CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

PHILIPPE ANTOINE

Conditions pour un minimum local d'une fonction différentiable

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 20, n° 2 (1979), p. 109-153

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1979__20_2_109_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE *Vol. XX-2 (1979)*
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

CONDITIONS POUR UN MINIMUM LOCAL D'UNE FONCTION DIFFERENTIABLE

par Philippe ANTOINE

INTRODUCTION.

Ceci est à la fois une rédaction détaillée et un approfondissement de certains points d'une Note publiée en collaboration avec F. Van Iseghem («Conditions nécessaires et conditions suffisantes pour un minimum local d'une fonctionnelle», *C. R. A. S. Paris* 282, 1976).

Le problème abordé est le suivant: étant donné une fonction numérique différentiable J définie sur un espace de Banach, trouver des conditions nécessaires et des conditions suffisantes pour que J présente un minimum local en un point a donné.

Classiquement, ce problème est résolu de manière jugée satisfaisante dans deux cas: lorsque J est définie sur un espace de Hilbert et lorsque J est une fonction d'un type particulier («fonctionnelle du calcul des variations», alias, «fonctionnelle de forme intégrale») définie sur un espace de chemins ou sur certains sous-espaces de cet espace. Nous proposons ici une théorie «unitaire» contenant ces deux cas comme cas particuliers, suffisamment générale pour s'appliquer par exemple au calcul des variations en dimension supérieure à 1.

Il existe déjà une telle théorie [1]; elle peut se résumer en le théorème suivant (G.W. Kimble, A characterization of extremals for general multiple integral problems, *Pac. J. Math.* 14, 1964, 1283-1295):

THEOREME 0. *Soit J une fonction de classe C^2 définie sur un ouvert U d'un espace de Banach E et soit a un point de U; on suppose qu'il exis-*

[1] La théorie de Dubovitskii-Milyutin (I.V. Girsanov, *Lectures on mathematical theory of extremum problems*, Springer, 1972), extrêmement puissante pour trouver des conditions nécessaires, ne semble pas conduire, sauf sous des hypothèses restrictives (convexité de J), à des conditions suffisantes.

te une injection continue i, d'image dense, de E dans un espace de Hilbert H et une application continue A d'un voisinage V de a dans l'espace des opérateurs symétriques sur H telle que:

$$\forall x \in V,\ \ \forall X \in E,\ \ \langle A(x).iX, iX \rangle = d^2 J(x).(X,X);$$

pour que a soit un minimum local de J, il faut que $dJ(a) = 0$ et que $A(a)$ soit un opérateur positif, il suffit que $dJ(a) = 0$ et que $A(a)$ soit un opérateur positif et inversible.

La difficulté d'appliquer ce théorème réside évidemment dans la vérification des conditions particulières que doit vérifier J, et commence avec le choix de l'espace de Hilbert H (pour le calcul des variations, seul cas considéré par Kimble, il s'agit bien sûr d'un espace de Sobolev; le choix n'est pas toujours aussi naturellement évident).

La théorie que nous développons ici (fonction différentiable sur un «couple d'espaces de Banach en dualité», sur un «couple hilbertien») est strictement moins générale que celle de Kimble. Son intérêt ne réside pas dans l'étendue du domaine d'application, mais dans les modalités d'application.

Tout d'abord, le calcul différentiel sur les couples d'espaces de Banach en dualité est l'homologue exacte du calcul différentiel usuel: le Chapitre II est consacré à la vérification - élémentaire - de ce que les théorèmes fondamentaux du calcul différentiel (composition, Théorème d'inversion locale, Théorème des fonctions implicites)[1] restent valables sur les couples d'espaces de Banach en dualité. Toutes les techniques usuelles du calcul différentiel - et de la géométrie différentielle [2], car

1) On vérifie de même la validité des théorèmes sur les équations différentielles.

2) Le lemme de Morse, par exemple, s'étend sans difficulté au cas des fonctions différentiables sur les couples d'espaces de Banach en dualité, en vérifiant simplement que la démonstration de Palais (The Morse Lemma for Banach spaces, *Bull. A.M.S.* 75, 1969, 968-970) reste vraie, ou, et c'est là sans doute la démonstration la plus simple du lemme de Morse, comme conséquence du Lemme 3.2.4. Nous avons donné cette version du lemme de Morse, démontré en suivant Palais, à l'occasion d'un cours sur la théorie de Morse à Louvain (1972-73). Une version équivalente, au formalisme près, a été donnée indépendamment par Hui-Hsiung Kuo (The Morse-Palais lemma on Banach spaces, *Bull. A.M.S.* 80, 1974, 363-365). Sous cette forme le lemme de Morse s'applique par exemple à une fonctionnelle du calcul des variations en une extrémale dont les extrémités ne sont pasconjuguées.

on peut modeler des variétés sur des couples d'espaces de Banach en dualité - sont donc applicables.

D'autre part, on sait associer de manière fonctorielle à tout «couple hilbertien» E un espace de Hilbert H_E et une injection continue d'image dense de E dans H_E, tels que tout opérateur symétrique A sur E s'étende en un opérateur symétrique H_A sur H_E, H_A dépendant continûment de A. Les hypothèses du Théorème 0 sont alors automatiquement vérifiées pour une fonction différentiable sur un couple hilbertien E ou par la restriction d'une telle fonction à un sous-objet de E.

Le lecteur pressé pourra, en première lecture (à supposer qu'il y en ait une seconde!) ne retenir que les paragraphes 1.1 à 1.6 et le paragraphe 2.1 avant d'aborder le Chapitre III.

Le lecteur inquiet de savoir si tout cela a un sens pourra se laisser guider par le tableau de concordance suivant qui indique à quel chapitre du calcul des variations classiques correspond un paragraphe donné

3.4. Problème libre (conditions d'Euler, de Legendre et de Jacobi).

3.5. Problème de Bolza normal (conditions d'Euler-Lagrange, de transversalité, de Clebsch et de Jacobi).

3.6. Problème de Bolza anormal (Hestenes, Sufficient conditions for the problem of Bolza in the calculus of variations, *Trans. A.M.S.* 35, 1933, 793-818).

3.7. Conditions suffisantes pour avoir un minimum local en une extrémale dont les extrémités sont conjuguées [1].

NOTATIONS ET DEFINITIONS. Nous noterons :

E^* le dual topologique fort d'un espace de Banach E ;

$L(E;F)$ l'espace de Banach des applications linéaires continues entre les espaces de Banach E et F ;

$\langle , \rangle$ la forme bilinéaire canonique définie sur $E^* \times E$.

Nous dirons qu'une mesure de Radon μ est *strictement positive* si elle est positive et si son support est l'espace tout entier; elle est caractérisée par $\mu(f) = 0$ et $f \geq 0$ entraînent $f = 0$.

1) O. Bolza, *Lectures on the calculus of variations*, The Univ. of Chicago Press 1904, Section 38.

1. ALGEBRE LINEAIRE SUR LES COUPLES D'ESPACES DE BANACH EN DUALITE.

1.1. Couple d'espaces de Banach en dualité.

1.1.1. DEFINITION. Un *couple d'espaces de Banach en dualité* est un triple $\mathrm{E} = (E, E', \Phi)$, où E et E' sont des espaces de Banach et Φ une forme bilinéaire continue sur $E' \times E$ mettant E' et E en dualité séparante.

La dualité étant séparante, on a les propriétés suivantes :

1° Si $\Phi(x', x) = 0$ quel que soit x', alors $x = 0$,

2° Si $\Phi(x', x) = 0$ quel que soit x, alors $x' = 0$.

La donnée de Φ est équivalente à la donnée d'une application linéaire continue ϕ de E' dans le dual fort E^* de E (resp. une application linéaire continue ϕ' de E dans E'^*). La dualité est séparante ssi ϕ et ϕ' sont injectives.

1.2. Exemples de couples d'espaces de Banach en dualité.

EXEMPLE 1. Soit E un espace de Banach. Cet espace est en dualité séparante avec son dual E^* : on définit ainsi un couple d'espaces de Banach en dualité, que nous identifierons à E. Si E est de dimension finie, ce couple est le seul (à isomorphisme près) que l'on puisse construire à partir de E.

EXEMPLE 2. Soit $\mathfrak{F}$ un espace fibré vectoriel de base compacte B. On se donne une structure finslérienne sur $\mathfrak{F}$ et une mesure de Radon strictement positive μ sur B. On note enfin $\mathfrak{F}^*$ l'espace fibré vectoriel dual de $\mathfrak{F}$ et on munit ce fibré de la structure finslérienne duale de celle de $\mathfrak{F}$. On pose :

$E = C^0(\mathfrak{F})$, espace de Banach des sections continues de $\mathfrak{F}$, avec la norme $\|s\| = \sup_{x \in B} \|s(x)\|$,

$E' = C^0(\mathfrak{F}^*)$, espace de Banach des sections continues de $\mathfrak{F}^*$, avec la norme $\|\sigma\| = \sup_{x \in B} \|\sigma(x)\|$,

Φ la forme bilinéaire continue définie sur $E' \times E$ par :

$$\Phi(\sigma, s) = \mu(<\sigma, s>_x),$$

où $<,>$ désigne l'application canonique de $\mathcal{F}^* \oplus \mathcal{F}$ dans R.
La forme Φ met $C^0(\mathcal{F}^*)$ et $C^0(\mathcal{F})$ en dualité séparante ; nous noterons $\mathrm{C}^0(\mathcal{F})$ le couple d'espaces de Banach ainsi défini.

1.3. Morphismes (linéaires continus) de couples d'espaces de Banach en dualité.

1.3.1. DEFINITION. Un *morphisme* (linéaire continu) entre deux couples d'espaces de Banach en dualité $\mathrm{E} = (E, E', \Phi)$ et $\mathrm{F} = (F, F', \Psi)$ est un couple (u, u'), où u (resp. u') est une application linéaire continue de E dans F (resp. de F' dans E') vérifiant :

$$\forall y' \in F', \quad \forall x \in E, \quad \Phi(u'y', x) = \Psi(y', ux).$$

La condition pour que (u, u') soit un morphisme se traduit encore par la commutativité de *l'un des deux* diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd} E'^* \arrow[r, "u'^*"] & F'^* \\ E \arrow[u, "\phi'"] \arrow[r, "u"] & F \arrow[u, "\psi'"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} E' \arrow[d, "\phi"'] & F' \arrow[l, "u'"'] \arrow[d, "\psi"] \\ E^* & F^* \arrow[l, "u^*"] \end{tikzcd}$$

Les dualités Φ et Ψ étant séparantes, il est clair que, si (u, u_1') et (u, u_2') sont des morphismes, alors $u_1' = u_2'$; de même, si (u_1, u') et (u_2, u') sont des morphismes, alors $u_1 = u_2$.

1.3.2. NOTATION. Nous noterons $L(\mathrm{E};\mathrm{F})$ l'ensemble des morphismes de E dans F. Il est clair que c'est un espace vectoriel et un espace de Banach pour la norme :

$$\|(u, u')\| = \sup(\|u\|, \|u'\|)$$

(on peut identifier $L(\mathrm{E};\mathrm{F})$ au produit fibré de $L(E;F)$ et de $L(E';F')$ relativement aux applications :

$$L(E;F) \to L(E;F'^*), \qquad u \mapsto \psi' \circ u,$$
$$L(F';E') \to L(E;F'^*), \qquad u' \mapsto u'^* \circ \phi \ ).$$

1.4. Composition des morphismes.

Soit (u,u') un morphisme de $\mathrm{E} = (E,E',\Phi)$ dans $\mathrm{F} = (F,F',\Psi)$ et (v,v') un morphisme de F dans $\mathrm{G} = (G,G',\Theta)$. Alors

$$(v,v')\circ(u,u') = (v\circ u,\ u'\circ v')$$

est un morphisme de E dans G : on a en effet :

$$\forall z'\in G',\quad \forall x\in E,\quad \Phi(u'v'z',x) = \Psi(v'z',ux) = \Theta(z',vux).$$

En outre,

$$\|(v,v')\circ(u,u')\| = sup(\|v\circ u\|,\ \|u'\circ v'\|)$$
$$\leq sup(\|v\|,\|v'\|).\ sup(\|u\|,\|u'\|) = \|(v,v')\|.\|(u,u')\|.$$

L'application de composition est donc une application bilinéaire continue de $L(\mathrm{E};\mathrm{F})\times L(\mathrm{F};\mathrm{G})$ dans $L(\mathrm{E};\mathrm{G})$.

1.5. Isomorphismes de couples d'espaces de Banach en dualité.

1.5.1. DEFINITION. Nous appellerons *morphisme identité* d'un couple E, et nous noterons 1_{E}, le morphisme $(1_E, 1_{E'})$.

1.5.2. DEFINITION. Un *isomorphisme* d'un couple E sur un couple F est un morphisme (u,u') de E dans F tel qu'il existe un morphisme (v,v') de F dans E tel que

$$(v,v')\circ(u,u') = 1_{\mathrm{E}} \quad \text{et} \quad (u,u')\circ(v,v') = 1_{\mathrm{F}}.$$

Il est clair que, si (u,u') est un isomorphisme de couples, alors u et u' sont des isomorphismes d'espaces de Banach. La réciproque est vraie : il faut montrer que, si (u,u') est un morphisme et si u et u' sont des isomorphismes, alors (u^{-1},u'^{-1}) est un morphisme ; on a

$$\forall x'\in E',\quad \forall y\in F,\quad \Psi(u'^{-1}x',y) = \Psi(u'^{-1}x',uu^{-1}y) =$$
$$= \Phi(u'u'^{-1}x',u^{-1}y) = \Phi(x',u^{-1}y).$$

On a donc la caractérisation suivante des isomorphismes : (u,u') est un isomorphisme ssi (u,u') est un morphisme et u (resp. u') est un isomorphisme d'espaces de Banach.

