \varinjlim_I \mathcal{H}(F(i), KP) \to \mathcal{H}(X, KP)$$

est un isomorphisme pour tout $P \in |\mathfrak{W}|$ où $\tilde{\pi}(P)$ associe, à la classe d'un $f_i : F(i) \to KP$, $f_i p_i : X \to KP$.

EXEMPLES. 1° Le système inverse formé par les nerfs des recouvrements numérables d'un espace topologique X est un système inverse K-associé à X où K est le plongement de la catégorie d'homotopie des espaces topologiques ayant le type d'un CW-complexe dans la catégorie d'homotopie des espaces topologiques [Mo].

2° Si X est la limite d'un système inverse de compacts, alors X est K'-associé à ce système, où K' est la restriction de K aux espaces compacts.

Ici encore, nous allons donner un sens dans *Dist* à cette notion. Tout d'abord remarquons qu'étant donné un distributeur $\phi : \mathfrak{A} \dashrightarrow \mathfrak{B}$, le distributeur $\phi_{f_{\mathfrak{B}}} \otimes \phi : 1^{op} \times \mathfrak{A} \to Ens$ (où $f_{\mathfrak{B}}$ est le foncteur final $\mathfrak{B} \to 1$) est isomorphe au foncteur $R : \mathfrak{A} \to Ens$ tel que $R(A) = \varinjlim \phi(-, A)$.

Soit I une catégorie cofiltrante.

LEMME. *Le couple (I, F) est K-associé à X ssi le cône π détermine un isomorphisme entre $\phi_{f_I} \otimes \phi^F \otimes \phi_K$ et $\phi^X \otimes \phi_K$.*

PREUVE. On a alors

$$\varinjlim_I \mathcal{H}(F(i), KP) = \phi_{f_I} \otimes \phi^F \otimes \phi_K(1, P)$$

et

$$\pi(P) = \hat{\pi}(1, KP) = \hat{\pi} \otimes \phi_K(1, P),$$

où $\hat{\pi}$ est la 2-cellule

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, dashed, "\phi_{f_I}"] & 1 \\ \mathcal{H} \arrow[u, "\phi^F"] \arrow[r, "Id"'] \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow \hat{\pi}"] & \mathcal{H} \arrow[u, "\phi^X"'] \end{tikzcd}$$

induite par le cône projectif

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "f_I"] \arrow[d, "F"'] & 1 \arrow[d, "X"] \\ \mathcal{H} \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\swarrow \pi"] & \mathcal{H} \end{tikzcd}$$

et les adjonctions $\phi_F \vdash \phi^F$ et $\phi_X \vdash \phi^X$ dans *Dist*. La condition requise pour que (I, F) soit K-associé à X est que $\hat{\pi} \otimes \phi_K$ soit inversible.

Plus généralement, soit la situation suivante dans *Cat* :

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{A} \arrow[r, "L'"] \arrow[d, "F_1"'] & \mathfrak{B} \arrow[d, "F_2"] \\ \mathcal{E} \arrow[r, "K"'] & \mathcal{C} \arrow[r, "L"'] \arrow[ur, phantom, "\swarrow \theta"] & \mathfrak{D} \end{tikzcd} \qquad (*)$$

où θ est une transformation de $F_2 L'$ vers $L F_1$. Soit

$$\hat{\theta} : \phi_{L'} \otimes \phi^{F_1} \Rightarrow \phi^{F_2} \otimes \phi_L$$

la 2-cellule induite par θ et les adjonctions $\phi_{F_1} \dashv \phi^{F_1}$ et $\phi_{F_2} \vdash \phi^{F_2}$, où

$$\hat{\theta} \approx \phi^{F_2} \otimes \phi_L \otimes \epsilon_1 \,.\, \phi^{F_2} \otimes \theta \otimes \phi^{F_1} \,.\, \eta_2 \otimes \phi_{L'} \otimes \phi^{F_1}$$

