

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES

JEAN-YVES LE DIMET

***G*-variétés topologiques et *G*-microfibrés**

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 17, n° 4 (1976), p. 397-435

http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1976__17_4_397_0

© Andrée C. Ehresmann et les auteurs, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

G-VARIETES TOPOLOGIQUES ET G-MICROFIBRES

par Jean-Yves LE DIMET

INTRODUCTION

Si les actions *différentiables* des groupes de Lie compacts sur les variétés ont été largement étudiées et continuent de l'être, on connaît moins bien les actions *continues* et les problèmes que pose leur *lissage*.

A part quelques exceptions comme les actions transitives qui se ramènent au cas différentiable, et les actions continues de S^1 sur \mathbf{R}^3 qui sont isomorphes à des actions linéaires, on connaît des exemples d'actions continues non-différentiables donnés par R.H. Bing (voir [B]) - une action de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ sur la sphère S^3 dont l'ensemble des points fixes est la sphère doublement cornue d'Alexander - et par D. Montgomery et L. Zippin [M-Z 2], et une théorie de lissage donnée par H. Ibisch (voir [1]). Ce lissage est obtenu à l'aide d'un foncteur k_G topologique défini essentiellement sur la catégorie des G -variétés libres.

Dans cette thèse nous montrons que la plupart des théorèmes utilisés dans [I] restent valables dans une autre catégorie de G -variétés topologiques qui s'obtient naturellement par abstraction à partir des G -variétés différentiables: c'est la catégorie des G -variétés topologiques X qui, autour de chaque point x appartenant à X , possèdent un voisinage ouvert G_x -invariant et G_x -homéomorphe à un ouvert d'un G_x -module réel ayant même dimension que X .

Pour ces objets, appelés simplement G -variétés topologiques dans ce texte, nous prouvons dans le paragraphe 2 qu'ils sont des G -ANR (= G -rétracts absolus de voisinages) - ce qui est connu pour les G -variétés différentiables - le paragraphe 1 étant consacré à la démonstration de quelques propriétés des G -espaces paracompacts, utiles par la suite.

Comme le but est de construire le foncteur k_G , nous donnons au pa-

ragraphe 3 la définition des microfibrés associés aux G -variétés topologiques définies plus haut, de telle façon que leurs microfibrés tangents ainsi que les G -fibrés vectoriels en constituent des exemples.

Dans le paragraphe 4 nous prouvons le théorème d'homotopie pour les G -microfibrés topologiques.

Comme H. Ibisch (voir [12]) a construit l'inverse stable d'un tel G -microfibré topologique, on a réuni tous les éléments assurant l'existence du foncteur k_G pour les G -variétés de notre catégorie.

Enfin, dans le paragraphe 5, nous prouvons l'analogie équivariant du théorème suivant dû à J.M. Kister et B. Mazur : Tout microfibré contient un unique fibré topologique.

Tous mes remerciements vont à M. Ibisch qui a dirigé ce travail, après m'avoir initié au sujet des G -microfibrés.

N.B.. Dans tout ce qui suit, G désigne un groupe de Lie compact. En ce qui concerne les G -espaces, la référence constante est le livre de Palais : «*The classification of G -spaces*», noté [P] dans le texte. Les notations utilisées sont donc celles de Palais. Ainsi $H \subset G$ signifie que H est un sous-groupe fermé de G , distinct de G ; les mots «invariant», «équivariant» sans autre précision veulent dire « G -invariant», « G -équivariant».

TABLE DES MATIERES

Introduction

1. G -espaces paracompacts.
2. G -variétés topologiques et G -ANR.
3. La catégorie des G -microfibrés.
4. Le théorème d'homotopie pour les G -microfibrés.
5. Le théorème de Kister - Mazur équivariant.

Bibliographie.

1. G-espaces paracompacts et partitions invariantes de l'unité

Il nous sera utile de savoir dans quels cas on peut disposer de partitions de l'unité constantes sur les orbites d'un G -espace.

1. DEFINITIONS. 1.1. Un recouvrement $\{A_i\}$ d'un G -espace est dit *invariant* si les A_i sont G -invariants, i. e. $GA_i = A_i$.

1.2. Une famille $\{A_i\}$ de parties d'un G -espace X est dite *G -localement finie* si tout point de X possède un voisinage invariant qui ne rencontre qu'un nombre fini de $A_i \in \{A_i\}$.

2. LEMME. Soit X un G -espace. L'espace des orbites X/G est paracompact si et seulement si, pour tout recouvrement ouvert invariant de X , il existe un recouvrement ouvert invariant de X plus fin et G -localement fini.

PREUVE. a) On suppose que X/G est paracompact. Soit $\{A_i\}$ un recouvrement ouvert invariant de X ; alors $\{\pi(A_i)\}$ est un recouvrement ouvert de X/G , car la projection canonique $\pi: X \rightarrow X/G$ est ouverte ([P], 1.1.3). Il existe alors un recouvrement ouvert $\{\tilde{V}_j\}$ de X/G plus fin que $\{\pi(A_i)\}$ et localement fini. Il est clair que les $V_j = \pi^{-1}(\tilde{V}_j)$ constituent un recouvrement ouvert invariant de X , G -localement fini et plus fin que $\{A_i\}$.

b) La réciproque est facile grâce aux bonnes propriétés de

$$\pi: X \rightarrow X/G.$$

3. LEMME. Soit $\{U_i\}$ un recouvrement ouvert d'un G -espace X . Alors $\{U_i\}$ est localement fini si et seulement si $\{U_i\}$ est G -localement fini.

PREUVE. Dans un sens, c'est évident. Réciproquement soit $\{U_i\}$ un recouvrement localement fini de X , soit $x \in X$ et Gx son orbite. Pour tout $gx \in Gx$ il existe un voisinage $W(gx)$ qui ne rencontre qu'un nombre fini de U_i . Mais Gx étant compact, il existe un nombre fini d'éléments de G , soient g_1, g_2, \dots, g_k , tels que Gx soit contenu dans $\bigcup_{j=1}^k W(g_j x)$ qui constitue un voisinage de Gx . Alors ([P], 1.1.14) il existe un voisinage *invariant* de X , soit $V(x)$, tel que

$$Gx \subset V(x) \subset \bigcup_{j=1}^k W(g_j x).$$

Mais comme chacun des $W(g_j x)$ ne rencontre qu'un nombre fini de U_i , il

est clair que le voisinage invariant $V(x)$ de x ne rencontre qu'un nombre fini de U_i .