1.5.3. THEOREME. *Soit* E *et* F *deux couples d'espaces de Banach en dualité. L'ensemble* $Isom(\mathrm{E};\mathrm{F})$ *des isomorphismes de* E *sur* F *est un* *ouvert de* $L(\mathrm{E};\mathrm{F})$ *et l'application*

$$Isom(\mathrm{E};\mathrm{F}) \to L(\mathrm{F};\mathrm{E}), \quad (u,u') \mapsto (u^{-1}, u'^{-1})$$

est de classe C^∞.

L'ensemble $Isom(\mathrm{E};\mathrm{F})$ est le produit fibré des deux ouverts $Isom(E;F)$ de $L(E;F)$ et $Isom(F';E')$ de $L(F';E')$, donc est ouvert dans $L(\mathrm{E};\mathrm{F})$, et l'application de prise de l'inverse est le produit fibré de deux applications de classe C^∞. □

1.6. Exemples d'espaces $L(\mathrm{E};\mathrm{F})$.

EXEMPLE 1. Prenons $\mathrm{E}=\mathrm{R}$. On a alors un isomorphisme naturel entre $L(\mathrm{R};\mathrm{F})$ et F. A tout élément y de F on associe le morphisme de R dans F défini par:

$$u_y : \mathrm{R} \to F, \quad \lambda \mapsto \lambda y, \qquad u'_y : F' \to \mathrm{R}, \quad y' \mapsto \Psi(y', y).$$

On définit ainsi une application de F dans $L(\mathrm{R};\mathrm{F})$ qui est évidemment linéaire. Elle est continue car

$$\|(u_y, u'_y)\| = sup\,(\|y\|, \|\psi' y\|) \leq sup\,(1, \|\psi'\|).\|y\|,$$

injective car

$$u_y = 0 \quad \text{entraîne} \quad u_y(1) = y = 0,$$

et surjective car, si (u,u') est un morphisme de R dans F, on sait que

$$u = u_y \quad \text{avec} \quad y = u(1),$$

et comme la donnée de u caractérise le morphisme, on a aussi $u' = u'_y$.

EXEMPLE 1'. Posons $\mathrm{E} = E$, espace de dimension finie, rapporté à une base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$. On démontre comme à l'exemple 1 que l'application de F^n dans $L(E;\mathrm{F})$ qui à $(y_1, \dots, y_n)$ associe le morphisme de E dans F défini par:

$$E \to F, \quad \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i \mapsto \sum_{i=1}^{n} \xi_i y_i, \qquad F' \to E^*, \quad y' \mapsto \sum_{i=1}^{n} \Psi(y', y_i) e_i^*,$$

est un isomorphisme de couples d'espaces de Banach (cet isomorphisme dépend du choix de la base de E).

EXEMPLE 2. Posons $\mathrm{F}=\mathrm{R}$. On a alors un isomorphisme naturel entre

$L(\mathrm{E};\mathrm{R})$ et E'. A tout élément x' de E' on associe le morphisme de E dans R défini par:

$$u_{x'}: E \to \mathrm{R},\ x \mapsto \Phi(x',x), \quad u'_{x'}: \mathrm{R} \to E',\ \lambda \mapsto \lambda x'.$$

L'application ainsi définie de E' dans $L(\mathrm{E};\mathrm{R})$ est linéaire, continue car

$$\|(u_{x'}, u'_{x'})\| = sup(\|\hat{\psi} x'\|, \|x'\|) \leq sup(1, \|\hat{\psi}\|).\|x'\|,$$

injective car

$$u'_{x'} = 0 \quad \text{entraîne} \quad u'_{x'}(1) = x' = 0,$$

et surjective car, si (u,u') est un morphisme de E dans R, on sait que

$$u' = u'_{x'} \quad \text{avec} \quad x' = u'(1)$$

et, u' caractérisant le morphisme, $u = u_{x'}$.

EXEMPLE 2'. Posons $\mathrm{F} = F$, espace de dimension finie, rapporté à une base $(f_1, \ldots, f_n)$. On montre que l'application de E'^n dans $L(\mathrm{E};F)$ qui à $(x'_1, \ldots, x'_n)$ associe le morphisme de E dans F défini par:

$$E \to F,\ x \mapsto \sum_{i=1}^{n} \Phi(x'_i, x) f_i, \quad F^* \to E',\ \sum_{i=1}^{n} \eta_i f_i^* \mapsto \sum_{i=1}^{n} \eta_i x'_i$$

est un isomorphisme d'espaces de Banach.

1.7. Sous-objets et facteurs directs.

1.7.1. PROPOSITION. *Soit* $\mathrm{F} = (F, F', \Psi)$ *un couple d'espaces de Banach en dualité,* E *un espace de Banach et* u *une application linéaire continue injective de* E *dans* F. *On note* E' *le quotient de* F' *par le polaire de* $Im u$, u' *la surjection canonique de* F' *sur* E' *et* Φ *la forme bilinéaire définie sur* $E' \times E$ *par:*

$$\forall x' \in E',\ \forall x \in E,\ \Phi(x',x) = \Psi(y', ux) \ \text{avec}\ u'y' = x'.$$

Alors:

(i) $\mathrm{E} = (E, E', \Phi)$ *est un couple d'espaces de Banach en dualité;*

(ii) (u, u') *est un morphisme de* E *dans* F *;*

(iii) tout morphisme (u_1, u'_1) *de but* F *tel que* $u_1 = u \circ \bar{u}_1$ *se factorise par* (u, u').

i) La forme Φ est bien définie car, si $u'y' = 0$, alors y' appartient au polaire de Imu et on a $\Psi(y', ux) = 0$.

La forme Φ est continue car

$$|\Phi(x', x)| \leq \|\Psi\| \; \|y'\| \; \|ux\| ,$$

d'où :

$$|\Phi(x', x)| \leq \|\Psi\| \; \|u\| \; inf\{ \|y'\| \mid u'y' = x'\} \; \|x\| =$$
$$= \|\Psi\| \; \|u\| \; \|x'\| \; \|x\| .$$

La forme Φ est une dualité séparante, car :

- si $\Phi(x', x) = 0$ quel que soit x', alors $\Psi(y', ux) = 0$ quel que soit y', donc $ux = 0$ et $x = 0$, puisque u est injectif;

- si $\Phi(x', x) = 0$ quel que soit x, alors $\Psi(y', y) = 0$ quel que soit y dans Imu, donc y' appartient au polaire de Imu et $x' = u'y' = 0$.

ii) On a, par définition de Φ,

$$\forall y' \in F', \; \forall x \in E, \;\; \Psi(y', ux) = \Phi(u'y', x),$$

donc (u, u') est un morphisme.

iii) Soit (u_1, u'_1) un morphisme de $\mathrm{E}_1 = (E_1, E_1, \Phi_1)$ dans F tel que $u_1 = u \circ \bar{u}_1$. On a: $\forall y' \in (Imu)^o$, $\forall x_1 \in E_1$,

$$\Phi_1(u'_1 y', x_1) = \Psi(y', u_1 x_1) = \Psi(y', u \circ \bar{u}_1 x_1) = 0 ,$$

donc u'_1 est nul sur $(Imu)^o$ et u'_1 passe au quotient en une application linéaire continue $\bar{u}'_1$ de $E' = F'/(Imu)^o$ dans E'_1. Le couple $(\bar{u}_1, \bar{u}'_1)$ est un morphisme de E_1 dans E :

$$\forall x' \in E', \quad \exists y' \in F', \;\; x' = u'y',$$

$$\forall x_1 \in E_1, \quad \Phi_1(\bar{u}_1 x', x_1) = \Phi_1(\bar{u}'_1 u' y', x_1) = \Phi_1(u'_1 y', x_1) =$$
$$= \Psi(y', u_1 x_1) = \Psi(y', u\bar{u}_1 x_1) = \Phi(x', \bar{u}_1 x_1),$$

et on a bien $(u_1, u'_1) = (u, u') \circ (\bar{u}_1, \bar{u}'_1)$. □

1.7.2. DEFINITION. Soit $\mathrm{F} = (F, F', \Psi)$ un couple d'espaces de Banach en dualité, E un sous-espace fermé de F et u l'injection canonique de E dans F. Nous dirons que le couple d'espaces de Banach en dualité E décrit à la Proposition 1.7.1 est le *sous-objet de* F défini par E. Nous dirons que ce sous-objet est un *facteur direct de* F si le morphisme (u, u') de E dans F admet une projection, c'est-à-dire un morphisme (π, π') de

F dans E tel que $\pi \circ u = 1_E$ et $u' \circ \pi' = 1_{E'}$.

1.7.3. REMARQUE. Si E est un facteur direct de F, alors E est un facteur direct de F. La réciproque est fausse en général.

1.8. Noyau d'un morphisme.

Soit E et F deux couples d'espaces de Banach en dualité et soit (u, u') un morphisme de E dans F. Le sous-objet de E défini par le sous-espace fermé $Ker u$ de E et le monomorphisme canonique de ce sous-objet dans E forment un noyau, au sens de la catégorie des couples d'espaces de Banach en dualité, pour le morphisme (u, u') (on applique (iii) de la Proposition 1.7.1). Nous noterons $Ker(u, u')$ le sous-objet de E défini par $Ker u$.

La détermination pratique de $Ker(u, u')$ se fait par application de la proposition suivante :

1.8.1. PROPOSITION. *Le polaire du noyau de* u *est la* $\sigma(E', E)$ *fermeture de l'image de* u'.

Le noyau de u est le polaire de l'image de u' : si x appartient à $Ker u$, on a :

$$\forall x' \in Im u', \quad \exists y' \in F', \quad x' = u'y',$$

$$\Phi(x', x) = \Phi(u'y', x) = \Psi(y', ux) = 0,$$

donc x appartient à $(Im u')^0$; réciproquement, si x appartient à $(Im u')^0$ on a

$$\forall y' \in F', \quad \Psi(y', ux) = \Phi(u'y', x) = 0,$$

d'où $ux = 0$. Il en résulte que le polaire de $Ker u$ est le bipolaire de $Im u'$, donc la $\sigma(E', E)$ fermeture de $Im u'$. □

1.8.2. COROLLAIRE. *Si* $Im u'$ *est* $\sigma(E', E)$ *fermé, en particulier si* (u, u') *admet une section* (σ, σ'), *on a*

$$Ker(u, u') = (Ker u, \; Coker u', \Theta),$$

où Θ *est défini par* $\Theta([x'], x) = \Phi(x', x)$.

Si Imu' est $\sigma(E',E)$ fermé, il est égal au polaire de $Keru$; on reprend alors la construction de la Proposition 1.7.1.

Si (u,u') admet une section (σ,σ'), on va montrer directement que Imu' est le polaire de $Keru$ (donc est $\sigma(E',E)$ fermé). Si on a

$$\forall x \in Keru, \quad \Phi(x',x) = 0,$$

alors

$$\forall x \in E, \quad \Phi(x', x - \sigma u x) = 0,$$

soit

$$\forall x \in E, \quad \Phi(x' - u'\sigma' x', x) = 0,$$

d'où $x' - u'\sigma' x' = 0$; donc x' appartient à l'image de u'. La réciproque est immédiate. □

1.8.3. THEOREME. *Soit* E *et* F *deux couples d'espaces de Banach en dualité et soit* (u,u') *un morphisme de* E *dans* F. *Si* (u,u') *admet une section* (σ,σ'), $Ker(u,u')$ *est un facteur direct de* E.

Soit i l'injection canonique de $Keru$ dans E et i' la surjection canonique de E' sur $Cokeru'$; on sait (Corollaire 1.8.2) que

$$Ker(u,u') = (Keru,\ Cokeru', \Theta),$$

où Θ est défini par :

$$\forall [x'] \in Cokeru, \ [x'] = i'x', \quad \forall x \in Keru, \quad \Theta([x'],x) = \Phi(x', ix)$$

et que (i,i') est le monomorphisme canonique de $Ker(u,u')$ dans E. On définit une projection (π,π') de E sur $Ker(u,u')$ de la manière suivante :

- L'endomorphisme $1_E - \sigma \circ u$ de E se factorise en une application linéaire continue π de E dans $Keru$: on a $i \circ \pi = 1_E - \sigma \circ u$.

- L'endomorphisme $1_{E'} - u' \circ \sigma'$ de E' passe au quotient en une application linéaire continue π' de $Cokeru'$ dans E' : on a $\pi' \circ i' = 1_{E'} - u' \circ \sigma'$.

On vérifie que (π,π') est un morphisme :

$$\forall [x'] \in Cokeru', \ [x'] = i'x', \quad \forall x \in E,$$

$$\Theta([x'],\pi x) = \Phi(x', i\pi x) = \Phi(x', x - \sigma u x) =$$
$$= \Phi(x' - u'\sigma' x', x) = \Phi(\pi' i' x', x) = \Phi(\pi'[x'], x),$$

et que (π, π') est une projection pour (i, i') :

$$i\circ(\pi\circ i) = (i\circ\pi)\circ i = (1_E - \sigma\circ u)\circ i = i,$$

d'où $\pi\circ i = 1_{Ker u}$ et

$$(i'\circ\pi')\circ i' = i'\circ(\pi'\circ i') = i'\circ(1_{E'} - u'\circ\sigma') = i',$$

donc $i'\circ\pi' = 1_{Coker u'}$. □

1.8.4. COROLLAIRE. *Soit* E *un couple d'espaces de Banach en dualité et* (u, u') *un morphisme de* E *dans* R^n. *Si l'application* u *est surjective,* $Ker(u, u')$ *est un facteur direct de* E.

