

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES

RENÉ GUITART

Tenseurs et machines

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 21, n° 1 (1980), p. 5-62

http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1980__21_1_5_0

© Andrée C. Ehresmann et les auteurs, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

TENSEURS ET MACHINES

par René GUITART

En hommage reconnaissant et respectueux à Charles Ehresmann

INTRODUCTION.

Le but de ce travail est de munir certaines catégories d'algèbres K^P au-dessus d'une catégorie monoïdale (K, \otimes, \dots) d'une structure monoïdale, i. e. d'un bon produit tensoriel $\hat{\otimes}$. Une application au non-déterminisme est donnée.

a) Tout d'abord au n° 1 du Chapitre 1 on montre que les lois distributives $D: \otimes \Rightarrow P$ d'un tenseur $\otimes: K \times K \rightarrow K$ sur une monade $P: K \Rightarrow K$ sont aussi bien des extensions $\bar{\otimes}$ de \otimes à KIP (catégorie de Kleisli de P) que des relèvements \tilde{P} de P à K^{\otimes} (catégorie des « algèbres » de \otimes). Avec trois équations de plus (5, 6, 7, n° 11) on aboutit exactement aux monades monoïdales, i. e. aux monades dans la 2-catégorie *Mon* des catégories monoïdales (voir [10] et [20]).

b) On prouve ensuite au n° 1.2 le :

THEOREME A. 1° Pour toute monade monoïdale (P, D) et tout \otimes -monoïde M on a une loi distributive (au sens d'Applegate-Beck) $(-) \otimes M \Rightarrow P$.

2° P se relève aux \otimes -monoïdes, et si de plus K est à sommes dénombrables, on a une loi distributive (conjecturée par Kock dans [20]) $(-)^* \Rightarrow P$, avec $(-)^*$ la monade dont les algèbres sont les \otimes -monoïdes.

Arbib-Manes [1] et E. Burroni [8] ont montré la nécessité dans l'étude du non-déterminisme d'avoir une structure de monade P sur le processus P « donnant du flou », et une loi distributive $(-)^* \Rightarrow P$. En vue de fonder la théorie catégorique des automates non-déterministes ils ont donné dans des cas particuliers les lois distributives du Théorème A. On les obtient ici en général et surtout on voit qu'elles découlent de la donnée plus fondamentale $D: \otimes \Rightarrow P$.

c) Comme exemples de monades monoïdales, on cite en 1.3 les mona-

des $(-)\hat{\otimes}M$ avec M un $\hat{\otimes}$ -monoïde commutatif, et les monades fortes commutatives sur les catégories $(K, \hat{\otimes}, \dots)$ monoïdales symétriques fermées (suivant Kock [20]). En particulier on a sur Ens la monade P_L , des parties L -floues (avec $P_L(X) = L^X, \dots$), où L est un monoïde abélien complet.

d) En 1.4 on rappelle les constructions connues des produits tensoriels utiles à l'intelligence de la suite, notamment en termes de bimorphismes (Banachewski-Nelson [2], Foltz [12], Kelly) (voir n° 1.5.2, 3), en termes de *costructures doubles* (Foltz-Lair [13, 21]) (voir n° 1.5.4). On rappelle aussi les résultats de Porst-Wischnewsky [23], de A. et C. Fhresmann [3], de Day [9], Greve [14], Linton (cité dans Manes [22]).

e) En 1.5 on montre (Proposition 16) comment la formule du produit tensoriel d'espaces vectoriels s'étend au produit tensoriel d'algèbres d'une monade arbitraire. C'est le point de départ du

THEOREME B. Soit (P, D) une monade monoïdale sur une catégorie monoïdale $(K, \hat{\otimes}, \dots)$.

1° Si K^P (catégorie des algèbres de P) est à conoyaux (par exemple si K est à conoyaux et $K^P \rightarrow K$ à quasi-quotients), alors il existe $\hat{\otimes}$ sur K^P classifiant les D -bimorphismes, donné par un conoyau simple dans K^P :

$$L(PA) \bar{\otimes} L(PB) \xrightarrow[S_A \bar{\otimes} L\beta]{L\alpha \bar{\otimes} S_B} LA \bar{\otimes} LB \xrightarrow{W_{\alpha, \beta}} (A, \alpha) \hat{\otimes} (B, \beta).$$

On a alors $(K^{\hat{\otimes}})^{\tilde{P}} \simeq (K^P)^{\hat{\otimes}}$.

2° Si de plus (P, D) est cohérente (i. e. si $\forall X \in K_0, (-)\hat{\otimes}LX$ préserve les conoyaux de

$$(L\alpha \bar{\otimes} L\beta, s_A \bar{\otimes} L\beta) \text{ et } (l_{(A, \alpha)} \hat{\otimes} L\beta, l_{(A, \alpha)} \hat{\otimes} s_B)$$

pour tout $(A, \alpha), (B, \beta)$ de $(K^P)_0$, et si $LX \hat{\otimes} (-)$ préserve les conoyaux analogues) alors $(K^P, \hat{\otimes}, \dots)$ est monoïdale, et même le foncteur $U^P: (K^P, \hat{\otimes}) \rightarrow (K, \hat{\otimes})$ est une factorisation monoïdale finale de (P, D) .

3° En particulier si $(K, \hat{\otimes}, \dots)$ est monoïdale symétrique fermée à

noyaux, si (P, D) est une monade monoïdale symétrique (ce qui, suivant Kock [20] équivaut à dire que (P, D) est une monade forte commutative) et si K^P est à conoyaux, alors $\hat{\otimes}$ étant adjoint à Hom , (P, D) est cohérente, si bien que, K^P étant fermée suivant Kock [20], on a :

$(K^P, \hat{\otimes}, \dots)$ est monoïdale symétrique fermée.

On améliore ainsi des résultats de Kock [20], Porst-Wischnewsky [23], Day [9], A. et C. Ehresmann [3], Foltz-Lair [13, 21], et de Keigher [18]. Ce dernier en particulier obtenait 3 mais sous l'hypothèse supplémentaire que P soit « adjointe », i. e. de la forme $(-)\otimes M$ avec M un monoïde abélien.

En Février 1979 j'ai exposé ce Théorème B à Kock ; il m'a appris que Day lui avait indiqué dans une lettre un résultat assez semblable à 3, résultat que Day ne semble pas avoir publié.

f) Si (K, \otimes, \dots) est une catégorie monoïdale et $P : K \rightarrow K$ un foncteur, une machine (resp. une machine P -floue) d'entrée X et sortie Y , où X et Y sont des objets de K , est un couple de morphismes de K :

$$E \xleftarrow{d} X \otimes E \xrightarrow{s} Y \quad (\text{resp.} \quad P E \xleftarrow{d} X \otimes E \xrightarrow{s} P Y).$$

Comme l'ont montré de nombreux auteurs (voir dans Ehrig & al [11] et Manes [22] de multiples références) un outil algébrique indispensable à la simulation en Sciences expérimentales est la notion de *machine non-déterministe*, ou *machine P -floue* (e. g. machine partielle, relationnelle, floue, stochastique, etc...) avec entrée et sortie des ensembles, des monoïdes, des monoïdes flous.

Au n° 2.1 on indique comment les *concepts les plus généraux de machines non-déterministes* (avec, même, entrées et sorties des catégories P -floues et des bicatégories P -graduées) *sont en réalité juste des enrichissements* (au sens de Eilenberg-Kelly [10]) *dans $(K^P, \hat{\otimes})$ de la notion ordinaire (déterministe) de machine.*

g) Au n° 2.2 on montre que la mise en série des machines P -floues dans (K, \times) donne une bicatégorie de machines, comme dans le cas déterministe, plus précisément parce que, (P, D) étant monoïdale, (KlP, \times)

est monoïdale, de sorte que les P -relations ternaires forment une bicatégorie (KIP, \times) -graduée.

h) Dans le n° 2.3 on résume des résultats de Fhrig & al [11] sur l'étude du comportement des machines non-déterministes (voir aussi le dernier chapitre de Manes [22]) et sur la minimisation de ces machines.

Ensuite on montre que, pour les machines P_{Ω} -floues dans un topos de Grothendieck, la minimisation est possible (Proposition 40).

i) De notre point de vue, l'idée des catégories pseudo-fermées de [11] consistait à se placer dans (KIP, \times) , ce qui - littéralement - était incomplet (e.g. sans calcul d'images, de limites). L'observation fondamentale que nous voulons faire est la suivante : *Tous les exemples de P -flous envisagés sont décrits par des monades monoïdales cohérentes*, de sorte qu'en appliquant le Théorème B on dispose de la catégorie monoïdale $(K^P, \hat{\otimes})$. En conséquence, on peut espérer obtenir les divers théorèmes d'observabilité et minimisations des machines P -floues de [11] par simple lecture dans $(K^P, \hat{\otimes}, \dots)$ des théorèmes déterministes de [11] valables dans (K, \otimes, \dots) (les machines P -floues dans (K, \otimes) étant des machines déterministes particulières dans $(K^P, \hat{\otimes})$). Nous montrons que ceci est possible (Propositions 42, 43), grâce au

THEOREME C. *Soit (K, \otimes) monoïdale fermée symétrique à sommes dénombrables, à images régulières, à conoyaux et noyaux. Soit P une monade forte commutative régulière sur K telle que K^P soit à conoyaux.*

Alors $(K^P, \hat{\otimes})$ est monoïdale fermée symétrique à sommes dénombrables, à images régulières, à conoyaux et noyaux. Par suite les résultats de Ehrig & al [11] s'appliquent dans $(K^P, \hat{\otimes})$.

En conclusion notre position est la suivante : s'il ne fait pas de doute que le concept de P -flou soit utile pour permettre aux expérimentateurs une analyse plus naturelle et plus fine des situations à simuler, il apparaît que la partie mathématique est en fait très simple puisque, dès que l'on se place dans le cadre «complet» naturel $(K^P, \hat{\otimes})$, ceci se réduit à un calcul déterministe classique.

Les autres problèmes qui ne se laissent pas réduire par le Théorème C, et sont donc *effectivement non-déterministes*, constituent la partie fine de la théorie des \mathbb{P} -machines, qui se trouve ainsi mieux cernée.

j) Pour terminer nous voudrions indiquer que *Mon* est de la forme $\mathcal{D}\text{-Cat}$ (catégorie des \mathcal{D} -pseudo-algèbres) pour un club convenable \mathcal{D} sur *Cat*, que la donnée d'une monade monoïdale (P, D) revient à la donnée d'un 2-foncteur $P: \Delta \rightarrow \text{Mon}$, et que le 2 du Théorème B (= Proposition 28 du Paragraphe 1.6) montre que, suivant D. Bourn [7], $(K^{\mathbb{P}}, \hat{\otimes})$ est un objet d'Eilenberg-Moore de (P, D) (= 2-catalimite de (P, D)). On résoud donc par le Théorème B un cas spécial du problème général suivant :

Pour un club \mathcal{D} , déterminer les 2-foncteurs $F: A \rightarrow \mathcal{D}\text{-Cat}$ ayant une 2-lim préservée par $\mathcal{D}\text{-Cat} \rightarrow \text{Cat}$.

Ce type de problème relève de [19]. Sa résolution générale serait imitation du cas spécial vu ici, en traduisant tout précisément en termes de lax-limites et de 2-esquisses. En effet, A. Ehresmann nous a fait remarquer à juste titre que les Propositions 1, 2,3,5, 8 se prouvent plus «conceptuellement» en termes de lax-limites, de commutation de lax-limites, puisque :

$$Kl P = \text{colax-colim } P, \quad K^{\mathbb{P}} = \text{lax-lim } P, \quad K^{\otimes} = \text{lax-lim } \otimes, \\ \tilde{P} = \text{lax-lim} (P \times P \xrightarrow{(D, \otimes)} P), \text{ etc...}$$

Néanmoins comme le calcul des $\hat{\otimes}$ peut intéresser des lecteurs non au fait des techniques des lax limites, nous en restons ici aux preuves «à la main».

N.B. Les principaux résultats ont été annoncés dans trois conférences en 1979 :

- à Paris 7, en Mars, au Séminaire de Catégories Guitart - Lair-Coppey-Foltz, Exposé n°15,
- à Oberwolfach, en Juillet, au meeting «Kategorien»,
- à Arnsberg, en Octobre, au Nordwestdeutsches Kategorienseminar.

SOMMAIRE.

Introduction

Sommaire

1. Tenseurs :

1.1. Lois distributives $D: \mathcal{O} \Rightarrow \mathbf{P}$ et monades monoïdales.

1.2. Lois distributives usuelles associées.

1.3. Cas d'une base monoïdale fermée symétrique, et autres exemples.

1.4. Rappels de constructions des produits tensoriels.

1.5. Bimorphismes et formule du produit tensoriel $\hat{\mathcal{O}}$.

1.6. Structure monoïdale de $(K^{\mathbf{P}}, \hat{\mathcal{O}})$ pour $D: \mathcal{O} \Rightarrow \mathbf{P}$ monade monoïdale cohérente.

2. Machines :

2.1. \mathbf{P} -machines et bicatégories \mathbf{P} -graduées.

2.2. \mathbf{P} -machines en série et relations ternaires.

2.3. \mathbf{P} -machines en parallèle et comportement.

Références.

1. TENSEURS.

1.1. Lois distributives $D: \otimes \Rightarrow P$ et monades monoidales.

Les lois distributives d'Applegate-Beck (cf. [4]) sont utilisées dans [1, 8] pour l'étude des automates. Dans le même but nous introduisons ici un type différent de loi distributive (déjà noté en [16]).

DEFINITION 1. Soit (K, \otimes) une catégorie K munie d'un bifoncteur $\otimes: K \times K \rightarrow K$ et soit $P = (P, a, S)$ une monade sur K . On appelle *loi distributive de \otimes sur P* la donnée, pour tout $X, Y \in K_0$ (= classe des objets de K) d'un morphisme

$$P X \otimes P Y \xrightarrow{D_{X,Y}} P(X \otimes Y)$$

tel que

1. Pour tout $f: X \rightarrow Y, f': X' \rightarrow Y'$ de K ,

$$\begin{array}{ccc} P X \otimes P X' & \xrightarrow{D_{X,X'}} & P(X \otimes X') \\ P f \otimes P f' \downarrow & = & \downarrow P(f \otimes f') \\ P Y \otimes P Y' & \xrightarrow{D_{Y,Y'}} & P(Y \otimes Y') \end{array}$$

2. Pour tout $X, X' \in K_0$,

$$\begin{array}{ccc} P X \otimes P X' & \xrightarrow{D_{X,X'}} & P(X \otimes X') \\ a_X \otimes a_{X'} \swarrow & = & \searrow a_{X \otimes X'} \\ & X \otimes X' & \end{array}$$

3. Pour tout $X, X' \in K_0$,

$$\begin{array}{ccc} & P(P X \otimes P X') & \\ D_{P X, P X'} \nearrow & & \searrow P(D_{X,X'}) \\ P^2 X \otimes P^2 X' & = & P^2(X \otimes X') \\ S_X \otimes S_{X'} \searrow & & \swarrow S_{X \otimes X'} \\ P X \otimes P X' & \xrightarrow{D_{X,X'}} & P(X \otimes X') \end{array}$$

PROPOSITION 1. La donnée d'une loi distributive $D: \otimes \Rightarrow P$ équivaut à la donnée d'un foncteur $\bar{\otimes}: Kl P \times Kl P \rightarrow Kl P$ tel que

$$\begin{array}{ccc}
 Kl P \times Kl P & \xrightarrow{\bar{\otimes}} & Kl P \\
 L_P \times L_P \uparrow & = & \uparrow L_P \\
 K \times K & \xrightarrow{\otimes} & K
 \end{array}$$

PREUVE. $Kl P$ étant donc la catégorie de Kleisli de la monade P et L_P le foncteur qui à $f: X \rightarrow Y$ associe $\overline{a_Y \cdot f}: X \dashrightarrow Y$ dans $Kl P$ (en notant $\bar{r}: X \dashrightarrow Y$ le morphisme de $Kl P$ défini par $r: X \rightarrow P Y \in K$), la vérification des axiomes est omise et repose sur l'écriture de tout morphisme $\bar{r}: X \dashrightarrow Y$ de $Kl P$ sous la forme

$$\bar{r} = \overline{I_{P Y}} \circ (\overline{a_{P Y}} \cdot r),$$

où « \circ » désigne la loi de composition dans la catégorie $Kl P$.

- Si D est donné, on obtient $\bar{\otimes}$ par :

$$\bar{r} \bar{\otimes} \bar{r}' = \overline{D_{Y, Y}} \cdot (\overline{r \otimes r'});$$

- Si $\bar{\otimes}$ est donné, D se définit par $\overline{D_{X, Y}} = \overline{I_{P X}} \bar{\otimes} \overline{I_{P Y}}$.

Soit K^\otimes la catégorie des «algèbres» de \otimes , dont les objets sont les $(A, B, C; h)$ avec $h: A \otimes B \rightarrow C$, et où un morphisme de $(A, B, C; h)$ vers $(A', B', C'; h')$ est un triplet (α, b, c) avec

$$\alpha: A \rightarrow A', \quad b: B \rightarrow B', \quad c: C \rightarrow C'$$

dans K tels que $h' \cdot (\alpha \otimes b) = c \cdot h$. On note $U^\otimes: K^\otimes \rightarrow K^3$ le foncteur qui oublie h .

PROPOSITION 2. La donnée d'une loi distributive $D: \otimes \Rightarrow P$ équivaut à la donnée d'une monade $\tilde{P} = (\tilde{P}, \tilde{a}, \tilde{S})$ sur K^\otimes telle que

$$\begin{array}{ccc}
 K^\otimes & \xrightarrow{\tilde{P}} & K^\otimes \\
 U^\otimes \downarrow & = & \downarrow U^\otimes \\
 K^3 & \xrightarrow{P^3} & K^3
 \end{array}$$

c'est-à-dire telle que :

$$U^\otimes \tilde{P} = P^3 U^\otimes, \quad U^\otimes \tilde{a} = a^3 U^\otimes \quad \text{et} \quad U^\otimes \tilde{S} = S^3 U^\otimes.$$

PREUVE. Si \tilde{P} est connu, on obtient D par l'égalité

$$\tilde{P}(X, Y, X \otimes Y; Id_{X \otimes Y}) = (PX, PY, P(X \otimes Y); D_{X,Y}).$$

Si D est donné, on obtient \tilde{P} par

$$\tilde{P}(A, B, C; h) = (PA, PB, PC; P(h).D_{A,B}),$$

$$\tilde{a}_{(A,B,C)} \equiv (a_A, a_B, a_C) \text{ et } \tilde{S}_{(A,B,C)} = (S_A, S_B, S_C).$$

Les éléments de $(K^{\otimes})^{\tilde{P}}$ ou \tilde{P} -algèbres s'identifient aux quadruplets $((A, \alpha), (B, b), (C, c); h)$, où (A, α) , (B, b) et (C, c) sont des P -algèbres et où $h: A \otimes B \rightarrow C$ est un morphisme de K tel que

$$\begin{array}{ccccc} & PA \otimes PB & \xrightarrow{D_{A,B}} & P(A \otimes B) & \xrightarrow{Ph} & PC \\ \text{BIM} & \alpha \otimes b \downarrow & & = & & \downarrow c \\ & A \otimes B & \xrightarrow{\quad h \quad} & & & C \end{array}$$

PROPOSITION 3. Si K^P est à conoyaux, alors on a un bifoncteur $\hat{\otimes}$ sur K^P tel que $(K^{\otimes})^{\tilde{P}} \approx (K^P)^{\hat{\otimes}}$.

PREUVE. Voir paragraphe 1.5.7, après la Proposition 16.