4. PROPOSITION. *Si le G -espace X est paracompact, alors l'espace des orbites X/G est paracompact.*

PREUVE. Soit $\{U_i\}$ un recouvrement ouvert invariant de X . En vertu des Lemmes 2 et 3, il suffit d'exhiber un recouvrement invariant de X , localement fini et plus fin que $\{U_i\}$.

Il existe un recouvrement $\{V_j\}$ localement fini plus fin que $\{U_i\}$. Alors $\{GV_j\}$ est un recouvrement invariant de X , plus fin que $\{U_i\}$, car

$$V_j \subset U_i \text{ implique } GV_j \subset U_i.$$

Reste à prouver que $\{GV_j\}$ est localement fini. Soit $U(x)$ un voisinage de x qui ne rencontre qu'un nombre fini de V_j ; d'après le Lemme 3 on peut supposer que $U(x)$ est G -invariant; alors $U(x)$ ne rencontre qu'un nombre fini de GV_j , car $U(x) \cap V_j = \emptyset$ implique $U(x) \cap GV_j = \emptyset$.

5. PROPOSITION. *Soit $\{U_i\}$ un recouvrement ouvert invariant localement fini du G -espace normal X . Alors il existe une partition invariante (et une enveloppe invariante) de l'unité subordonnée à $\{U_i\}$.*

PREUVE. Remarquons d'abord que X/G est normal si X l'est: cela résulte du fait que $\pi: X \rightarrow X/G$ est ouverte et fermée et que, d'autre part, tout voisinage d'une partie invariante d'un G -espace contient un voisinage invariant ([P], 1.1.14).

$\{\pi(U_i)\}$ constitue donc un recouvrement ouvert localement fini de l'espace normal X/G ; par conséquent, il existe une partition $\{\tilde{\alpha}_i\}$ et une enveloppe $\{\tilde{\gamma}_i\}$ de l'unité subordonnée à $\pi(U_i)$. C'est-à-dire on a

$$\begin{aligned} \text{Supp } \tilde{\alpha}_i &\subset \pi(U_i), & \text{Supp } \tilde{\gamma}_i &\subset \pi(U_i), \\ \sum_i \tilde{\alpha}_i(Gx) &= 1, & \sup_i \tilde{\gamma}_i(Gx) &= 1. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\pi} & X/G \\ & \searrow \alpha_i, \gamma_i & \downarrow \tilde{\alpha}_i, \tilde{\gamma}_i \\ & & [0, 1] \end{array}$$

On pose alors

$$\alpha_i = \tilde{\alpha}_i \circ \pi \quad \text{et} \quad \gamma_i = \tilde{\gamma}_i \circ \pi .$$

Il est clair que les α_i, γ_i sont les applications G -invariantes (i.e. constantes sur les orbites) cherchées.

Un raisonnement classique ([BO], n° 4.4) permet d'obtenir le

6. COROLLAIRE. *Pour tout recouvrement ouvert invariant d'un G -espace paracompact X , il existe une partition (et une enveloppe) invariante de l'unité subordonnée à ce recouvrement.*

Dans la suite, nous aurons besoin du résultat suivant :

7. LEMME. *Soit X un G -espace paracompact et $\{V_j\}$ un recouvrement ouvert localement fini de X . Alors il existe un recouvrement fermé invariant de X , soit $\{F_i\}$, G -localement fini, tel que chaque F_i ne rencontre qu'un nombre fini de V_j .*

PREUVE. Soit $U(x)$ un voisinage invariant de $x \in X$ tel que $U(x)$ ne rencontre qu'un nombre fini de V_j . En utilisant la normalité de X/G , on peut trouver un voisinage fermé invariant de x , soit $F(x)$, et un voisinage ouvert invariant de x , soit $W(x)$, tels que

$$x \in Gx \subset W(x) \subset F(x) \subset U(x).$$

Les $\{W(x)\}$ forment un recouvrement ouvert invariant de X ; donc il existe un recouvrement ouvert invariant et localement fini plus fin que $\{W(x)\}_{x \in X}$, soit $\{W_i\}$. On pose $F_i = \overline{W}_i$. Alors :

- chaque F_i ne rencontre qu'un nombre fini de V_j , car pour tout F_i , il existe $x \in X$ tel que $F_i \subset U(x)$.
- $\{F_i\}$ est localement fini, car si un ouvert de X ne rencontre pas W_i , il ne rencontre pas son adhérence F_i .
- Enfin les F_i sont G -invariants.

2. G -variétés topologiques et G -ANR.

ANR étant l'abréviation de «rétract absolu de voisinage», l'expression « G -ANR» a alors le sens naturel suivant :

1. DEFINITION. On dit qu'un G -espace X (métrisable, à base dénombrable) est un G -ANR si toute application équivariante $f: A \rightarrow X$, où A est un fermé G -invariant d'un G -espace normal Y , se prolonge (de manière équivariante) sur un voisinage de A dans Y .

Il est bien connu que toute variété topologique est un ANR ; de même toute G -variété différentiable est un G -ANR (voir [P], 1.6.6) ; mais il n'est pas clair que toute G -variété, au sens large, ait cette propriété : il semble que l'action du groupe G puisse être parfois assez mauvaise pour qu'il n'en soit pas ainsi. C'est une des raisons pour lesquelles nous adopterons la définition suivante :

2. DEFINITION. X étant un G -espace, on note G_x le groupe d'isotropie de $x \in X$. Remarquons que, G_x étant un groupe de Lie compact, tout point x de X admet une base de voisinages G -invariants. Ceci étant, on dit qu'un G -espace X (à base dénombrable) est une G -variété topologique de dimension n si pour tout point $x \in X$, il existe un voisinage G -invariant de x , soit $U(x)$, et un plongement ouvert G_x -équivariant $h: U(x) \rightarrow \mathbf{R}^n(x)$, où $\mathbf{R}^n(x)$ est un G_x -espace euclidien au sens de Palais ([P], 1.1.19) ; on suppose de plus que $h(x) = 0 \in \mathbf{R}^n(x)$.