Il suffit de montrer que (u, u') admet une section. On sait (n° 1.6 Exemple 2') que (u, u') est défini par n éléments $(x'_1, \dots, x'_n)$ de E'; on a :

$$\forall x \in E, \quad u.x = \{\Phi(x'_k, x)\}_{k=1}^n,$$

$$\forall \{\lambda'_k\}_{k=1}^n \in \mathrm{R}^n, \quad u'.\{\lambda'_k\}_{k=1}^n = \sum_{k=1}^n \lambda'_k x'_k .$$

L'application u étant surjective, il existe n éléments $(x_1, \dots, x_n)$ de E tels que

$$\forall h \in \mathrm{N},\ 1 \leq h \leq n,\ \forall k \in \mathrm{N},\ 1 \leq k \leq n,\ \Phi(x'_h, x_k) = \delta_{hk}.$$

On définit alors une section (σ, σ') de (u, u') de la manière suivante :

$$\forall \{\lambda_k\}_{k=1}^n \in \mathrm{R}^n, \quad \sigma.\{\lambda_k\}_{k=1}^n = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k,$$

$$\forall x' \in E', \quad \sigma'.x' = \{\Phi(x', x_k)\}_{k=1}^n,$$

On sait (n° 1.6, Exemple 1') que (σ, σ') est un morphisme de R^n dans E ; on vérifie que (σ, σ') est une section de (u, u') :

$$u\circ\sigma.\{\lambda_k\}_{k=1}^n = \{\Phi(x'_k, \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k)\}_{k=1}^n = \{\lambda_h\}_{h=1}^n,$$

$$\sigma'\circ u'.\{\lambda'_k\}_{k=1}^n = \{\Phi(\sum_{h=1}^n \lambda'_h x'_h, x_k)\}_{k=1}^n = \{\lambda'_k\}_{k=1}^n . \quad \square$$

II. APPLICATIONS DIFFERENTIABLES ENTRE COUPLES D'ESPACES DE BANACH EN DUALITE.

2.1. Définition d'une application différentiable.

2.1.1. DEFINITION. Soit $\mathrm{E} = (E, E', \Phi)$ et $\mathrm{F} = (F, F', \Psi)$ deux couples d'espaces de Banach en dualité, U un ouvert de E et f une application de U dans F. Nous dirons que *f est de classe C^r* (relativement à E et F) si les conditions suivantes sont vérifiées :

i) f est de classe C^r relativement aux espaces de Banach E et F ;

ii) l'application différentielle df de U dans $L(E;F)$ se factorise en une application δf de classe C^{r-1} à valeurs dans $L(\mathrm{E};\mathrm{F})$.

Relativement aux projections canoniques de $L(\mathrm{E};\mathrm{F})$ sur $L(E;F)$ et $L(F';E')$, l'application δf a pour composantes df et une application $d'f$ de classe C^{r-1} de U dans $L(F';E')$. La condition de produit fibré se traduit par :

$$\forall x \in U, \ \forall X \in E, \ \forall Y' \in F', \ \Psi(Y', df(x).X) = \Phi(d'f(x).Y', X).$$

Pour $r = 0$, la condition (ii) est vide : une application de classe C^0 est une application continue de U dans F.

2.2. Composition d'applications différentiables.

Soit $\mathrm{E} = (E, E', \Phi)$, $\mathrm{F} = (F, F', \Psi)$ et $\mathrm{G} = (G, G', \Theta)$ trois couples d'espaces de Banach en dualité, U un ouvert de E et V un ouvert de F. On considère une application f de U dans F, prenant ses valeurs dans V et une application g de V dans G ; l'application composée $h = g \circ f$ est une application de U dans G.

2.2.1. THEOREME. *Sous les hypothèses précédentes, si f est de classe C^r relativement à* E *et* F *et si g est de classe C^r relativement à* F *et* G, *alors $h = g \circ f$ est de classe C^r relativement à* E *et* G *et on a :*

$$\forall x \in U, \ dh(x) = dg(f(x)) \circ df(x),$$

$$\forall x \in U, \ d'h(x) = d'f(x) \circ d'g(f(x)).$$

On sait que h est de classe C^r relativement aux espaces de Banach E et G et que

$$dh(x) = dg(f(x)) \circ df(x).$$

Les applications $d'f$ et $d'g$ étant de classe C^{r-1}, et f étant de classe C^r, l'application $d'h$ de U dans $L(G', E')$ définie par

$$d'h(x) = d'f(x) \circ d'g(f(x))$$

est de classe C^{r-1} et on a : $\forall x \in U$, $\forall X \in E$, $\forall Z' \in G'$,

$$\Theta(Z', dh(x).X) = \Theta(Z', dg(f(x)) \circ df(x).X) =$$
$$= \Psi(d'g(f(x)).Z', df(x).X) =$$
$$= \Phi(d'f(x) \circ d'g(f(x)).Z', X) = \Phi(d'h(x).Z', X).$$

Les applications dh et $d'h$ définissent donc une application de classe C^{r-1} de U dans $L(\mathrm{E};\mathrm{G})$, application qui relève dh. □

2.3. Application différentiable définie sur un produit.

Etant donné deux couples d'espaces de Banach en dualité E_1 et E_2, on définit le couple produit (c'est le produit dans la catégorie des couples d'espaces de Banach en dualité) :

$$\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2 = (E_1 \times E_2,\ E'_1 \oplus E'_2,\ \Phi),$$

où Φ est la dualité définie par :

$$\forall (x'_1, x'_2) \in E'_1 \oplus E'_2,\quad \forall (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2,$$
$$\Phi((x'_1, x'_2), (x_1, x_2)) = \Phi_1(x'_1, x_1) + \Phi_2(x'_2, x_2).$$

On voit facilement que $L(\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2;\mathrm{F})$ s'identifie à $L(\mathrm{E}_1;\mathrm{F}) \oplus L(\mathrm{E}_2;\mathrm{F})$; on a donc :

2.3.1. PROPOSITION. *Soit* E_1, E_2 *et* F *trois couples d'espaces de Banach en dualité,* U *un ouvert de* $E_1 \times E_2$ *et* f *une application de* U *dans* F. *L'application* f *est de classe* C^r *relativement à* $\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2$ *et* F *ssi* f *est partiellement différentiable de* $E_1 \times E_2$ *dans* F *et si les applications différentielles partielles* $d_i f$ *de* U *dans* $L(E_i;F)$ *avec* $i \in \{1, 2\}$ *se factorisent en des applications* $\delta_i f$, *de classe* C^{r-1}, *à valeurs dans* $L(\mathrm{E}_i;\mathrm{F})$.

2.4. Exemples d'applications différentiables.

EXEMPLE 1. Soit E et F deux couples d'espaces de Banach en dualité. Toute application constante de E dans F est de classe C^∞ relativement à E et F.

EXEMPLE 2. Soit E et F deux couples d'espaces de Banach en dualité. Une application linéaire continue u de E dans F est de classe C^∞ relativement à E et F ssi u définit un morphisme (u,u') de E dans F ; on a alors :

$$\forall x \in E, \quad \delta u(x) = (u,u').$$

EXEMPLE 3. Soit E_1, E_2 et F trois couples d'espaces de Banach en dualité. Une application bilinéaire continue f de $E_1 \times E_2$ dans F est de classe C^∞ relativement à $\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2$ et F ssi l'application linéaire continue f_1 de E_2 dans $L(E_1;F)$ (resp. f_2 de E_1 dans $L(E_2;F)$) associée à f se factorise en une application linéaire continue à valeurs dans $L(\mathrm{E}_1;\mathrm{F})$ (resp. $L(\mathrm{E}_2;\mathrm{F})$). (On applique la Proposition 2.3.1.)

EXEMPLE 4. Soit $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{G}$ deux espaces fibrés vectoriel de même base compacte B ; on se donne une structure finslérienne sur $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{G}$ et une mesure de Radon μ strictement positive sur B. Soit f une application fibrée définie sur un ouvert $\mathfrak{U}$ de l'espace total de $\mathfrak{F}$, à valeurs dans l'espace total de $\mathfrak{G}$, de classe C^r le long des fibres (on n'a donc pas à supposer que $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{G}$ soient des fibrés différentiables - ni que B soit une variété). On note $C^0_{\mathfrak{U}}(\mathfrak{F})$ l'ouvert de $C^0(\mathfrak{F})$ formé des sections de $\mathfrak{F}$ prenant leurs valeurs dans $\mathfrak{U}$, et ω_f l'application de $C^0_{\mathfrak{U}}(\mathfrak{F})$ dans $C^0(\mathfrak{G})$ qui, à une section s de $\mathfrak{F}$ prenant ses valeurs dans $\mathfrak{U}$, associe la section $f \circ s$ de $\mathfrak{G}$. On sait que ω_f est une application de classe C^r relativement à $C^0(\mathfrak{F})$ et $C^0(\mathfrak{G})$ et que, identifiant $C^0(\mathfrak{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{G}))$ à un sous-espace fermé de $L(C^0(\mathfrak{F});C^0(\mathfrak{G}))$, l'application différentiable $d\omega_f$ s'identifie à l'application $\omega_{d_\phi f}$ de $C^0_{\mathfrak{U}}(\mathfrak{F})$ dans $C^0(\mathfrak{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{G}))$ (l'application fibrée $d_\phi f$ de $\mathfrak{U}$ dans $\mathfrak{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{G})$ est la différentielle de f le long des fibres ; cette application est de classe C^{r-1} le long des fibres). Si on identifie de même $C^0(\mathfrak{L}(\mathfrak{G}^*;\mathfrak{F}^*))$ à un sous-espace fermé de l'espace $L(C^0(\mathcal{G}^*);C^0(\mathcal{F}^*))$, l'application

$$\omega_{d^*_\phi f} \quad \text{de} \quad C^0_{\mathcal{U}}(\mathcal{F}) \quad \text{dans} \quad C^0(\mathcal{L}(\mathcal{G}^*;\mathcal{F}^*))$$

définit une application $d'\omega_f$ de classe C^{r-1}

$$\text{de} \quad C^0_{\mathcal{U}}(\mathcal{F}) \quad \text{dans} \quad L(C^0(\mathcal{G}^*);C^0(\mathcal{F}^*))$$

telle que :

$$\forall s \in C^0_{\mathcal{U}}(\mathcal{F}),\ \forall \hat{s} \in C^0(\mathcal{F}),\ \forall \bar{\sigma} \in C^0(\mathcal{G}^*),\ \forall x \in B,$$

$$<d'\omega_f(s).\bar{\sigma}, \hat{s}>_x = <d^*_\phi f(x,s).\bar{\sigma}(x), \hat{s}(x)> =$$

$$= <\bar{\sigma}(x), d_\phi f(x,s).\hat{s}(x)> = <\bar{\sigma}, d\omega_f(s).\hat{s}>_x ,$$

d'où

$$\mu(<d'\omega_f(s).\bar{\sigma}, \hat{s}>) = \mu(<\bar{\sigma}, d\omega_f(s).\hat{s}>) .$$

Il en résulte que $(d\omega_f, d'\omega_f)$ définit une application $\delta\omega_f$ de classe C^{r-1} de $C^0_{\mathcal{U}}(\mathcal{F})$ dans $L(C^0(\mathcal{F});C^0(\mathcal{G}))$ qui factorise $d\omega_f$. L'application ω_f est donc de classe C^r relativement aux couples d'espaces de Banach en dualité $C^0(\mathcal{F})$ et $C^0(\mathcal{G})$. □

2.5. Difféomorphismes ; théorème d'inversion locale.

2.5.1. DEFINITION. Soit E et F deux couples d'espaces de Banach en dualité, U un ouvert de E, V un ouvert de F. Une application f de U dans V est un *difféomorphisme de classe C^r de U sur V, relativement à* E *et* F si f est bijective, de classe C^r relativement à E et F et si l'application réciproque $g = f^{-1}$ est de classe C^r relativement à F et E.

2.5.2. THEOREME *(Théorème d'inversion locale). Soit* E *et* F *deux couples d'espaces de Banach en dualité, U un ouvert de E et f une application de U dans F, de classe C^r ($r \geq 1$) relativement à* E *et* F. *Si en un point a de U on a $\delta f(a) \in Isom(\mathrm{E};\mathrm{F})$, il existe un voisinage ouvert V de a et un voisinage ouvert W de $b = f(a)$ tels que f soit un difféomorphisme de classe C^r de V sur W, relativement à* E *et* F.

Si $\delta f(a)$ est un isomorphisme, alors $df(a)$ est un isomorphisme de E sur F. Il existe donc des voisinages ouverts V et W tels que f

soit un difféomorphisme de classe C^r de V sur W, relativement à E et F ; comme $Isom(\mathrm{E};\mathrm{F})$ est ouvert dans $L(\mathrm{E};\mathrm{F})$ (Théorème 1.5.3), on peut restreindre V et $W = f(V)$, de telle manière que $\delta f(x)$ soit un isomorphisme quel que soit x de V. La différentielle de l'application réciproque g de f étant donnée par

$$dg(y) = (df(g(y)))^{-1}$$

et l'application de prise de l'inverse dans $Isom(\mathrm{E};\mathrm{F})$ étant de classe C^∞ (Théorème 1.5.3), l'application δg de W dans $L(\mathrm{F};\mathrm{E})$ définie par

$$\delta g(y) = (\delta f(g(y)))^{-1}$$

est de classe C^{r-1} et factorise dg : l'application g est de classe C^r relativement à F et E. □

2.6. Théorème des fonctions implicites.

2.6.1. THEOREME. *Soit* E *et* F *deux couples d'espaces de Banach en dualité,* U *un ouvert de* F, f *une application de classe* C^r *de* U *dans* F. *Si en un point* a *de* U *la différentielle* $\delta f(a)$ *admet une section, il existe un voisinage* V *de* a, *un voisinage* W *de l'origine dans* $Ker\, df(a)$ *et une application* g *de* W *dans* E, *de classe* C^r *relativement à* $Ker\,\delta f(a)$ *et* E *telle que*

$$g(W) = \{x \mid x \in V,\ f(x) = f(a)\},\quad g(0) = a$$

et $\delta g(0) = (i,i')$, *morphisme canonique de* $Ker\,\delta f(a)$ *dans* E.