En vue de décomposer la loi distributive $D: \otimes \Rightarrow P$ on pose

$$- r_{A,B} = D_{A,B} \cdot (l_{PA} \otimes a_B): PA \otimes B \rightarrow P(A \otimes B),$$

$$- l_{A,B} = D_{A,B} \cdot (a_A \otimes l_{PB}): A \otimes PB \rightarrow P(A \otimes B).$$

On a alors les formules 1', 2', 3' suivantes (et des formules duales 1'', 2'', 3'' pour l):

1'. Pour tout $f: X \rightarrow Y$, $f': X' \rightarrow Y'$ de K ,

$$r_{Y,Y'} \cdot (Pf \otimes f') = P(f \otimes f') \cdot r_{X,X'}.$$

2'. Pour tout $X, X' \in K_0$,

$$r_{X,X'} \cdot (a_X \otimes l_{X'}) = a_{X \otimes X'}.$$

3'. Pour tout $X, X' \in K_0$,

$$r_{X,X'} \cdot (S_X \otimes l_{X'}) = S_{X \otimes X'} \cdot P(r_{X,X'}) \cdot r_{PX,X'}.$$

En effet, 1' et 2' résultent immédiatement de 1 et 2, et pour 3' on a :

$$\begin{aligned} r_{X,X'} \cdot (S_X \otimes l_{X'}) &= D_{X,X'} \cdot (l_{PX} \otimes a_{X'}) \cdot (S_X \otimes l_{X'}) = \\ &= D_{X,X'} \cdot (S_X \otimes S_{X'}) \cdot (l_{P^2X} \otimes P(a_{X'}) \cdot a_{X'}) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (S_{X \otimes X'} \cdot P(D_{X, X'}) \cdot D_{PX, PX'}) \cdot (1_{P^2 X} \otimes P a_{X'}) \cdot (1_{P^2 X} \otimes a_{X'}) = \\ &= S_{X \otimes X'} \cdot P(D_{X, X'}) \cdot P(1_{PX} \otimes a_{X'}) \cdot D_{PX, X'} \cdot (1_{P^2 X} \otimes a_{X'}). \end{aligned}$$

Une famille $r_{X, X'}$ vérifiant 1', 2' et 3' est dite *loi distributive droite de \otimes sur P*. Une famille $l_{X, X'}$ vérifiant 1'', 2'' et 3'' est dite *loi distributive gauche de \otimes sur P*.

r et l étant définis à partir de D comme ci-dessus, on vérifie :

4. Pour tout $X, X' \in K_0$, $\bar{l}_{X, X'} \circ \bar{r}_{X, PX'} = \bar{r}_{X, X'} \circ \bar{l}_{PX, X'}$, soit

$$S_{X \otimes X'} \cdot P(l_{X, X'}) \cdot r_{X, PX'} = S_{X \otimes X'} \cdot P(r_{X, X'}) \cdot l_{PX, X'}.$$

Si r et l sont deux lois distributives droite et gauche arbitraires de \otimes sur P, on dit que r et l sont *commutantes* si on a la formule 4.

PROPOSITION 4. *Etant donné une monade P sur une catégorie K et un foncteur $\otimes: K \times K \rightarrow K$, il y a équivalence entre la donnée d'une loi distributive $D: \otimes \Rightarrow P$ et la donnée d'un couple (r, l) constitué d'une loi distributive droite r et d'une loi distributive gauche l avec r et l commutantes.*

PREUVE. On observe si l'on part de D que dans la formule 4 les deux membres valent $D_{X, X'}$; donc réciproquement, partant de r et l commutantes, on définit D grâce à 4, et on montre que

$$r_{A, B} = D_{A, B} \cdot (1_{PA} \otimes a_B) \quad \text{et} \quad l_{A, B} = D_{A, B} \cdot (a_A \otimes 1_{PB}).$$

Ensuite, vu ce qui a été montré ci-dessus, il reste surtout à vérifier les formules 1, 2 et 3. Pour 1 c'est évident, et pour 2 on a :

$$\begin{aligned} D_{A, B} \cdot (a_A \otimes a_B) &= S_{A \otimes B} \cdot P(l_{A, B}) \cdot r_{A, PB} \cdot (a_A \otimes 1_{PB}) \cdot (1_A \otimes a_B) \\ &= S_{A \otimes B} \cdot P(l_{A, B}) \cdot a_{A \otimes PB} \cdot (1_A \otimes a_B) \\ &= S_{A \otimes B} \cdot a_{P(A \otimes B)} \cdot l_{A, B} \cdot (1_A \otimes a_B). \end{aligned}$$

Et pour trouver 3, il faut calculer $D_{A, B} \cdot (S_A \otimes S_B)$, ce qui vaut successivement :

$$\begin{aligned} &S_{A \otimes B} \cdot P(l_{A, B}) \cdot r_{A, PB} \cdot (S_A \otimes 1_{PB}) \cdot (1_{P^2 A} \otimes S_B) \\ &= S_{A \otimes B} \cdot P(l_{A, B}) \cdot S_{A \otimes PB} \cdot P(r_{A, PB}) \cdot r_{PA, PB} \cdot (1_{P^2 A} \otimes S_B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= S_{A \otimes B} \cdot S_{P(A \otimes B)} \cdot P^2(l_{A,B}) \cdot P(r_{A,PB}) \cdot r_{PA,PB} \cdot (I_{P^2A} \otimes S_B) \\
 &= S_{A \otimes B} \cdot P(S_{A \otimes B} \cdot P(l_{A,B}) \cdot r_{A,PB}) \cdot r_{PA,PB} \cdot (I_{P^2A} \otimes S_B) \\
 &= S_{A \otimes B} \cdot P(S_{A \otimes B} \cdot P(r_{A,B}) \cdot l_{PA,B}) \cdot r_{PA,PB} \cdot (I_{P^2A} \otimes S_B) \\
 &= S_{A \otimes B} \cdot S_{P(A \otimes B)} \cdot P^2(r_{A,B}) \cdot P(l_{PA,B}) \cdot r_{PA,PB} \cdot (I_{P^2A} \otimes S_B) \\
 &= S_{A \otimes B} \cdot P(r_{A,B}) \cdot S_{PA \otimes B} \cdot P(l_{PA,B}) \cdot r_{PA,PB} \cdot (I_{P^2A} \otimes S_B) \\
 &= S_{A \otimes B} \cdot P(r_{A,B}) \cdot S_{PA \otimes B} \cdot P(r_{PA,B}) \cdot l_{P^2A,B} \cdot (I_{P^2A} \otimes S_B) \\
 &= S_{A \otimes B} \cdot (P(D_{A,B}) \cdot P(I_{PA} \otimes a_B)) \cdot S_{PA \otimes B} \cdot P(r_{PA,B}) \cdot l_{P^2A,B} \cdot (I_{P^2A} \otimes S_B) \\
 &= S_{A \otimes B} \cdot P(D_{A,B}) \cdot S_{PA \otimes PB} \cdot P^2(I_{PA} \otimes a_B) \cdot P(r_{PA,B}) \cdot l_{P^2A,B} \cdot (I_{P^2A} \otimes S_B) \\
 &= S_{A \otimes B} \cdot P(D_{A,B}) \cdot S_{PA \otimes PB} \cdot P(r_{PA,PB}) \cdot l_{P^2A,PB} \cdot (I_{P^2A} \otimes a_B) \cdot (I_{P^2A} \otimes S_B) \\
 &= S_{A \otimes B} \cdot P(D_{A,B}) \cdot D_{PA,PB}.
 \end{aligned}$$

Si de plus \otimes est unitaire, associative ou symétrique, les isomorphismes naturels d'unitarité, d'associativité et de symétrie seront notés

$$\rho_A: A \rightarrow A \otimes I, \quad \lambda_A: A \rightarrow I \otimes A,$$

$$\alpha_{A,B,C}: (A \otimes B) \otimes C \rightarrow A \otimes (B \otimes C), \quad \kappa_{A,B}: A \otimes B \rightarrow B \otimes A.$$

PROPOSITION 5. Supposons donné pour tout $X, X', X'' \in K_0$ un morphisme

$$\alpha_{X,X',X''}: (X \otimes X') \otimes X'' \rightarrow X \otimes (X' \otimes X'')$$

tel que

A1. Pour tout $f: X \rightarrow Y, f': X' \rightarrow Y', f'': X'' \rightarrow Y''$ de K on a

$$f \otimes (f' \otimes f'') \cdot \alpha_{X,X',X''} = \alpha_{Y,Y',Y''} \cdot ((f \otimes f') \otimes f'').$$

A2. Pour tout $X, X', X'' \in K_0$, on a

$$\begin{array}{ccc}
 (PX \otimes PX') \otimes PX'' \xrightarrow{D_{X,X'} \otimes I_{PX''}} P(X \otimes X') \otimes PX'' \xrightarrow{D_{X \otimes X', X''}} P((X \otimes X') \otimes X'') \\
 \alpha_{PX, PX', PX''} \downarrow \qquad \qquad \qquad = \qquad \qquad \qquad \downarrow P(\alpha_{X, X', X''}) \\
 PX \otimes (PX' \otimes PX'') \xrightarrow{I_{PX} \otimes D_{X', X''}} PX \otimes P(X' \otimes X'') \xrightarrow{D_{X, X' \otimes X''}} P(X \otimes (X' \otimes X''))
 \end{array}$$

Alors dans KlP on a, pour tout

$$\bar{r}: X \dashrightarrow Y, \quad \bar{r}': X' \dashrightarrow Y', \quad \bar{r}'': X'' \dashrightarrow Y'',$$

$$(\bar{r} \otimes (\bar{r}' \otimes \bar{r}'')). L_P(\alpha_{X, X', X''}) = L_P(\alpha_{Y, Y', Y''}) \cdot ((\bar{r} \otimes \bar{r}') \otimes \bar{r}'').$$

En particulier, si (K, \otimes, a) est associative et si D vérifie 1, 2, 3 et A2, alors $(KlP, \bar{\otimes}, L_P(a))$ est associative.

PROPOSITION 6. Pour que $\bar{\otimes}$ soit unitaire (resp. associative, resp. symétrique) avec comme isomorphismes naturels $L_P\lambda$, $L_P\rho$ (resp. $L_P\alpha$, resp. $L_P\kappa$), il faut et il suffit que l'on ait, en plus de 1, 2, 3 (ou 1', 2', 3', 1'', 2'', 3'', 4), 5 et 6 (resp. 7, resp. 8), avec:

$$5. \text{ Pour tout } A \in K_0, \quad r_{A,I} \cdot \rho_{PA} = P(\rho_A).$$

$$6. \text{ Pour tout } A \in K_0, \quad l_{I,A} \cdot \lambda_{PA} = P(\lambda_A).$$

$$7. \text{ Pour tout } A, B \in K_0,$$

$$D_{A,B \otimes C} \cdot (l_{PA} \otimes D_{B,C}) \cdot \alpha_{PA, PB, PC} = P(\alpha_{A,B,C}) \cdot D_{A \otimes B, C} \cdot (D_{A,B} \otimes l_{PC}).$$

$$8. \text{ Pour tout } A, B \in K_0, \quad l_{B,A} \cdot \kappa_{PA,B} = P(\kappa_{A,B}) \cdot r_{A,B}.$$

COROLLAIRE 7. Si $(K, \otimes, \rho, \lambda, \alpha, \kappa) = K$ est une catégorie monoïdale symétrique et si P est une monade sur K , il existe une structure monoïdale symétrique $\bar{\otimes}$ sur KlP prolongeant celle de K ssi il existe une famille

$$r_{A,B}: PA \otimes B \rightarrow P(A \otimes B)$$

de morphismes de K indexée par $K_0 \times K_0$, vérifiant les formules 1', 2', 3', 4 (avec l défini par 8), 5 et 7 (avec D défini comme la valeur commune des deux membres de 4).

Suivant Eilenberg-Kelly [10] page 475, Théorème I.3 on désigne par Mon la 2-catégorie des catégories monoïdales.

DEFINITION 2. Soit $(K, \otimes, \rho, \lambda, \alpha) = K$ une catégorie monoïdale. On appelle monade monoïdale sur K la donnée d'une monade dans Mon sur l'objet K . On définit de même les monades monoïdales symétriques.

PROPOSITION 8. La donnée d'une monade monoïdale sur K équivaut à la donnée d'un couple (P, D) , où P est une monade sur K et $D: \otimes \Rightarrow P$ une loi distributive de \otimes sur P (conditions 1, 2, 3) vérifiant les conditions 5, 6, 7 de la Proposition 6. Si de plus K est symétrique, (P, D) est symétrique ssi la condition 8 de la Proposition 6 est vérifiée. Suivant la Proposition 6, (P, D) est une monade monoïdale ssi, avec

$$\phi = L_P, \quad \tilde{\phi} = (L_P(\cdot) \otimes L_P(\cdot) = L_P(\cdot \otimes \cdot)), \quad \phi^o = Id_{L_P(I)},$$

on a

$$(\phi, \tilde{\phi}, \phi^o): (K, \otimes, \rho, \lambda, \alpha, I) \rightarrow (Kl_P, \tilde{\otimes}, L_P\rho, L_P\lambda, L_P\alpha, L_P I)$$

est un foncteur monoïdal au sens d'Eilenberg-Kelly [10], page 473.

1.2. Lois distributives usuelles associées.

Une loi distributive $D: \otimes \Rightarrow P$ permet donc d'étendre canoniquement tout $h: A \otimes B \rightarrow C$ en

$$P A \otimes P B \xrightarrow{\hat{h}} P C = (P A \otimes P B \xrightarrow{D_{A,B}} P(A \otimes B) \xrightarrow{P h} P C).$$

Ainsi, pour $P = \mathcal{P}$ dans *Ens*, toute loi de monoïde $k: A \times A \rightarrow A$ «s'étend aux parties» en une loi de monoïde $\hat{k}: \mathcal{P} A \times \mathcal{P} A \rightarrow \mathcal{P} A$, déterminant un \mathcal{P} -monoïde, cas spécial de \mathcal{P} -catégorie (cf. paragraphe 2.1). Nous allons voir ici que cela permet de retrouver les exemples de lois distributives au sens d'Appelgate-Beck utiles en théorie des automates, i. e. les exemples cités en [8].

On rappelle qu'une loi distributive

$$d: T = (T, u, m) \Rightarrow P = (P, a, S)$$

entre deux monades T et P sur K consiste en une transformation naturelle $d: TP \rightarrow PT$ telle que :

$$\begin{array}{ccc} TP \xrightarrow{d} PT & & TP \xrightarrow{d} PT \\ \uparrow T a \quad \downarrow a T & \text{D}_1 & \uparrow T a \quad \downarrow a T \\ & T & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} T P P \xrightarrow{d P} P T P \xrightarrow{P d} P P T & & \\ \downarrow T S & \text{D}_2 & \downarrow S T \\ T P \xrightarrow{d} P T & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} T P \xrightarrow{d} P T & & T T P \xrightarrow{T d} T P T \xrightarrow{d T} P T T \\ \uparrow u P \quad \downarrow P u & \text{D}_3 & \uparrow m P \quad \downarrow P m \\ & P & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} T T P \xrightarrow{T d} T P T \xrightarrow{d T} P T T & & \\ \downarrow m P & \text{D}_4 & \downarrow P m \\ T P \xrightarrow{d} P T & & \end{array}$$

On sait (voir [4]) que ceci revient à la donnée d'un relèvement \tilde{P} de P sur K^T , ou encore (voir [8]) à la donnée d'un prolongement \tilde{T} de T

à KlP . (On comparera ici aux Propositions 1 et 2.)

HYPOTHESES. Soit $(K, \otimes, a, \rho, \lambda) = K$ une catégorie monoïdale, et $D: \otimes \Rightarrow P$ une loi distributive de \otimes sur une monade $P = (P, a, S)$ (donnée sur K) faisant de (P, D) une monade monoïdale. On suppose aussi que K est à sommes dénombrables et que \otimes commute avec ces sommes (ce qui est bien sûr le cas si (K, \otimes) est fermée).

Sous ces hypothèses, on note I l'unité de \otimes , pour tout objet A de K on pose

$$A^0 = I, \quad A^1 = A, \quad A^{n+1} = A^{\otimes n+1} = A \otimes A^{\otimes n} \quad \text{et} \quad A^* = \bigoplus_{n \geq 0} A^n,$$

avec $i_A^n: A^n \rightarrow A^*$ l'«injection» canonique. On pose, en particulier,

$$i_A^1 = u_A: A \rightarrow A^*.$$

Avec

$$\gamma_A^{0,q} = \lambda_{A^q}: A^0 \otimes A^q \rightarrow A^q,$$

on définit par récurrence $\gamma_A^{p+1,q}$ comme étant le composé

$$A^{p+1} \otimes A^q = (A \otimes A^p) \otimes A^q \xrightarrow{\alpha_{A, A^p, A^q}} A \otimes (A^p \otimes A^q) \xrightarrow{I_A \otimes \gamma_A^{p,q}} A^{p+q+1}$$

et on définit $m_A^2: A^* \otimes A^* \rightarrow A^*$ par

$$m_A^2 \cdot (i_A^p \otimes i_A^q) = i_A^{p+q} \cdot \gamma^{p,q}, \quad \text{pour tout } p, q \geq 0,$$

puis $m_A: (A^*)^* \rightarrow A^*$ par:

$$m_A \cdot i_{A^*}^0 = i_A^0, \quad m_A \cdot i_{A^*}^1 = Id_{A^*}, \quad m_A \cdot i_{A^*}^2 = m_A^2,$$

et par récurrence,

$$m_A \cdot i_{A^*}^{n+1} = m_A^2 \cdot (1_{A^*} \otimes (m_A \cdot i_{A^*}^n)).$$

Il est bien connu que $((-)^*, u, m)$ est une monade dont les algèbres sont justement les \otimes -monoïdes, A^* étant le \otimes -monoïde libre engendré par A . On pose alors :

$$\begin{aligned} \partial_A^0 &= a_I: P(A)^0 = I \rightarrow P(I) = P(A^0), \\ \partial_A^1 &= Id_{PA}: P(A)^1 = P(A) = P(A) = P(A^1), \\ \partial_A^2 &= D_{A,A}: P(A)^2 = P(A) \otimes P(A) \rightarrow P(A \otimes A) = P(A^2) \end{aligned}$$

et par récurrence

$$\partial_A^{n+1} = PA \otimes (PA)^n \xrightarrow{I_{PA} \otimes \partial_A^n} PA \otimes P(A^n) \xrightarrow{D_{A,A^n}} P(A^{n+1}).$$

Enfin on introduit $d_A: (PA)^* \rightarrow P(A^*)$ par :

$$d_A \cdot i_{PA}^n = P(i_A^n) \cdot \partial_A^n \quad \text{pour tout } n \geq 0.$$

PROPOSITION 9. *Sous les hypothèses ci-dessus, on a une loi distributive: $d: ((-)^*, u, m) \Rightarrow P$.*

PREUVE. On vérifie d'abord avec 1, 2 et 3 que, pour $T = (-)^n$ et $d = \partial$ on a D_1 et D_2 (par récurrence), et puis à nouveau par récurrence - en calculant les composés avec les i_{PA}^{n+1} et $i_{P^2A}^{n+1}$ - on vérifie D_1 et D_2 pour

$$T = (-)^* \quad \text{et} \quad d = d.$$

L'axiome D_3 n'est autre que la définition de $d \cdot i_{PA}^1$. Pour vérifier l'axiome D_4 on compose les deux membres avec $i_{(PA)^*}^{n+1}$, et descendant par récurrence on réduit D_4 à la condition :

$$\begin{array}{ccc} (PA)^* \otimes (PA)^* & \xrightarrow{d_A \otimes d_A} & P(A^*) \otimes P(A^*) \xrightarrow{D_{A^*,A^*}} P(A^* \otimes A^*) \\ \downarrow m_{PA}^2 & & \downarrow P(m_A^2) \\ P(A)^* & \xrightarrow{d_A} & P(A^*) \end{array}$$

composant ensuite les deux membres avec les quantités (qui sont collectivement épimorphes) $i_{PA}^p \otimes i_{PA}^q$, on doit vérifier :

$$\begin{array}{ccc} (PA)^p \otimes (PA)^q & \xrightarrow{\partial_A^p \otimes \partial_A^q} & P(A^p) \otimes P(A^q) \xrightarrow{D_{A^p,A^q}} P(A^p \otimes A^q) \\ \downarrow \gamma_{PA}^{p,q} & & \downarrow P(\gamma_A^{p,q}) \\ P(A)^{p+q} & \xrightarrow{\partial_A^{p+q}} & P(A^{p+q}) \end{array}$$

On prouve ceci par récurrence sur p (pour q fixé arbitrairement) : pour $p = 0$, c'est la condition 6 sur D , et ensuite la récurrence marche grâce à la naturalité des $\alpha_{\dots,0}$, à la naturalité de D et à la condition 7 sur D (= A2 dans Proposition 5).