3. EXEMPLES DE G -VARIETES.

3.1. Une G -variété différentiable est une G -variété topologique (voir [K] et [M-Z] page 207, Theorem 1).

3.2. Toute variété topologique sur laquelle G agit librement est une G -variété topologique, car dans ce cas les groupes d'isotropie en chaque point sont réduits à l'identité.

Avant d'étudier quelques propriétés des G -ANR, nous allons prouver le

4. LEMME. Soit $A = \bigcup_{n \geq 1} A_n$ un fermé invariant d'un G -espace normal Y , où les A_n sont des fermés invariants, deux à deux disjoints. Alors il existe un voisinage de A dans Y de la forme $U = \bigcup_{n \geq 1} U_n$, où U_n est un voisinage invariant de A_n , les U_n étant deux à deux disjoints.

PREUVE. On considère \mathbf{R} muni de la structure de G -espace trivial et on définit $f: A \rightarrow \mathbf{R}$ par $f|_{A_n} = n$. Alors ([P] 1.4.3) f se prolonge en une application équivariante $\bar{f}: V \rightarrow \mathbf{R}$ où V est un voisinage invariant de A dans Y . On pose

$$V_n = \bar{f}^{-1}]n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4}[\quad \text{et} \quad U = \bigcup_{n \geq 1} U_n.$$

Il est clair que les U_n satisfont aux conditions données.

5. QUELQUES PROPRIETES DES G -ANR.

5.1. LEMME. *Tout ouvert invariant d'un G -ANR est un G -ANR.*

PREUVE. Soient V un ouvert invariant du G -ANR X , A un fermé invariant du G -espace normal Y et $f: A \rightarrow V$ une application équivariante. La composition de f avec l'inclusion $V \hookrightarrow X$ se prolonge à $\bar{f}: U \rightarrow X$ où U est un voisinage invariant de A dans Y . Alors $U_1 = \bar{f}^{-1}(V)$ est un voisinage invariant de A . On pose $f_1 = \bar{f}|_{U_1}$; $f_1: U_1 \rightarrow V$ est un prolongement équivariant de f .

5.2. LEMME. *Si un G -espace X est réunion de deux G -ANR ouverts, alors X est un G -ANR.*

PREUVE. Il n'y a rien à changer à la démonstration de Hanner ([H], page 392); il suffit de remarquer que :

- 1° l'image réciproque par une application équivariante d'une partie G -invariante d'un G -espace est G -invariante;
- 2° le complémentaire d'une partie G -invariante d'un G -espace est également G -invariante.

5.3. LEMME. *Si le G -espace X est réunion dénombrable de G -ANR ouverts deux à deux disjoints, alors X est un G -ANR.*

PREUVE. Soit $X = \bigcup_{n \geq 1} O_n$, où les O_n sont des G -ANR tels que

$$O_p \cap O_q = \emptyset \quad \text{pour} \quad p \neq q.$$

On pose $A_n = f^{-1}(O_n)$, où $f: A \rightarrow X$ est une application équivariante, A étant un fermé du G -espace normal Y ; O_n étant fermé dans X , il s'en-

suit que chaque A_n est un fermé invariant de A , donc de Y ; l'application

$$f_n = f |_{A_n}: A_n \rightarrow O_n$$

se prolonge en une application équivariante $\bar{f}_n: U_n \rightarrow O_n$; en vertu du Lemme 4 on peut supposer que

$$U_p \cap U_q = \emptyset \quad \text{pour } p \neq q;$$

$U = \bigcup_{n>1} U_n$ est un voisinage invariant de A sur lequel on définit un prolongement $\bar{f}: U \rightarrow X$ de f par $\bar{f}|_{U_n} = f_n$.

6. PROPOSITION. *Si le G -espace X (métrisable, à base dénombrable) possède un recouvrement formé de G -ANR ouverts, alors X est un G -ANR.*

PREUVE. (Comparer avec Hanner [H], page 394). On peut supposer que :

1° X est recouvert par une famille dénombrable de G -ANR ouverts, soit $X = \bigcup_{n>1} O_n$;

2° X est muni d'une métrique G -invariante :

$$d(x, y) = d(gx, gy) \quad \forall g \in G, \forall x \in X, \forall y \in X \quad ([P] \text{ 1.1.12}).$$

On pose alors $U_n = \bigcup_{i=1}^n O_i$; d'après le Lemme 5.2, chaque U_n est un G -ANR. On définit $V_n \subset U_n$ par

$$V_n = \{ x \in X \mid d(x, X - U_n) > \frac{1}{n} \};$$

V_n est ouvert et G -invariant, car la métrique est G -invariante; de plus d'après le Lemme 5.1, \bar{V}_n est un G -ANR. Notons encore que $\bar{V}_n \subset V_{n+1}$. On définit alors une famille d'ouverts invariants $\{W_n\}_{n \geq 1}$ par

$$W_1 = V_1, \quad W_2 = V_2, \quad W_n = V_n - \overline{V_{n-2}} \quad \text{pour } n \geq 3;$$

les W_n sont des G -ANR, toujours d'après le Lemme 5.1.

De l'inclusion $W_n \supset V_n - \overline{V_{n-1}}$ on déduit que

$$(1) \quad X = \bigcup_{n \geq 1} W_n = \left(\bigcup_{n \geq 1} W_{2n} \right) \cup \left(\bigcup_{n \geq 1} W_{2n-1} \right).$$

Les W_{2n} (resp. W_{2n-1}) sont disjoints; par conséquent d'après le Lemme 5.3, $\bigcup_{n \geq 1} W_{2n}$ (resp. $\bigcup_{n \geq 1} W_{2n-1}$) est un G -ANR. Il suit alors du Lemme 5.2

et de (1) que X est un G -ANR.