Le morphisme $\delta f(a)$ admettant une section (σ,σ'), $Ker\,\delta f(a)$ est un facteur direct de E et il existe (Théorème 1.8.3) un morphisme (π,π') de E dans $Ker\,\delta f(a)$ tel que :

$$(\pi,\pi')\circ(i,i') = 1_{Ker\,\delta f(a)}$$

et

$$(i,i')\circ(\pi,\pi') + (\sigma,\sigma')\circ\delta f(a) = 1_{\mathrm{E}}.$$

Soit $\hat{f}$ l'application de U dans $Ker\, df(a) \times F$ définie par :

$$\hat{f}(x) = (\pi(x-a),\ f(x)).$$

Cette application est de classe C^r relativement aux couples d'espaces de Banach en dualité E et $Ker\,\delta f(a) \times$ F et la différentielle en a :

$$\delta\hat{f}(a) = (d\hat{f}(a),\ d'\hat{f}(a)) = ((\pi, df(a)),\ \pi' + d'f(a))$$

est inversible ; on a :

$$(\delta\hat{f}(a))^{-1} = (i + \sigma, (i', \sigma')).$$

Par le théorème d'inversion locale (Théorème 2.5.2) il existe un voisinage de $(0, f(a))$ dans $Ker\, df(a) \times F$, voisinage que l'on peut prendre sous la forme d'un produit $W \times W'$ de voisinages, et un voisinage V de a tels que $\hat{f}$ soit un difféomorphisme de classe C^r de V sur $W \times W'$. Soit $\hat{g}$ le difféomorphisme inverse et g l'application de W dans V défiinie par:

$$g(y) = \hat{g}(y, f(a)).$$

Cette application est de classe C^r relativement à $Ker\,\delta f(a)$ et E, on a

$$g(W) = \{x \mid \exists y \in W,\ \ x = \hat{g}(y, f(a))\} =$$

$$= \{x \mid \ x \in V,\ \ f(x) = f(a)\},$$

$$g(0) = \hat{g}(0, f(a)) = \hat{g} \circ \hat{f}(a) = a$$

et enfin

$$\delta\hat{g}(0, f(a)) = (\delta\hat{f}(a))^{-1} = (i + \sigma, (i', \sigma'))\ ;$$

donc $\delta g(0) = (i, i')$. □

III. MINIMUM LOCAL D'UNE FONCTION NUMERIQUE DIFFERENTIABLE

3.1. Introduction.

Soit E un couple d'espaces de Banach en dualité, U un ouvert de E et J une application de U dans R, de classe C^2 relativement à E. La projection de $L(\mathrm{E};\mathrm{R})$ sur $L(\mathrm{R}; E')$ étant un isomorphisme (n° 1.6, Exemple 2), la condition de dérivabilité de J peut s'exprimer ainsi : l'application J est de classe C^2 de E dans R et l'application dJ de U dans E^* se factorise en une application $d'J$ de classe C^1 de U dans E'. On a donc :

$$dJ = \phi \circ d'J \quad \text{et} \quad d^2J(x) = \phi \circ dd'J(x).$$

3.1.1. DEFINITIONS ET NOTATION. Soit E un couple d'espaces de Banach en dualité. Nous appellerons *opérateur symétrique sur* E une application linéaire continue A de E dans E' telle que :

$$\forall x_1 \in E,\ \forall x_2 \in E,\ \Phi(Ax_1, x_2) = \Phi(Ax_2, x_1).$$

L'ensemble des opérateurs symétriques sur E forme un sous-espace vectoriel fermé de $L(E;E')$; nous le noterons $L_s(\mathrm{E})$.

Un opérateur symétrique A sur E sera dit *opérateur positif* si :

$$\forall x \in E,\ \Phi(Ax, x) \geq 0 ;$$

cet opérateur sera dit *strictement positif* si

$$\forall x \in E - \{0\},\ \Phi(Ax, x) > 0.$$

Un opérateur symétrique A sur E sera dit *coercif* s'il est, dans $L_s(\mathrm{E})$, intérieur à l'ensemble des opérateurs positifs. Nous verrons plus tard (Lemme 3.2.2) qu'un opérateur coercif est strictement positif ; la réciproque est bien sûr fausse en général.

3.1.2. PROPOSITION. *La différentielle* $dd'J$ *de* $d'J$ *est une application continue de* U *dans* $L_s(\mathrm{E})$.

On sait déjà que $dd'J$ est une application continue de U dans $L(E;E')$; il suffit de montrer que pour tout x de U, $dd'J(x)$ est un opérateur symétrique sur E. Or on a : $\forall X_1 \in E,\ \forall X_2 \in E$,

$$\Phi(dd'J(x).X_1, X_2) = d^2J(x).(X_1, X_2) = d^2J(x).(X_2, X_1) =$$
$$= \Phi(dd'J(x).X_2, X_1). \qquad \square$$

3.1.3. PROPOSITION. *Pour que* J *présente un minimum local en un point* a *de* U, *il est nécessaire que l'on ait:*

(i) $d'J(a) = 0$,

(ii) $dd'J(a)$ *est un opérateur positif sur* E ;

et il est suffisant que l'on ait:

(i) $d'J(a) = 0$,

(ii') $dd'J(a)$ *est un opérateur coercif sur* E .

On sait que, pour que J présente un minimum local en a, il est nécessaire que $dJ(a)=0$ et que la forme quadratique associée à $d^2J(a)$ soit positive. Compte tenu des factorisations de dJ et de $dd'J(a)$, on trouve les conditions (i) et (ii).

La formule de Taylor à l'ordre 2, avec reste intégral, pour J au point a s'écrit:

$$J(x)=J(a)+\Phi(d'J(a),x-a)+$$
$$+\Phi(\textstyle\int_0^1(1-\lambda)dd'J(a+\lambda(x-a))d\lambda\,].(x-a),(x-a))$$

où

$$A(x)=2\int_0^1(1-\lambda)\,dd'J(a+\lambda(x-a))d\lambda$$

est un opérateur symétrique sur E (on intègre une fonction continue à valeurs dans l'espace de Banach $L_s(\mathrm{E})$) dépendant continuement de x. Si l'application J vérifie en a les conditions (i) et (ii'), on a:

$$J(x)=J(a)+\frac{1}{2}\Phi(A(x).(x-a),(x-a))$$

et, $A(a)=dd'J(a)$ étant un opérateur coercif, il existe un voisinage V de a dans U tel que, pour tout x de V, l'opérateur $A(x)$ soit positif; alors

$$\forall x\in V,\quad J(x)\geq J(a).\quad\square$$

Les conditions de la Proposition 3.1.3 ne sont vraiment utilisables que si l'on sait caractériser de manière pratique les opérateurs coercifs sur un couple d'espaces de Banach en dualité et si, bien sûr, il existe des opérateurs coercifs sur le couple d'espaces de Banach en dualité considéré.

3.2. Couples hilbertiens.

3.2.1. DEFINITION. Nous dirons qu'un couple d'espaces de Banach en dualité E est un *couple hilbertien* si l'ensemble des opérateurs coercifs sur E est non vide.

3.2.2. PROPOSITION. *Soit E un espace de Banach. Le couple d'espaces de Banach en dualité $\mathrm{E}=(E,E^*,<,>)$ canoniquement associé à E est un couple hilbertien ssi E est isomorphe à un espace de Hilbert.*

Si E est isomorphe à un espace de Hilbert, tout opérateur définissant un produit scalaire admissible sur E est symétrique, positif et intérieur au sous-ensemble des opérateurs positifs, donc est un opérateur coercif sur E.

Réciproquement, soit Λ un opérateur coercif sur E. A tout élément ξ de E^* on associe l'opérateur symétrique L_ξ défini par:

$$\forall x \in E, \quad L_\xi . x = <\xi, x> \xi \ ;$$

la norme de cet opérateur est égale à $\|\xi\|^2$. Comme Λ est coercif, il existe $\epsilon > 0$ tel que $\|\xi\|^2 = \|L_\xi\| \leq \epsilon$ entraîne $\Lambda - L_\xi$ positif. On a donc

$$\forall \xi \in E^*, \quad \forall x \in E, \quad \Phi(\Lambda x, x) \geq \frac{\epsilon}{\|\xi\|^2}(<\xi, x>)^2 \geq 0,$$

soit encore

$$\forall x \in E, \quad <\Lambda x, x> \geq \epsilon(\sup_\xi \frac{|<\xi, x>|}{\|\xi\|})^2 = \epsilon \|x\|^2 .$$

Il en résulte que

$$\forall x \in E, \quad \sqrt{\epsilon}\, \|x\| \leq \sqrt{<\Lambda x, x>} \leq \sqrt{\|\Lambda\|}\, \|x\|,$$

qui exprime que la norme de E est équivalente à une norme hilbertienne.

Aucune caractérisation générale des couples hilbertiens n'étant actuellement disponible, nous n'avons retenu ici qu'un critère particulier choisi pour sa simplicité et ses applications au calcul des variations:

3.2.3. THEOREME. *Soit* E *un couple d'espaces de Banach en dualité. S'il existe sur* E *un opérateur symétrique, positif et inversible, cet opérateur est coercif et* E *est un couple hilbertien.*

Ceci résulte du lemme suivant et de la remarque qu'un opérateur symétrique de la forme $u' \circ A \circ u$, où (u, u') est un endomorphisme de E et A un opérateur symétrique sur E, est positif si A est positif, car

$$\forall x \in E, \quad \Phi(u' \circ A \circ u x, x) = \Phi(A \circ u x, u x).$$

3.2.4. LEMME. *Soit A un opérateur symétrique et inversible sur* E. *L'application*

$$a : L(\mathrm{E};\mathrm{E}) \to L_s(\mathrm{E}), \quad (u, u') \mapsto u' \circ A \circ u ,$$

admet une section locale au point 1_E .

L'application α est de classe C^∞ et l'application linéaire tangente au point 1_E, définie par:

$$\forall (U,U')\in L(E;E),\quad d\alpha(1_E).(U,U') = U'\circ A + A\circ U,$$

admet une section linéaire continue σ définie par:

$$\forall X\in L_s(E),\quad \sigma.X = (\frac{1}{2}A^{-1}\circ X, \frac{1}{2}X\circ A^{-1}).$$

On applique le théorème des fonctions implicites. □

3.2.5. EXEMPLE. Soit $\mathfrak{F}$ un espace fibré vectoriel de base compacte B, ayant pour fibre un espace de Hilbert. On se donne une structure riemannienne sur $\mathfrak{F}$ et une mesure de Radon strictement positive μ sur B. A la structure riemannienne sur $\mathfrak{F}$ est associé un isomorphisme α du fibré $\mathfrak{F}$ sur son fibré dual $\mathfrak{F}^*$. L'application linéaire continue ω_α de $C^0(\mathfrak{F})$ dans $C^0(\mathfrak{F}^*)$ est un opérateur symétrique, positif et inversible (avec $(\omega_\alpha)^{-1} = \omega_{\alpha^{-1}}$) sur $C^0(\mathfrak{F})$ (Exemple 1.2.2), qui est donc un couple hilbertien.

3.2.6. THEOREME. *Tout facteur direct d'un couple hilbertien est un couple hilbertien.*

Soit E et F deux couples d'espaces de Banach en dualité, (i,i') un morphisme de E dans F et (π,π') une projection de F sur E, relativement à (i,i') (i.e.,

$$\pi\circ i = 1_E \quad \text{et} \quad i'\circ\pi' = 1_{E'}).$$

On associe aux morphismes (i,i') et (π,π') les applications linéaires continues

$$I: L_s(F)\to L_s(E),\quad A\mapsto i'\circ A\circ i,$$

$$\Pi: L_s(E)\to L_s(F),\quad B\mapsto \pi'\circ B\circ\pi\ ;$$

on a $I\circ\Pi = 1_{L_s(E)}$. Soit Λ un opérateur coercif sur F. L'application affine

$$\Pi_\Lambda: L_s(E)\to L_s(F),\quad B\mapsto \Pi B + \Lambda - \Pi\circ I\Lambda$$

est continue et vérifie

$$I \circ \Pi_\Lambda = 1_{L_s(\mathrm{E})} \quad \text{et} \quad \Pi_\Lambda \circ I\Lambda = \Lambda .$$

Il existe donc un voisinage V de $I\Lambda$ dans $L_s(\mathrm{E})$ tel que tout opérateur de V s'écrive

$$B = i' \circ (\Pi_\Lambda B) \circ i \quad \text{avec } \Pi_\Lambda B \text{ positif;}$$

tout opérateur élément de V est donc positif, et $I\Lambda$ est un opérateur coercif sur E. □

3.2.7. EXEMPLE. Les données sont celles de l'Fxemple 3.2.5. Soit σ_1, $\sigma_2, \dots, \sigma_n$ n sections linéairement indépendantes de $\mathcal{F}^*$. Le sous-objet de $\mathrm{C}^0(\mathcal{F})$ défini par le sous-espace

$$\{ s \mid s \in C^0(\mathcal{F}),\ \forall k \in \{1, \dots, n\},\ \mu(<\sigma_k, s>) = 0 \}$$

est un couple hilbertien : ce sous-objet est en effet le noyau du morphisme de $\mathrm{C}^0(\mathcal{F})$ dans R^n défini par les σ_k (n° 1.6, Exemple 2') et, les sections σ_k étant indépendantes, ce noyau est un facteur direct de $\mathrm{C}^0(\mathcal{F})$, d'après le Corollaire 1.8.4.