On peut remarquer que, puisqu'une loi distributive $d: T \Rightarrow P$ est

aussi définie par un relèvement \tilde{P} de P aux T -algèbres, avec

$$\tilde{P}(T A \xrightarrow{\theta} A) = (T(P A) \xrightarrow{d_A} P T A \xrightarrow{P\theta} P A),$$

puisque

$$d_A \cdot i_{P A}^2 = P(i_A^2) \cdot D_{A,A},$$

et puisqu'ici les $(-)^*$ -algèbres sont les \otimes -monoïdes (un \otimes -monoïde (M, e, k) est de la forme

$$e = \theta \cdot i_M^0, \quad k = \theta \cdot i_M^2$$

pour une unique $(-)^*$ -algèbre θ), on a nécessairement le

COROLLAIRE 10. *La fonction*

$$\tilde{P}: (M, e, k) \mapsto (P M, P(e) \cdot a_I, P(k) \cdot D_{M,M})$$

est un relèvement de P aux \otimes -monoïdes.

REMARQUE. Ce Corollaire 10 pourrait s'obtenir directement sans supposer l'existence de sommes dénombrables dans K et en particulier sans supposer que $U: \otimes\text{-Monoïdes} \rightarrow K$ admet un adjoint.

De même une démonstration directe que nous ne détaillerons pas donne :

PROPOSITION 11. *Avec les hypothèses de la Proposition 9, soit $M = (M, e, k)$ un \otimes -monoïde dans K et $(-)\otimes M$ la monade sur K associée. Alors $r_{-,M}: (-)\otimes M \Rightarrow P$ est une loi distributive, de sorte que*

$$\hat{P}: (E, \mu) \mapsto (P E, P\mu \cdot r_{E,M})$$

est un relèvement de P aux \mathbb{M} -objets.

1.3. Cas d'une base monoïdale fermée symétrique, et autres exemples.

Rappelons, ce qui nous sera indispensable par la suite, que suivant A. Kock (cf. [20]) si $K = (K, \otimes, H, \dots)$ est monoïdale fermée symétrique, une monade forte sur K est un couple $((P, a, S), st)$ d'une monade $(P, a, S) = P$ et de la donnée, pour tout $A, B \in K_\theta$, d'un morphisme

$$(1) \quad st_{A,B}: H(A, B) \rightarrow H(P A, P B)$$

faisant de P un K -foncteur, a et S K -naturelles (voir [20], pages 466, 444-445). En fait, comme observé dans [20, 4], page 406, st est alors naturelle, d'après la Proposition III-7-6, page 546 de [10]. On définit $t''_{A,B}: A \otimes P B \rightarrow P(A \otimes B)$ comme transposée, dans l'adjonction de \otimes et H (d'unité ev et counité η) de

$$A \xrightarrow{\eta_{A,B}} H(B, A \otimes B) \xrightarrow{st_{B, A \otimes B}} H(P B, P(A \otimes B)),$$

et on pose

$$t'_{A,B} = P(\kappa_{B,A}) \cdot t''_{B,A} \cdot \kappa_{P A, B}.$$

On définit alors :

$$(2) \quad D_{X,Y}^{t',t''} := S_{X \otimes Y} \cdot P(t''_{X,Y}) \cdot t'_{X, P Y},$$

$$(3) \quad D_{X,Y}^{t'',t'} := S_{X \otimes Y} \cdot P(t'_{X,Y}) \cdot t''_{P X, Y},$$

et on dit - avec Kock - que (P, st) est commutative si $D^{t',t''} = D^{t'',t'}$.

En prenant $D = D^{t',t''} = D^{t'',t'}$ il vient, avec les notations du Paragraphe 1.1, $t'' = l$, $t' = r$. La commutativité de (P, st) équivaut à ce que S soit $D^{t',t''}$ -monoïdale, ou encore à ce que S soit $D^{t'',t'}$ -monoïdale. Alors (Kock [20]) on observe que st fait de P un K -foncteur équivaut sur $t'' = l$ aux conditions : 1'', 6 et 7'' (induite de 7 pour l). Ceci lui permet d'établir :

THEOREME (Kock [20]). *Soit $P = (P, a, S)$ une monade sur K , catégorie sous-jacente à une catégorie monoïdale fermée symétrique. Alors il y a une bijection entre les familles st faisant de (P, st) une monade forte commutative, et les familles D faisant de (P, D) une monade monoïdale symétrique.*

Ceci va nous fournir la plupart des exemples de monades monoïdales.

EXEMPLE 1. Si $K = Ens$ et $\otimes = \times$, toute monade sur Ens étant forte, pour toute monade $P = (P, a, S)$ on peut introduire

$$r_{A,B}: P A \times B \rightarrow P(A \times B) \quad \text{par} \quad r_{A,B}(\xi, b) = (P(\sigma(b)))(\xi)$$

$$\text{avec} \quad \sigma(b): A \rightarrow A \times B: x \mapsto (x, b),$$

et on peut introduire de même $l_{A,B}$. On obtiendra alors une structure D ssi r et l sont commutantes, i.e. la monade commutative au sens ci-avant, ce qui signifie que toute opération de la théorie P « commute » avec toute opération de la théorie P .

Exemple 1.a. Si $PA = R^{(A)}$ est la monade donnant les R -espaces vectoriels, on a une loi distributive $D_{E,F}: R^{(E)} \times R^{(F)} \rightarrow R^{(E \times F)}$:

$$D_{E,F}(\sum_i \phi \lambda_i x_i, \sum_j \phi \mu_j y_j) = \sum_{(i,j)} \phi \lambda_i \mu_j (x_i, y_j).$$

où l'écriture $\sum_i \phi$ signifie « somme formelle finie sur l'indice i ». Alors (P, D) est monoïdale précisément parce que R est commutatif.

Exemple 1.b. Soit $L = (L, \leq, \otimes)$ un monoïde abélien complet, par exemple

$$(\{0, 1\}, \leq, \cdot) \text{ ou } (\{0, 1\}, \leq, \wedge) = 2$$

(voir notre article « Calcul des relations inverses » dans *Cahiers Topo. et Géom. Diff.* XVIII-1 (1977), pages 20-21 et puis page 30). Prenons $P = P_L = (P_L, \mathfrak{Y}, Sup)$ avec

$$P_L(X) = L^X, \quad P_L(f)(p)(y) = Sup_x \{ p(x) \mid f(x) = y \},$$

$$\mathfrak{Y}_X(x)(x') = \begin{cases} e & \text{si } x' = x \\ 0 & \text{si } x' \neq x \end{cases},$$

$$Sup_X(Q)(x) = Sup_q \{ Q(q) \otimes q(x) \}.$$

Ainsi $P_2 = \mathcal{P}$, monade des parties sur *Ens*. On a:

$$D_{X,Y}: L^X \times L^Y \rightarrow L^{X \times Y}: D_{X,Y}(\phi, \psi)(x, y) = \phi(x) \otimes \psi(y).$$

qui fait de (P, D) une monade monoïdale. Notre Proposition 8 permet d'étendre \times en $\bar{\times}$, structure monoïdale sur $KlP_L = L\text{-rel}$.

EXEMPLE 2. En fait pour $P_2 = \mathcal{P}$ dans l'Exemple 1.b, D peut s'obtenir comme adjoint à droite du morphisme canonique:

$$\chi: P(X \times Y) \rightarrow P X \times P Y.$$

Ceci se généralise par exemple à un topos élémentaire de Lawvere-Tierney. On obtient $D_{X,Y}: \Omega^X \times \Omega^Y \rightarrow \Omega^{X \times Y}$ par la formule

$$D_{X,Y}(A, B) = A \times B := \{ (x, y) \in X \times Y \mid x \in A \wedge y \in B \};$$

ainsi la monade P_{Ω} «des sous-objets» devient monoïdale.

EXEMPLE 3. Soit $K = Top$ et \otimes défini en prenant pour $X \otimes Y$ l'ensemble $X \times Y$ avec la topologie finale pour les fonctions

$$\sigma(x): X \rightarrow X \times Y, \quad \sigma(y): Y \rightarrow X \times Y, \quad x \in X, \quad y \in Y$$

(notations de l'Exemple 1). Alors K est monoïdale fermée (convergence simple). On a le relèvement suivant de P_2 (Exemple 1.b) à Top : Pour tout X , soit PX l'ensemble des parties de X , avec la topologie engendrée par les

$$\mathcal{O}^+ = \{ A \subset X \mid A \cap \mathcal{O} \neq \emptyset \}$$

avec \mathcal{O} ouvert de X . Nous obtenons $D_{X,Y}: PX \otimes PY \rightarrow P(X \otimes Y)$ comme relèvement de

$$D_{X,Y}: 2^X \times 2^Y \rightarrow 2^{X \times Y}: (A, B) \mapsto A \times B,$$

en montrant sa continuité. Pour cela, puisque P est une monade sur Top , il suffit, avec la Proposition 4, de montrer que

$$l_{X,Y}: X \otimes PY \rightarrow P(X \otimes Y)$$

est continu; ceci vient de $(\cup \mathcal{O}_i)^+ = \cup \mathcal{O}_i^+$ et de

$$(l \cdot \sigma(x))^{r^{-1}}(\mathcal{W}^+) = (\sigma(x)^{r^{-1}}(\mathcal{W}))^+, \quad (l \cdot \sigma(B))^{r^{-1}}(\mathcal{W}^+) = \cup_{y \in B} \sigma(y)^{r^{-1}}(\mathcal{W}).$$

EXEMPLE 4. Soit

$$\Gamma = 0 \begin{array}{c} \xleftarrow{a} \\ \xrightarrow{i} \\ \xleftarrow{b} \end{array} 1 \quad \text{avec } a \cdot i = b \cdot i = Id_0,$$

et $K = Ens^{\Gamma}$ la catégorie des graphes orientés. Pour $X, Y \in K$, on définit

$$(X \sharp Y)_I = X_I \times Y_0 \cup X_0 \times Y_I \subset X_I \times Y_I, \quad (X \sharp Y)_0 = X_0 \times Y_0.$$

Ainsi \sharp est une structure monoïdale sur K (sous-structure monoïdale de \times). Alors si Ch est la monade des chemins sur K (ChX = catégorie libre des chemins de X), on a un

$$D: ChX \sharp ChY \rightarrow Ch(X \sharp Y)$$

faisant de (Ch, D) une monade monoïdale. (Par contre, comme dans l'Exemple 2, on n'a pas de $D: ChX \times ChY \rightarrow Ch(X \times Y)$.) On a

$$D((f_1, \dots, f_m), \eta) = ((f_1, \eta), \dots, (f_m, \eta)),$$

$$D(e, (g_1, \dots, g_k)) = ((e, g_1), \dots, (e, g_k)).$$

Pour donner des exemples ne relevant pas du théorème ci-avant il suffit de se placer dans le cas où (K, \otimes) n'est pas fermée (ou pas symétrique).

EXEMPLE 5. On peut dans les résultats de [20, 3] supprimer l'hypothèse «cartésienne fermée» et énoncer: Si (K, \times, \dots) est cartésienne et si

$$\chi_{A,B}: P(A \times B) \xrightarrow{\text{cano.}} P A \times P B, \text{ pour tout } A, B \in K_0,$$

est inversible - où P est une monade - alors un unique D fait de P une monade monoïdale, à savoir χ^{-1} .

EXEMPLE 6. Si $(K, \otimes, \rho, \lambda, a, \kappa) = \mathbf{K}$ est monoïdale symétrique et si $M = (M, e, k)$ est un \otimes -monoïde, pour tout $X, Y \in K_0$ on introduit

$$D_{X,Y}: (M \otimes X) \otimes (M \otimes Y) \approx (M \otimes M) \otimes (X \otimes Y) \xrightarrow{k \otimes (1_X \otimes 1_Y)} M \otimes (X \otimes Y).$$

Alors D est une loi distributive de \otimes sur $(\) \otimes M$ (la monade sur K associée à M) ssi M est commutatif.

EXEMPLE 7. Soit $(K, +, o, \dots)$ une catégorie à objet initial o et sommes finies $+$. Toute monade $P = (P, a, S)$ sur K est monoïdale vis à vis de $+$, avec $D: (\) + (\) \Rightarrow P$ donnée par

$$D_{X,Y}: P X + P Y \rightarrow P(X + Y):$$

$$D_{X,Y} \cdot \text{in}_{P X} = P(\text{in}_X), \quad D_{X,Y} \cdot \text{in}_{P Y} = P(\text{in}_Y).$$

Pour $K = \text{Ens}$ et $P = P_{\mathbf{L}}$, comme $P_{\mathbf{L}}(X + Y) \approx P_{\mathbf{L}} X \times P_{\mathbf{L}} Y$, D se lit:

$$D_{X,Y}(A) = (A, o), \quad D_{X,Y}(B) = (o, B),$$

pour $A: X \rightarrow L$, $B: Y \rightarrow L$. Notons aussi l'exemple de $(\) + (\) \Rightarrow (\) + I$ (à ne pas confondre avec $(\) \times (\) \Rightarrow (\) + I$, sous-loi de $(\) \times (\) \Rightarrow \mathcal{P}$).

La Proposition 9 et son Corollaire 10 sont encore vrais si A^* est remplacé par $A = \bigoplus_{n \geq 1} A^n$ qui est la «monade non unitaire» des monoïdes non unitaires ou semi-groupes. Ici on obtiendra: si $(\)^+$ est la «monade» des co-semigroupes (dans Ens , $(X)^+ = \mathbf{N} \times X$), alors on a une

loi distributive $()^+ \Rightarrow P$, pour toute monade P , et donc un relèvement de P aux co-semigroupes de K . Dualement pour toute co-monade G sur K cartésienne, on a $() \times () \Rightarrow G$, de sorte que G se relève aux semigroupes de K .

1.4. Rappels de constructions de produits tensoriels.

a) Avec les notations de l'Exemple 1.a, Paragraphe 1.3, si E et F sont des R -espaces vectoriels, $E \otimes F$, classifiant des applications bilinéaires sur $E \times F$, est le quotient de $R^{(E \times F)}$ par les équivalences :

$$(1) \quad \sum_{\phi}^i (\sum \lambda_i x_i, \mu_j y_j) \sim \sum_{\phi}^i (\lambda_i x_i, \sum \mu_j y_j).$$

En dimension finie on a

$$(2) \quad E \otimes F \approx Hom(E, F^*)^*,$$

et dans tous les cas on a l'adjonction

$$(3) \quad Hom(E, Hom(F, G)) \approx Hom(E \otimes F, G).$$

b) Suivant Banaschewski-Nelson [2], $|-| : A \rightarrow Ens$ est muni d'un hom-interne fonctionnel $H : A \times A^* \rightarrow A$ si $|H(,)| = A(,)$ et si (voir aussi Pumplün [24])

$$F1: \forall B, B' \in A_0, \quad \forall b \in |B|, \quad \exists \hat{b} : H(B, B') \rightarrow B', \\ |\hat{b}|() = | |(b).$$

$$F2: \forall B, B', C \in A_0, \quad \forall f : |B| \rightarrow |H(B', C)|, \\ [\forall b \in |B'|, \exists h_b : B \rightarrow C, |f()|(b) = |h_b|] \\ \Rightarrow [\exists h : B \rightarrow H(B', C), f = |h|] ;$$

alors $B \otimes B'$ se calcule par (2) pourvu que $()^* = H(, R)$ et que le morphisme $e_{X,R} : X \rightarrow H(H(X, R), R)$ soit un isomorphisme pour tout X . Un tel R est appelé dualiseur.

c) Si H est fonctionnel, alors [2] il existe un \otimes (adjoint à H) ssi il existe des bimorphismes universels (voir d), ce qui a lieu si A a des coproduits et des factorisations épi-monosource préservées par $|-|$.

d) Suivant Hoffmann, Tholen, Wischnewsky - voir références dans

[23] - un foncteur $V: A \rightarrow K$ est *semi-topologique* ou encore *semi-final* ssi pour toute catégorie G et tout $F: G \rightarrow A$, le foncteur induit

$$F \downarrow^{z'} \rightarrow V F \downarrow^{z'} \quad (\text{avec } 'z' = \text{foncteur constant sur } z)$$

admet un adjoint à gauche. En considérant

$$G = G_0 = K(I, VB) \amalg K(I, VB'), \quad \text{où } B, B' \in A_0$$

et où $(K, \emptyset, I, \dots) = K$ est monoïdale,

$$F x = B \text{ si } x \in K(I, VB') \quad (\text{resp. } F x = B' \text{ si } x \in K(I, VB)),$$

et $\phi: VF \rightarrow VB \otimes VB'$ défini par

$$\begin{aligned} \phi_x &= (VB \times VB \otimes I \xrightarrow{VB \otimes x'} VB \otimes VB') \\ (\text{resp. } \phi_x &= (VB' \times I \otimes VB' \xrightarrow{x \otimes VB'} VB \otimes VB')), \end{aligned}$$

Porst-Wischnewsky [23] observent (voir aussi Greve [14] et plus anciennement Foltz [12]) que, si V est semi-topologique, alors A admet des V -bimorphismes universels, un V -bimorphisme étant un

$$\begin{aligned} h: VB \otimes VB' \rightarrow VC \quad \text{tel que: } \forall x: I \rightarrow VB, \forall x': I \rightarrow VB' \\ \exists h_x: B' \rightarrow C, \exists h'_x: B \rightarrow C, \quad V h_x = \phi_x, \quad V h'_x = \phi'_x. \end{aligned}$$

Le produit tensoriel «semi-final» obtenu est noté \otimes_{sf} .

e) Pour que A soit monoïdale fermée vis à vis de \otimes_{sf} pour le foncteur $V: A \rightarrow Ens$, il suffit que V soit «fonctionnel M -initial» - voir [23]. En particulier $Ens^P \rightarrow Ens$ étant fonctionnel ssi P est commutative au sens de Kock, dans ce cas Ens^P est monoïdale fermée avec \otimes_{sf} . Ceci se voit aussi en notant que Ens^P est toujours cocomplète (Corollaire 19) donc $\hat{\otimes}$ (voir plus loin, Proposition 16) existe; comme (Proposition 14) $\hat{\otimes} = \otimes_{sf}$ dans ce cas, la preuve est achevée.

f) Si K est monoïdale et (K, E, M) régulière, si P préserve E et si K est à petits coproduits, on sait (Manes [22]) que K^P a des petites colimites, et donc $\hat{\otimes}$ existe.

g) Suivant Foltz [12] si A est à coproduits et $V: A \rightarrow Ens$ à quasi-quotients, alors A admet des V -produits tensoriels $\otimes_{i \in I} B_i$, classifiant les V -multimorphismes de $(B_i)_{i \in I}$ vers $B \in A$, i. e. les $(f_\gamma)_{\gamma \in \bar{E}}$ où

$$\bar{E} = \coprod_{i \in I} E_i, \quad E_i = \prod_{j \neq i} V(B_j), \quad E = \prod_j V(B_j),$$

$$y = (i, z) \in \bar{E}, \quad f_y: B_i \rightarrow B \in A,$$

avec la condition qu'il existe $f: E \rightarrow V(B)$ tel que pour tout $(x_i)_{i \in I} \in E$, et tout $i \in I$,

$$f((x_i)_{i \in I}) = V(f_{(i, (x_j)_{j \neq i})})(x_i).$$

Si V est fidèle et $I = \{0, 1\}$, on obtient les V -bimorphismes de d dans le cas $K = Ens$.

h) Day dans [9] montre que, si K est monoïdale fermée avec des Σ -fins, alors K^Σ est monoïdale fermée, le Hom se calculant par fins, et le tenseur étant calculé point par point (cf. j).