Le lemme suivant est une généralisation d'un résultat de Palais.

7. LEMME. Soit S une H -tranche ($H \subset G$) dans un G -espace X , et soit $f: S \rightarrow Y$ une application H -équivariante où Y est un G -espace. Alors f se prolonge de façon unique en une application équivariante $\bar{f}: GS \rightarrow Y$.

PREUVE. Si \bar{f} existe, on a

$$\bar{f}(gs) = gf(s), \quad s \in S, \quad g \in G,$$

ce qui prouve l'unicité de \bar{f} .

D'autre part, en raison des propriétés des tranches ([P], 1.7), il est possible de définir une application $\bar{f}: GS \rightarrow Y$ en posant $\bar{f}(gs) = gf(s)$. Reste à prouver la continuité de \bar{f} ainsi définie.

Soit $\chi: U \rightarrow G$ une section locale dans G/H (i. e. U est un voisinage de H dans G/H et $p\chi = idU$, où $p: G \rightarrow G/H$ est la projection canonique). Pour $g_0 \in G$, l'application $F: g_0 U \times S \rightarrow GS$ définie par

$$F(u, s) = g_0 \chi(g_0^{-1}u)s$$

est un plongement ouvert dont l'image $W = F(g_0 U \times S)$ est un voisinage de $g_0 S$ dans GS homéomorphe à $g_0 U \times S$ ([P], 1.7.9).

Soit alors $H: g_0 U \times S \rightarrow Y$ définie par

$$H(u, s) = g_0 \chi(g_0^{-1}u)f(s);$$

H est continue, et par conséquent $\bar{f}|_W = HF^{-1}$ est continue.

$$\begin{array}{ccc} g_0 U \times S & \xrightarrow[\sim]{F} & W \\ & \searrow H & \downarrow \bar{f}|_W \\ & & Y \end{array}$$

On recouvre ainsi GS par des ouverts $\{W\}$ tels que $\bar{f}|_W$ soit continue, et cela prouve la continuité de \bar{f} .

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le

8. THEOREME. Toute G -variété topologique est un G -ANR.

PREUVE. En vertu de la Proposition 6, il suffit d'exhiber un recouvrement de la G -variété X formé de G -ANR ouverts.

Cas 1. Soit $x \in X$ tel que $G_x \neq G$; soit S une tranche en x ; alors GS est un G -ANR :

GS , étant ouvert dans la variété X , est un ANR. Nous pouvons donc supposer que GS est un G_x -ANR, grâce au «Metatheorem» ([P], 1.8.1). Soit A un fermé invariant d'un G -espace normal Y et $f: A \rightarrow GS$ une application équivariante. Posons $S_1 = f^{-1}(S)$; S_1 est une G_x -tranche de A telle que $GS_1 = A$. Il existe une G_x -tranche de Y , soit S_2 , telle que $S_1 = A \cap S_2$ ([P], 1.7.15) ; S_1 est donc un fermé du G_x -espace normal \bar{S}_2 et

$$f_1 = f|_{S_1}: S_1 \rightarrow GS$$

est G_x -équivariante. GS étant un G_x -ANR, f_1 se prolonge à $\bar{f}_1: V \rightarrow GS$, où V est un voisinage G_x -invariant de S_1 dans \bar{S}_2 .

On peut encore supposer que V est ouvert dans S_2 .

$$\begin{array}{ccccc} S_1 & \hookrightarrow & V & \longrightarrow & S_2 \\ & & \searrow \bar{f}_1 & & \\ f|_{S_1} \downarrow & & & & \\ & & GS & & \end{array}$$

Mais d'après le Lemme 7, \bar{f}_1 se prolonge de façon unique en une application équivariante $\bar{f}: GV \rightarrow GS$, car, V étant ouvert G_x -invariant dans la G_x -tranche S_2 est encore une G_x -tranche. Or V étant un voisinage de S_1 , GV est un voisinage de $GS_1 = A$; de plus $\bar{f}|_A = f$. Ceci prouve que GS est un G -ANR.

Cas 2: Soit $x \in X$ tel que $G_x = G$. Il existe donc un voisinage G -invariant de x , soit U , et un plongement ouvert équivariant $h: U \rightarrow \mathbf{R}^n$, où \mathbf{R}^n est muni d'une certaine structure de G -espace euclidien ; $h(U)$ est donc un ouvert invariant de \mathbf{R}^n qui est un G -ANR ; donc $h(U)$, et par conséquent V , sont des G -ANR.

3. La catégorie des G -microfibrés : Définition ; exemples.

1. DEFINITION. Un G -microfibré est un diagramme

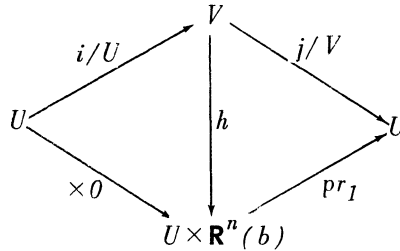
$$\chi: B \xrightarrow{i} E \xrightarrow{j} B,$$

où E et B sont des G -espaces, i et j des applications équivariantes telles que $ji = id_B$. On suppose de plus que χ satisfait à la condition suivante de « G -trivialité locale» :

Pour tout $b \in B$, il existe un voisinage ouvert U de b , G_b -invariant (où G_b désigne le groupe d'isotropie en $b \in B$), un voisinage ouvert V de $i(b) \in E$, G_b -invariant, tels que

$$i(U) \subset V, \quad j(V) \subset U,$$

et un G_b -isomorphisme $h: V \rightarrow U \times \mathbf{R}^n(b)$, où $\mathbf{R}^n(b)$ est un G_b -espace euclidien, de sorte que le diagramme ci-dessous soit commutatif :



N. B. : - Un G_b -isomorphisme est un homéomorphisme G_b -équivariant,
 - $U \times \mathbf{R}^n(b)$ est muni de la structure de G_b -espace produit, i. e.

$$g(b', t) = (gb', gt) \text{ pour } g \in G_b \text{ et } (b', t) \in U \times \mathbf{R}^n(b),$$

- l'entier n est la dimension du G -microfibré χ ,
- $\mathbf{R}^n(b)$ est la « fibre au-dessus de $b \in B$ ».