3.3. Caractérisation des opérateurs coercifs.

3.3.1. PROPOSITION. *Soit* Λ *un opérateur coercif sur un couple hilbertien* E. *Il existe une constante* $\lambda > 0$ *telle que, pour tout opérateur symétrique* A *sur* E, *on ait*

$$\forall x \in E,\quad \forall y \in E,\quad |\Phi(Ax, y)| \leq \lambda \|A\| \sqrt{\Phi(\Lambda x, x)} \sqrt{\Phi(\Lambda y, y)}.$$

L'opérateur Λ étant coercif, il existe $\epsilon > 0$ tel que, si A est un opérateur symétrique de norme inférieure ou égale à ϵ, les opérateurs $\Lambda - A$ et $\Lambda + A$ sont positifs. Pour un opérateur symétrique A quelconque, on applique ce résultat à l'opérateur $\frac{\epsilon}{\|A\|} A$; il vient

$$\forall x \in E,\quad \Phi(\Lambda x, x) \pm \frac{\epsilon}{\|A\|} \Phi(Ax, x) \geq 0,$$

d'où

$$\forall x \in E,\quad |\Phi(Ax, x)| \leq \frac{\|A\|}{\epsilon} \Phi(\Lambda x, x).$$

L'inégalité de Schwarz appliquée aux opérateurs positifs $\Lambda \pm \frac{\epsilon}{\|A\|} A$ donne alors : $\forall x \in E$, $\forall y \in E$,

$$|\Phi(\Lambda x, y) \pm \frac{\epsilon}{\|A\|} \Phi(Ax, y)| \leq$$

$$\leq \sqrt{\Phi(\Lambda x, x) \pm \frac{\epsilon}{\|A\|} \Phi(Ax, x)} \sqrt{\Phi(\Lambda y, y) \pm \frac{\epsilon}{\|A\|} \Phi(Ay, y)}$$

$$\leq 2\sqrt{\Phi(\Lambda x, x)} \sqrt{\Phi(\Lambda y, y)}.$$

Il en résulte que : $\forall x \in E$, $\forall y \in E$,

$$|\Phi(Ax, y)| \leq \frac{\|A\|}{\epsilon} |\Phi(\Lambda x, y)| + 2\frac{\|A\|}{\epsilon} \sqrt{\Phi(\Lambda x, x)} \sqrt{\Phi(\Lambda y, y)}$$

$$\leq \frac{3}{\epsilon} \|A\| \sqrt{\Phi(\Lambda x, x)} \sqrt{\Phi(\Lambda y, y)}.$$

On pose : $\lambda = \frac{3}{\epsilon}$. □

3.3.2. COROLLAIRE. *Un opérateur coercif est strictement positif.*

Si $\Phi(\Lambda x, x) = 0$, on a $\Phi(Ax, x) = 0$ pour tout opérateur symétrique A. En particulier, pour tout opérateur A de la forme

$$\forall y \in E, \quad A . y = \Phi(x', y) x',$$

on a

$$\Phi(Ax, x) = (\Phi(x', x))^2 = 0,$$

donc $x = 0$. □

Un opérateur coercif Λ sur un couple hilbertien E définit donc une structure pré-hilbertienne séparée sur E de norme $|x|_\Lambda = \sqrt{\Phi(\Lambda x, x)}$.

3.3.3. COROLLAIRE. *Si Λ_1 et Λ_2 sont deux opérateurs coercifs sur* E *les structures pré-hilbertiennes définies sur E par ces opérateurs sont équivalentes.*

En posant $A = \Lambda_1$ et $\Lambda = \Lambda_2$ dans la Proposition 3.3.1, il vient :

$$\exists K_1 \quad \forall x \in E, \quad \Phi(\Lambda_1 x, x) \leq K_1 \Phi(\Lambda_2 x, x);$$

de même, en posant $A = \Lambda_2$ et $\Lambda = \Lambda_1$,

$$\exists K_2 \quad \forall x \in E, \quad \Phi(\Lambda_2 x, x) \leq K_2 \Phi(\Lambda_1 x, x). \quad □$$

3.3.4. DEFINITION. Nous appellerons, par abus de langage, *espace de*

Hilbert associé au couple hilbertien E , et nous noterons H_{E} , le complété de E pour la structure pré-hilbertienne séparée sur E définie par un opérateur coercif sur E . Il résulte du Corollaire 3.3.3 que ce complété ne dépend pas, à isomorphisme près, de l'opérateur coercif choisi.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème qui donne une caractérisation des opérateurs coercifs sur un couple hilbertien :

3.3.5. THEOREME. *Soit* E *un couple hilbertien et* H_{E} *l'espace de Hilbert associé à* E. *On a les propriétés suivantes :*

1° L'injection canonique i *de* E *dans* H_{E} *est continue ;*

2° pour tout x' *de* E', *la forme linéaire* $\phi x'$ *sur* E *s'étend en une forme linéaire continue sur* H_{E} *; l'application linéaire* i' *ainsi définie de* E' *dans* H^*_{E} *est continue et d'image dense ;*

3° tout opérateur symétrique A *sur* E *s'étend en un opérateur symétrique* H_A *sur* H_{E} *(i. e.* $i' \circ A = H_A \circ i$ *); l'application linéaire ainsi définie de* $L_s(\mathrm{E})$ *dans* $L_s(H_{\mathrm{E}})$ *est continue ;*

4° un opérateur symétrique A *sur* E *est coercif ssi il est positif et son extension* H_A *est inversible.*

Nous noterons Λ l'opérateur coercif sur E qui a servi à construire H_{E}.

1° L'inégalité

$$\forall x \in E, \quad |x|_{\Lambda} = \sqrt{\Phi(\Lambda x, x)} \leq \sqrt{\|\phi \circ \Lambda\|}\ \|x\|$$

entraîne que l'injection de E dans H_{E} est continue.

2° Appliquons la Proposition 3.3.1 aux opérateurs $A_{x'}$ de la forme :

$$\forall x \in E, \quad A_{x'}x = \Phi(x', x)x'.$$

On a

$$\|A_{x'}\| = \|\phi x'\|\ \|x'\| \leq \|\phi\|\ \|x'\|^2,$$

d'où

$$\forall x' \in E', \forall x \in E, \quad (\Phi(x', x))^2 \leq \lambda \|\phi\|\ \|x'\|^2\, \Phi(\Lambda x, x).$$

Cette inégalité exprime que $\phi x'$ est continue pour la structure pré-hilbertienne sur E , donc s'étend en une forme linéaire continue sur H_{E} , et que, si on note i' l'injection de E' dans H^*_{E} ainsi définie, la norme de $i'x'$

est majorée par $\sqrt{\lambda\|\phi\|}\;\|x'\|$, donc que i' est continue. Soit H_Λ l'opérateur sur H_E qui définit le produit scalaire : H_Λ est un isomorphisme de H_E sur H_E^* et on a $i'\circ\Lambda = H_\Lambda\circ i$. Soit ξ' un élément de H_E^* et soit $\xi = H_\Lambda^{-1}\xi'$. L'image de i étant dense dans H_E , on a

$$\forall\epsilon > 0,\quad \exists x\in E\quad \|\xi - ix\|_{H_E} < \epsilon$$

et, posant $x' = \Lambda x$, il vient

$$\|\xi' - i'x'\|_{H_E^*} = \|H_\Lambda\xi - H_\Lambda\circ ix\|_{H_E^*} \leq \|H_\Lambda\|\,\epsilon\ ,$$

d'où la densité de l'image de i' dans H_E^* .

3° Il résulte de la Proposition 3.3.1 que l'application linéaire $i'\circ A$ de E dans H_E^* est continue pour la structure pré-hilbertienne sur E : on a en effet

$$\forall x\in E,\quad \|i'\circ Ax\|_{H_E^*} = \sup_{y\in E}\frac{|\Phi(Ax,y)|}{\sqrt{\Phi(\Lambda y,y)}} \leq \lambda\|A\|\sqrt{\Phi(\Lambda x,x)}.$$

L'application $i'\circ A$ s'étend donc en une application linéaire continue H_A de H_E dans H_E^* et on a $\|H_A\| \leq \lambda\|A\|$, d'où la continuité de l'application de $L_s(E)$ dans $L_s(H_E)$.

4° L'image de i étant dense, l'extension d'un opérateur positif est un opérateur positif. Si un opérateur positif A a une extension H_A inversible, alors H_A est un opérateur coercif sur H_E : il existe alors un voisinage de H_A dans $L_s(H_E)$ formé d'opérateurs positifs et, l'application de $L_s(E)$ dans $L_s(H_E)$ étant continue, il existe un voisinage de A dans $L_s(E)$ formé d'opérateurs dont l'extension est positive, donc d'opérateurs positifs, c'est-à-dire que A un opérateur coercif.

Réciproquement, si A est un opérateur coercif sur E , en échangeant les rôles de A et de Λ dans la Proposition 3.3.1, il vient :

$$\exists a > 0,\quad \forall x\in E,\quad \Phi(\Lambda x,x) \leq a\|\Lambda\|\,\Phi(Ax,x)\ ;$$

l'extension H_A de A est donc un opérateur symétrique injectif et d'image fermée sur l'espace de Hilbert H_E , donc un opérateur inversible. □

Remarquons enfin, pour clore catégoriquement ce paragraphe, que l'«application» qui à un couple hilbertien E associe l'espace de Hilbert

H_{E} (avec l'abus de langage signalé précédemment) s'étend de manière naturelle en un foncteur de la catégorie des couples hilbertiens (et des morphismes de couples d'espaces de Banach en dualité) dans la catégorie des espaces de Hilbert (et des applications linéaires continues):

3.3.6. PROPOSITION. *Soit* E *et* F *deux couples hilbertiens. Etant donné un morphisme* (u, u') *de* E *dans* F, *l'application* u *de* E *dans* F *s'étend en une application linéaire continue* H_u *de* H_{E} *dans* H_{F} *et l'application linéaire ainsi définie de* $L(\mathrm{E};\mathrm{F})$ *dans* $L(H_{\mathrm{E}};H_{\mathrm{F}})$ *est continue. En outre, l'application* u' *de* F' *dans* E' *s'étend en une application linéaire continue de* H^*_{F} *dans* H^*_{E} ; *cette extension est la transposée* H^*_u *de* H_u.

Soit A (resp. B) l'opérateur coercif sur E (resp. F) qui a servi à construire H_{E} (resp. H_{F}). L'application $u' \circ B \circ u$ de E dans E' est un opérateur symétrique sur E. D'après la Proposition 3.3.1, il existe $a > 0$ tel que

$$\forall x \in E, \quad |\Phi(u' \circ B \circ u x, x)| \leq a \| u' \circ B \circ u \| \, \Phi(Ax, x)$$
$$\leq a \| B \| \, \|(u, u')\|^2 \Phi(Ax, x),$$

d'où

$$\forall x \in E, \quad \sqrt{\Psi(B \circ u x, u x)} \leq \sqrt{a \| B \|} \, \|(u, u')\| \, \sqrt{\Phi(Ax, x)} ,$$

ce qui exprime que u s'étend en une application linéaire continue H_u de H_{E} dans H_{F} et que l'on a

$$\| H_u \| \leq \sqrt{a \| B \|} \, \|(u, u')\| ,$$

d'où la continuité de l'application de $L(\mathrm{E};\mathrm{F})$ dans $L(H_{\mathrm{E}}, H_{\mathrm{F}})$.

Comme F' est dense dans H^*_{F}, si u' admet une extension de H^*_{F} dans H^*_{F}, cette extension est unique. Il est évident par ailleurs que H^*_u est une extension de u'. □

3.4. Conditions du premier et du second ordre pour un minimum local.

Soit E un couple d'espaces de Banach en dualité, U un ouvert de E et J une fonction numérique définie sur U, de classe C^2 relativement à E. Le Théorème 3.3.5 permet de reformuler la Proposition 3.3.1

sous la forme équivalente suivante :

3.4.1. THEOREME. *Pour que J présente un minimum local en un point a de U, il est nécessaire que l'on ait:*

(i) $d'J(a)=0$,

(ii) $dd'J(a)$ *est un opérateur positif sur* E ;

et il est suffisant que l'on ait:

(0) E *est un couple hilbertien,*

(i) $d'J(a)=0$,

(ii') $dd'J(a)$ *est un opérateur positif sur* E *et* $H_{dd'J(a)}$ *est un opérateur inversible sur* H_{E} .

3.4.2. REMARQUES. 1° Un opérateur coercif étant strictement positif (Corollaire 3.3.2), les conditions (0), (i) et (ii') entraînent que J présente un minimum strict en a.

2° Il suffit (Théorème 3.2.3) que $dd'J(a)$ soit un opérateur positif et inversible sur E pour que les conditions (0) et (ii') soient vérifiées. Ceci n'admet pas de réciproque en général.

3.4.3. EXEMPLE 1. Si E est le couple d'espaces de Banach en dualité associé à un espace de Hilbert, ce couple est hilbertien (Proposition 3.2.2) et on retrouve le théorème classique pour une fonction de classe C^2 définie sur un espace de Hilbert : il est nécessaire que $dJ(a)=0$ et que $d^2J(a)$ soit un opérateur positif; il est suffisant que $dJ(a)=0$ et que $d^2J(a)$ soit un opérateur positif et inversible.

EXEMPLE 2. Soit $\mathcal{F}$ un espace fibré vectoriel de base compacte B, ayant pour fibre un espace de Hilbert. On se donne une structure riemannienne sur $\mathcal{F}$ et une mesure de Radon strictement positive μ sur B. On sait (Exemple 3.2.5) que $C^0(\mathcal{F})$ est un couple hilbertien. Soit f une fonction numérique définie sur un ouvert $\mathfrak{U}$ de l'espace total de $\mathcal{F}$, de classe C^2 le long des fibres. On définit sur l'ouvert $C^0_{\mathfrak{U}}(\mathcal{F})$ des sections de $\mathcal{F}$ prenant leurs valeurs dans $\mathfrak{U}$ une fonction numérique J par :

$$\forall s \in C^0_{\mathfrak{U}}(\mathcal{F}), \quad J(s)=\mu(f\circ s).$$

Cette fonction J est de classe C^2 relativement à $C^0(\mathcal{F})$: si p est la projection de $\mathfrak{F}$, $\hat{f} = (p, f)$ est une application fibrée de $\mathfrak{U}$ dans le fibré trivial $B \times \mathrm{R}$, de classe C^2 le long des fibres, et on a la factorisation suivante de J :

$$C^0(\mathfrak{F}) \supset C^0_{\mathfrak{U}}(\mathfrak{F}) \xrightarrow{\omega_{\hat{f}}} C^0(B \times \mathrm{R}) \xrightarrow{\mu(<1,.>)} \mathrm{R} ,$$

où $\omega_{\hat{f}}$ est de classe C^2 relativement à $C^0(\mathfrak{F})$ et $C^0(B \times \mathrm{R})$ (n° 2.4 Exemple 4) et $l_\mu = \mu(<1,.>)$ est une forme linéaire de classe C^∞ relativement à $C^0(B \times \mathrm{R})$ (n° 2.4 Exemple 2).