aux isomorphismes évidents d'associativité près, et

$$\hat{\theta}(B,C) : \phi_{L'} \otimes \phi^{F_1}(B,C) \to \phi^{F_2} \otimes \phi_L(B,C) \approx \phi(F_2 B, LC)$$

associe $L(c).\theta_A.F_2(b)$ à $c \otimes b$, où

$$b : B \to KA \quad \text{et} \quad c : F_1 A \to LC.$$

DEFINITION. On dira que *$(F_1, L, \theta, L', F_2)$ est K-exact* si

$$\hat{\theta} \otimes \phi_K : \phi_{L'} \otimes \phi^{F_1} \otimes \phi_K \to \phi^{F_2} \otimes \phi_L \otimes \phi_K$$

est inversible.

Cette définition apparait aussi dans [V].

EXEMPLES. 1° Si K est l'identité, on retrouve les carrés exacts de [G,V] introduits entre autres pour généraliser les carrés exacts de Hilton.

2° Si K est l'identité, on retrouve aussi les carrés localement initiaux [C-P, Mac] avec θ l'égalité.

3° Le carré suivant

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{A} \arrow[r] \arrow[d, "F"'] & 1 \arrow[d, equal] \\ \mathfrak{B} \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

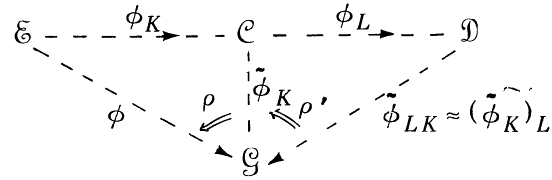
est exact ssi F est initial. De plus, le carré suivant est toujours exact :

$$\begin{tikzcd} F{\downarrow}L \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{B} \arrow[d, "F"] \\ \mathcal{C} \arrow[r, "L"] & \mathfrak{D} \end{tikzcd}$$

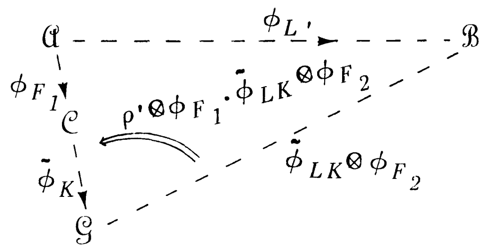
où $F{\downarrow}L$ est la catégorie comma de F et de L, les objets étant les triplets (C, d, B) où $d : FB \to LC$ et les morphismes de (C, d, B) vers (C', d', B') étant les couples (c, b),

$$c : C \to C', \quad b : B \to B' \quad \text{tels que} \quad L(c).d = d'.F(b).$$

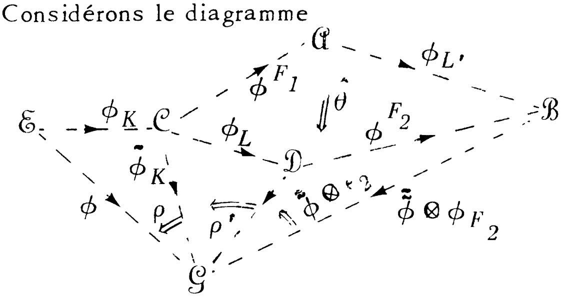
THEOREME 2. *Le carré $(F_1, L, \theta, L', F_2)$ est K-exact ssi pour tout* *distributeur* $\phi : \mathcal{E} \dashrightarrow \mathcal{G}$, *l'extension à droite* $\tilde{\phi}_{LK}$ *de* ϕ *le long de* ϕ_{LK}



est transformée en l'extension



PREUVE. Considérons le diagramme



qui fait apparaître $\tilde{\tilde{\phi}} \otimes \phi_{F_2}$ comme étant une extension de ϕ le long de $\phi^{F_2} \otimes \phi_L \otimes \phi_K$; la 2-cellule $\hat{\theta}$ étant inversible, $\tilde{\tilde{\phi}} \otimes \phi_{F_2}$ est donc aussi une extension de ϕ le long de $\phi_K \otimes \phi^{F_1} \otimes \phi_{L'}$, sa counité étant :