2. DEFINITION. Un G -microfibré *trivial* de base B est de la forme

$$B \xrightarrow{\times 0} B \times M \xrightarrow{pr_1} B,$$

où M est un G -espace euclidien.

3. EXEMPLES DE G-MICROFIBRES.

3.1. Tout microfibré au sens de Milnor (voir [M]), où G agit trivialement, est un G -microfibré.

3.2. Un G -microfibré au sens de Ibisch (voir [I]), où G agit librement sur B , est un G -microfibré au sens défini précédemment, car dans ce cas les groupes d'isotropie en chaque point sont réduits à l'identité.

3.3. Soit χ un microfibré. On fait agir le groupe symétrique S_k sur la somme $\chi \oplus \chi \oplus \dots \oplus \chi$ (k fois) en posant :

$$\sigma(e_1, e_2, \dots, e_k) = (e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(k)})$$

pour (e_1, \dots, e_k) appartenant à l'espace total de $\chi \oplus \dots \oplus \chi$,

$$\sigma \cdot b = b \text{ pour } b \in \text{base de } \chi \oplus \chi \dots \oplus \chi = \text{base de } \chi.$$

Alors, muni de cette S_k -structure, $\chi \oplus \chi \oplus \dots \oplus \chi$ est un S_k -microfibré.

3.4. Tout G -fibré vectoriel au sens d'Atiyah-Segal (voir [S]) est un G -microfibré :

Soit $\xi: E \xrightarrow{p} B$ un G -fibré vectoriel, b un point de B et $E_b = p^{-1}(b)$ la fibre au-dessus de B (qui est un G_b -espace euclidien). Considérons ξ en tant que G_b -fibré vectoriel ; les restrictions de ξ et du G_b -fibré trivial

$$B \times E_b \xrightarrow{pr_1} B$$

au G_b -espace fermé $\{b\}$ sont G_b -isomorphes : $\xi/\{b\} \approx B \times E_b/\{b\}$. Par conséquent (voir [S], proposition 1.2) il existe un voisinage G_b -invariant de b , soit U , tel que ξ/U soit G_b -isomorphe à

$$U \times E_b \xrightarrow{pr_1} U.$$

On a donc le diagramme commutatif, où s désigne la section zéro (équivariante) de ξ et h un G_b -isomorphisme :

$$\begin{array}{ccc} & p^{-1}(U) & \\ s/U \nearrow & \downarrow h & \searrow p/p^{-1}(U) \\ U & & U \\ \times 0 \searrow & & \nearrow pr_1 \\ & U \times E_b & \end{array}$$

Ce qui prouve que

$$B \xrightarrow{s} E \xrightarrow{p} B$$

est un G -microfibré.

3.5. *G*-microfibré tangent à une *G*-variété :

Soit *X* une *G*-variété topologique au sens du paragraphe précédent. Alors le diagramme

$$\tau(X) : X \xrightarrow{\Delta} X \times X \xrightarrow{pr_1} X ,$$

où Δ est l'application diagonale, est un *G*-microfibré, dit *G*-microfibré tangent à *X*.

Il suffit naturellement de vérifier la condition de naturalité locale. Soit $x \in X$ et (U, ϕ) une carte en x (i. e. U est un voisinage G_x -invariant de x et $\phi : U \rightarrow \mathbf{R}^n(x)$ est un plongement ouvert G_x -équivariant dans le G_x -espace euclidien $\mathbf{R}^n(x)$ tel que $\phi(x) = 0$). On peut supposer que ϕ est un G_x -isomorphisme, car $\phi(U)$ contient une boule ouverte centrée en 0 qui est G_x -isomorphe à $\mathbf{R}^n(x)$ (considérer l'application équivariante: $t \mapsto t / (1 - \|t\|)$).

On définit alors un G_x -isomorphisme $h : U \times U \rightarrow U \times \mathbf{R}^n(x)$ par

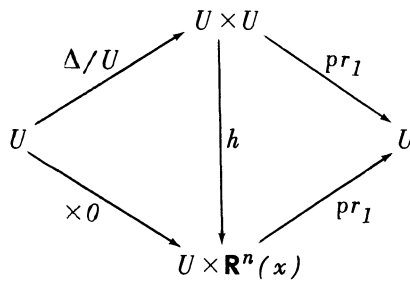
$$h(a, b) = (a, \phi(a) - \phi(b)).$$

Pour $g \in G_x$, on a

$$h(g(a), g(b)) = h(ga, gb) = (ga, \phi(ga) - \phi(gb)) = gh(a, b),$$

ce qui prouve que h est G_x -équivariante.

D'autre part le diagramme ci-dessous est clairement commutatif :



4. DEFINITION . MORPHISMES DE *G*-MICROFIBRES.

On désigne par $G\text{-Top}^2$ la catégorie dont les objets sont les couples (X, A) de *G*-espaces, où A est contenu dans X , et dont les morphismes sont les germes d'applications équivariantes définies sur des voisi-

nages G -invariants de A dans X .

On notera $\phi: (X, A) \Rightarrow (Y, B)$ les morphismes de $G\text{-Top}^2$.

Soit alors

$$\chi: B \xrightarrow{i} E \xrightarrow{j} B \quad \text{et} \quad \chi': B' \xrightarrow{i'} E' \xrightarrow{j'} B'$$

des G -microfibrés. Un morphisme de χ dans χ' est un couple (Φ, f) , où

$$\Phi: (E, i(B)) \Rightarrow (E', i'(B'))$$

est un morphisme de $G\text{-Top}^2$ et $f: B \rightarrow B'$ est une application équivariante de sorte que, pour $\phi \in \Phi$, le diagramme suivant soit commutatif:

$$\begin{array}{ccccc} B & \xrightarrow{i} & U & \xrightarrow{j} & B \\ f \downarrow & & \downarrow \phi & & \downarrow f \\ B' & \xrightarrow{i'} & E' & \xrightarrow{j'} & B' \end{array}$$

Nous allons maintenant vérifier que la catégorie des G -microfibrés possède des images réciproques et des sommes de Whitney.