En différentiant l'application composée $J = l_\mu \circ \omega_{\hat{f}}$, il vient

$$d'J = \omega_{d_\phi f} ;$$

en différentiant $d'J$, il vient:

$$dd'J(s) = d\,\omega_{d_\phi f}(s) ,$$

qui est induit par la section $\omega_{d^2_\phi f}(s)$ du fibré $\mathfrak{L}_s(\mathfrak{F}; \mathfrak{F}^*)$ des opérateurs symétriques sur $\mathfrak{F}$.

Les *conditions nécessaires* pour que s soit un minimum local de J s'écrivent donc:

(1) $\forall x \in B, \quad d_\phi f(x, s(x)) = 0,$

(2.1) $\forall x \in B, \quad d^2_\phi f(x, s(x))$ *est un opérateur positif sur* $\mathfrak{F}_x$

(si on avait $< d^2_\phi f(x_0, s(x_0)).X_0 , X_0 > < 0$, il existerait une section S de $\mathfrak{F}$ telle que

$$S(x_0) = X_0 \quad \text{et} \quad < d^2_\phi f(x, s(x)).S(x), S(x) > \leq 0$$

en tout point x de B ; on aurait alors $\Phi(dd'J(s).S, S) < 0$).

On obtient des *conditions suffisantes* pour que s soit un minimum local de J en exprimant, en plus de (1) et (2.1), que $H_{dd'J(s)}$ est inversible, c'est-à-dire, a étant l'isomorphisme de $\mathfrak{F}$ sur $\mathfrak{F}^*$ qui définit la structure riemannienne de $\mathfrak{F}$, qu'il existe K tel que

$$\forall S \in L^2(\mathfrak{F}, \mu), \quad K\mu(<a.S, S>) \leq \mu(< d^2_\phi f(., s).S, S>) .$$

Cette condition est équivalente à:

(2.2) $\forall x \in B, \quad d^2_\phi f(x, s(x))$ *est un opérateur inversible sur* $\mathfrak{F}_x$.

(Un point x de B étant fixé et une trivialisation locale de $\mathcal{F}$ en x étant choisie, on montre, en appliquant la condition d'inversibilité de $H_{dd'J(s)}$ aux sections S de $\mathcal{F}$ constantes - relativement à la trivialisation de $\mathcal{F}$ en x - sur un voisinage ouvert de X et nulles à l'extérieur de ce voisinage, que $d^2_{\phi} f(x, s(x))$ est un opérateur coercif sur $\mathcal{F}_x$.)

3.5. Conditions du premier et du second ordre pour un minimum local lié.

Soit E et F des couples d'espaces de Banach en dualité, U un ouvert de E, J une application de U dans R, de classe C^2 relativement à E et f une application de U dans F, de classe C^2 relativement à E et F. Pour tout point a de U, nous noterons (i_a, i'_a) le monomorphisme canonique de $Ker\,\delta f(a)$ dans E et, pour tout point b de F, nous noterons U_b l'ensemble

$$\{ x \mid x \in U,\ f(x) = b \}.$$

3.5.1. DEFINITION. Nous dirons que f *est une condition normale* en un point a de U si la différentielle $\delta f(a)$ admet une section.

Si f est une condition normale en a et si E est un couple hilbertien, il résulte du Théorème 1.8.3 et du Théorème 3.2.6 que $Ker\,\delta f(a)$ est un couple hilbertien.

3.5.2. THEOREME. *Pour que la restriction de J à U_b présente un minimum local en un point a de U_b où la condition f est normale, il est nécessaire que l'on ait:*

(i) $\exists\, y' \in F',\ d'J(a) = d'f(a).y'$,

(ii) $i'_a \circ (dd'J(a) - dd'f(a).y') \circ i_a$ *est un opérateur positif sur* $Ker\ \delta f(a)$ *;*

et il est suffisant que l'on ait:

(0) E *est un couple hilbertien,*

(i) $\exists\, y' \in F',\ d'J(a) = d'f(a).y'$,

(ii') $A = i'_a \circ (dd'J(a) - dd'f(a).y') \circ i_a$ *est un opérateur positif sur* $Ker\,\delta f(a)$ *et* H_A *est un opérateur inversible sur* $H_{Ker\,\delta f(a)}$.

La condition de normalité en a entraîne (Théorème 2.6.2) qu'il existe un voisinage V de a dans U, un voisinage W de l'origine dans $Ker df(a)$ et une application g de W dans E, de classe C^2 relativement à $Ker \delta f(a)$ et E, telle que :

$$g(0) = a, \quad \delta g(0) = (i_a, i'_a) \quad \text{et}$$
$$g(W) = \{ x \mid x \in V, \quad f(x) = f(a) = b \}.$$

Le point a est donc un minimum local de J restreint à U_b ssi 0 est un minimum local de $J \circ g$; on applique le Théorème 3.4.1.

En différentiant $J \circ g$ au point 0, il vient :

$$d'(J \circ g)(0) = d'g(0) \circ d'J(g(0)) = i'_a \circ d'J(a).$$

La condition (i) exprime donc que la classe de $d'J(a)$ dans $Coker d'f(a)$ est nulle, soit

$$\exists\, y' \in F', \quad d'J(a) = d'f(a).y'$$

(c'est la condition des «multiplicateurs de Lagrange»). L'hypothèse de normalité implique que $d'f(a)$ est injective : l'élément y' de F' tel que $d'J(a) = d'f(a).y'$ est unique.

En différentiant $d'(J \circ g)$ au point 0, il vient :

$$dd'(J \circ g)(0) = dd'g(0).d'J(g(0)) + d'g(0) \circ dd'J(g(0)) \circ dg(0).$$

Si la condition (i) est vérifiée, on a :

$$dd'g(0).d'J(g(0)) = dd'g(0) \circ d'f(a).y' \ ;$$

en différentiant deux fois l'identité $f(g(x)) = f(a)$, il vient :

$$d'g(x) \circ d'f(g(x)) = 0,$$

$$dd'g(x) \circ d'f(g(x)) + d'g(x) \circ dd'f(g(x)) \circ dg(x) = 0,$$

d'où

$$dd'g(0) \circ d'f(a) = -i'_a \circ dd'f(a) \circ i_a$$

et on a donc (toujours si (i) est vérifié)

$$dd'(J \circ g)(0) = i'_a \circ (dd'J(a) - dd'f(a).y') \circ i_a,$$

d'où l'expression donnée dans le théorème à la condition (ii) et à la condition (ii'). □

3.5.3. EXEMPLE. Les données sont celles de 3.4.3, Exemple 2. On se donne n fonctions numériques $g_1, \dots, g_n$ définies sur $\mathfrak{U}$, de classe C^2 le long des fibres et $b = (b_1, \dots, b_n)$ un élément de R^n. On cherche un minimum local de J sur

$$U_b = \{ s \mid s \in U = C^0_{\mathfrak{U}}(\mathcal{F}), \forall k = 1, \dots, n, \ \mu(g_k \circ s) = b_k \}.$$

La condition étant définie par une application à valeurs dans R^n est normale en un point s de $C^0_{\mathfrak{U}}(\mathcal{F})$ ssi la différentielle de s est surjective (Corollaire 1.8.4), c'est-à-dire si les sections $\{\omega_{d_\phi g_k}(s)\}_{k=1}^n$ de $\mathcal{F}^*$ sont linéairement indépendantes, ce que nous supposerons.

Les conditions *nécessaires* pour que s soit un minimum local de J sur U_b s'écrivent:

(1) $\forall \lambda \in \mathrm{R}^n$, $\forall x \in B$, $d_\phi f(x, s(x)) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k d_\phi g_k(x, s(x))$,

(2.1) $\forall x \in B$, $a(x) = d^2_\phi f(x, s(x)) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k d^2_\phi g_k(x, s(x))$ *est un opérateur positif sur* $\mathcal{F}_x$.

(Si $< a(x_0).\xi_0, \xi_0 > < 0$, en se plaçant dans une carte locale de $\mathcal{F}$ en x_0, il existe un voisinage V de x_0 dans B tel que

$$< a(x).\xi_0 , \xi_0 > < 0$$

pour tout x de V et il existe une fonction numérique θ, non identiquement nulle, de support contenu dans V, telle que

$$\forall k, \quad \mu(< d_\phi g_k(x, s(x)), \theta(x)\xi_0 >) = 0 ;$$

la section $S = \theta \xi_0$ est telle que

$$\mu(< a(x).S(x), S(x) >) < 0 .)$$

On obtient des *conditions suffisantes* pour que s soit un minimum local de J sur U_b en ajoutant à (1) et (2.1) la condition :

(2.2) $\forall x \in B$, $a(x) = d^2_\phi f(x, s(x)) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k d^2_\phi g_k(x, s(x))$ *est un opérateur inversible sur* $\mathcal{F}_x$.

(On démontre que, si un opérateur symétrique A sur $C^0(\mathcal{F})$ défini par une section a de $\mathfrak{L}_s(\mathcal{F};\mathcal{F}^*)$ est tel que H_A soit un opérateur de Fredholm, alors A est inversible et pour tout x de B, $a(x)$ est un opérateur inversible sur $\mathcal{F}_x$; la réciproque est immédiate.)

3.6. Problèmes anormaux.

On se donne comme au n° 3.5 deux couples d'espaces de Banach en dualité E et F , un ouvert U de E , une application J de U dans R, de classe C^2 relativement à E et une appplication f de U dans F de classe C^2 relativement à E et F . Nous dirons que *f est une condition anormale au point a de U* si elle n'est pas normale (au sens de la Définition 3.5.1) en ce point; dans ce cas U_b n'est pas, en général, au point a , une sous-variété de U et on ne peut espérer appliquer directement les résultats précédents.

Nous traiterons ici deux cas particuliers de problème anormal en vue du calcul des variations :

1° La condition est linéaire et ne vérifie aucune condition de normalité ;

2° La condition n'est pas linéaire mais vérifie une condition affaiblie de normalité.

Le premier type de problème est tout simplement celui de la restriction de J à un sous-objet (non nécessairement un facteur direct) de E.

3.6.1. DEFINITION. Soit E un couple hilbertien et E_0 un sous-objet de E . Nous appellerons *espace de Hilbert associé à* E_0 *relativement à* E , et nous noterons $H_{E_0,E}$, la fermeture de E_0 dans H_E .

Si Λ est l'opérateur coercif sur E qui a servi à construire H_E et si (u,u') est le monomorphisme canonique de E_0 dans E , l'espace $H_{E_0,E}$ est encore le complété de E_0 pour la structure pré-hilbertienne séparée définie sur E_0 par l'opérateur $u' \circ \Lambda \circ u$ sur E_0 . En particulier, si E_0 est un facteur direct de E , c'est un couple hilbertien (Théorème 3.2.6) et $H_{E_0} = H_{E_0,E}$.

3.6.2. THEOREME. *Soit* E *un couple d'espaces de Banach en dualité,* E_0 *un sous-objet de* E, (u,u') *le monomorphisme canonique de* E_0 *dans* E, U *un ouvert de* E *et* J *une application de* U *dans* R, *de classe* C^2 *relativement à* E. *Pour que la restriction de* J *à* $U_0 = U \cap E_0$ *présente un minimum local en un point* a *de* U_0 , *il est nécessaire que l'on ait:*

(i) $u'.d'J(a) = 0$ (*i.e.* $d'J(a) \in (E_0)^0$),

(ii) $u' \circ dd'J(a) \circ u$ *est un opérateur positif sur* E_0 ;

et il est suffisant que l'on ait:

(0) E *est un couple hilbertien;*

(i) $u'.d'J(a) = 0$;

(ii') $u' \circ dd'J(a) \circ u$ *est un opérateur positif sur* E_0 *et la restriction de* $H_{dd'J(a)}$ *à* $H_{\mathrm{E}_0, \mathrm{E}}$ *est un opérateur inversible.*

Les conditions nécessaires résultent de ce que $J \circ u$ est une fonction numérique de classe C^2 relativement à E_0 : on applique les conditions nécessaires du Théorème 3.4.1.

On ne sait pas si E_0 est un couple hilbertien: les conditions suffisantes ne résultent donc pas du Théorème 3.4.1.

Soit i le plongement de E dans H_{E}, i_0 le plongement de E_0 dans $H_{\mathrm{E}_0, \mathrm{E}}$ et H_u le plongement de $H_{\mathrm{E}_0, \mathrm{E}}$ dans H_{E} ; on a $i \circ u = H_u \circ i_0$. La formule de Taylor avec reste intégral pour J au point a s'écrit sous la forme :

$$J(x) = J(a) + \Phi(d'J(a), x-a) + \tfrac{1}{2}\Phi(A(x).(x-a), (x-a)),$$

où $A(x)$ est un opérateur symétrique sur E, dépendant continûment de x et tel que $A(a) = dd'J(a)$. On a donc encore

$$J(x) = J(a) + \Phi(d'J(a), x-a) + \frac{1}{2}\langle H_{A(x)}.\, i(x-a), i(x-a)\rangle_{H_{\mathrm{E}}},$$

et si x et a appartiennent à E_0 ,

$$J(x) = J(a) + \frac{1}{2}\langle H_u^* \circ H_{A(x)} \circ H_u .\, i_0(x-a), i_0(x-a)\rangle_{H_{\mathrm{E}_0, \mathrm{E}}}.$$

L'opérateur $H_u^* \circ H_{A(x)} \circ H_u$ sur $H_{\mathrm{E}_0, \mathrm{E}}$ dépend continûment de x et

$$H_u^* \circ H_{A(a)} \circ H_u = H_u^* \circ H_{dd'J(a)} \circ H_u$$

est par hypothèse positif et inversible: il existe un voisinage V de a dans E_0 tel que $H_u^* \circ H_{A(x)} \circ H_u$ soit positif pour tout x de V et on a alors $J(x) \geq J(a)$ (avec une inégalité stricte pour $x \neq a$). □

3.6.3. REMARQUE. Il suffit que $u' \circ dd'J(a) \circ u$ soit un opérateur positif et inversible pour que (ii') soit vérifié : dans ce cas (u, u') admet en effet une projection (π, π') définie par

$$\pi = (u' \circ dd'J(a) \circ u)^{-1} \circ u' \circ dd'J(a),$$
$$\pi' = dd'J(a) \circ u \circ (u' \circ dd'J(a) \circ u)^{-1},$$

donc $H_{E_0} = H_{E_0, F}$ et $u' \circ dd'J(a) \circ u$ est coercif.