i) Dans [3] (voir aussi dans Day), A. et C. Ehresmann montrent que, si V est monoïdale fermée symétrique, si V' est une sous-catégorie pleine de V telle que $V(-, -) : V \times V^{op} \rightarrow V$ se restreigne à V' et que $inc: V' \hookrightarrow V$ admette un adjoint à gauche \hat{a} , alors V' est monoïdale fermée avec $A \otimes' B = \hat{a}(A \otimes B)$. Si $\sigma = (\Sigma, \mathcal{J}, \mathcal{J})$ est une esquisse (mixte), ils appliquent alors h puis l'existence du faisceau associé à F' pour obtenir une structure monoïdale fermée \boxtimes sur K^σ de la forme

$$F \boxtimes G = \hat{a}(F \otimes G) \quad \text{avec} \quad (F \otimes G)(x) = F(x) \otimes G(x) \quad \forall x \in \Sigma.$$

Ceci est vrai si, en plus de l'existence de \hat{a} , on suppose que σ est «cartésienne», i.e. $\mathcal{J} = \emptyset$ (σ projective) et, pour tout $u \in \Sigma_0$, le foncteur $(-) \times Yon_\Sigma(u)$ commute avec les \mathcal{J} -limites inductives.

j) Foltz-Lair [13] puis Lair [21] observent que, pour σ projective (K, \otimes) bifermée, si K^σ a un tenseur \boxtimes bifermé (donc cocontinu),

$$C = \sigma^{op} \otimes \sigma^{op} \xrightarrow{\quad Yon_{\sigma^{op}} \otimes Yon_{\sigma^{op}} \quad}^{\sigma^{op}} (K^\sigma) \otimes (K^\sigma) \xrightarrow{\quad \boxtimes \quad} K^\sigma$$

est une réalisation - appelée *costructure double* - qui vérifie de plus des conditions d'unitarité, d'associativité, cohérences (voir [21] Théorème 1) induites

$$(Yon_{\sigma^{op}}(\cdot) \approx I \boxtimes Yon_{\sigma^{op}}(\cdot) \approx Yon_{\sigma^{op}}(\cdot) \boxtimes I,$$

$$C(\cdot, -) \boxtimes Yon_{\sigma^{op}}(*) \approx Yon_{\sigma^{op}}(\cdot) \boxtimes C(-, *), \quad \text{etc...} ,$$

et ils montrent qu'inversement tout \boxtimes s'obtient à partir d'une telle co-structure double «cohérente» par un calcul analogue à h et j, pourvu que $K^\sigma \succ K^\Sigma$ admette un adjoint $\hat{\Delta}$: Pour $F, G \in K^\sigma$, on pose :

$$\underline{K}^\sigma(F, G) = \int_x K(F(x), G(x)),$$

$$F \otimes G(x) = \int^{a,b} C(a,b)(x) \otimes (F(a) \otimes G(b)),$$

$$\boxplus F(x)(y) = \underline{K}^\sigma(C(x,y), F), \quad \boxminus F(x)(y) = \underline{K}^\sigma(C(y,x), F),$$

puis

$$K_{\boxplus}^\sigma(F, G) = \underline{K}^\sigma(F, \boxplus G), \quad K_{\boxminus}^\sigma(F, G) = \underline{K}^\sigma(F, \boxminus G), \quad F \boxtimes G = \hat{\Delta}(F \otimes G).$$

1.5. Bimorphismes et formule du produit tensoriel $\hat{\otimes}$.

1° Commençons en nous plaçant dans l'hypothèse de Kock d'une monade forte commutative (cf. Paragraphe 1.3, avant Exemple 1). Dans ce cas, si K est à noyaux, K^P est fermée [20] : Pour cela, soit $\lambda_{A,B} =$

$$\begin{array}{ccc} PH(A, B) \xrightarrow{\eta} H(A, PH(A, B) \otimes A) & \xrightarrow{H(1, \kappa)} & H(A, A \otimes PH(A, B)) \\ & & \downarrow H(1, g \otimes 1) \\ & & H(A, [H(H(A, B), B) \otimes PH(A, B)]) \\ & & \downarrow H(1, st \otimes 1) \\ H(A, PB) \xrightarrow{H(1, ev)} & H(A, [H(PH(A, B), PB) \otimes PH(A, B)]) & \end{array}$$

avec $g_{A,B} =$

$$\begin{array}{ccc} A \xrightarrow{\eta} H(H(A, B), [A \otimes H(A, B)]) & & \\ & \searrow H(1, \kappa) & \\ H(H(A, B), B) \xleftarrow{H(1, ev)} & H(H(A, B), [H(A, B) \otimes A]) & \end{array}$$

Alors si (B, b) et (C, c) sont des P-algèbres, on pose

$$H((B, b), (C, c)) = (N, n), \quad \text{avec}$$

$$\begin{array}{ccc} & H(PB, PC) & \\ & \swarrow st \quad \searrow H(1, c) & \\ N \xrightarrow{ker} H(B, C) & \xrightarrow{H(b, 1)} & H(PB, C) \end{array}$$

et n tel que

$$\begin{array}{ccc} P(N) & \xrightarrow{Pker} & PH(B, C) \\ \downarrow n & = & \downarrow \lambda_{B,C} \\ N & \xrightarrow{ker} & H(B, C) \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow H(1, c) \\ \searrow H(1, c) \end{array} \quad H(B, PC)$$

2° Si (A, α) est une P-algèbre, la donnée d'un $\phi: (A, \alpha) \rightarrow (N, n)$ revient à celle d'un $f: A \rightarrow H(B, C)$ tel que

$$(i) \quad (H(1, c).st).f = H(b, 1).f,$$

$$(ii) \quad H(1, c).\lambda.Pf = f.\alpha.$$

Tensorisant (ii) par B , ceci devient, avec $h := ev.(f \otimes B)$:

$$ev.(H(1, c) \otimes B).(\lambda \otimes B).(Pf \otimes B) = ev.(f \otimes B).(\alpha \otimes B),$$

$$c.ev.(\lambda \otimes B).(Pf \otimes B) = h.(\alpha \otimes B),$$

et comme (voir [20]) $ev.(\lambda \otimes B) = P(ev).t'$, il vient, avec en plus

$$t'.(Pf \otimes B) = P(f \otimes B).t' \quad \text{et} \quad P(ev).P(f \otimes B) = Ph,$$

la condition sur $h: A \otimes B \rightarrow C$ équivalente à (ii) (avec $t' = r$):

$$\begin{array}{ccccc} P A \otimes B & \xrightarrow{r_{A,B}} & P(A \otimes B) & \xrightarrow{Ph} & P C \\ \alpha \otimes B \downarrow & & = & & \downarrow c \\ A \otimes B & \xrightarrow{h} & & & C \end{array}$$

De même avec (i) en tensorisant avec $P B$, pour le second membre il vient

$$\begin{aligned} ev.(H(b, 1) \otimes P B).(f \otimes P B) &= ev.(1 \otimes b).(f \otimes P B) = \\ &= ev.(f \otimes B).(1 \otimes b) = h.(1 \otimes b). \end{aligned}$$

Pour le premier membre, il devient :

$$ev.(H(1, c) \otimes P B).(st \otimes P B).(f \otimes P B) = c.ev.(st \otimes P B).(f \otimes P B).$$

Or la naturalité de st donne

$$st.H(B, ev) = H(P B, P ev).st, \quad \text{d'où} \quad st_{B,C} = H(P B, P ev).st.\eta$$

(adjonction); comme, par définition de $H(P B, P ev)$ on a

$$ev.(H(P B, P ev) \otimes P B) = P ev.ev,$$

il vient

$$P(ev).[ev.(st \otimes P B).(\eta_{H(B,C),B} \otimes P B)] = ev.(st \otimes P B),$$

$$P(ev).t'' = ev.(st \otimes P B).$$

Mais alors le premier membre de (i) s'écrit (avec $t'' = l$):

$$c.P(ev).t''.(f \otimes P B) = c.P(ev).P(f \otimes P B).t'' = c.P(h).l,$$

de sorte que (i) équivaut à

$$\begin{array}{ccccc}
 & A \otimes P B & \xrightarrow{l_{A,B}} & P(A \otimes B) & \xrightarrow{Ph} & P C \\
 \text{BIM}_2 & \downarrow A \otimes b & & = & & \downarrow c \\
 & A \otimes B & \xrightarrow{h} & & & C
 \end{array}$$

PROPOSITION 12. Si (A, α) , (B, b) et (C, c) sont des \mathbf{P} -algèbres où \mathbf{P} est commutative forte sur (K, \otimes, H, \dots) , alors on a une bijection naturelle $\phi \mapsto h$:

$\text{Hom}((A, \alpha), \mathbf{H}((B, b), (C, c))) \approx \text{BIM}((A, \alpha), (B, b); (C, c))$,
 en appelant bimorphisme de $((A, \alpha), (B, b))$ vers (C, c) un $h: A \otimes B \rightarrow C$ vérifiant BIM_1 et BIM_2 ci-dessus.

PROPOSITION 13. Pour \mathbf{K} monoïdale et $D: \otimes \Rightarrow \mathbf{P}$ loi distributive, on a

$$(\text{BIM}_1 \text{ et } \text{BIM}_2) \Leftrightarrow \text{BIM}.$$

PREUVE. La propriété BIM (Paragraphe 1.1) entraîne BIM_1 et BIM_2 par composition avec $PA \otimes a_B$ et $a_A \otimes PB$. Inversement si l'on a BIM_1 et BIM_2 on calcule

$$\begin{aligned}
 c.Ph.D &= c.Ph.S.Pl.r = c.S.P^2 h.Pl.r = \\
 &= c.Pc.P^2 h.Pl.r = c.P(c.Ph.l).r = c.P(h.(1 \otimes b)).r = \\
 &= c.Ph.P(1 \otimes b).r = c.P(h).r.(1 \otimes b) = \\
 &h.(\alpha \otimes l).(1 \otimes b) = h.(\alpha \otimes b).
 \end{aligned}$$

NOTE. Après avoir étudié l'article de Kock sur la fermeture de $\mathbf{K}^{\mathbf{P}}$ nous avons établi les Propositions 12 et 13. En fait, la Proposition 12 et la Proposition 13 dans le cas symétrique doivent être attribuées à Kock [20] et la définition de la « bilinéarité » (bimorphisme ici) a déjà été - suivant [20] - formulé e par Linton.

3° Partons de BIM_1 : pour $y: I \rightarrow B$ où I est l'unité de \otimes , on déduit de BIM_1 que

$$h.(\alpha \otimes B).(PA \otimes y) = c.Ph.r_{A,B}.(PA \otimes y),$$

c'est-à-dire, comme

$$P(\rho_A) = r_{A,I} \cdot \rho_{PA}, \quad P(A \otimes y) \cdot r_{A,I} = r_{A,B} \cdot (PA \otimes y),$$

$$(\alpha \otimes I) \cdot \rho_{PA} = \rho_A \cdot \alpha$$

et en posant $h_{-,y} := h \cdot (A \otimes y) \cdot \rho_A$,

$$\text{BIM}'_1 \quad \begin{array}{ccc} PA & \xrightarrow{P(h_{-,y})} & PC \\ \alpha \downarrow & = & \downarrow c \\ A & \xrightarrow{h_{-,y}} & C \end{array}$$

pour tout $y: I \rightarrow B$.

De même à partir de BIM_2 , en prenant $x: I \rightarrow A$ et en posant

$$h_{x,.} := h \cdot (x \otimes B) \cdot \lambda_B,$$

$$\text{BIM}'_2 \quad \begin{array}{ccc} PB & \xrightarrow{P(h_{x,.})} & PC \\ b \downarrow & = & \downarrow c \\ B & \xrightarrow{h_{x,.}} & C \end{array}$$

pour tout $x: I \rightarrow A$.

Comme $U^P: K^P \rightarrow K$ est fidèle, (BIM'_1 et BIM'_2) équivaut à la définition des U^P -bimorphismes, au sens de Paragraphe 1.4 d (et b, et g).

PROPOSITION 14. *Les bimorphismes (Propositions 12, 13) sont des U^P -bimorphismes. Si $\otimes = \times$, $l = 1$ et l générateur, la réciproque est vraie.*

En général si \otimes_{sf} (classifiant les U^P -bimorphismes) et $\hat{\otimes}$ (qui classifie les bimorphismes) existent, on déduit de la Proposition 14 un morphisme canonique

$$(A, \alpha) \otimes_{sf} (B, b) \xrightarrow{can_{a,b}} (A, \alpha) \hat{\otimes} (B, b)$$

qui est donc un isomorphisme dans, par exemple, le cas de $K = Ens$.

4° Si la catégorie K^P admet une structure fermée $H = [[,]]$, telle que, pour tout $Y, Z \in K_0$, on ait

$$U^P [[L^P Y, L^P Z]] = [Y, U^P L^P Z],$$

où $[-, .]$ est la fermeture sur K , alors on a les bijections naturelles

$$\begin{aligned} L^P X &\rightarrow \llbracket L^P Y, L^P Z \rrbracket / X \rightarrow [Y, U^P L^P Z] / \\ X \otimes Y &\rightarrow U^P L^P Z / L^P(X \otimes Y) \rightarrow L^P Z. \end{aligned}$$

Ceci pousse à définir dans KIP : $L^P X \bar{\otimes} L^P Y := L^P(X \otimes Y)$ (revoir Proposition 1). A rapprocher aussi de Paragraphe 1.4 j : $\bar{\otimes}$, soit finalement $D : P(-) \otimes P(-) \Rightarrow P(- \otimes)$, joue le rôle d'une *costructure double* dans la mesure où KIP joue celui d'esquisse de K^P .

5° Plaçons-nous désormais dans le cas de $\mathbb{K} = (K, \otimes, \dots)$ monoïdale et de $(P, D) = ((P, a, S), D)$ monade monoïdale sur K . Le foncteur « algèbre libre » $L^P : K \rightarrow K^P$ sera simplement noté L . Ainsi une algèbre (PX, S_X) sera notée LX , et si $u : X \rightarrow X'$, $Lu : LX \rightarrow LX'$. Le morphisme de LPX vers LX défini par $S_X : P^2 X \rightarrow PX$ sera noté $s_X : LPX \rightarrow LX$. Enfin si $(X, \theta) = \theta_X$ est une algèbre avec $\theta : PX \rightarrow X$ on pose parfois $X = \underline{\theta}$, et on note encore $\theta : LX \rightarrow \theta_X$ le morphisme d'algèbres défini par θ . Considérons deux P -algèbres (A, α) et (B, β) . Comme on désire $\hat{\otimes}$ sur K^P le plus cocontinu possible, on adopte la définition suivante :

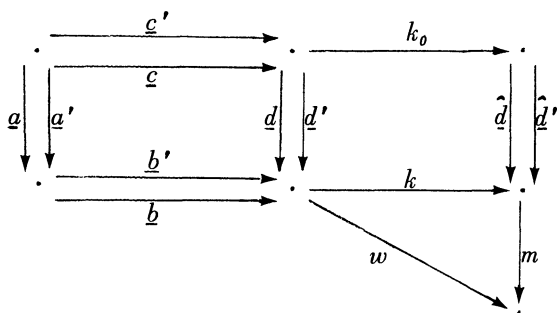
DEFINITION 3. Supposant exister les *coker* utilisés, on pose :

$$\begin{array}{ccccc} LPA \bar{\otimes} LPB & \xrightarrow[\frac{s_A \bar{\otimes} LPB}{L\alpha \bar{\otimes} LPB}]{} & LA \bar{\otimes} LPB & \xrightarrow{\text{coker}} & (A, \alpha) \hat{\otimes} LPB \\ \downarrow LPA \bar{\otimes} L\beta & & \downarrow LA \bar{\otimes} L\beta & & \downarrow \\ LPA \bar{\otimes} LB & \xrightarrow[\frac{s_A \bar{\otimes} LB}{L\alpha \bar{\otimes} LB}]{} & LA \bar{\otimes} LB & \xrightarrow{\text{coker}} & (A, \alpha) \hat{\otimes} LB \\ \downarrow \text{coker} & & \downarrow \text{coker} & \searrow W_{\alpha, \beta} & \downarrow \text{coker} \\ LPA \hat{\otimes} (B, \beta) & \xrightarrow{\quad} & LA \hat{\otimes} (B, \beta) & \xrightarrow{\text{coker}} & (A, \alpha) \hat{\otimes} (B, \beta) \end{array}$$

Considérons la figure suivante, avec :

$$\begin{aligned} \underline{b} \cdot \underline{a} &= \underline{d} \cdot \underline{c}, & \underline{b} \cdot \underline{a}' &= \underline{d}' \cdot \underline{c}, & \underline{b}' \cdot \underline{a} &= \underline{d} \cdot \underline{c}', & \underline{b}' \cdot \underline{a}' &= \underline{d}' \cdot \underline{c}', \\ w &= m \cdot k, & \hat{d} \cdot k_0 &= k \cdot \underline{d}, & \hat{d}' \cdot k_0 &= k \cdot \underline{d}', \end{aligned}$$

et où k_0, k et m sont conoyaux de $(\underline{c}, \underline{c}')$, $(\underline{b}, \underline{b}')$ et (\hat{d}, \hat{d}') .



Un petit calcul montre que :

LEMME *. $w \cdot \underline{b} = w \cdot \underline{b}'$ et $w \cdot \underline{d} = w \cdot \underline{d}'$, et w est universel parmi les w' ayant cette propriété.

Du Lemme résulte que $(A, \alpha) \hat{\otimes} (B, \beta)$ comme défini juste ci-dessus classe les $h : A \otimes B \rightarrow C$ tels que, (C, γ) étant une P-algèbre

$$1^\circ \gamma \cdot Ph.(L\alpha \bar{\otimes} P B) = \gamma \cdot Ph.(s_A \bar{\otimes} P B),$$

$$2^\circ \gamma \cdot Ph.(P A \bar{\otimes} L\beta) = \gamma \cdot Ph.(P A \bar{\otimes} s_B).$$

Cela revient aux h tels que

$$\gamma \cdot Ph.U(L\alpha \bar{\otimes} P B) \cdot a_{P A \otimes B} = \gamma \cdot Ph.U(s_A \bar{\otimes} P B) \cdot a_{P A \otimes B}$$

et

$$\gamma \cdot Ph.U(P A \bar{\otimes} L\beta) \cdot a_{A \otimes P B} = \gamma \cdot Ph.U(P A \bar{\otimes} s_B) \cdot a_{A \otimes P B}.$$

Or $L\alpha = \overline{a_A \cdot \alpha}$, $P B = \overline{a_B}$, $s_A = \overline{1_{P A}}$, de sorte que

$$L\alpha \bar{\otimes} P B = \overline{D_{A,B} \cdot ((a_A \cdot \alpha) \otimes a_B)},$$

$$(L\alpha \bar{\otimes} P B) \cdot a_{P A \otimes B} = D_{A,B} \cdot ((a_A \cdot \alpha) \otimes a_B),$$

$$s_A \bar{\otimes} P B = \overline{D_{A,B} \cdot (1_{P A} \otimes a_B)},$$

$$(s_A \bar{\otimes} P B) \cdot a_{P A \otimes B} = D_{A,B} \cdot (1_{P A} \otimes a_B).$$

Par conséquent la condition 1 vérifiée par h s'écrit :

$$\gamma \cdot Ph.D_{A,B} \cdot ((a_A \cdot \alpha) \otimes a_B) = \gamma \cdot Ph.D_{A,B} \cdot (1_{P A} \otimes a_B),$$

et puisque $D_{A,B} \cdot (1_{P A} \otimes a_B) := r_{A,B}$ et que le premier membre vaut

$$\begin{aligned} \gamma \cdot Ph.D_{A,B} \cdot (a_A \otimes a_B) \cdot (\alpha \otimes 1_B) &= \gamma \cdot Ph.a_{A \otimes B} \cdot (\alpha \otimes 1_B) \\ &= \gamma \cdot a_C \cdot h \cdot (\alpha \otimes 1_B) = h \cdot (\alpha \otimes 1_B), \end{aligned}$$

la condition 1 équivaut à BIM_1 . De même 2 équivaut à BIM_2 .