$$\rho . (\rho' \otimes \phi_K) . \tilde{\tilde{\phi}} \otimes \epsilon_2 \otimes \phi_{LK} . \tilde{\tilde{\phi}} \otimes \phi_{F_2} \otimes \hat{\theta} \otimes \phi_K \ ,$$

ce qui prouve que $\tilde{\tilde{\phi}} \otimes \phi_{F_2}$ est l'extension de $\tilde{\tilde{\phi}}$ le long de $\phi_{L'} \otimes \phi^{F_1}$, avec pour counité

$$\rho' . \tilde{\tilde{\phi}} \otimes \epsilon_2 \otimes \phi_L . \tilde{\tilde{\phi}} \otimes \phi_{F_2} \otimes \hat{\theta}$$

Or ce dernier composé vaut

$$\rho' . \tilde{\tilde{\phi}} \otimes \phi_L \otimes \epsilon_1 . \tilde{\tilde{\phi}} \otimes \phi_\theta \otimes \phi^{F_1} \ ,$$

d'après la définition de $\hat{\theta}$. Ce dernier terme peut aussi s'écrire

$$\tilde{\phi}_K \otimes \epsilon_1 . \rho' \otimes \phi_{F_1} \otimes \phi^{F_1} . \tilde{\tilde{\phi}} \otimes \phi_\theta \otimes \phi^{F_1} = \tilde{\phi}_K \otimes \epsilon_1 . (\rho' \otimes \phi_{F_1} . \tilde{\tilde{\phi}} \otimes \phi_\theta) \otimes \phi^{F_1} .$$

Ceci prouve, par transitivité des structures colibres, que $\tilde{\phi}\otimes\phi_{F_2}$ est l'extension de $\tilde{\phi}_K\otimes\phi_{F_1}$ le long de $\phi_{L'}$, avec pour counité $\rho'\otimes\phi_{F_1}\cdot\tilde{\tilde{\phi}}\otimes\phi_\theta$.

Inversement supposons que le carré (*) vérifie cette propriété de relèvement des extensions; on va prendre ici pour ϕ le distributeur: $\phi_{L'}\otimes\phi^{F_1}\otimes\phi_K : \mathcal{E} \dashrightarrow \mathcal{B}$; on a donc la 2-cellule canonique

$$Nat(\phi^{F_2}\otimes\phi_{LK}(B,-), \phi_{L'}\otimes\phi^{F_1}\otimes\phi_K(B',-))$$

dans $Nat(\phi_{L'}(B,-), R\otimes\phi_{F_1}(B',-))$ où

$$R(B,C) = Nat(\phi_K(C,-), \phi_{L'}\otimes\phi^{F_1}\otimes\phi_K(B,-))$$

est inversible. Or, $R\otimes\phi^{F_1}$ étant l'extension de $\phi_{L'}\otimes\phi^{F_1}\otimes\phi_K$ le long de $\phi^{F_1}\otimes\phi_K$, la 2-cellule identité

$$\phi_{L'}\otimes(\phi^{F_1}\otimes\phi_K) \Rightarrow \phi_{L'}\otimes(\phi^{F_1}\otimes\phi_K)$$

détermine une 2-cellule $\gamma : \phi_{L'} \Rightarrow R\otimes\phi^{F_1}$ et donc pour tout $B\in|\mathcal{B}|$ on a une transformation naturelle $\gamma(B,-): \phi_{L'}(B,-) \Rightarrow R\otimes\phi_{F_1}(B,-)$, d'où

$$\hat{\gamma}_B : \phi^{F_2}\otimes\phi_{LK}(B,-) \Rightarrow \phi_{L'}\otimes\phi^{F_1}\otimes\phi_K(B,-).$$

On vérifie immédiatement que $\hat{\gamma}_B(E).\hat{\theta}\otimes\phi_K(B,E) = 1$ et que, inversement, $\hat{\theta}\otimes\phi_K(B,E).\hat{\gamma}_B(E) = 1$ en utilisant cette même propriété pour l'extension de $\phi^{F_2}\otimes\phi_{LK}$.