5. PROPOSITION. Soit

$$\chi: B \xrightarrow{i} E \xrightarrow{j} B$$

un G -microfibré; soit $f: B_1 \rightarrow B$ une application équivariante, où B_1 est un G -espace. Le microfibré

$$f^*(\chi): B_1 \xrightarrow{i_1} E_1 \xrightarrow{j_1} B_1,$$

défini comme il est d'usage, est un G -microfibré.

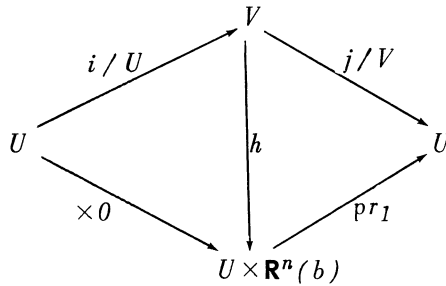
PREUVE. On a

$$\begin{aligned} B_1 \times E \supset E_1 &= \{ (b_1, e) \mid f(b_1) = j(e) \}, \\ j_1(b_1, e) &= b_1, \quad i_1(b_1) = (b_1, i f(b_1)). \end{aligned}$$

Il est clair que E_1 est un G -espace (pour la structure de G -espace produit sur $B_1 \times E$) et que j_1 et i_1 sont équivariantes.

Il reste à voir que $f^*(\chi)$ est G -localement trivial; soit $b_1 \in B_1$ et U un ouvert trivialisant, G_b -invariant, autour de $b = f(b_1)$. Le diagramme ci-dessous est commutatif, où h est un G_b -isomorphisme de la forme

$$h(e) = (j(e), k(e)).$$



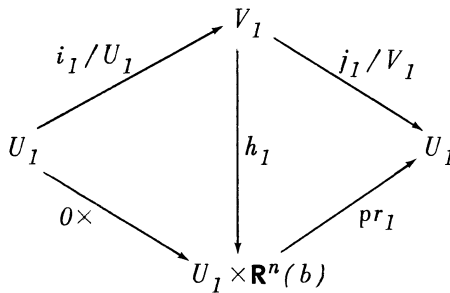
On pose alors

$$U_I = f^{-1}(U), \quad V_I = (U_I \times V) \cap E_I$$

et l'on définit

$$h_I: V_I \rightarrow U_I \times \mathbf{R}^n(b) \text{ par } h_I(b_I, e) = (b_I, k(e)).$$

Il est facile de voir que G_{b_I} est contenu dans G_b ; par conséquent U_I est un voisinage G_{b_I} -invariant de b_I , $\mathbf{R}^n(b)$ est un G_{b_I} -espace euclidien et h_I est un G_{b_I} -isomorphisme, de sorte que le diagramme ci-dessous commute



6. PROPOSITION.

$$\chi: B \xrightarrow{i} E \xrightarrow{j} B \text{ et } \chi_I: B \xrightarrow{i_I} E_I \xrightarrow{j_I} B$$

étant deux G -microfibrés de même base B , le microfibré $\chi \oplus \chi_I$ est un G -microfibré.

PREUVE. Soit $b \in B$ et U un voisinage G_b -invariant de b trivialisant pour χ et χ_I ; alors $\chi \oplus \chi_I / U$ est G_b -isomorphe à

$$U \xrightarrow{\times 0} U \times (\mathbf{R}^n(b) \times \mathbf{R}^q(b)) \xrightarrow{pr_1} U$$

où n est la dimension de χ et q celle de χ_1 .

En plagiant Milnor ([M], Lemma 6.4) ou Ibisch (cours de 3^e cycle 1971-72, Nantes), on obtient les résultats suivants :

7. PROPOSITION. Soit χ et χ' deux G -microfibrés de même base B et de même dimension. Soit $(\Phi, l_B): \chi \rightarrow \chi'$ un morphisme de G -microfibrés tel que Φ ait un représentant injectif; alors (Φ, l_B) est un isomorphisme.

8. COROLLAIRE. Soit χ et χ' deux G -microfibrés de même dimension et $(\Phi, f): \chi \rightarrow \chi'$ un morphisme tel que Φ possède un représentant injectif. Alors χ est isomorphe à $f^*(\chi')$.

9. NOTE. Les morphismes $(\Phi, f): \chi \rightarrow \chi'$ tels que Φ possède un représentant injectif seront désormais appelés *morphismes fibrés*.

Le lemme suivant nous sera utile dans la suite :

10. LEMME. Soit

$$\chi: B \xrightarrow{i} E \xrightarrow{j} B$$

un G -microfibré où G agit trivialement sur la base B que l'on suppose connexe. Alors il existe un G -espace euclidien M tel que χ soit localement isomorphe au G -microfibré trivial :

$$B \xrightarrow{\times 0} B \times M \xrightarrow{pr_1} B.$$

PREUVE. Pour tout $b \in B$, il existe un voisinage $V(b)$ de b et un G -espace euclidien $\mathbf{R}^n(b)$ tel que $\chi/V(b)$ soit isomorphe à

$$V(b) \longrightarrow V(b) \times \mathbf{R}^n(b) \longrightarrow V(b).$$

Ainsi à chaque $b \in B$ on associe un G -espace euclidien, donc une représentation $\phi(b) \in \text{Hom}(G, O(n))$. L'application

$$\phi: B \rightarrow \text{Hom}(G, O(n))$$

ainsi définie est localement constante, donc constante car B est connexe; et $\phi(B)$ définit M .