PROPOSITION 15. *S'il existe $\hat{\otimes}$ classifiant les bimorphismes, il se calcule bien suivant la Définition 3 (nécessaire pour que $\hat{\otimes}$ soit le prolongement cocontinu de $\bar{\otimes}$).*

Reprenons maintenant le Lemme *. Si e est un épimorphisme, les morphismes w' tels que $w'.\underline{b} = w'.\underline{b}'$ sont ceux tels que l'on a $w'.\underline{b}'.e = w'.\underline{b}.e$. Mais précisément s_B est un épimorphisme scindé et $\bar{\otimes}$ étant un foncteur, il en est de même de $LP A \bar{\otimes} s_B = \underline{a}'$; et aussi $s_A \bar{\otimes} LP B = \underline{c}$ est un épimorphisme (scindé). Dans la propriété universelle de w on peut donc substituer aux paires $(\underline{b}, \underline{b}')$ et $(\underline{d}, \underline{d}')$ les paires $(\underline{b}. \underline{a}, \underline{b}'. \underline{a}')$ et $(\underline{d}. \underline{c}, \underline{d}'. \underline{c})$; et puisque $\underline{b}. \underline{a}' = \underline{d}'. \underline{c}$, on en déduit que w est universel parmi les w' vérifiant

$$w'.(\underline{b}'. \underline{a}') = w'.(\underline{b}. \underline{a}') = w'.(\underline{d}'. \underline{c}),$$

soit

$$w'.(L\alpha \bar{\otimes} s_B) = w'.(s_A \bar{\otimes} s_B) = w'.(s_A \bar{\otimes} L\beta).$$

Mais en réalité si l'on a un w' vérifiant

$$w'.(L\alpha \bar{\otimes} s_B) = w'.(s_A \bar{\otimes} L\beta),$$

il vient

$$w'.(L\alpha \bar{\otimes} s_B). (s_{PA} \bar{\otimes} 1). (LP a_A \bar{\otimes} 1) = (2)$$

en posant $(2) = w'.(s_A \bar{\otimes} L\beta). (s_{PA} \bar{\otimes} 1). (LP a_A \bar{\otimes} 1)$, d'où successivement

$$w'.((L\alpha. s_{PA}) \bar{\otimes} s_B). (LP a_A \bar{\otimes} 1) = (2),$$

$$w'.(s_A. LP \alpha) \bar{\otimes} s_B). (LP a_A \bar{\otimes} 1) = (2),$$

c'est-à-dire

$$w'.(s_A \bar{\otimes} s_B). ((LP \alpha. LP a_A) \bar{\otimes} 1) = w'.(s_A \bar{\otimes} L\beta). ((s_{PA}. LP a_A) \bar{\otimes} 1),$$

$$w'.(s_A \bar{\otimes} s_B) = w'.(s_A \bar{\otimes} L\beta).$$

Donc avec

$$L\alpha \bar{\otimes} s_B = \overline{D_{A,B}. ((a_A. \alpha) \otimes 1_{PB})} = \overline{l_{A,B}. (\alpha \otimes 1_{PB})}$$

$$= s_{A \otimes B}. Ll_{A,B}. L(\alpha \otimes 1_{PB}),$$

$$s_A \bar{\otimes} L\beta = \overline{D_{A,B}. (1_{PA} \otimes (a_B. \beta))} = \overline{r_{A,B}. (1_{PA} \otimes \beta)} =$$

$$= s_{A \otimes B} \cdot L r_{A, B} \cdot L(l_{P A} \otimes \beta),$$

et en observant par ailleurs que, si

$$h: (P(\underline{a} \otimes \underline{\beta}), S_{\underline{a} \otimes \underline{\beta}}) \rightarrow (C, \gamma)$$

est un morphisme d'algèbres égalisant $l_{A, B} \cdot (\alpha \otimes 1)$ et $r_{A, B} \cdot (1 \otimes \beta)$, il vient :

$$\begin{aligned} h \cdot s_{\underline{a} \otimes \underline{\beta}} \cdot L(l_{A, B} \cdot (\alpha \otimes 1)) &= \gamma \cdot L h \cdot L(l_{A, B} \cdot (\alpha \otimes 1)) = \\ &= \gamma \cdot L(h \cdot l_{A, B} \cdot (\alpha \otimes 1)) = \gamma \cdot L(h \cdot r_{A, B} \cdot (1 \otimes \beta)) = \\ &= h \cdot s_{\underline{a} \otimes \underline{\beta}} \cdot L(r_{A, B} \cdot (1 \otimes \beta)), \end{aligned}$$

on obtient :

PROPOSITION 16 (formule du produit tensoriel). Avec $\hat{\otimes}$ défini par la Définition 3, on a dans K^P :

$$(1) \quad L(P\underline{a}) \bar{\otimes} L(P\underline{\beta}) \xrightarrow[s_{\underline{a}} \bar{\otimes} L\underline{\beta}]{L\underline{a} \bar{\otimes} s\underline{\beta}} L\underline{a} \bar{\otimes} L\underline{\beta} \xrightarrow[\text{coker}]{W_{\underline{a}, \underline{\beta}}} (A, \alpha) \hat{\otimes} (B, \beta)$$

c'est-à-dire

$$(2) \quad L(P\underline{a} \otimes P\underline{\beta}) \xrightarrow[s_{\underline{a} \otimes \underline{\beta}} \cdot L(r_{A, B} \cdot (1 \otimes \beta))]{s_{\underline{a} \otimes \underline{\beta}} \cdot L(l_{A, B} \cdot (\alpha \otimes 1))} L(\underline{a} \otimes \underline{\beta}) \xrightarrow[\text{coker}]{W_{\underline{a}, \underline{\beta}}} (A, \alpha) \hat{\otimes} (B, \beta)$$

de sorte que $W_{\underline{a}, \underline{\beta}}$ est universel parmi les morphismes de K^P égalisant (dans K)

$$P\underline{a} \otimes P\underline{\beta} \xrightarrow[r_{A, B} \cdot (1 \otimes \beta)]{l_{A, B} \cdot (\alpha \otimes 1)} P(\underline{a} \otimes \underline{\beta});$$

donc si $q_{\underline{a}, \underline{\beta}}: P(\underline{a} \otimes \underline{\beta}) \rightarrow \alpha \check{\otimes} \beta$ est le conoyau dans K de cette paire, $(A, \alpha) \hat{\otimes} (B, \beta)$ est le quasi-quotient de $L(\underline{a} \otimes \underline{\beta})$ par $q_{\underline{a}, \underline{\beta}}$:

$$(3) \quad (A, \alpha) \hat{\otimes} (B, \beta) = L(\underline{a} \otimes \underline{\beta}) / q_{\underline{a}, \underline{\beta}}.$$

Si K est à \leftarrow lim finies et $K^P \rightarrow K$ sous-engendrant, alors (dans K^P)

$$(4) \quad \Sigma_{\underline{a}, \underline{\beta}} \xrightarrow{\sigma_{\underline{a}, \underline{\beta}}} L(\underline{a} \otimes \underline{\beta})^2 \xrightarrow[\text{pr}_2]{\text{pr}_1} L(\underline{a} \otimes \underline{\beta}) \xrightarrow[\text{coker}]{W_{\underline{a}, \underline{\beta}}} (A, \alpha) \hat{\otimes} (B, \beta),$$

où $\sigma_{\underline{a}, \underline{\beta}}$ est le morphisme de K^P sous-engendré par

$$P_{\underline{\alpha}} \otimes P_{\underline{\beta}} \xrightarrow{[l_{A,B} \cdot (\alpha \otimes I), r_{A,B} \cdot (I \otimes \beta)]} P(\underline{\alpha} \otimes \underline{\beta})^2.$$

6° La formulation de la Proposition 16 est clairement l'analogue de la description classique du produit tensoriel de R-espaces vectoriels (voir Paragraphe 1.4 a, Formule (1)) ou encore du produit de distributeurs (voir [5]).

Comme autre exemple, considérons l'Exemple 4, Paragraphe 1.3 : Si X et Y sont deux Ch-algèbres - i. e. deux catégories - on peut calculer $X \hat{\otimes} Y$ (grâce à la Proposition 16, à la transitivité des quasi-quotients et au fait que $()_I : Graphe \rightarrow Ens$ est à quasi-quotients) comme quasi-quotient de $Ch(X * Y)$ par la relation bicompatible engendrée par :

- (1) $((\epsilon, f_1), (\epsilon, f_2)) - (\epsilon, f_1 \cdot f_2),$
- (2) $((g_1, e), (g_2, e)) - (g_1 \cdot g_2, e).$

Ainsi $X \hat{\otimes} Y$ a pour classe d'objets $X_0 \times Y_0$ et pour morphismes les suites

$$[(\epsilon_{n+1}, f_n), (g_n, e_n), (\epsilon_n, f_{n-1}), \dots, (\epsilon_2, f_1), (g_1, e_1)] : (\epsilon_1, e_1) \rightarrow (\epsilon_{n+1}, e_{n+1}),$$

avec $f_i : e_i \rightarrow e_{i+1}$, $g_i : \epsilon_i \rightarrow \epsilon_{i+1}$ pour tout $i = 1, \dots, n$.

La composition est la concaténation avec réduction éventuelle par application de (1) ou (2). Ainsi $X \hat{\otimes} Y$ est la somme fibrée dans Cat :

$$\begin{array}{ccc} X_0 \times Y_0 & \longrightarrow & X_0 \times Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X \times Y_0 & \longrightarrow & X \hat{\otimes} Y \end{array}$$

Si l'on quotiente $X \hat{\otimes} Y$ par

$$(3) ((\epsilon', f), (g, e)) - ((g, e'), (\epsilon, f)), \text{ où } f : e \rightarrow e', g : \epsilon \rightarrow \epsilon',$$

on obtient $X \times Y$.

Si X et Y sont deux monoïdes, $X \hat{\otimes} Y$ est ce que d'habitude on nomme $X * Y$, somme de X et Y dans les monoïdes.

Par abus de notation, $X \hat{\otimes} Y$ sera maintenant désigné par $X * Y$, pour des catégories arbitraires X et Y . Du Corollaire 23 ci-après ré-

sulte que : * est une structure monoïdale fermée sur Cat .

7° Classifiant les bimorphismes, $\hat{\otimes}$ fonctionne dans la Proposition 3, Paragraphe 1.1 :

COROLLAIRE 17. Dans le cadre d'une loi distributive $D: \otimes \Rightarrow P$ (Paragraphe 1.1) les bimorphismes $h: A \otimes B \rightarrow C$ (Propositions 12, 13) de $((A, \alpha), (B, b))$ vers (C, c) sont encore caractérisés par la condition :

$$BIM'' : c.Ph.l_{A,B}.(\alpha \otimes l_{PB}) = c.Ph.r_{A,B}.(l_{PA} \otimes b).$$

8° Si $K = (Ens, +, \dots)$ et $P = \mathcal{P}$ avec D suivant l'Exemple 7 du Paragraphe 1.3 on voit que $\hat{+} = \times$. En fait sous les hypothèses de l'Exemple 7, vu que $\hat{+}$ classifie les bimorphismes, on trouve que $\hat{+}$ est la somme dans K^P . Ainsi si K est à sommes et K^P à conoyaux, alors - vu la Proposition 16 - K^P est à sommes et donc à \lim_{\rightarrow} finies.

PROPOSITION 18. Si P est une monade sur K et si K est à \lim_{\rightarrow} finies, alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) Dans K^P tout diagramme $LX \xrightarrow{\quad} LY$ a un conoyau.
- (2) Dans K^P tout diagramme a un conoyau.
- (3) K^P est à sommes fibrées.
- (4) K^P est à \lim_{\rightarrow} finies.
- (5) $K^P \rightarrow K$ est à quasi-quotients par les flèches conoyaux.
- (6) $K^P \rightarrow K$ est à quasi-quotients.

PREUVE. (1) \Rightarrow (4) est dû à Linton, cité par Manes page 278 [22]. (2) \Rightarrow (4), plus faible, est (ci-dessus) conséquence de la Proposition 16. On vérifie aussi que (5) \Rightarrow (2) et, comme $K^P \rightarrow K$ admet un adjoint, que (3) \Rightarrow (6). Pour d'autres résultats utiles, voir [0].

COROLLAIRE 19 (voir déjà [22]). Si P est une monade sur Ens , alors Ens^P est cocomplète.

PREUVE. On vérifie, en considérant P en termes d'opérations, que le foncteur $K^P \rightarrow K$ est à quasi-quotients par les relations d'équivalence.

COROLLAIRE 20. Si K est à \lim_{\rightarrow} finies et si $P: K \rightarrow K$ préserve les conoyaux (par exemple si P a un adjoint à droite), alors K^P est à \lim_{\rightarrow}

finies.

PREUVE. En effet on calcule alors les conoyaux de K^P dans K .

9° *Observation.* Si $(K, \otimes) = (Ens, \times)$, alors (Exemple 1 Paragraphe 1.3) la formule (2) ou (3) de la Proposition 16 a un sens même si P n'est pas monoïdale, et fournit un classifiant des bimorphismes au sens $(BIM_1$ et $BIM_2)$ (Paragraphe 1.5.2), mais alors $(K^P, \hat{\otimes})$ n'est pas monoïdale ; sa structure sera décrite dans un prochain article. Mais si (P, D) est monoïdale, nous allons voir au paragraphe suivant que, sous des conditions de continuité C, C' , $(K^P, \hat{\otimes})$ est monoïdale.

1.6. Structure monoïdale de $(K^P, \hat{\otimes})$ pour $D: \otimes \Rightarrow P$ monade monoïdale cohérente.

On reprend les définitions et notations du Paragraphe 1.5.

1° PROPOSITION 21. 1° On a

$$LA \hat{\otimes} LB \approx LA \bar{\otimes} LB, \quad (A, \alpha) \hat{\otimes} LB \approx (A, \alpha) \bar{\otimes} LB,$$

de sorte que $\hat{\otimes}|_{KL^P} \approx \bar{\otimes}$ et que, pour tout (A, α) , les foncteurs

$$(A, \alpha) \hat{\otimes} (-) \quad \text{et} \quad (-) \hat{\otimes} (A, \alpha)$$

transforment en conoyaux les conoyaux présentant les algèbres.

2° Si $(A, \alpha) \hat{\otimes} (-)$ et $(-) \hat{\otimes} (A, \alpha)$ transforment en conoyaux tous les conoyaux, de la forme $LX \xrightarrow{\quad} LY \xrightarrow{\quad} Q$, et si, pour tout $X \in K_0$, $(-) \otimes X$ et $X \otimes (-)$ préservent les sommes (dans K), alors $(A, \alpha) \hat{\otimes} (-)$ et $(-) \hat{\otimes} (A, \alpha)$ préservent les sommes (dans K^P).

3° Un conoyau

$$(A, \alpha) \xrightarrow{\quad f \quad} (B, \beta) \xrightarrow{\quad q \quad} (C, \gamma)$$

$$\xrightarrow{\quad g \quad}$$

dans K^P est préservé par $(-) \hat{\otimes} (X, x)$ ssi, pour tout (Z, z) , tout bimorphisme

$$h: B \otimes X \rightarrow Z \quad \text{tel que} \quad h.(f \otimes X) = h.(g \otimes X)$$

se factorise de manière unique par $q \otimes X$.

4° Un conoyau

$$(A, \alpha) \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} (B, \beta) \xrightarrow{q} (C, \gamma)$$

est préservé par $(-)\hat{\otimes}LV$ ssi:

cok_V : Pour tout (Z, z) et $t: B \otimes V \rightarrow Z$ vérifiant BIM_1 et tel que $t.(f \otimes V) = t.(g \otimes V)$, t se factorise de manière unique par $q \otimes V$.

5° Un conoyau

$$(A, \alpha) \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} (B, \beta) \xrightarrow{q} (C, \gamma)$$

dans K^P est préservé par tous les $(-)\hat{\otimes}(X, x)$ ssi on a cok_V pour tout $V \in K_0$.

PREUVE. 1° Le premier point résulte de la Définition 3 et du fait que les présentations s_A d'algèbres libres LA sont des conoyaux contractibles (scindés par $(L\alpha_A, LP\alpha_A)$), donc absolus.

Pour le second point: un ϕ de source $LA \bar{\otimes} LB$ égalise $L\alpha \bar{\otimes} LB$ et $s_A \bar{\otimes} LB$ ssi il égalise

$$(LA \bar{\otimes} s_B).(L\alpha \bar{\otimes} s_{PB}) \text{ et } (LA \bar{\otimes} s_B).(s_A \bar{\otimes} Ls_B),$$

ssi $\phi.(LA \bar{\otimes} s_B) = \phi'$ égalise $L\alpha \bar{\otimes} s_{PB}$ et $s_A \bar{\otimes} Ls_B$, ssi ϕ' se factorise par $(A, \alpha)\hat{\otimes}LB$ en un ϕ'' . Inversement un ψ de source $LA \bar{\otimes} LPB$ égalise $L\alpha \bar{\otimes} s_{PB}$ et $s_A \bar{\otimes} Ls_B$ ssi il égalise $L\alpha \bar{\otimes} I$ et $s_A \bar{\otimes} I$ ainsi que $I \bar{\otimes} s_{PB}$ et $I \bar{\otimes} Ls_B$. Le deuxième point signifie qu'il existe un ϕ tel que $\psi = \phi.(LA \bar{\otimes} s_B)$ et alors le premier point dit que ϕ égalise $L\alpha \bar{\otimes} LB$ et $s_A \bar{\otimes} LB$, de sorte que ϕ se factorise par $(A, \alpha)\hat{\otimes}LB$ en ψ' . Pour

$$\phi = coker(L\alpha \bar{\otimes} LB, s_A \bar{\otimes} LB) \text{ et } \psi = coker(L\alpha \bar{\otimes} s_{PB}, s_A \bar{\otimes} Ls_B)$$

on obtient $\phi'' = \psi'^{-1}$. La préservation des conoyaux présentant les algèbres est alors claire.

2° Si $(A_i, \alpha_i)_{i \in I}$ est une famille d'algèbres, on a (résultat de Linton repris Proposition 18):

$$(*) \quad L(\Pi P A_i) \xrightarrow[u = S_{\Pi A_i} \cdot P(\] P(\sigma_i) \lceil]]{L(\Pi \alpha_i)} L(\Pi A_i) \xrightarrow{coker} \Pi(A_i, \alpha_i)$$

Soit (X, x) une algèbre. Tensorisant par (X, x) le conoyau $(*)$ on suppose donc obtenir un conoyau. Alors les morphismes ayant pour source $(\amalg(A_i, \alpha_i)) \hat{\otimes} (X, x)$ s'identifient aux morphismes de source $L(\amalg A_i) \hat{\otimes} X$ égalisant $u \hat{\otimes} 1$ et $L(\amalg \alpha_i) \hat{\otimes} 1$, soit encore aux morphismes ϕ de source

$$L(\amalg A_i) \bar{\otimes} L X = L((\amalg A_i) \otimes X) = L(\amalg(A_i \otimes X))$$

égalisant : d'une part $u \bar{\otimes} 1$ et $L(\amalg \alpha_i) \bar{\otimes} 1$, et d'autre part $1 \bar{\otimes} s_X$ et $1 \bar{\otimes} L x$. De tels ϕ s'identifient aux familles de ϕ_i (de source $A_i \otimes X$) ($\phi_i = \phi \cdot P(\sigma_i \otimes X) \cdot \alpha_{A_i \otimes X}$) vérifiant

$$\phi_i \cdot (\alpha_i \otimes X) = z \cdot P(\phi_i) \cdot r_{A_i, X}$$

(si (Z, z) est le but de ϕ) et

$$] \phi_i [\cdot (1 \otimes x) = z \cdot P(] \phi_i [) \cdot l_{\amalg A_i, X}$$

Ainsi

$$(\amalg(A_i, \alpha_i)) \hat{\otimes} (X, x) = \amalg((A_i, \alpha_i) \hat{\otimes} (X, x)).$$

3° Pour la préservation des conoyaux quelconques

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B \xrightarrow{p} C$$

on écrit

$$L P A \rightrightarrows L A \longrightarrow A \quad \text{et} \quad L P B \rightrightarrows L B \longrightarrow B$$

et on développe, après avoir tensorisé par (X, x) .

La vérification de 4 est alors sans surprise, et 5 résulte de 4 (en prenant $V = L X$, $V = L P X$).