COROLLAIRE 1. *Le carré $(F_1, L, \theta, L', F_2)$ est K-exact ssi toute extension ponctuelle d'un foncteur $F: \mathcal{E} \to \mathcal{G}$ le long de LK est relevée en une extension ponctuelle $\tilde{\tilde{F}} F_2$ de $\tilde{F} F_1$ le long de L'.*

PREUVE. Semblable à celle de la Proposition 5 à l'exception près que, pour la réciproque, au lieu d'utiliser le distributeur $\phi_{L'}\otimes\phi^{F_1}\otimes\phi_K$, on utilise, pour tout $B\in|\mathcal{B}|$, l'extension ponctuelle du foncteur

$$\phi_{L'}\otimes\phi^{F_1}\otimes\phi_K(B,-): \mathcal{E} \to Ens.$$

Soit $K: \mathfrak{W} \to \mathcal{H}$ un foncteur tel que, pour tout objet X de $\mathcal{H}$, il existe un couple (I,F), $F: I \to \mathfrak{W}$ tel que (I,KF) soit K-associé à X. Soit $\mathcal{C}$ la catégorie ayant les mêmes objets que $\mathcal{H}$ et où, si X et Y sont des objets de $\mathcal{H}$ et si (I, KF) et (J, KG) sont K-associés à X et Y respectivement,

$$\mathcal{C}(X, Y) = Nat(L(KG), L(KF)) = \lim_{\to J} \lim_{\to I} \mathcal{H}(KF(i), KG(j)),$$

où $L(KG)$ et $L(KF)$ sont des foncteurs pro-représentables définis par (I, KF) et (J, KG), c'est-à-dire

$$L(KF)(-) = \lim_{\to I} \mathcal{H}(KF(i), -), \quad L(KG)(-) = \lim_{\to J} \mathcal{H}(KG(j), -).$$

Le Théorème précédent nous permet de retrouver de façon très catégorique l'isomorphisme classique entre $\mathcal{C}$ et la catégorie forme de K.

En effet, les foncteurs pro-représentables apparaissent comme des distributeurs par:

$$\lim_{\to I} \mathcal{H}(KF(i), -) = \phi_{f_I} \otimes \phi^{KF}(1, -),$$

de même pour $L(KG)$.

Si K est un foncteur formel, on retrouve alors l'isomorphisme $\mathcal{C}(X, Y) \approx \mathcal{S}(X, Y)$; en effet,

$$\mathcal{S}(X, Y) = Nat(\mathcal{H}(Y, K-), \mathcal{H}(X, K-)) = Nat(\phi^Y \otimes \phi_K, \phi^X \otimes \phi_K).$$

Or, comme (J, KG) est K-associé à Y, on a $\phi^Y \otimes \phi_K \approx \phi_{f_J} \otimes \phi^{KG} \otimes \phi_K$. Donc

$$Nat(\phi_{f_J} \otimes \phi^{KG} \otimes \phi_K, \phi^X \otimes \phi_K) = Nat(\phi_{f_J} \otimes \phi^{KG}, \phi^X \otimes \tilde{\phi}_K),$$

puisque $\tilde{\phi}_K$ est l'extension de ϕ_K et ϕ^X préserve les extensions; comme $\phi_K \vdash \phi^K$ ce dernier terme vaut aussi

$$Nat(\phi_{f_J} \otimes \phi^G, \phi^X \otimes \tilde{\phi}_K \otimes \phi_K) = Nat(\phi_{f_J} \otimes \phi^G, \phi^X \otimes \phi_K),$$

puisque K est formel. Ceci est encore $Nat(\phi_{f_J} \otimes \phi^G, \phi_{f_I} \otimes \phi^{KG} \otimes \phi_K)$ puisque (I, F) est K-associé à X, et par l'adjonction $\phi_K \vdash \phi^K$ on obtient

$$Nat(\phi_{f_J} \otimes \phi^{KG}(1, -), \phi_{f_I} \otimes \phi^{KF}(1, -)) = \mathcal{C}(X, Y).$$