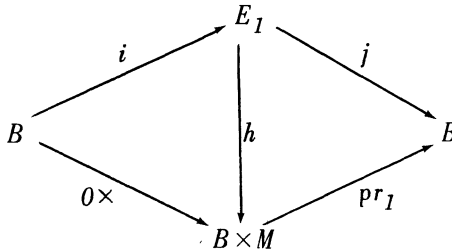
11. LEMME. Soit

$$\chi: B \xrightarrow{i} E \xrightarrow{j} B$$

un G -microfibré de base paracompacte isomorphe à un microfibré trivial

$$B \xrightarrow{\times 0} B \times M \xrightarrow{pr_1} B .$$

Alors il existe un G -isomorphisme $h: E_1 \rightarrow B \times M$, où E_1 est un voisinage de $i(B)$ dans E tel que le diagramme ci-dessous soit commutatif:



PREUVE. (Comparer avec [M], Lemme 2.3)

On peut d'abord supposer que E est un voisinage ouvert de $B \times 0$ dans $B \times M$. En utilisant une partition de l'unité, on construit une application $\lambda: B \rightarrow]0, 1]$ telle que

$$\|x\| < \lambda(b) \implies (b, x) \in E .$$

Pour $b \in B$, posons $k(b) = \inf_{g \in G} \lambda(gb)$; alors

- k applique B dans $]0, 1]$, car G est compact;
- k est clairement G -invariante;

k est continue, grâce à la compacité de G . (Il suffit de prouver que k est semi-continue inférieurement; donc soit $t \in]0, 1]$ et $b \in B$ tel que $t < k(b)$; on a

$$t < \inf_{g \in G} \lambda(gb) < \lambda(gb), \text{ pour tout } g .$$

Par conséquent il existe un voisinage W_g de g et un voisinage V_g de b tels que $t < \lambda(W_g V_g)$. Mais il existe

$$g_1, g_2, \dots, g_k \in G \text{ tels que } G = W_{g_1} \cup W_{g_2} \cup \dots \cup W_{g_k} ;$$

on pose alors $V = \bigcap_{i=1}^k V_{g_i}$ et l'on obtient $t < \lambda(GV)$; en utilisant une

nouvelle fois la compacité de G , il vient $t < k(V)$.)

On définit alors

$$E \supset E_I = \{ (b, x) \mid \|x\| < k(b) \}$$

et un G -isomorphisme $h: E_I \rightarrow B \times M$ par

$$h(b, x) = \left(b, \frac{x}{k(b) - \|x\|} \right).$$

La norme sur M étant G -invariante, il est clair que E_I est G -invariant et que h est équivariant.

Pour terminer ce paragraphe, donnons le résultat suivant :

12. PROPOSITION. *Tout G -microfibré ayant pour base un espace homogène de G est isomorphe (au sens des G -microfibrés) à un G -fibré vectoriel.*

PREUVE. a) Soit M un H -espace euclidien, où H est un sous-groupe fermé de G . On fait de $G \times M$ un H -espace en posant

$$h(g, m) = (gh^{-1}, hm) \text{ pour } h \in H \text{ et } (g, m) \in G \times M,$$

et l'on note $G \times_H M$ l'espace des orbites ainsi obtenu. On fait de $G \times_H M$ un G -espace en posant : $g[g', m] = [gg', m]$, où $[g', m]$ désigne la classe de $(g', m) \in G \times M$ dans $G \times_H M$. Soit $p: G \times_H M \rightarrow G/H$ l'application équivariante définie par

$$p[g, m] = gH \in G/H ;$$

alors $G \times_H M \xrightarrow{p} G/H$ est un G -fibré vectoriel (voir [S], n° 1.6).

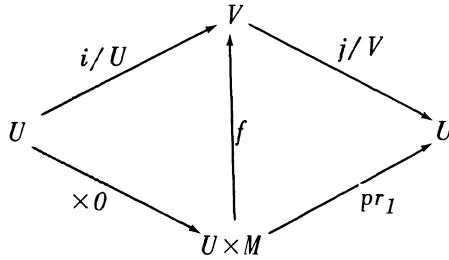
b) Un G -microfibré ayant pour base un espace homogène de G se présente sous la forme

$$G/H \xrightarrow{i} E \xrightarrow{j} G/H.$$

Soit U un ouvert H -invariant trivialisant autour de $H \in G/H$ et M la fibre au-dessus de $H \in G/H$; il existe un isomorphisme H -équivariant

$$f: U \times M \rightarrow V,$$

où V est un voisinage H -invariant de $i(U)$, tel que le diagramme suivant soit commutatif :



Soit alors $a : G \times M \rightarrow E$ définie par $a(g, m) = gf(H, m)$. Elle induit une application $\tilde{a} : G \times_H M \rightarrow E$ qui est clairement équivariante. D'autre part \tilde{a} est injective : si $\tilde{a} [g, m] = \tilde{a} [g', m']$, alors $gf(H, m) = g'f(H, m')$; en utilisant le fait que $jf = pr_1$, il vient

$$gH = g'H, \text{ où } g^{-1}g' = h \in H.$$

Par conséquent

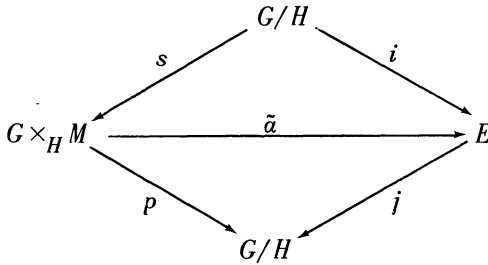
$$f(H, m) = hf(H, m') = f(H, hm'),$$

ce qui prouve que $[g, m] = [g', m']$.

Enfin le diagramme ci-dessous, où s désigne la section zéro de

$$G \times_H M \xrightarrow{p} G/H,$$

est commutatif.



4. Le théorème d'homotopie pour les G-microfibrés.

Le lemme suivant est la version équivariante du Lemme 6.6 de Milnor [M]. Il n'y a pratiquement rien à changer à la démonstration originale.