2° Soit (A, α) , (B, β) , (C, γ) trois algèbres. On considère

$$\begin{array}{ccccc}
 M \bar{\otimes} L P C & \xrightarrow{\frac{(L \alpha \bar{\otimes} s_B) \bar{\otimes} L P C}{(s_A \bar{\otimes} L \beta) \bar{\otimes} L P C}} & M' \bar{\otimes} L P C & \xrightarrow{W_{\alpha, \beta} \hat{\otimes} L P C} & M'' \hat{\otimes} L P C \\
 \downarrow I \bar{\otimes} s_C & \downarrow I \bar{\otimes} L \gamma & \downarrow I \bar{\otimes} s_C & \downarrow I \bar{\otimes} L \gamma & \downarrow I \hat{\otimes} s_C \\
 M \bar{\otimes} L C & \xrightarrow{\frac{(L \alpha \bar{\otimes} s_B) \bar{\otimes} L C}{(s_A \bar{\otimes} L \beta) \bar{\otimes} L C}} & M' \bar{\otimes} L C & \xrightarrow{W_{\alpha, \beta} \hat{\otimes} L C} & M'' \hat{\otimes} L C \\
 \downarrow I \hat{\otimes} \gamma & \downarrow I \hat{\otimes} \gamma & \downarrow I \hat{\otimes} \gamma & \searrow W_{\alpha, \beta; \gamma} & \downarrow I \hat{\otimes} \gamma \\
 M \hat{\otimes} (C, \gamma) & \xrightarrow{\frac{(L \alpha \bar{\otimes} s_B) \hat{\otimes} (C, \gamma)}{(s_A \bar{\otimes} L \beta) \hat{\otimes} (C, \gamma)}} & M' \hat{\otimes} (C, \gamma) & \xrightarrow{W_{\alpha, \beta} \hat{\otimes} \gamma} & M'' \hat{\otimes} (C, \gamma)
 \end{array}$$

où $M = LPA \bar{\otimes} LPB$, $M' = LA \bar{\otimes} LB$, $M'' = (A, a) \hat{\otimes} (B, \beta)$.

Puisque $(A, a) \hat{\otimes} (-)$ et $(-) \hat{\otimes} (A, a)$ préservent les conoyaux présentant les algèbres (Proposition 21), pour que chaque ligne et chaque colonne de cette figure soit un conoyau, il suffit que le conoyau

$$M \xrightarrow[s_A \bar{\otimes} L\beta]{La \bar{\otimes} s_B} M' \xrightarrow{W_{a,\beta}} M''$$

soit préservé par $(-) \hat{\otimes} LC$. Pour cela, revenant à la Définition 3, Paragraphe 1.5 5, il suffit que :

C : Pour tout $C \in K_0$, $(A, a), (B, \beta) \in (K^P)_0$, le foncteur $(-) \hat{\otimes} LC$ préserve les deux conoyaux :

$$(i) \quad LPA \bar{\otimes} LB \xrightarrow[s_A \bar{\otimes} LB]{La \bar{\otimes} LB} LA \bar{\otimes} LB \xrightarrow{a \hat{\otimes} LB} (A, a) \hat{\otimes} LB,$$

$$(ii) \quad (A, a) \hat{\otimes} LPB \xrightarrow[1 \hat{\otimes} s_B]{1 \hat{\otimes} L\beta} (A, a) \hat{\otimes} LB \xrightarrow{1 \hat{\otimes} \beta} (A, a) \hat{\otimes} (B, \beta).$$

A l'aide de la Proposition 21, 4, on pourra développer C en termes de bi-morphismes. Cette condition est à rapprocher des conditions de cohérence données dans [21] (rappelées ici au Paragraphe 1.4 j).

Supposons donc C réalisée. D'après la définition évidente de $\hat{\otimes}$ sur les morphismes on a $W_{a,\beta} = a \hat{\otimes} \beta$, et ensuite, en reprenant la Définition 3 et le Lemme *, on voit que $W_{a,\beta,\gamma} = (a \hat{\otimes} \beta) \hat{\otimes} \gamma$ et égalise universellement les paires :

- $(s_A \bar{\otimes} 1) \bar{\otimes} 1$ et $(La \bar{\otimes} 1) \bar{\otimes} 1$,
- $(1 \bar{\otimes} s_B) \bar{\otimes} 1$ et $(1 \bar{\otimes} L\beta) \bar{\otimes} 1$,
- $(1 \bar{\otimes} 1) \bar{\otimes} s_C$ et $(1 \bar{\otimes} 1) \bar{\otimes} L\gamma$.

La propriété analogue de $W_{a,\beta,\gamma} = a \hat{\otimes} (\beta \hat{\otimes} \gamma)$ (sous une hypothèse C' analogue à C) entraîne alors l'existence d'un isomorphisme $\hat{a}_{a,\beta,\gamma}$ avec

$$\begin{array}{ccc} (LA \bar{\otimes} LB) \bar{\otimes} LC & \xrightarrow{(a \hat{\otimes} \beta) \hat{\otimes} \gamma} & (A, a) \hat{\otimes} (B, \beta) \hat{\otimes} (C, \gamma) \\ \downarrow L(a_{A,B,C}) & & \downarrow \hat{a}_{a,\beta,\gamma} \\ LA \bar{\otimes} (LB \bar{\otimes} LC) & \xrightarrow{a \hat{\otimes} (\beta \hat{\otimes} \gamma)} & (A, a) \hat{\otimes} ((B, \beta) \hat{\otimes} (C, \gamma)) \end{array}$$

Pour voir que $\hat{a}_{\alpha, \beta, \gamma}$ est un isomorphisme, on utilise le fait que, composés de conoyaux, $\mathbb{W}_{\alpha, \beta, \gamma}$ et $\mathbb{W}_{\alpha; \beta, \gamma}$ sont des épimorphismes; ceci sert aussi pour montrer que les équations satisfaites par les $L\alpha_{A, B, C}$ sont satisfaites par les $\hat{a}_{\alpha, \beta, \gamma}$.

De même en considérant

$$\begin{array}{ccccc}
 LPA & \xrightarrow{L\alpha} & LA & \xrightarrow{a} & (A, \alpha) \\
 \downarrow L\rho_{PA} & \xrightarrow{s_A} & \downarrow L\rho_A & & \downarrow \hat{\rho}_\alpha \\
 LPA \hat{\otimes} LI & \xrightarrow{L\alpha \hat{\otimes} LI} & LA \hat{\otimes} LI & \xrightarrow{a \hat{\otimes} LI} & (A, \alpha) \hat{\otimes} LI
 \end{array}$$

on obtient un isomorphisme $\hat{\rho}_\alpha$ qui satisfait les équations satisfaites par les $L\rho_A$. Puis de même on obtient $\hat{\lambda}_\alpha: (A, \alpha) \cong LI \hat{\otimes} (A, \alpha)$.

PROPOSITION 22. Si $\mathbb{K} = (K, \otimes, I, \rho, \lambda, \alpha)$ est une catégorie monoïdale et (P, D) une monade monoïdale sur \mathbb{K} telle que les conditions C et C' soient remplies et que K^P soit à conoyaux (ainsi - Propositions 16 et 18 - $\hat{\otimes}$ est bien défini), alors $\mathbb{K}^P = (K^P, \hat{\otimes}, LI, \hat{\rho}, \hat{\lambda}, \hat{\alpha}_-)$ est une catégorie monoïdale. On dira dans ce cas que (P, D) est cohérente.

COROLLAIRE 23. Si $\mathbb{K} = (K, \otimes, I, \rho, \lambda, \alpha_-)$ est monoïdale fermée symétrique à noyaux, si (P, D) est une monade monoïdale symétrique sur K telle que K^P soit à conoyaux, alors K^P est monoïdale fermée symétrique.

PREUVE. Sous ces hypothèses P est forte et commutative, et K^P fermée (d'après Kock, cf. ici Théorème Paragraphes 1.3 et 1.5). D'après Eilenberg-Kelly [10] K^P sera monoïdale fermée dès que l'on aura un K -adjoint au hom ([10], Theorem 5.3, page 490); pour cela (Proposition 12) il faut avoir un classifiant des bimorphismes, et d'après la Proposition 15 c'est $\hat{\otimes}$, qui d'après la Proposition 16 se calcule comme conoyau dans K^P . Et comme $(-)\hat{\otimes}(X, x)$ et $(X, x)\hat{\otimes}(-)$ ont des coadjoints, ils préservent les conoyaux, de sorte que C et C' sont vérifiés. Il reste à voir que l'adjonction entre $\text{hom} = \llbracket, \rrbracket$ et $\hat{\otimes}$ est enrichie dans

\mathbb{K} , i. e. décrite par un isomorphisme

$$\llbracket (A, \alpha) \hat{\otimes} (B, \beta), (C, \gamma) \rrbracket \rightarrow \llbracket (A, \alpha), \llbracket (B, \beta), (C, \gamma) \rrbracket \rrbracket,$$

soit

$$\llbracket (A, \alpha) \hat{\otimes} (B, \beta), (C, \gamma) \rrbracket \hat{\otimes} (A, \alpha) \rightarrow \llbracket (B, \beta), (C, \gamma) \rrbracket,$$

ou

$$(\llbracket (A, \alpha) \hat{\otimes} (B, \beta), (C, \gamma) \rrbracket \hat{\otimes} (A, \alpha)) \hat{\otimes} (B, \beta) \rightarrow (C, \gamma)$$

ou, en composant avec l'isomorphisme \hat{a}_- d'associativité

$$\llbracket (A, \alpha) \hat{\otimes} (B, \beta), (C, \gamma) \rrbracket \hat{\otimes} ((A, \alpha) \hat{\otimes} (B, \beta)) \xrightarrow{ev} (C, \gamma).$$

Fa fait, cet enrichissement de l'adjonction et la Proposition 22 permettent, avec le dual du Théorème 5.3 page 490 de [10], de retrouver COROLLAIRE 24 (Kock [20]). Si \mathbb{K} est à noyaux, monoïdale fermée symétrique, \mathbb{P} forte commutative, $\mathbb{K}^{\mathbb{P}}$ est fermée.

Comme on l'a expliqué au Paragraphe 1.4 e, on obtient par suite : COROLLAIRE 25 (Porst-Wischnewsky [23], Day [9]). Si \mathbb{P} est une monade commutative sur Ens , alors $Ens^{\mathbb{P}}$ est monoïdale fermée.

Dans l'Exemple 6, Paragraphe 1.3, il vient

$$r_{X,Y} = (M \otimes X) \otimes Y \approx M \otimes (X \otimes Y) \quad \text{et} \quad l_{X,Y} = X \otimes (M \otimes Y) \approx M \otimes (X \otimes Y),$$

isomorphismes canoniques, de sorte que, $M \otimes$ - étant supposé cocontinu, le conoyau à prendre pour $\hat{\otimes}$ suivant la Proposition 16 s'obtient (cf. Corollaire 20) comme l'image par $M \otimes$ - d'un conoyau dans K à savoir celui considéré par Keigher :

$$\begin{array}{ccc} M \otimes (A \otimes B) & \xrightarrow{\approx} & (M \otimes A) \otimes B \xrightarrow{a \otimes B} A \otimes B \\ & \xrightarrow{\approx} & A \otimes (M \otimes B) \xrightarrow{A \otimes \beta} A \otimes B \end{array}$$

COROLLAIRE 26 (Keigher [18]). Si \mathbb{K} est à noyaux et conoyaux, monoïdale fermée symétrique, si $\mathbb{P} = \mathbb{M} \otimes (-)$ avec \mathbb{M} monoïde commutatif, alors $\mathbb{K}^{\mathbb{P}}$ est monoïdale fermée.

En appliquant la Proposition 22 au cas où $\mathbb{P} = (P, a, S)$ est idempotente ($S = Id$), on obtient, vu la formule de $\hat{\otimes}$ (Proposition 16) :

COROLLAIRE 27. Si (K, \otimes, \dots) est monoïdale, à conoyaux préservés

par les $(-)\otimes X$ et $X\otimes(-)$, et si $K' \xrightarrow{J} K$ est une sous-catégorie pleine réflexive, de réflecteur $P: K \rightarrow K'$, alors $X' \hat{\otimes} Y' := P(JX' \otimes JY')$ fait de K' une catégorie monoïdale lorsque l'on a 1, 2, 5, 6, 7 (Paragraphe 1.1) pour des $D_{X,Y}: PX \otimes PY \rightarrow P(X \otimes Y)$ naturels en X, Y .

Des résultats de A. et C. Ehresmann et Foltz-Lair rappelés en i et j, Paragraphe 1.4, se retrouvent en prenant, pour $\sigma = (\Sigma, \Pi)$ une esquisse, $K = \text{Ens}^\Sigma$, $K' = \text{Ens}^\sigma$.

3° DEFINITION 4. Si (P, D) est une monade monoïdale sur (K, \otimes, \dots) on appelle *factorisation monoïdale* de (P, D) la donnée d'une adjonction $\langle G, F, \epsilon, \eta \rangle$ dans *Mon* (cf. Définition 2) dont la monade associée soit (P, D) .

Avec les notations de Eilenberg-Kelly [10] page 473, on a :

$$G = (G, \tilde{G}, G^0), \quad F = (F, \tilde{F}, F^0),$$

avec $F \dashv G$ (ϵ, η), $GF = P$, où

$$(K', \otimes', J, \dots) \xrightleftharpoons[G]{F} (K, \otimes, I, \dots),$$

$$G^0: I \rightarrow GI, \quad \tilde{G}_{A,B}: GA \otimes GB \rightarrow G(A \otimes B),$$

$$F^0: J \rightarrow FI, \quad \tilde{F}_{X,Y}: FX \otimes' FY \rightarrow F(X \otimes Y),$$

avec les équations de [10] page 473, et avec de plus

$$a_I = GF^0 \cdot G^0, \quad D_{X,Y} = G \tilde{F}_{X,Y} \cdot \tilde{G}_{FX,FY}$$

et enfin $\epsilon: FG \rightarrow Id_{K'}$ transformation naturelle monoïdale. On pose

$$U^P = (U^P, \tilde{U}, U^0), \quad L^P = (L^P, \tilde{L}, L^0),$$

avec $U^0 = I \xrightarrow{a_I} PI$, $L^0 = Id_{LI}$,

$$\tilde{U}_{\alpha,\beta}: A \otimes B \xrightarrow{a} P(A \otimes B) \xrightarrow{U(\alpha \hat{\otimes} \beta)} U((A, \alpha) \hat{\otimes} (B, \beta)),$$

$$\tilde{L}_{X,Y} = (LX \tilde{\otimes} LY = L(X \otimes Y)) \quad (\text{cf. Proposition 8}).$$

PROPOSITION 28. Sous les hypothèses de la Proposition 22, U^P est monoïdal, L^P est monoïdal strict, et $L^P \dashv U^P$ est une adjonction monoïdale faisant de $\langle U^P, L^P, \dots \rangle$ une factorisation monoïdale de (P, D) .

De plus pour toute factorisation monoïdale $\langle G, F, \epsilon, \eta \rangle$ de (P, D) on a un unique foncteur monoïdal $\Phi = (\phi, \tilde{\phi}, \phi^0)$ tel que

$$\begin{array}{ccccc}
 (K^P, \hat{\otimes}) & & (K', \otimes') & \xrightarrow{\Phi} & (K^P, \hat{\otimes}) \\
 & \swarrow & \uparrow G & & \uparrow \\
 & & (K, \otimes) & & \\
 & \nwarrow & \downarrow F & & \downarrow \\
 & & & &
 \end{array}$$

$U^P \Phi = G \quad \text{et} \quad \Phi F = L^P.$

La vérification détaillée ne sera pas reproduite, car fastidieuse et sans difficulté particulière. On indique seulement, pour la dernière affirmation, comment définir Φ : Pour $A \in K'_0$ on a

$$\epsilon_A : FGA \rightarrow A, \quad \text{d'où} \quad \Phi A = (GA, G\epsilon_A).$$

Ensuite ϕ^0 est l'unique tel que $G^0 = U\phi^0 \cdot U^0$, et

$$\tilde{\phi}_{A,B} : \phi A \hat{\otimes} \phi B \rightarrow \phi(A \otimes B)$$

est l'unique tel que

$$\tilde{G}_{A,B} = U(\tilde{\phi}_{A,B} \cdot (G\epsilon_A \hat{\otimes} G\epsilon_B)) \cdot a_{GA \otimes GB}.$$

2. MACHINES.

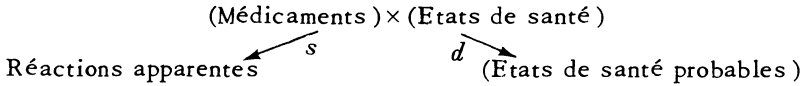
Dans tout ce chapitre, (P, D) est une monade monoïdale cohérente sur la catégorie monoïdale (K, \otimes) telle que, donc, $\hat{\otimes}$ soit défini sur K^P (cf. Propositions 16, 18, 22).

2.1. P-machines et bicatégories P-graduées.

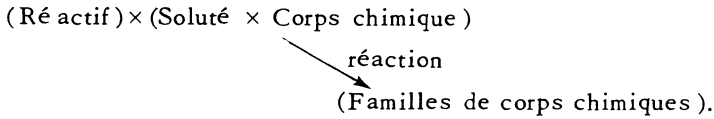
1° *Motivations (extra-mathématiques).* Toute pratique expérimentale coïncide avec la construction d'une machine «floue» (i.e. P_λ -machine) simulant la réalité étudiée (vue comme une «machine» naturelle au fonctionnement imparfaitement connu). Une simulation sera d'autant plus objective et réaliste qu'elle ne sera pas complètement déterministe a priori, et comportera volontairement des éléments flous. Ceux-ci seront déterminés a posteriori par la pratique.

Ainsi l'établissement d'un diagnostic médical et du traitement

correspondant est l'élaboration d'une machine floue de la forme



De même l'établissement d'un système de prévision qualitative des réactions chimiques en solution est la construction (en utilisant la loi d'action de masses pour établir des échelles de potentiels et potentiels conditionnels) d'une machine :



Dans les diverses notions de machine « floue » (machines partielles, non-déterministes, stochastiques, ...) l'idée commune est que l'on se donne d'abord un processus P qui « donne du flou », qui se trouve en fait être la partie foncteur d'une monade monoïdale cohérente sur (K, \otimes) (par exemple, cf. Paragraphe 1.3,

$$P X = X (!), X + I, 2^X, [0, I]^X, L^X, \dots$$

sur Ens , 2^X sur Top , $\Lambda X = \bigoplus_p \Lambda^p X$ sur $A-Mod$, etc...) au sens du Paragraphe 1.1. Ensuite on considère dans la Définition 5 que d et s ne sont plus à valeurs dans E et O mais dans PE et PO (on obtient donc les P_λ -machines). Par exemple si $P X = L^X$ on imagine $d(e, i)(e') \in L$ comme étant la valeur dans L et de l'énoncé : « en introduisant i dans la machine dans l'état e la machine va se mettre dans l'état e' ».

L'intérêt des P-machines n'est donc pas de généraliser le concept de machines, mais le « déplaçant » (de K à K^P), de permettre une analyse plus naturelle des situations à simuler. Une fois construite une machine floue, il est toujours possible de la remplacer par une machine déterministe plus grosse (ci-après, Proposition 29).

2° DEFINITION 5. On appelle *machine de Mealy* dans une catégorie monoïdale (V, \otimes) un 5-uplet (I, E, O, d, s) avec $I, E, O \in V_0$,

$$d : E \otimes I \rightarrow E, \quad s : E \otimes I \rightarrow O \quad \text{dans } V,$$

I est l'objet des « inputs » (et n'est pas ici l'objet unité pour \otimes), O celui des « outputs », s le signal de sortie, d la dynamique, et le fonctionnement de la machine s'écrit :

$$t: i \rightarrow e, \quad t + 1: d(e, i) \rightarrow s(e, i).$$

On note $Mach_V(I, O)$ la catégorie ayant pour objets les machines de Mealy, d'entrée I et sortie O , dans (V, \otimes) , et où un morphisme de (I, E, O, d, s) vers (I, E', O, d', s') est un $f: E \rightarrow E'$ tel que

$$f \cdot d = d' \cdot (f \otimes Id_I), \quad s' \cdot (f \otimes Id_I) = s.$$

DEFINITION 6. (P, D) étant une monade monoïdale sur (K, \otimes) , une machine de Mealy dans $(K^P, \hat{\otimes})$ (resp. $(KlP, \tilde{\otimes})$) sera appelée une P -machine (resp. une P_λ -machine).