REMARQUE. Le problème de considérer une bonne catégorie de pro-morphismes pour des foncteurs quelconques (sources non cofiltrantes) a été considéré dans [D-H, 2]. Dans ce contexte, étant donné un foncteur

$K: \mathfrak{C} \to \mathcal{H}$ les auteurs considèrent la catégorie $Pro_K(\mathcal{H})$ ayant pour objets les couples $(X \downarrow K, D_X)$ et des morphismes définis «à la main» tels qu'on ait toujours l'isomorphisme

$$\mathcal{S}(X, Y) \approx Pro_K(\mathcal{H})(D_X, D_Y).$$

On peut voir ici le rapport entre cette catégorie de pro-morphismes et la catégorie de pro-morphismes de type Grothendieck. On sait, d'après l'exemple 2, que le carré suivant est exact :

$$\begin{tikzcd}
X \downarrow K \arrow[r, "f_X"] \arrow[d, "D_X"'] & 1 \arrow[d, "X"] \\
\mathfrak{C} \arrow[r, "K"'] \arrow[ur, phantom, "\Swarrow"] & \mathcal{H}
\end{tikzcd}$$

et donc que $\phi_{f_X} \otimes \phi^{D_X} \approx \phi^X \otimes \phi_K$. Par conséquent

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(X, Y) &= Nat(\mathcal{H}(Y, K-), \mathcal{H}(X, K-)) \approx \\
&\approx Nat(\phi^Y \otimes \phi_K(1,-), \phi^X \otimes \phi_K(1,-)) \approx \\
&\approx Nat(\phi_{f_Y} \otimes \phi^{D_Y}(1,-), \phi_{f_X} \otimes \phi^{D_X}(1,-)) = \\
&\approx Nat(\varinjlim_{Y \downarrow K} \mathfrak{C}(D_Y(g, P'), -), \varinjlim_{X \downarrow K} \mathfrak{C}(D_X(f, P), -)) \\
&\approx \varprojlim_{Y \downarrow K} \varinjlim_{X \downarrow K} \mathfrak{C}(D_X(f, P), D_Y(g, P')).
\end{aligned}$$

Ceci répond à la question implicitement posée dans [D-H2] Introduction.

4. ASPECTS DE QUELQUES RESULTATS CLASSIQUES.

1. *Comparaisons.* Bien des propriétés de la forme découlent évidemment des propriétés de la monade de codensité. Par exemple il est clair d'après la Proposition 3 que, si $(\mathcal{S}, S)$ et $(\mathcal{S}', S')$ sont deux théories de forme pour un foncteur K, il existe un unique foncteur inversible entre $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ qui fait commuter S et S'.

a) Egalement, soit

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{C} \arrow[r, "K"] & \mathcal{H} \arrow[r, "S"] \arrow[dr, "F"'] & \mathcal{S} \\
& & \mathcal{G}
\end{tikzcd}$$

où F est Kan-continu et S est le foncteur de Kleisli de la monade Σ de codensité de K, alors F se factorise à travers $\mathcal{S}$. En effet, F étant l'extension ponctuelle de FK le long de K, il existe une 2-cellule γ de $\phi_F \otimes \Sigma$ vers ϕ_F, déterminée par $\phi_F \otimes \rho$. C'est cette 2-cellule γ qui d'après la Proposition 2, nous donne la factorisation cherchée.

b) Les carrés localement initiaux ont été considérés dans [C-P] dans le but de définir des foncteurs de comparaison entre catégories forme. On peut envisager le problème d'un point de vue plus général. Pour cela, nous allons, encore une fois, utiliser la notion de carré exact. En effet, les carrés exacts s'organisent en une 2-catégorie notée Ex, dont les objets sont les foncteurs $K: \mathfrak{W} \to \mathfrak{H}$, les 1-cellules entre K et $L: \mathfrak{C} \to \mathfrak{R}$ sont les carrés exacts (F_1, L, θ, K, F_2) et où les 2-cellules entre

$$(F_1, L, \theta, K, F_2) \quad \text{et} \quad (F_1', L, \theta', K, F_2')$$

sont données par les couples (ν_1, ν_2) de transformations naturelles :

$$\nu_1 : F_1 \to F_1', \quad \nu_2 : F_2 \to F_2'$$

vérifiant un axiome de cohérence évident avec θ et θ'.