3.6.4. EXEMPLE. Soit $\mathfrak{F}$ un espace fibré vectoriel de classe C^r, de base une variété compacte B et soit $J^r\mathfrak{F}$ l'espace fibré des jets d'ordre r de sections de $\mathfrak{F}$. L'espace $C^r(\mathfrak{F})$ des sections d'ordre r de $\mathfrak{F}$ s'identifie à un sous-espace de $C^0(J^r\mathfrak{F})$; une mesure de Radon strictement positive étant choisie sur B, nous pouvons considérer le sous-objet $\mathrm{C}^r(\mathfrak{F})$ de $\mathrm{C}^0(J^r\mathfrak{F})$ défini par $C^r(\mathfrak{F})$ et étudier la restriction à $\mathrm{C}^r(\mathfrak{F})$ de fonctions numériques définies sur un ouvert de $C^0(J^r\mathfrak{F})$. L'étude des problèmes de ce type constitue le calcul des variations classique, de dimension et d'ordre quelconques (en dimension supérieure à 1, $\mathrm{C}^r(\mathfrak{F})$ n'est pas un facteur direct de $\mathrm{C}^0(J^r\mathfrak{F})$ et on ignore si $\mathrm{C}^r(\mathfrak{F})$ est un couple hilbertien; on est contraint de faire appel au Théorème 3.6.2).

3.6.5. THEOREME. *Soit* E *et* F *deux couples d'espaces de Banach en dualité,* U *un ouvert de* E, J *une application de* U *dans* R, *de classe* C^2 *relativement à* E *et* f *une application de* U *dans* F *de classe* C^2 *relativement à* E *et* F. *Un élément* b *de* F *étant fixé, on pose*

$$U_b = \{ x \mid x \in U, \ f(x) = b \}.$$

Pour que la restriction de J *à* U_b *présente un minimum local en un point* a *de* U_b *où* $df(a)$ *est surjective et* $\mathrm{Im}\, d'f(a)$ *est* $\sigma(E', E)$ *fermé, il est nécessaire que l'on ait:*

(i) $\exists y' \in F', \ d'J(a) = d'f(a).y'$,

(ii) $u_a' \circ (dd'J(a) - dd'f(a).y') \circ u_a$ *est un opérateur positif sur* $\mathrm{Ker}\, \delta f(a)$.

On suppose que E *et* F *sont des couples hilbertiens. Pour que la restriction de* J *à* U_b *présente un minimum local en un point* a *de* U_b *où* $H_{df(a)}$ *a une image fermée, il est suffisant que l'on ait:*

(i) $\exists y' \in F', \ d'J(a) = d'f(a).y'$,

(ii') *la restriction de* $H_{dd'J(a) - dd'f(a).y'}$ *à* $\mathrm{Ker} H_{df(a)}$ *est un opérateur positif et inversible.*

La démonstration des conditions nécessaires repose sur le théorème suivant :

3.6.6. THEOREME *(Lyusternik* [1]*). Soit E et F des espaces de Banach, U un ouvert de E et f une application de U dans F, de classe C^1. Si en un point a de U l'application $df(a)$ est surjective, pour tout élément X de $Ker df(a)$ il existe une suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de U et une suite $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres strictement positifs tendant vers 0 telles que :*

(i) $\forall n \in \mathbb{N},\ f(x_n) = f(a),$

(ii) $X = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - a}{r_n}$.

Supposons que la restriction de J à U présente un minimum local en a. Pour tout élément X de $Ker\, df(a)$ on choisit une suite d'éléments $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de U et une suite de nombres strictement positifs $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $X = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - a}{r_n}$. On a

$$\Phi\left(\int_0^1 d'J(a+\lambda(x_n-a))\,d\lambda, \frac{x_n-a}{r_n}\right) = \frac{1}{r_n}(J(x_n)-J(a)) \geq 0,$$

d'où, en passant à la limite, $\Phi(d'J(a), X) \geq 0$.

Il en résulte que $d'J(a)$ appartient au polaire de $Ker\, df(a)$, c'est-à-dire à $Im\, d'f(a)$ puisque ce sous-espace est $\sigma(E', E)$ fermé (Corollaire 1.8.2). On a donc

(i) $\exists\, y' \in F',\ d'J(a) = d'f(a).y'.$

On a aussi

$$\frac{1}{r_n^2}(J(x_n) - J(a)) = \frac{1}{r_n^2}\Phi(d'J(a), x_n - a) +$$
$$+\Phi\left(\left[\int_0^1 (1-\lambda)\, dd'J(a+\lambda(x_n-a))d\lambda\right].\frac{x_n-a}{r_n}, \frac{x_n-a}{r_n}\right) \geq 0.$$

Dans cette expression, la quantité

$$\Phi\left(\left[\int_0^1 (1-\lambda)\, dd'J(a+\lambda(x_n-a))\,d\lambda\right].\frac{x_n-a}{r_n}, \frac{x_n-a}{r_n}\right)$$

[1] L. A. Lyusternik et V.I. Sobolev, *Elements of functional analysis*, Fred. Ungar. Pub. C°, New-York, 1961.

tend vers

$$\frac{1}{2}\Phi(dd'J(a).X,\ X)$$

lorsque n tend vers l'infini; il reste à étudier le comportement de

$$\frac{1}{r_n^2}\Phi(d'J(a),x_n-a)=\frac{1}{r_n^2}\Phi(d'f(a).y',x_n-a)=\frac{1}{r_n^2}\Psi(y',\ df(a).(x_n-a)).$$

Comme x_n appartient à U_b , on a

$$\begin{aligned} & f(x_n)-f(a)= \\ & =df(a).(x_n-a)+(\textstyle\int_0^1(1-\lambda)d^2f(a+\lambda(x_n-a))d\lambda).(x_n-a,x_n-a) \\ & =0, \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{1}{r_n^2}\Psi(y',\ df(a).(x_n-a))=$$

$$=-\Psi(y',[\textstyle\int_0^1(1-\lambda)\ d^2f(a+\lambda(x_n-a))\ d\lambda].(\frac{x_n-a}{r_n},\frac{x_n-a}{r_n}))$$

$$=-\Phi([\textstyle\int_0^1(1-\lambda)\ dd'f(a+\lambda(x_n-a))\ d\lambda].(y',\frac{x_n-a}{r_n}),\frac{x_n-a}{r_n})$$

qui tend vers

$$-\frac{1}{2}\Phi(dd'f(a).(y',X),\ X)$$

lorsque n tend vers l'infini. On a donc

$$\forall X\in Ker\,df(a),\quad \Phi([dd'J(a)-dd'f(a).y'].X,\ X)\geq 0,$$

c'est-à-dire :

(ii) $u_a'\circ[dd'J(a)-dd'f(a).y']\circ u_a$ est un opérateur positif sur $Ker\,\delta f(a)$.

La démonstration des conditions suffisantes repose sur deux remarques évidentes :

1° on peut remplacer J par une fonction $\hat{J}$ coïncidant avec J sur U_b ;

2° si J (ou $\hat{J}$) présente un minimum local en a sur U , alors J présente un minimum local en a sur U_b .

Soit Λ un opérateur coercif sur F . On pose :

$$\forall x\in U,\quad \hat{J}(x)=J(x)+\Psi(-y'+\rho\Lambda.(f(x)-b),\ f(x)-b),$$

où ρ est un scalaire à determiner. Il est clair que $\hat{J} \mid U_b = J \mid U_b$. L'application $\hat{J}$ est de classe C^2 relativement à E ; on a

$$d'\hat{J}(x) = d'J(x) - d'f(x).y' + 2\rho\, d'f(x) \circ \Lambda.(f(x) - b),$$

$$dd'\hat{J}(x) = dd'J(x) - dd'f(x).y' +$$
$$+ 2\rho(d'f(x) \circ \Lambda \circ df(x) + dd'f(x) \circ \Lambda.(f(x) - b)),$$

d'où :

$$d'\hat{J}(a) = d'J(a) - d'f(a).y' = 0 \quad \text{(condition (i))},$$

$$dd'\hat{J}(a) = dd'J(a) - dd'f(a).y' + 2\rho\, d'f(a) \circ \Lambda \circ df(a).$$

La nullité de $d'\hat{J}(a)$ conduit à chercher si $\hat{J}$ présente un minimum local en a sur U : on va montrer qu'il existe ρ tel que

$$H_{dd'\hat{J}(a)} = H_{dd'J(a) - dd'f(a).y'} + \rho H_{d'f(a) \circ \Lambda \circ df(a)}$$

est coercif sur H_E et on appliquera le Théorème 3.4.1.

Soit K le supplémentaire orthogonal de $Ker\, H_{df(a)}$ dans H_E. Relativement à la décomposition de H_E en somme directe de $Ker\, H_{df(a)}$ et de K, l'opérateur $H_{dd'J(a) - dd'f(a).y'}$ s'écrit matriciellement sous la forme

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix}$$

où A est par hypothèse (condition (ii')) coercif sur $Ker H_{df(a)}$; l'opérateur

$$H_{d'f(a) \circ \Lambda \circ df(a)} = H^*_{df(a)} \circ H_{\Lambda} \circ H_{df(a)}$$

s'écrit

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

où D est un opérateur coercif sur K, puisque H_{Λ} définit le produit scalaire de H_F et que, par hypothèse, $H_{df(a)}$ est un isomorphisme de K sur un sous-espace fermé de H_F. On a donc

$$\exists\, \alpha > 0, \ \forall \xi_1 \in Ker\, H_{df(a)}, \ \langle A\xi_1, \xi_1 \rangle \geq \alpha \| \xi_1 \|^2,$$

$$\exists\, \beta > 0, \ \forall \xi_1 \in Ker\, H_{df(a)}, \ \forall \xi_2 \in K, \ \langle B\xi_2, \xi_1 \rangle \leq \beta \| \xi_1 \| \, \| \xi_2 \|,$$

$$\exists \gamma > 0, \quad \forall \xi_2 \in K, \quad < C\xi_2, \xi_2 > \leq \gamma \| \xi_2 \|^2,$$
$$\exists \delta > 0, \quad \forall \xi_2 \in K, \quad < D\xi_2, \xi_2 > \geq \delta \| \xi_2 \|^2,$$

d'où, pour tout $\xi = \xi_1 + \xi_2$ de H_{E} :

$$< H_{dd'\hat{J}(a)}.(\xi_1 + \xi_2), (\xi_1 + \xi_2) > =$$
$$= < A.\xi_1, \xi_1 > + 2 < B\xi_2, \xi_1 > + < C\xi_2, \xi_2 > + \rho < D\xi_2, \xi_2 >$$
$$\geq \alpha \| \xi_1 \|^2 - 2\beta \| \xi_1 \| \, \| \xi_2 \| + (\rho\delta - \gamma) \| \xi_2 \|^2.$$

Soit ϵ vérifiant $0 < \epsilon < \alpha$; le second membre de l'inégalité est supérieur à

$$\epsilon(\| \xi_1 \|^2 + \| \xi_2 \|^2) = \epsilon \| \xi \|^2$$

si

$$\beta^2 - (\alpha - \epsilon)(\rho\delta - \gamma - \epsilon) \leq 0, \quad \text{soit} \quad \rho \geq \frac{1}{\delta}(\epsilon + \gamma + \frac{\beta^2}{\alpha - \epsilon}). \quad \square$$

3.6.7. REMARQUES. 1° Si f est une condition normale en a, toutes les conditions de normalité du Théorème 3.6.5 sont vérifiées, F qui s'identifie alors à un facteur direct de E est hilbertien si E l'est et

$$Ker\, H_{df(a)} = H_{Ker\, \delta f(a)}.$$

Le Théorème 3.6.5 redonne alors le Théorème 3.5.2, que l'on peut donc considérer comme un corollaire du Théorème 3.6.5.

2° A priori, $H_{Ker\, \delta f(a), \mathrm{E}}$ est un sous-espace fermé strict de l'espace $Ker\, H_{df(a)}$. On mesure la distance qu'il y a entre les conditions nécessaires et les conditions suffisantes : la condition (i) implique bien que $d'J(a)$ est nul sur $Ker\, H_{df(a)}$, mais la condition (ii) implique seulement que $H_{dd'J(a) - dd'f(a).y'}$ est positif sur $H_{Ker\, \delta f(a), \mathrm{E}}$.

3° Si f vérifie en a les conditions suivantes :

(i) $Im\, df(a)$ est un sous-espace fermé de F ;

(ii) le sous-objet $Im\, \delta f(a)$ de F défini par $Im\, df(a)$ est un facteur direct de F ;

(iii) le morphisme de E dans $Im\, \delta f(a)$ qui factorise $\delta f(a)$ admet une section;

alors $Ker\, \delta f(a)$ est un facteur direct de E, donc un couple hilbertien, $H_{Ker\delta f(a)} = Ker\, H_{df(a)}$ et $Im\, H_{df(a)}$ est fermé dans H_{F}. Formellement, les conditions suffisantes du Théorème 3.6.5 sont alors les mêmes que celles du Théorème 3.5.2.

Les conditions (i) et (ii) sont en particulier toujours vérifiées si *Coker* $df(a)$ est de dimension finie. C'est le cas, par exemple, du problème de Bolza anormal.