PROPOSITION 29. En associant à toute P_λ -machine

$$P E \xleftarrow{d} E \otimes I \xrightarrow{s} P O$$

la machine

$$P E \xleftarrow{S_E \cdot P d \cdot D_{E, I}} P E \otimes P I \xrightarrow{S_E \cdot P s \cdot D_{E, I}} P O,$$

on détermine un foncteur

$$\Pi: Mach_{KlP}(I, O) \xrightarrow{\sim} Mach_K(P I, P O).$$

Aux exemples de machines de [1] et [11] obtenus en faisant varier la catégorie V dans la Définition 5 s'ajouteront donc de nouveaux exemples en faisant varier P sur V .

Si s est remplacé par un $b: E \rightarrow O$ on parle de *machine de Moore*; le lien avec la théorie du contrôle (e.g. avec la Mécanique généralisée et l'évolution des systèmes hamiltoniens) est clairement expliqué dans [1].

3° Si $X: K \rightarrow K$ est un foncteur, une X -machine est un triplet

$$(E, O, d, s), \quad \text{où } d: X E \rightarrow E, \quad s: X E \rightarrow O$$

sont des morphismes de K . Les éléments de $Mach_K(I, O)$ sont les $(-) \otimes I$ -machines. Les X -machines sont les éléments de $Mach_{End K}(X, O)$.

Dans le cas où l'«input process» X se distribue sur une monade P (comme c'est le cas pour $(-)\otimes I$) grâce à une transformation naturelle $\delta: XP \rightarrow PX$ telle que

$$a_{XA} = \delta_A \cdot X(a_A) \text{ et } S_{XA} \cdot P\delta_A \delta_{PA} = \delta_A \cdot XS_A,$$

il est utile de considérer les $(X-P)_\lambda$ -machines, i.e. les triplets

$$((E, O), d, s), \quad \text{où } d: XE \rightarrow PE, \quad s: XE \rightarrow PO.$$

Alors, en notant \hat{X} le prolongement de X à KlP défini par δ , on a :

PROPOSITION 30. Avec les hypothèses ci-dessus, les $(X-P)_\lambda$ -machines sont des \hat{X} -machines, et, a fortiori, des machines (Définition 7) dans $(End(KlP), \circ)$.

Ainsi, si l'on accepte de changer éventuellement la catégorie de base, les concepts de machine, P_λ -machine, P -machine, $(X-P)_\lambda$ -machine sont équivalents.

4° DEFINITION 7. Soit (V, \otimes) monoïdale, $M = (M, \mu)$, $N = (N, \nu)$ deux monoïdes de (V, \otimes) . On appelle machine de Mealy d'entrée M et sortie N toute machine d'entrée M et sortie N compatible avec μ et ν (soit, en notations abrégées :

$$s(x, m' \cdot m) = s(d(x, m), m') \cdot s(x, m), \quad s(x, e_M) = e_N, \\ d(x, e_N) = x, \quad d(x, m' \cdot m) = d(d(x, m), m').$$

La catégorie de ces machines est notée

$$Mach_V(M, N) \longrightarrow Mach_V(M, N).$$

Soit

$$PE \xleftarrow{d} E \otimes I \xrightarrow{s} PO$$

une P_λ -machine. On définit par récurrence :

$$d_1 = d, \quad s_1 = s,$$

$$d_{n+1} = S_E \cdot P d \cdot r_{E, I} \cdot (d_n \otimes Id_I) \cdot \alpha'_{E, I^n, I},$$

$$s_{n+1} = S_E \cdot P s \cdot r_{E, I} \cdot (d_n \otimes Id_I) \cdot \alpha'_{E, I^n, I}$$

avec $\alpha'_{E, I^n, I}: E \otimes I^{n+1} \cong (E \otimes I^n) \otimes I$ l'isomorphisme d'associativité canonique.

Supposant que \otimes commute avec les sommes dénombrables, on introduit d^* et s^* par :

$$d^*. (I_E \otimes i_1^n) = d_n, \quad s^*. (I_E \otimes i_1^n) = s_n,$$

avec les notations de la Proposition 9, Paragraphe 1.2. Avec la loi distributive $d_O : (PO)^* \rightarrow P(O^*)$ de la Proposition 9, on définit de plus $\hat{s} : E \otimes I^* \rightarrow P(O^*)$ par (notations allégées) :

$$\hat{s}(x, (y_n, \dots, y_1)) = d_O [s^*(x, (y_n, \dots, y_1)), s^*(x, (y_{n-1}, \dots, y_1)), \dots, s^*(x, y_1)].$$

On pose $\hat{d} = d^*$.

PROPOSITION 3.1. En associant à toute P_λ -machine

$$PE \xleftarrow{d} E \otimes I \xrightarrow{s} PO$$

la P_λ -machine

$$PE \xleftarrow{\hat{d}} E \otimes I^* \xrightarrow{\hat{s}} P(O^*),$$

on détermine un foncteur

$$Mach_{KLP}(I, O) \xrightarrow{\quad} Mach_{KLP}(I^*, O^*).$$

5° DEFINITION 8. Un bifoncteur $B : B \rightarrow V$ discrètement 2-cofibrant est appelé une *bicatégorie V-graduée* ; et la 2-catégorie des bicatégories V-graduées et bifoncteurs 2-cartésiens est notée $Bicat_V$.

REMARQUE. On considèrera une bicatégorie graduée B comme une « bicatégorie », exactement comme J. Bénabou [6] considère qu'une fibration $C : C \rightarrow E$ est une catégorie. On pourra aussi appliquer aux bicatégories graduées l'esprit des travaux de B. Mitchell sur les catégories graduées.

Soit (V, \otimes) une catégorie monoidale ; avec les notations suggestives de Paré et Wood [25], une V-catégorie gagne à être vue comme une \hat{V} -catégorie, c'est-à-dire comme un ensemble d'objets Q et un foncteur $H : Q \times Q \rightarrow Ens^{V^{op}} : (A, B) \mapsto (J \mapsto H(A, B)(J)) := J \llbracket A, B \rrbracket$, (un élément de $J \llbracket A, B \rrbracket$ étant vu comme une J -famille (formelle) de morphismes de A vers B), avec les conditions usuelles. Pour tout A, B , tout $u : J' \rightarrow J$ détermine donc une application

$$u^* = u \llbracket A, B \rrbracket : J \llbracket A, B \rrbracket \rightarrow J' \llbracket A, B \rrbracket : f \mapsto f \cdot u \ .$$

Wood introduit alors les morphismes indicés $\langle J; f \rangle : A \rightarrow B$ et leur composition

$$\begin{array}{ccc} & B & \\ \langle J; f \rangle \nearrow & = & \langle J'; g \rangle \searrow \\ A & \xrightarrow{\langle J \otimes J', g \cdot f \rangle} & C \end{array}$$

avec $f \in J \llbracket A, B \rrbracket$, $g \in J' \llbracket B, C \rrbracket$ (soit, pour une V -catégorie,

$$f : J \rightarrow [A, B], \quad g : J' \rightarrow [B, C] ;$$

dans ce cas la composition s'écrit

$$J \otimes J' \xrightarrow{f \otimes g} [A, B] \otimes [B, C] \longrightarrow [A, C] \ .$$

On introduit ensuite les 2-morphismes $u : \langle J; f \rangle \rightarrow \langle J'; f' \rangle$ comme les

$$u : J \rightarrow J' \quad \text{tels que} \quad f = f' \cdot u \ .$$

On obtient ainsi une bicatégorie $J(Q, H)$, et l'application $\langle J; f \rangle \mapsto J$ détermine un bifoncteur $J(Q, H) \rightarrow V$, qui est une bicatégorie graduée, dite associée à (Q, H) .

D'autre part, (V, \otimes) étant monoïdale, on construit une bicatégorie $J'(V, \otimes)$ ayant pour objets ceux de V , pour morphismes de A vers B les couples

$$[U; f] : A \rightarrow B \quad \text{avec} \quad U \in V_0, \quad f : A \otimes U \rightarrow B,$$

la composition s'effectuant

$$\begin{array}{ccc} & B & \\ [U; f] \nearrow & = & [V; g] \searrow \\ A & \xrightarrow{[U \otimes V; g \cdot (f \otimes I_V) \cdot \alpha_{A, U, V}^{-1}]} & C \end{array}$$

On introduit alors les 2-morphismes $u : [U; f] \rightarrow [U'; f']$ comme les

$$u : U \rightarrow U' \quad \text{tels que} \quad f = f' \cdot (I_A \otimes u) \ .$$

L'application $[U; f] \mapsto U$ détermine un bifoncteur $J'(V, \otimes) \rightarrow V$ qui est une bicatégorie graduée (vérification omise).

PROPOSITION 32. Une catégorie monoïdale (V, \otimes) et une \hat{V} -catégorie

(Q, H) s'identifient à des bicatégories V -graduées

$$J'(V, \otimes) \rightarrow V \text{ et } J(Q, H) \rightarrow V.$$

6° Une bicatégorie $(K^P, \hat{\otimes})$ -graduée (resp. $(KlP, \bar{\otimes})$ -graduée) est dite P -graduée (resp. librement P -graduée, ou P_λ -graduée). Une catégorie enrichie dans $(K^P, \hat{\otimes})$ ou $(K^P, \hat{\otimes})$ -catégorie est appelée K -catégorie P -floue, ou P -catégorie. La 2-catégorie $Bicat_{(K^P, \hat{\otimes})}$ est notée simplement $Bicat_P$, et $(K^P, \hat{\otimes})$ -Cat est notée P -Cat. De même, on note \hat{P} -Cat la 2-catégorie des catégories enrichies dans \hat{K}^P .

Si dans ces définitions $(K^P, \hat{\otimes})$ est remplacé par $(KlP, \bar{\otimes})$, on parle de K -catégorie librement P -floue ou P_λ -catégorie, etc..., et on obtient les 2-catégories notées

$$P_\lambda\text{-Cat, } \hat{P}_\lambda\text{-Cat, } Bicat_{P_\lambda}.$$

Avec la Proposition 32 on a les injections :

$$\begin{array}{ccccc}
 P\text{-Cat} & \longrightarrow & \hat{P}\text{-Cat} & \longrightarrow & Bicat_P \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 (**)\ P_\lambda\text{-Cat} & \longrightarrow & \hat{P}_\lambda\text{-Cat} & \longrightarrow & Bicat_{P_\lambda} \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 K\text{-Cat} & \longrightarrow & \hat{K}\text{-Cat} & \longrightarrow & Bicat_K
 \end{array}$$

Si l'on prend

$$(K, \otimes) = (Ens, \times) \text{ et } P = P_L$$

(Exemple 1.b, Paragraphe 1.3), on voit qu'une catégorie librement P_L -floue est juste ce que l'on appelle, d'habitude, une *catégorie L-floue*, définie par la donnée d'une collection d'objets C_0 , pour chaque paire d'objets (A, B) d'un ensemble $C(A, B)$ de morphismes, pour un triplet d'objets (A, B, C) d'une application de *composition floue*

$$\begin{aligned}
 k_{A,B,C} : C(A, B) \times C(B, C) &\longrightarrow L^{C(A, C)} \\
 (f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C) &\mapsto ([g, f] : C(A, C) \rightarrow L),
 \end{aligned}$$

le tout assujetti à des axiomes d'associativité et unitarité évidents. Pour tout $\phi \in C(A, C)$ l'élément $[g, f](\phi)$ de L est considéré comme la

valeur (dans L) de l'énoncé « ϕ est le composé de g et f ».

PROPOSITION 33. Une catégorie L -floue s'identifie à une bicatégorie graduée par $(L\text{-rel}, \times)$, où $L\text{-rel}$ est la catégorie $Kl P_L$ des relations L -floues.

7° Une catégorie P -floue (resp. librement P -floue) à un objet sera appelée un monoïde P -flou ou P -monoïde (resp. un monoïde librement P -flou ou P_λ -monoïde). Un P -monoïde est aussi bien un monoïde enrichi dans $(K^P, \hat{\otimes})$ qu'un monoïde dans $(K^P, \hat{\otimes})$. Les monoïdes L -flous ont été considérés par plusieurs auteurs.

DEFINITION 9. Soit M et N deux P -monoïdes ; un objet de la catégorie $Mach_{K^P}(M, N)$ est appelé P -machine d'entrée M et sortie N .

8° DEFINITION 10. Soit E une catégorie, $m: W \rightarrow V \in E$, $X, Y \in E_0$. Une m -machine d'entrée X et sortie Y est un couple (π, σ) avec

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xleftarrow{m^*\pi} & \xrightarrow{\sigma} & Y \\
 \pi \downarrow & \text{produit} & \downarrow & \\
 & \text{fibré} & & \\
 V & \xleftarrow{m} & W &
 \end{array}$$

Par exemple, pour

$$E = CAT, \quad m = k_\Gamma: \dot{C} \rightarrow C \quad \text{avec} \quad \Gamma: C \rightarrow Cat,$$

les Γ -machines de [17] page 37 sont ici des k_Γ -machines. En particulier les machines de [15] et [17] sont des $(Cat \xrightarrow{\phi} Cat)$ -machines. Ceci est basé sur la «propriété projective» des fibrations $K\pi$ (notations de [17] page 7). Nous ne savons pas décrire sous cette forme les machines dans une catégorie monoïdale. Par contre, en s'appuyant sur la «propriété inductive» de $K\pi$ (cf. [17] page 10) et sur la caractérisation du comportement d'une machine dans (V, \otimes) (voir ci-après Proposition 38), on a :

PROPOSITION 34. a) Pour des catégories X et Y , on a (not. de [17])

$$Mach(X, Y) \approx quasi\text{-}nat(X, Cat) \downarrow Y^\wedge.$$

b) Pour $I, O \in V_0$, avec les notations de la Proposition 38, Para-

graphe 2.3, une action $d: E \otimes I \rightarrow E$ s'identifie à un V -foncteur $d: I^* \rightarrow V$, et on a

$$Mach_V(I, O) \approx V\text{-nat}(I^*, V) \downarrow \Lambda.$$

Ainsi machines (au sens de [15]) et P -machines (Définition 9 ci-dessus) sont des exemples de Φ -machines au sens ci-après.

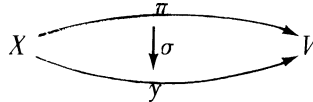
DEFINITION 11. Soit E une catégorie,

$$\Phi: E^{op} \rightarrow CAT, \quad X \in E_0, \quad y \in \Phi(X)_0.$$

Une Φ -machine d'entrée X et sortie y est un couple

$$(\pi, \sigma) \text{ avec } \sigma: \pi \rightarrow y \text{ dans } \Phi(X).$$

En particulier si $V \in Cat(E)$, avec $\Phi = E(-, V)$, on a dans E :



Plus particulièrement encore, en prenant

$$E = P\text{-Cat} \text{ ou } Bicat_P, \quad V = K, Kl P, K^P, \text{ etc...}$$

on obtiendra les notions de P -machines avec entrées (resp. sorties) des P -catégories X (resp. des P -foncteurs y) ou même des bicatégories P -graduées (resp. des bifoncteurs P -gradués).

2.2. P -machines en série et relations ternaires.

Comme exemple de machines nous avons les calculateurs comme les machines de Turing d'alphabet A (avec $I = O = Z \times A^{(Z)}$). La mise en série de telles machines correspond à l'enchaînement des calculs. En général par la mise en série des machines d'entrée I et sortie O avec les machines d'entrée O et sortie U , on entend la donnée d'un foncteur de composition

$$Mach(I, O) \times Mach(O, U) \rightarrow Mach(I, U).$$

EXEMPLE 1. Si

$$A \xleftarrow{d_A} A \otimes U \xrightarrow{s_A} B \text{ et } B \xleftarrow{d_B} B \otimes V \xrightarrow{s_B} C$$

sont deux machines dans (K, \otimes) et si $A \otimes U$ est un comonoïde de co-

multiplication $\Delta : (A \otimes U) \rightarrow (A \otimes U) \otimes (A \otimes U)$, on obtient une machine

$$U \otimes V \xleftarrow{\delta} A \otimes (U \otimes V) \xrightarrow{\sigma} C$$

avec

$$\begin{aligned} \delta &= [(A \otimes (U \otimes V)) \cong (A \otimes U) \otimes V \xrightarrow{\Delta \otimes 1_V} ((A \otimes U) \otimes (A \otimes U)) \otimes V \\ &\quad U \otimes V \xleftarrow{1_U \otimes d_B} U \otimes (B \otimes V) \xleftarrow{d_A \otimes (s_A \otimes 1)} (A \otimes U) \otimes ((A \otimes U) \otimes V) \downarrow u] \\ \sigma &= A \otimes (U \otimes V) \cong (A \otimes U) \otimes V \xrightarrow{s_A \otimes 1_V} B \otimes V \xrightarrow{s_B} C. \end{aligned}$$

EXEMPLE 2 (variante). A partir de d_A , s_A , Δ , on considère :

$$m : A \otimes U \xrightarrow{(s_A \otimes d_A) \cdot \Delta} B \otimes U,$$

et si \otimes est symétrique, on peut composer avec $n : B \otimes V \rightarrow C \otimes V$:

$$\begin{aligned} A \otimes (U \otimes V) &\cong (A \otimes U) \otimes V \xrightarrow{m \otimes 1_V} (B \otimes U) \otimes V \\ &\quad \downarrow u \\ C \otimes (U \otimes V) &\cong (C \otimes V) \otimes U \xleftarrow{n \otimes 1_U} (B \otimes V) \otimes U \end{aligned}$$

PROPOSITION 35. Si $\otimes = \times$, les P_λ -machines se mettent en série suivant la composition des P-relations ternaires, ou, ce qui est équivalent, suivant la composition des P-relations indicées (cf. Propositions 36 et 37).

PROPOSITION 36 (calcul des relations ternaires). Soit (K, \otimes) monoïdale et (P, D) une monade monoïdale sur (K, \otimes) . On appelle P-relation ternaire un morphisme $r : A \otimes U \rightarrow P B$ symbolisé par $A \xrightarrow{\{U; r\}} B$ et on compose ces relations ternaires suivant :

$$\begin{array}{ccc} & B & \\ \{U; r\} \nearrow & & \searrow \{V; s\} \\ A & \xrightarrow{\quad = \quad} & C \\ & \{U \otimes V; t\} & \end{array}$$

avec

$$t = S_C \cdot P(s) \cdot D_{B, V} \cdot (r \otimes a_{P, V}) \cdot \alpha_{A, U, V}^{-1}.$$

On obtient alors une bicatégorie isomorphe à $J^1(Kl P, \bar{\otimes})$ (cf. Proposition 32) et contenant comme sous-bicatégories $J^1(K, \otimes)$ et $Kl P$.

Pour (V, \otimes) monoïdale, on note $\hat{J}(V, \otimes)$ la bicatégorie ayant pour objets ceux de V et où un morphisme de A vers B est noté

$$A \xrightarrow{|U;f|} B \text{ avec } U \in V_0 \text{ et } f: A \otimes U \rightarrow U \otimes B,$$

la composition s'effectuant suivant :

$$\begin{array}{ccc} A \otimes (U \otimes V) \approx (A \otimes U) \otimes V & \xrightarrow{f \otimes I} & (U \otimes B) \otimes V \\ & & \downarrow u \\ (U \otimes V) \otimes C \approx U \otimes (V \otimes C) & \xleftarrow{I_U \otimes g} & U \otimes (B \otimes V) \end{array}$$

En prenant $(V, \otimes) = (KlP, \bar{\otimes})$, les morphismes de $\hat{J}(KlP, \bar{\otimes})$ s'identifient aux $A \otimes U \rightarrow P(U \otimes B)$, ou *P-relations indicées*.