De même, soit $\mathrm{T} = (T, \eta, \pi)$ une monade dans $Dist$ sur $\mathfrak{A}$ et $\mathrm{T}' = (T', \eta', \pi')$ une monade dans $Dist$ sur $\mathfrak{B}$; une 1-cellule de T vers T' sera la donnée d'un couple (F, δ) où F est un foncteur de $\mathfrak{A}$ vers $\mathfrak{B}$ et δ une 2-cellule $\phi_F \otimes T \to T' \otimes \phi_F$ vérifiant les cohérences usuelles avec les η et les μ. Une 2-cellule entre (F, δ) et (F', δ') sera donnée par une transformation naturelle $\phi : F \to F'$ vérifiant les conditions de cohérence naturelle avec δ et δ'. Soit Mon la 2-catégorie ainsi constituée.

La construction de la catégorie de Kleisli associée à une monade de $Dist$ définit un 2-foncteur Kl de Mon dans Cat 2-adjoint à gauche de l'inclusion i de Cat dans Mon, qui associe à toute catégorie $\mathfrak{A}$ la monade identité sur $\mathfrak{A}$; de plus, à toute flèche $K: \mathfrak{W} \to \mathfrak{H}$ est associée la monade de codensité T_K. Cette construction s'étend en ùn 2-foncteur $Dens: Ex \to Mon$ de la façon suivante :

Le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "K"] \arrow[d, "F_1"'] & \cdot \arrow[d, "F_2"] \arrow[dl, phantom, "\theta"] \\ \cdot \arrow[r, "L"] \arrow[d, "L"'] & \cdot \arrow[dl, dashed, "T_L"] \arrow[dl, phantom, bend right, "\rho"'] \\ \cdot & \end{tikzcd}$$

étant une extension dans *Dist* d'après le Théorème 2, le diagramme

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "K"] \arrow[dr, "K"] \arrow[d, "F_1"'] & \cdot \arrow[d, dashed, "T_K"] \arrow[d, phantom, "\rho"'] \\ \cdot \arrow[dr, "L"'] & \cdot \arrow[d, "F_2"] \arrow[d, phantom, "\theta"'] \\ & \cdot \end{tikzcd}$$

détermine une 2-flèche $\delta : \phi_{F_2} \otimes T_K \to T_L \otimes \phi^{F_2}$ qui nous donne en fait un morphisme (F_2, δ) de T_K vers T_L. On obtient les comparaisons entre catégories forme définies dans [C-P] en composant ces deux 2-foncteurs. Et donc on obtiendra plus généralement une comparaison entre les catégories forme de K et K' dès que K et K' seront liés par un carré exact.

2. *Extension de Kan, extension de Čech et continuité.* Le Théorème 2 nous donne aussi le

COROLLAIRE 2. *Soit $K : \mathfrak{W} \to \mathfrak{H}$ un foncteur, $(1, F)$ un couple K-associé à X ; alors toute extension de Kan ponctuelle $\check{T}$ d'un foncteur le long de K est telle que $\tilde{T} X = \varprojlim T F$.*

PREUVE. On remarque que, pour tout distributeur ϕ, dans l'extension

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{A} \arrow[rr, dashed, "\phi_{f\mathfrak{A}}"] \arrow[d, dashed, "\phi"'] & & 1 \arrow[dll, dashed, "\tilde{\phi}"] \arrow[dll, phantom, bend right, "\Leftarrow"'] \\ \mathfrak{B} & & \end{tikzcd}$$

on a $\tilde{\phi}(B, 1) = \varprojlim \phi(B, -)$. Donc, en particulier, dans la situation

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r] \arrow[d, "TF"'] & 1 \\ \mathcal{B} & \end{tikzcd}$$

$\tilde{\phi}_{TF}(B, I) = \varprojlim \mathcal{B}(B, TF-)$, et puisque $\tilde{\phi}_{TF}$ est le distributeur $\phi_{\tilde{T}X}$ associé au foncteur constant sur $\tilde{T}X$, alors $\tilde{T}X$ est la limite de TF.