Si F est de dimension finie, les conditions (i), (ii) et (iii) sont toujours vérifiées. Le Théorème 3.6.5 donne donc des conditions suffisantes sans condition de normalité sur f, situation bien connue en calcul des variations.

3.7. Conditions d'ordre supérieur pour un minimum local.

Soit h une fonction numérique d'une variable réelle, définie sur un voisinage de 0, de classe C^4, présentant un minimum local en 0. On a les conditions nécessaires

$$h'(0)=0, \quad h''(0)\geq 0.$$

Si $h''(0)=0$, il est clair qu'on a les conditions nécessaires supplémentaires suivantes:

$$h'''(0)=0, \quad h''''(0)\geq 0.$$

Plus généralement, on a:

3.7.1. THEOREME. *Soit E un espace de Banach, U un ouvert de E et J une fonction numérique de classe C^4 définie sur U. Pour que J présente un minimum local en un point a de U, il est nécessaire que l'on ait:*

(i) $dJ(a)=0$;

(ii) $\forall v\in E,\ d^2J(a).(v,v)\geq 0$;

(iii) $\forall w\in \operatorname{Ker} d^2J(a),\ d^4J(a).(w,w,w,w)\geq 0$;

(iv) $\forall v\in E,\ \forall w\in \operatorname{Ker} d^2J(a)$,

$$|d^3J(a).(v,w,w)|\leq \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{d^2J(a).(v,v)}\sqrt{d^4J(a).(w,w,w,w)}\,.$$

Les deux premières conditions sont classiques.

Soit v un élément de E et w un élément de $\operatorname{Ker} d^2J(a)$; on considère l'application k d'un voisinage de 0 dans R, à valeurs dans U, définie par:

$$k(t) = v\frac{t^2}{2} + wt + a$$

et on exprime que la fonction numérique $h = J \circ k$ présente un minimum local en 0. On a

$$h'(t) = dJ(k(t)).k'(t),$$

$$h''(t) = d^2J(k(t)).(k'(t), k'(t)) + dJ(k(t)).k''(t),$$

d'où

$$h'(0) = dJ(a).w = 0,$$

$$h''(0) = d^2J(a).(w,w) + dJ(a).v = 0.$$

Il faut donc exprimer les conditions nécessaires d'ordre 3 et 4 pour h. On a

$$h'''(t) = d^3J(k(t)).(k'(t), k'(t), k'(t)) + \\ + 3d^2J(k(t)).(k''(t), k'(t)) + dJ(k(t)).k'''(t),$$

$$h''''(t) = d^4J(k(t)).(k'(t), k'(t), k'(t), k'(t)) + \\ + 6d^3J(k(t)).(k''(t), k'(t), k'(t)) + 4d^2J(k(t)).(k'''(t), k'(t)) + \\ + 3d^2J(k(t)).(k''(t), k''(t)) + dJ(k(t)).k''''(t),$$

d'où, en exprimant que $h'''(0)$ est nul et que $h''''(0)$ est positif,

$\forall v \in E, \quad \forall w \in \operatorname{Ker} d^2J(a),$

(1) $d^3J(a).(w,w,w) = 0,$

(2) $d^4J(a).(w,w,w,w) + 6d^3J(a).(v,w,w) + 3d^2J(a).(v,v) \geq 0.$

En faisant $v = 0$ dans (2), il vient

(iii) $\forall w \in \operatorname{Ker} d^2J(a), \quad d^4J(a).(w,w,w,w) \geq 0.$

Pour v et w fixés, en écrivant (2) pour λv et w, il vient : $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$d^4J(a).(w,w,w,w) + 6\lambda d^3J(a).(v,w,w) + 3\lambda^2 d^2J(a).(v,v) \geq 0,$$

ce qui, compte tenu de (iii), sera réalisé ssi le discriminant du trinôme du second degré en λ est négatif ou nul, soit

(iv) $\forall v \in E, \quad \forall w \in \operatorname{Ker} d^2J(a),$

$$|d^3J(a).(v,w,w)| \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{d^2J(a).(v,v)}\sqrt{d^4J(a).(w,w,w,w)}.$$

Réciproquement, (iii) et (iv) entraînent que le trinôme en λ est positif ou nul, d'où la condition (2) en faisant $\lambda = 1$. Enfin, si on fait $v = w$ dans (iv), il vient

$$d^3J(a).(w,w,w) = 0\ ,$$

c'ets-à-dire la condition (1). □

On obtient les conditions suffisantes pour un minimum en renforçant convenablement les conditions (ii), (iii) et (iv).

Soit E un couple d'espaces de Banach en dualité et A un opérateur symétrique sur E. Le noyau de A étant $\sigma(E,E')$ fermé (c'est le polaire de $Im\ A$), on a $Ker\ A = (Ker\ A)^{\circ\circ}$, donc $E_A = E/Ker A$ est en dualité séparante avec $E'_A = (Ker A)^{\circ}$; nous noterons E_A le couple d'espaces de Banach en dualité ainsi défini. L'opérateur A induit un opérateur $\mathfrak{A}$ sur E_A : A passe au quotient en une application linéaire de E_A dans E'_A et on a :

$$\forall x \in Ker A,\quad \forall y \in E,\quad \Phi(Ay,x) = \Phi(Ax,y) = 0,$$

donc A prend ses valeurs dans $(Ker A)^{\circ}$.

3.7.2. DEFINITION. Nous dirons que A est un *opérateur relativement coercif sur* E si $\mathfrak{A}$ est un opérateur coercif sur E_A.

3.7.3. EXEMPLE. Un opérateur positif de Fredholm sur E est un opérateur relativement coercif: l'opérateur $\mathfrak{A}$ sur E_A induit par A est positif et inversible, donc coercif. Il n'y a pas de réciproque : un opérateur relativement coercif de noyau fini n'est pas nécessairement de Fredholm (de même qu'un opérateur coercif n'est pas nécessairement inversible).

Les conditions suffisantes suivantes ont été démontrées par F. Van Iseghem dans le cas où $dd'J(a)$ est un opérateur de Fredholm :

3.7.4. THEOREME. *Soit* E *un couple d'espaces de Banach en dualité,* U *un ouvert de* E *et* J *une fonction numérique définie sur* U*, de classe* C^4 *relativement à* E. *Pour que* J *présente un minimum local en un point* a *de* U*, il est suffisant que l'on ait:*

(i) $d'J(a) = 0$;

(ii') $dd'J(a)$ est un opérateur relativement coercif sur E , *et son noyau est de dimension finie;*

(iii') $\forall w \in Ker\, dd'J(a) - \{0\}, \quad \Phi(d^3 d'J(a).(w,w,w), w) > 0$;

(iv') $\exists\, \rho < \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \forall v \in E, \quad \forall w \in Ker\, dd'J(a),$

$$|\Phi(d^2 d'J(a).(w,w), v)| \leq$$
$$\leq \rho \sqrt{\Phi(dd'J(a).v, v)}\sqrt{\Phi(d^3 d'J(a).(w,w,w), w)}.$$

Soit E_1 le sous-objet de E défini par $Ker\, dd'J(a)$ et posons $E_2 = E_{dd'J(a)}$. Par hypothèse E_1 est de dimension finie, donc un facteur direct de E . Par ailleurs E_1 est le noyau du morphisme canonique de E sur E_2 : on vérifie par les techniques usuelles que ce morphisme admet une section et que E s'identifie au produit $E_1 \times E_2$.

On définit sur un voisinage convexe V de $a = (a_1, a_2)$ dans $E_1 \times E_2$ des applications continues A de V dans $L_s(E_2)$, B de V dans l'espace $L_s^2(E_1; E_2')$ et C de V dans $L_s^4(E_1; \mathrm{R})$ par:

$$A(x_1, x_2) = \int_0^1 (1-\lambda)\, d_2 d_2' J(a_1 + \lambda x_1,\, a_2 + \lambda x_2)\, d\lambda +$$
$$+ \int_0^1 (1-\lambda)^2 d_1 d_2 d_2' J(a_1 + \lambda x_1,\, a_2 + \lambda x_2).x_1\, d\lambda -$$
$$- \int_0^1 \frac{(1-\lambda)^3}{6}\, d_1^2 d_2 d_2' J(a_1 + \lambda x_1,\, a_2 + \lambda x_2).(x_1, x_1)\, d\lambda,$$

$$B(x_1, x_2) = 2 \int_0^1 (1-\lambda)^2 d_1^2 d_2' J(a_1 + \lambda x_1,\, a_2 + \lambda x_2)\, d\lambda -$$
$$- \frac{1}{6} d_1^2 d_2' J(a_1, a_2),$$

$$C(x_1, x_2) = \int_0^1 \frac{(1-\lambda)^3}{6}\, d_1^4 J(a_1 + \lambda x_1,\, a_2 + \lambda x_2)\, d\lambda,$$

et on vérifie, en intégrant par parties et en tenant compte de ce que, par hypothèse, on a

$$d_1^2 J(a_1, a_2) = 0, \quad d_1 d_2' J(a_1, a_2) = 0, \quad d_1^3 J(a_1, a_2) = 0,$$

l'identité

$$J(a_1 + x_1,\, a_2 + x_2) = J(a_1, a_2) + \Phi_2(A(x_1, x_2).x_2, x_2) +$$
$$+ \Phi_2(B(x_1, x_2).(x_1, x_1), x_2) + C(x_1, x_2).(x_1, x_1, x_1, x_1).$$

Par hypothèse, $d_2 d_2' J(a_1, a_2)$ est un opérateur coercif sur E_2 ; nous noterons H_2 le complété de E_2 pour la norme

$$|x_2| = \sqrt{\Phi_2(d_2 d_2' J(a_1, a_2).(x_2, x_2))}.$$

Par hypothèse, $d_1^4 J(a_1, a_2)$ est strictement positif ; comme E_1 est de dimension finie, on définit une norme sur E_1 équivalente à la norme induite par E en posant

$$|x_1| = \sqrt[4]{d_1^4 J(a_1, a_2).(x_1, x_1, x_1, x_1)}.$$

En composant A avec l'injection canonique de $L_s(E_2)$ dans $L_s(H_2)$ et en tenant compte de

$$A(a_1, a_2) = \frac{1}{2} d_2 d_2' J(a_1, a_2),$$

il vient

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists V_1 \in \mathcal{V}(a), \quad \forall (x_1, x_2) \in V_1, \quad \forall X_2 \in E_2,$$
$$\Phi_2(A(x_1, x_2).X_2, X_2) \geq \frac{1-\epsilon}{2} |X_2|^2$$

où $\mathcal{V}(a)$ désigne l'ensemble des voisinages de $a = (a_1, a_2)$. De même, en composant B avec l'injection continue de $L_s^2(E_1, E_2')$ dans $L_s^2(E_1, H_2^*)$ induite par l'injection continue de E_2' dans H_2^*, en tenant compte de

$$B(a_1, a_2) = \frac{1}{2} d_1^2 d_2' J(a_1, a_2)$$

et de la condition (iv'), il vient

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists V_2 \in \mathcal{V}(a), \quad \forall (x_1, x_2) \in V_2, \quad \forall X_1 \in E_1, \quad \forall X_2 \in E_2,$$
$$|\Phi_2(B(x_1, x_2).(X_1, X_1), X_2)| \leq \frac{\rho(1+\epsilon)}{2} |X_1|^2 \, |X_2| .$$

Enfin, en tenant compte de

$$C(a_1, a_2) = \frac{1}{24} d_1^4 J(a_1, a_2),$$

il vient

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists V_3 \in \mathcal{V}(a), \quad \forall (x_1, x_2) \in V_3, \quad \forall X_1 \in E_1,$$
$$C(x_1, x_2).(X_1, X_1, X_1, X_1) \geq \frac{1-\epsilon}{24} |X_1|^4 .$$

On a donc

$$\forall \epsilon > 0, \quad \forall (x_1, x_2) \epsilon\, V_1 \cap V_2 \cap V_3,$$
$$J(a_1 + x_1,\, a_2 + x_2) - J(a_1, a_2) \geq$$
$$\geq \frac{1-\epsilon}{2} |x_2|^2 - \frac{\rho(1+\epsilon)}{2} |x_1|^2\, |x_2| + \frac{1-\epsilon}{24} |x_1|^4,$$

où le minorant est supérieur ou égal à zéro si $1-\epsilon > 0$ et si

$$\left(\frac{\rho(1+\epsilon)}{2}\right)^2 - 4\, \frac{1-\epsilon}{2}\, \frac{1-\epsilon}{24} \leq 0.$$

Ces conditions se réduisent à

$$\epsilon < 1 \quad \text{et} \quad \rho \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\, \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon} :$$

comme par hypothèse on a $\rho < \frac{1}{\sqrt{3}}$, ces deux conditions seront simultanément remplies si ϵ est assez petit ; on trouve ainsi un voisinage de $a = (a_1, a_2)$ sur lequel

$$J(a_1 + x_1,\, a_2 + x_2) - J(a_1, a_2)$$

est positif ou nul. □

3.7.5. REMARQUES. 1° Si $Ker\, dd'J(a) = \{0\}$, le Théorème 3.7.4 redonne la Proposition 3.1.3, donc le Théorème 3.4.1.

2° Comme E_1 est de dimension finie, on vérifie aisément que $E \approx \approx E_1 \times E_2$ est un couple hilbertien (E_2 en est un par hypothèse) et que

$$Ker\, H_{dd'J(a)} = Ker\, dd'J(a).$$

Ces propriétés caractérisent les opérateurs relativement coercifs de noyau de dimension finie.

3° On peut étendre le Théorème 3.7.4 au cas où $dd'J(a)$ est un opérateur relativement coercif dont le noyau, non nécessairement de dimension finie, définit un facteur direct de E. Cette généralisation nécessite de faire, pour les formes quadrilinéaires symétriques sur un couple d'espaces de Banach en dualité, l'analogue de la théorie des opérateurs coercifs pour les formes bilinéaires symétriques.

Département de Mathématiques
Université des Sciences et Techniques de Lille
LILLE