PROPOSITION 37 (*calcul des relations indicées*). Soit (K, \otimes) monoïdale, et (P, D) une monade monoïdale sur (K, \otimes) . Alors les *P-relations indicées* $A \otimes U \rightarrow P(U \otimes B)$ se composent de manière à former une bicatégorie isomorphe à $\hat{J}(KlP, \bar{\otimes})$ et contenant comme sous-bicatégories $\hat{J}(K, \otimes)$ et KlP .

2.3. P-machines en parallèle et comportement.

Par l'étude des P-machines en parallèle on entend que l'on se fixe I et O et que l'on étudie $Mach_K P(I, O)$.

Reprenons les notations du Paragraphe 2.1.4, et supposons que (K, \otimes) est monoïdale fermée. On définit t_A et m_A par adjonction (pour $A = (PE \xleftarrow{d} E \otimes I \xrightarrow{s} PO)$):

$$\frac{E \otimes I^* \xrightarrow{d^*} PE}{I^* \xrightarrow{t_A} \langle E, PE \rangle}, \quad \frac{E \otimes I^* \xrightarrow{s^*} PO}{E \xrightarrow{m_A} \langle I^*, PO \rangle}.$$

Le morphisme m_A décrit le *comportement* («behaviour») de A observable de l'extérieur de la machine A . Ainsi deux états e et e' tels que $m_A e = m_A e'$ sont extérieurement indiscernables.

Avec $\sigma : I \otimes I^* \rightarrow I^*$ donné par

$$\sigma.(i_1 \otimes i_1^n) = i_1^{n+1} : I \otimes I^n \rightarrow I^*,$$

on introduit la *left-shift machine* (voir [11])

$$\Lambda : \langle I^*, PO \rangle \otimes I \rightarrow \langle I^*, PO \rangle$$

caractérisée par :

$$ev.(\Lambda \otimes I^*) = ev.(I_{\langle I^*, PO \rangle} \otimes \sigma).$$

On dit que (K, \otimes) est à (E, M) -décompositions si: E est une sous-catégorie d'épimorphismes de K stable par $(-)\otimes B$, pour tout $B \in K_0$, M une sous-catégorie de monomorphismes de K et si tout $f: X \rightarrow Y$ de K se décompose de manière unique à isomorphisme près en

$$f = X \xrightarrow{f_E} Z \xrightarrow{f_M} Y,$$

avec $f_E \in E$, $f_M \in M$. Alors on pose

$$m_A = E \xrightarrow{e_A \in E} E(A) \xrightarrow{\mathfrak{R}(A) \in M} \langle I^*, PO \rangle.$$

$\mathfrak{R}(A)$ est appelé le (E, M) -comportement de A .

PROPOSITION 38 (caractérisation du comportement et machines limites - suivant Ehrig et al. [11], pages 35, 71, 76, 190, 191). Soit (K, \otimes) monoïdale fermée à sommes dénombrables. Alors (avec $P = Id$ ci-dessus), on a:

(i) $g: E \rightarrow \langle I^*, O \rangle$ est de la forme m_A pour un

$$A = (E \xleftarrow{d} E \otimes I \xrightarrow{s} O)$$

ssi il existe un $d': E \otimes I \rightarrow E$ tel que:

$$\lambda(g): \begin{array}{ccc} E \otimes I & \xrightarrow{g \otimes I} & \langle I^*, O \rangle \otimes I \\ d' \downarrow & = & \downarrow \Lambda \\ E & \xrightarrow{g} & \langle I^*, O \rangle \end{array}$$

et dans ce cas

$$d = d', \quad s = ev \cdot (I_{\langle I^*, O \rangle} \otimes i_1^1) \cdot (g \otimes I_1);$$

(ii) ainsi Λ est final dans $Mach_K(I, O)$ et on a

$$Mach_K(I, O) \approx Mach_K(I) \downarrow \Lambda$$

(où $Mach_K(I)$ a pour objets les

$$(E, d), \text{ avec } E \in K_0 \text{ et } d: E \otimes I \rightarrow E$$

et pour morphismes de (E, d) vers (E_1, d_1) les

$$f: E \rightarrow E_1 \text{ tels que } d_1 \cdot (f \otimes I) = d.$$

(iii) Si (K, \otimes) est à (E, M) -décompositions, $m: B \rightarrow \langle I^*, O \rangle \in M$ est de la forme $\mathfrak{R}(A)$ ssi on a un d' tel que $m \cdot d' = \Lambda \cdot (m \otimes I)$ (soit λm).

(iv) Si K est à noyaux (resp. à produits fibrés), $Mach_K(I, O)$ est à noyaux (resp. à produits). Si K est à conoyaux (resp. à sommes) qui sont préservés par $(-)\otimes I$ et $I\otimes(-)$, $Mach_K(I, O)$ est à conoyaux (resp. à sommes).

Nous allons énoncer les mêmes résultats, dans le cas $P \neq Id$.

PROPOSITION 38^{bis} (voir Ehrig et al. [11]). Si $(\tilde{K}, \tilde{\otimes})$ est pseudo-fermée relativement à une sous-catégorie $J: (K, \otimes) \rightarrow (\tilde{K}, \tilde{\otimes})$ avec $J \dashv P$, alors (voir [11] page 109):

(i) un $g: E \rightarrow \langle I^*, PO \rangle$ est de la forme m_A ssi il existe un d' , $d': E \otimes I \rightarrow PE$, tel que :

$$\tilde{\lambda}(g) \quad \begin{array}{ccccc} E \otimes I & \xrightarrow{g \otimes I} & \langle I^*, PO \rangle \otimes I & & \\ d' \downarrow & & = & & \downarrow \Lambda \\ PE & \xrightarrow{Pg} & P \langle I^*, PO \rangle & \xrightarrow{u} & \langle I^*, PO \rangle \end{array}$$

où u est la structure de P -algèbre sur $\langle I^*, PO \rangle$ caractérisée par :

$$ev.(u \otimes I^*) = S_O.P(ev).r_{\langle I^*, PO \rangle, I^*},$$

et dans ce cas

$$d = d', \quad s = ev.(l_{\langle I^*, PO \rangle} \otimes i_I^1).(g \otimes l_I).$$

(ii) Si (K, \otimes) est à (E, M) -décompositions, $m: B \rightarrow \langle I^*, PO \rangle \in M$ est de la forme $\mathfrak{R}(A)$ dès que l'on a un d'' tel que $u.Pm.d'' = \Lambda.(m \otimes I)$. Cette condition est nécessaire si

$$\forall e: A \rightarrow B \in E, \quad \exists v_e: B \rightarrow PA \quad P(e).v_e = a_B.$$

(iii) En tous cas, pour toute P_λ -machine

$$PE \xleftarrow{d} E \otimes I \xrightarrow{s} PO$$

et tout $\xi: E(A) \rightarrow PE$ tel que $P(e_A).\xi = a_{E(A)}$, on a, si

$$d\xi = S_{E(A)}.P^2(e_A).P(d).r_{E, I}(\xi \otimes l_I),$$

$$s' = ev.(l_{\langle I^*, PO \rangle} \otimes i_I^1).(\mathfrak{R}(A) \otimes l_I),$$

une machine

$$A_\xi = (P(EA) \xleftarrow{d\xi} E(A) \otimes I \xrightarrow{s'} PO)$$

avec: $\mathfrak{R}(A) = m_{A_\xi}$.

La preuve de (i) donnée dans [11] peut être notablement simplifiée, car le contexte des catégories pseudo-fermées (page 97 [11]) se ramène à celui des monades monoïdales. On en vient à caractériser les m_A à l'aide de la Proposition 38 (i) appliquée à $(KlP, \bar{\otimes})$: en effet, si K est à sommes dénombrables et si \otimes y commute, KlP est à sommes dénombrables et $\bar{\otimes}$ y commute ; et comme $(KlP, \bar{\otimes})$ est monoïdale (Propositions 1, 8, Paragraphe 1.1), il reste seulement à examiner la question de la fermeture :

PROPOSITION 39. *Si (K, \otimes) est monoïdale fermée et si pour tout X on a $PX = \langle X, \Omega \rangle$ où Ω est un objet fixé de K , alors KlP est monoïdale fermée, le critère λ de la Proposition 38 (i) s'applique dans KlP , donnant immédiatement $\tilde{\lambda}$ dans K . Ceci vaut en particulier si $K = \text{Ens}$ et $P = P_L$ (cf. Paragraphe 1.3, Exemple 1.b).*

PREUVE. Vu ce qui est observé ci-dessus, il suffit de noter que $PX = \langle X, \Omega \rangle$ permet d'écrire $\langle I^*, PO \rangle \approx P(I^* \otimes O)$, de sorte que $u = S_{I^* \otimes O}$ et s'identifie à un objet de KlP . Le foncteur hom interne dans KlP est défini par :

$$[LA, LB] = L(B \otimes A) = LB \bar{\otimes} LA,$$

ainsi la left-shift machine qui intervient est

$$\Lambda = I_{LO} \bar{\otimes} \Sigma' : LO \bar{\otimes} (LI^* \bar{\otimes} LI) \rightarrow LO \bar{\otimes} LI^*,$$

où

$$\Sigma' : L(I^* \otimes I) = LI^* \bar{\otimes} LI \rightarrow LI^*$$

est $L\sigma'$, avec $\sigma' : I^* \otimes I \rightarrow I^*$ défini de manière symétrique à σ plus haut.

PROPOSITION 40. *Si K est un topos élémentaire à sommes dénombrables et si $P = P_\Omega$ est la monade canonique des sous-objets ($PX = \Omega^X$, etc...), alors toute P_λ -machine A est équivalente à une P_λ -machine \tilde{A} observable ($m_{\tilde{A}} \in M$), c'est-à-dire $\mathfrak{R}(A) = m_{\tilde{A}}$.*

En effet, la Proposition 38^{bis} (iii) s'applique car, dans K , e épi équivaut à $P_\Omega(f). \Omega^f = I$; on peut prendre $\xi = \Omega^f. a_{E(A)}$.

PROPOSITION 41. *Soit $A = (PE \leftarrow E \otimes I \rightarrow PO)$ une P_λ -machine,*

et $\bar{A} = (PE \leftarrow PE \otimes I \rightarrow PO)$ associée. Alors \bar{A} est observable ssi $m_{\bar{A}} = u.P(m_A) \in M$, ssi \bar{A} est observable dans KlP , ssi \bar{A} est observable dans K^P . On dit alors que A est fortement observable.

PROPOSITION 42. Soit (K, \otimes) monoïdale fermée symétrique à sommes dénombrables, à images régulières, à noyaux et conoyaux. Soit P une monade forte commutative régulière sur K telle que K^P soit à conoyaux. Alors $(K^P, \hat{\otimes})$ est monoïdale fermée symétrique à sommes dénombrables et images régulières. En particulier pour tout $(A, a) \in K^P$, on a un $\hat{\otimes}$ -monoïde libre sur (A, a) - ou algèbre tensorielle de (A, a) - noté

$$(A, a)^* \text{ ou } A^* \text{ ou } T(A, a),$$

de sorte que, pour $X \in K_0$, on ait $L(X^*) = L(X)^*$.

PREUVE. Pour les sommes, c'est le résultat de Linton déjà cité (Proposition 18). Pour la régularité, c'est un résultat de Manes [22] (K régulière et P régulière impliquent K^P régulière). Pour la structure fermée, c'est le théorème de Kock rappelé au début du Paragraphe 1.5.1. Pour la structure monoïdale (et donc monoïdale fermée), c'est notre théorème du Chapitre 1 (Proposition 22) et son Corollaire 23. Pour A^* , on a $A^* = \coprod_n A^{\hat{\otimes} n}$. En fait en utilisant la Proposition 9, Paragraphe 1.2 et l'existence de monoïde libre dans un topos élémentaire avec N.N.O. on peut améliorer cette Proposition 42 lorsque K est un topos élémentaire. Nous n'en aurons pas besoin ici.

Sous les hypothèses de la Proposition 42, la Proposition 38 s'applique à $(K^P, \hat{\otimes}, \text{Epi. rég., Mono})$ donnant, lorsque entrée, sortie et espace des états sont de la forme LI, LO, LE la Proposition 38^{bis}(i). En vue d'obtenir (ii), appliquant la Proposition 38 dans K^P , on obtient d'abord :

PROPOSITION 43. $m : B \rightarrow \langle I^*, PO \rangle \in M$ est de la forme $\mathfrak{R}(A)$ (sous les hypothèses de la Proposition 42) ssi, en notant (\hat{B}, \hat{u}) la sous-algèbre de $\langle I^*, PO \rangle$ engendrée par B (d'où $\hat{B} = \text{image}(u.Pm)$), il existe un triplet (p, d, \hat{d}) tel que

$$p : E \rightarrow B \in \text{Epi}, \quad d : E \otimes I \rightarrow PE, \quad \hat{d} : \hat{B} \otimes I \rightarrow \hat{B},$$

vérifiant (1) et (2) ci-dessous :

$$\begin{array}{ccccc}
 E \otimes I & \xrightarrow{(i.p) \otimes I} & \hat{B} \otimes I & \xrightarrow{\hat{m} \otimes I} & \langle I^*, PO \rangle \otimes I \\
 \downarrow d' & & \downarrow \hat{d}' & & \downarrow \Lambda \\
 P E & \xrightarrow{\hat{u} \cdot P(i.p)} & \hat{B} & \xrightarrow{\hat{m}} & \langle I^*, PO \rangle \\
 \uparrow a_E & & \uparrow i & & \\
 E & \xrightarrow{p} & B & \xrightarrow{m} &
 \end{array}$$

(\hat{I}) $(\hat{2})$
 $=$ $=$

REMARQUE. Les Propositions 42, 43 sont vraies si l'on travaille avec une (E, M) -décomposition (page 56) sur (K, \otimes) avec E préservé par P (alors K^P est à conoyaux - voir [0, 22]) et avec, pour $(A, \alpha), (B, \beta)$ des P -algèbres :

$$(1) \quad U_P(L(A \otimes B) \xrightarrow{W_{\alpha, \beta}} (A, \alpha) \hat{\otimes} (B, \beta)) \in E ;$$

En effet, $(U_P^{-1} E, U_P^{-1} M)$ est une décomposition sur K^P ([22] page 239) et on a bien $U_P^{-1} E$ stable par les $(-)\hat{\otimes}(X, x)$ (cf. page 56) : si $U_P f \in E$ pour $f: (A, \alpha) \rightarrow (B, \beta)$, alors $U_P(L(U_P f \otimes X)) = P(f \otimes X) \in E$ et

$$U_P(W_{\beta, x} \cdot L(U_P f \otimes X)) = U_P((f \hat{\otimes}(X, x)) \cdot W_{\alpha, x}) \in E,$$

d'où, avec [22] page 238, $U_P(f \hat{\otimes}(X, x)) \in E$.

Comme les $W_{\alpha, \beta}$ sont des conoyaux dans K^P , on a (1) dès que

$$(2) \quad U_P(\text{coker}(f, g)) \in E \text{ pour tout } f, g: . \rightrightarrows . \text{ dans } K^P.$$

Si $K = Ens$, $E = Epi$, $M = Mono$, $U_P^{-1}(Epi)$ est l'ensemble des conoyaux dans Ens^P et on a (2).

L'application automatique des critères déterministes de [11] en $(K^P, \hat{\otimes}, U_P^{-1} E, U_P^{-1} M)$ requiert donc la vérification de (1), ce qui marche dans les exemples de [11], e. g. via (2). L'étude systématique de la platitude et des décompositions monoïdales dans les catégories monoïdales d'algèbres devra faire l'objet d'un autre travail.

REFERENCES.

0. J. ADAMEK, Colimits of algebras revisited, *Bull. Australian Math. Soc.* 17 (1977), 433-450.
1. M. A. ARBIB & E. G. MANES, *Fuzzy machines in a category*, Univ. of Mass. at Amherst, 1976.
2. B. BANASCHEWSKI & E. NELSON, Tensorproducts and bimorphisms, *Can. Math. Bull.* 19 (1976), 385-402.
3. A. (Bastiani) & C. EHRESMANN, Categories of sketched structures, *Cahiers Topo. et Géo. Diff.* XIII-2 (1972), 105-214.
4. J. BECK, Distributive laws, *Lecture Notes in Math.* 80, Springer (1969), 119.
5. J. BENABOU, Les distributeurs, *Séminaire de Math. Pures Louvain-la-Neuve*, Rapport 33 (1973).
6. J. BENABOU, Théories relatives à un corpus, *C.R.A.S. Paris* 281 (1975).
7. D. BOURN, Natural anadeses and catadeses, *Cahiers Topo. et Géo. Diff.* XIV-4 (1973), 371.
8. E. BURRONI, Algèbres non-déterministiques et D -catégories, *Cahiers Topo. et Géo. Diff.* XIV-4 (1973), 417.
9. B. DAY, On closed categories of functors, *Lecture Notes in Math.* 137, Springer (1970).
10. S. EILENBERG & G. M. KELLY, Closed categories, *Proc. Conf. on categ. Algebra La Jolla 1965*, Springer, 1966.
11. H. EHRIG, K. D. KIERMEIER, H. J. KREOWSKI & W. KUHNEL, *Universal theory of automata*, Teubner Studienbücher Informatik, Stuttgart, 1974.
12. F. FOLTZ, *Produits tensoriels généralisés*, Thèse 3^e cycle, Paris, 1968.
13. F. FOLTZ & C. LAIR, Fermeture standard des catégories algébriques, *Cahiers Topo. et Géo. Diff.* XIII-3 (1972), 275.
14. G. GREVE, 1^o The closed radical of a functor $V : C \rightarrow SET$, *Math. Arbeitspapiere Univ. Bremen* 7 (1976), 48-58.
2^o *M-Geschlossene Kategorien*, Dissertation, Univ. Hagen, 1978.
15. R. GUITART, Remarques sur les machines et les structures, *Cahiers Topo. et Géo. Diff.* XV-2 (1974), 113-144.
16. R. GUITART, Topologie dans les univers algébriques, *Math. Arbeitspapiere Univ. Bremen* 7 (1976).
17. R. GUITART & L. VAN DEN BRIL, Décompositions et lax-complétions, *Cahiers Topo. et Géo. Diff.* XVIII-4 (1977).
18. W. F. KEIGHER, Symetric monoidal closed categories generated by commutative adjoint monads, *Cahiers Topo. et Géo. Diff.* XIX-3 (1978), 269.

19. G. M. KELLY, *Cours donné à Louvain-la-Neuve, Juin 1977.*
20. A. KOCK, 1^o Monads on symmetric monoidal closed categories, *Archiv der Math.* XXI-1 (1970), 1-10.
2^o On double dualization monads, *Math. Scand.* 27 (1970), 151-165.
3^o Bilinearity and cartesian closed monads, *Math. Scand.* 29 (1971), 161-174.
4^o Closed categories generated by commutative monads, *J. Austral. Math. Soc.* 12 (1971), 405-424.
5^o Strong functors and monoidal monads. *Archiv der Math.* XXIII (1972), 113.
21. C. LAIR, Fermeture standard des catégories algébriques II, *Cahiers Topo. et Géo. Diff.* XVIII-1 (1977), 3.
22. E. G. MANES, *Algebraic theories*, Graduate texts in Math. 26, Springer, 1976.
23. H. E. PORST & M. B. WISCHNEWSKY, Every topological category is convenient for Gelfand duality, *Manuscripta Math.* (1978), 169-204.
Voir aussi *Math. Arbeitspapiere Univ. Bremen* 7 (1976).
24. D. PUMPLUN, Das Tensorprodukt als universelles Problem, *Math. Ann.* 171 (1967), 247-262.
25. R. J. WOOD, *Indicial methods for relative categories*, Thesis Dalhousie Univ. at Halifax, 1978.

REMARQUE. On trouvera par exemple dans [2, 20, 22, 23] des références utiles pour les produits tensoriels, les théories commutatives (en particulier à F. E. J. LINTON), que nous n'utilisons pas explicitement ici. On trouvera aussi des informations et une bibliographie substantielle dans H. LINDNER, *Monoidale und geschlossene Kategorien*, Mimeo. manuscrit, Univ. Düsseldorf, 1976.

U. E. R. de Mathématiques
Tours 45-55, 5^e Etage
Université Paris 7
2 Place Jussieu
75005 PARIS