REMARQUES. 1° Autrement dit, les extensions de Kan ponctuelles transforment les systèmes inverses en limites. Il en est donc ainsi pour les foncteurs K-continus et en particulier pour $\mathcal{S}$ lui-même, lorsqu'il s'agit d'une théorie de forme. On retrouve donc aussi les résultats particuliers de [C-P] (Proposition 1) et [D-S] (Théorème 3.24).

2° On voit en particulier que le carré suivant est exact :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "K"] \arrow[d, "F_1"'] & \mathcal{B} \arrow[d, "F_2"] \arrow[dl, phantom, "\theta"] \\ \mathcal{C} \arrow[r, equal] & \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

ssi c'est une extension projective absolue, c'est-à-dire préservée par tout foncteur, ce qui nous donne le dual de [Ha]. Mais surtout,

on peut dire que le couple (I, F) *est* K*-associé à* X *si en quelque sorte* X *est une «*K*-limite absolue» de* F*, c'est-à-dire si* X *est transformé en limite par toute extension de Kan le long de* K.

3° D'un autre côté, il est bien connu (voir par exemple [C-P]) que, lorsque K est pleinement fidèle, les extensions de Čech (où, si G est un foncteur de $\mathcal{W}$ vers $\mathcal{F}$ et F un foncteur de I vers $\mathcal{W}$ tel que (I, KF) soit K-associé à X, on pose $\check{G}(X) = \varprojlim GF$) sont des extensions de Kan ponctuelles. Cela apparait dans ce contexte, de façon particulièrement simple. En effet, K étant pleinement fidèle, (I, KF) est K-associé à X ssi le carré suivant est exact :

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r] \arrow[d, "F"'] & 1 \arrow[d, "X"] \arrow[dl, phantom, "\Leftarrow"] \\ \mathcal{W} \arrow[r, "K"'] & \mathcal{H} \end{tikzcd}$$

et d'après le Théorème 2, on a $\check{G}(X) \approx \bar{G}(X)$, la naturalité de cet isomorphisme étant obtenue par un calcul à peine plus difficile.

On remarquera au passage que ce Théorème 2 permet de calculer les extensions de Kan ponctuelles à partir de n'importe quel carré exact et pas spécialement un carré comma comme dans [ML].

3. *K-domination, K-stabilité et limites.* On supposera maintenant K pleinement fidèle comme dans toutes les théories classiques. Un objet X de la catégorie forme $\mathcal{S}$ de K est dit *K-dominé* lorsqu'il existe un objet P de $\mathfrak{C}$, des morphismes f de X vers SKP et g de SKP vers X dans $\mathcal{S}$ tels que $gf = X$. On dit que X *est K-stable* si X est isomorphe dans $\mathcal{S}$ à un objet de $\mathfrak{C}$. Soit F un foncteur de I vers $\mathfrak{C}$ tel que (I, KF) soit K-associé à X.

REMARQUE. *Un objet X est K-stable ssi F admet une limite absolue. Un objet X K-dominé est K-stable ssi F admet une limite.*

En effet, si X est K-stable, il existe un objet P de $\mathfrak{C}$ tel que X soit isomorphe à KP dans $\mathcal{S}$, c'est-à-dire, au niveau des pro-objets, que $\phi_{f_I} \otimes \phi^F$ est isomorphe à ϕ^P, puisque le couple (I, KP) est K-associé à KP. Cet isomorphisme détermine donc un carré exact:

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r] \arrow[d, "F"'] & 1 \arrow[dl, "P"] \\
\mathfrak{C} = \mathfrak{C} &
\end{tikzcd}$$

et signifie que P est une limite absolue de F. La réciproque est triviale.

Si maintenant X est K-dominé par P', alors $\phi_{f_I} \otimes \phi^F$ est un sous-objet scindé de $\phi^{P'}$, et donc $\phi_{f_I} \otimes \phi^F$ admet un adjoint dans *Dist* puisque $\phi^{P'}$ en admet un; cet adjoint est nécessairement l'extension $\bar{\phi}$ de l'identité:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{C} \arrow[r, dashed, "\phi^F"] \arrow[d, equal] & I \arrow[r, dashed, "\phi_{f_I}"] & 1 \arrow[dll, dashed, "\bar{\phi}"] \\
\mathfrak{C} \arrow[ur, dashed, "\phi_F"] & &
\end{tikzcd}$$

qui est aussi l'extension de ϕ_F le long de la flèche finale. Si F admet une limite P, alors $\bar{\phi}$ est isomorphe à ϕ_P et $\phi_{f_I} \otimes \phi^F$ étant coadjoint de $\bar{\phi}$ est isomorphe à ϕ^P, d'où X isomorphe à KP dans $\mathcal{S}$.

BIBLIOGRAPHIE.

Ba. BACON P., Axiomatic shape theory, *Proc. A.M.S.* 53 (1975), 489-496.

Be. BENABOU J., 1. Les distributeurs, *Rapport 33 Inst. Math. Pure Appl.*, Univ. Louvain-la-Neuve (1973).

2. Introduction to bicategories, *Lecture Notes in Math.* 47, Springer 1967, 1-77.

Bo. BORSUK K., Concerning homotopy properties of compacts, *Fund. Math.* 62 (1968), 223-254.

C-P. CORDIER J.-M. & PORTER T., Introduction à la théorie de la forme I, *Esquisses Mathématiques* 30, Amiens (1978).

D-H. DELEANU A. & HILTON P., 1. On the categorical shape of a functor, *Fund. Math.* 97 (1977), 157-176.

2. Borsuk shape and Grothendieck categories of pro-objects, *Math. Proc. Cambridge* 79 (1976), 473-482.

D-S. DYDAK & SEGAL J., Shape theory, *Lecture Notes in Math.* 581 (1977).

Fo. FOX R.H., On shape, *Fund. Math.* 74 (1972), 47-71.

Fr. FREI A., On categorical shape theory, *Cahiers Topo. et Géom. Diff.* XVII (1976), 261-294.

Fr-K. FREI A. & KLEISLI H., Shape invariant functors, Applications in module Theory,

G. GUITART R., *Relations et carrés exacts*, à paraître.

Go-Gr. GOUZOU M.-F. & GRUNIG R., Caractérisation de *Dist*, *C.R.A.S. Paris* 276 (1973), 519.

H. HOLSZTYNSKI W., An extension and axiomatic characterization of Borsuk's theory of shape, *Fund. Math.* 70 (1971), 157-168.

Ha. HARTING R., Distributoren und Kan-Erweiterungen, *Archiv Math.* XXIX-4 (1977).

Ma. MARDESIČ S., Shape for topological spaces, *Gen. To. and Appl.* 3 (1973), 265-282.

Mac. MAC DONALD, Natural factorizations and the Kan extension of cohomology theories, *Cahiers Topo. et Géom. Diff.* XVII-4 (1976), 3.

M-S. MARDESIČ S. & SEGAL J., Shape of compacts and ANR systems, *Fund. Math.* 72 (1971), 41-59.

ML. MACLANE S., *Categories for the working mathematician*, Springer, 1971.

Mo. MORITA K., On shapes of topological spaces, *Fund. Math.* 86 (1975), 251-259.

P. PORTER T., Generalized shape theory, *Proc. Royal Irish Acad.* Sec. A 74, (1974), 33-48.

T. THIEBAUD M., *Self-dual structure-semantics and algebraic categories*, Dalhousie Univ., Halifax, N.S., 1971.

V. VAN DEN BRIL L., *Thèse*, Amiens, 1978.

U.E.R. de Mathématiques
33 rue Saint-Leu
80039 AMIENS CEDEX.