1. LEMME. Soit χ un G-microfibré de base B et soit $\{B_\alpha\}$ une collection localement finie de fermés invariants recouvrant B . Supposons que, pour

tout α , il existe un morphisme fibré $(\Phi_\alpha, f_\alpha): \chi/B_\alpha \rightarrow \eta$, où η est un G -microfibré, tel que (Φ_α, f_α) et (Φ_β, f_β) coïncident sur $\chi/B_\alpha \cap B_\beta$. Alors il existe un morphisme fibré $(\Phi, f): \chi \rightarrow \eta$ qui prolonge les (Φ_α, f_α) .

PREUVE. B' étant la base de η , on définit $f: B \rightarrow B'$ par $f/B_\alpha = f_\alpha$; la continuité de f résulte du fait qu'une réunion localement finie de fermés est fermée.

Choisissons alors pour chaque Φ_α un représentant injectif $\phi_\alpha: U_\alpha \rightarrow E'$, où U_α est un voisinage ouvert invariant de $i(B_\alpha)$ dans E . Pour tout couple (α, β) tel que $B_\alpha \cap B_\beta \neq \emptyset$, il existe un voisinage ouvert invariant $U_{\alpha\beta}$ de $i(B_\alpha \cap B_\beta)$ dans $U_\alpha \cap U_\beta$ tel que $\phi_\alpha/U_{\alpha\beta} = \phi_\beta/U_{\alpha\beta}$. On définit alors $U \subset E$ comme étant l'ensemble des $e \in E$ tels que

- (1) $j(e) \in B_\alpha$ entraîne $e \in U_\alpha$,
- (2) $j(e) \in B_\alpha \cap B_\beta$ entraîne $e \in U_{\alpha\beta}$.

U est un voisinage ouvert de $i(B)$. Il est clair que U est G -invariant, car si $e \in U$ et $j(ge) \in B_\alpha$, on a

$$j(e) \in B_\alpha, \text{ d'où } e \in U_\alpha, \text{ d'où } ge \in U_\alpha;$$

$$\begin{array}{ccccc}
 B_\alpha & \xrightarrow{i/B_\alpha} & U_\alpha & \xrightarrow{j/U_\alpha} & B_\alpha \\
 f_\alpha \downarrow & & \downarrow \phi_\alpha & & \downarrow f_\beta \\
 B' & \xrightarrow{i'} & E' & \xrightarrow{j'} & B'
 \end{array}$$

et les ϕ_α définissent $\phi: U \rightarrow E'$ de telle sorte que (Φ, f) soit un morphisme fibré.

NOTE. Dans la suite I est l'intervalle $[0, 1]$. Si B est un G -espace, l'action de G sur $B \times I$ est définie par $g(b, t) = (gb, t)$.

2. LEMME. Soit χ un G -microfibré de base $B \times I$ et soit $b_0 \in B$ un point fixe. Alors il existe un voisinage invariant V de b_0 tel que $\chi/V \times I$ soit trivial.

PREUVE. G agit trivialement sur $b_0 \times I$; on applique alors le Lemme 11, n° 3, à $\chi/b_0 \times I$: il existe un G -espace euclidien M tel que $\chi/b_0 \times I$ soit

localement isomorphe à

$$b_0 \times I \xrightarrow{\times 0} b_0 \times (I \times M) \xrightarrow{pr_1} b_0 \times I.$$

Pour $t \in I$, il existe un voisinage invariant V_t de b_0 et un voisinage $]t - \epsilon_t, t + \epsilon_t[$ de t tel que $\chi / V_t \times]t - \epsilon_t, t + \epsilon_t[$ soit isomorphe à

$$V_t \times]t - \epsilon_t, t + \epsilon_t[\times M.$$

En utilisant la compacité de I , on construit un voisinage invariant V de b_0 et une subdivision

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k = I \text{ de } I$$

tels que $\chi / V \times [t_i, t_{i+1}]$ soit isomorphe à

$$V \times [t_i, t_{i+1}] \xrightarrow{\times 0} V \times [t_i, t_{i+1}] \times M \xrightarrow{pr_1} V \times [t_i, t_{i+1}].$$

En recollant ces isomorphismes à l'aide du lemme précédent, on obtient le résultat voulu (voir [M], Lemme 6.7).

NOTATION. Si $\chi: B \rightarrow E \rightarrow B$ est un G -microfibré, on note $\chi \times I$ le G -microfibré

$$B \times I \longrightarrow E \times I \longrightarrow B \times I.$$

3. PROPOSITION. Soit χ un G -microfibré de base $B \times I$, où B est paracompact. On suppose qu'il existe un recouvrement ouvert invariant $\{V_\alpha\}$ de B tel que $\chi / V_\alpha \times I$ soit isomorphe à $(\chi / V_\alpha \times \{1\}) \times I$ par un isomorphisme induisant l'identité sur la base ($B \times \{1\} \times I$ étant identifié à $B \times I$). Alors χ est isomorphe à $(\chi / B \times \{1\}) \times I$.

PREUVE. Pour tout α , il existe un voisinage U_α de $i(V_\alpha \times I)$ isomorphe (en tant que G -espace) à un voisinage $U'_\alpha \times I$ de $i(V_\alpha \times I) \times I$ de telle sorte que le diagramme ci-dessous soit commutatif :

$$(D) \quad \begin{array}{ccccc} V_\alpha \times I & \xrightarrow{i} & U_\alpha & \xrightarrow{j} & V_\alpha \times I \\ \uparrow & & \uparrow \phi_\alpha & & \uparrow \\ V_\alpha \times I \times I & \xrightarrow{i'} & U'_\alpha \times I & \xrightarrow{j'} & V_\alpha \times I \times I \end{array}$$

En vertu de la Proposition 4, n° 1, on peut supposer que le recouvrement $\{V_\alpha\}$ est G -localement fini; il existe donc une enveloppe *invariante* de l'unité, soit $\{\lambda_\alpha\}$, subordonnée à $\{V_\alpha\}$.

On désigne alors par

$$r_\alpha: B \times [0, 1] \rightarrow B \times [0, 1]$$

l'application équivariante définie par

$$r_\alpha(b, t) = (b, \sup(t, \lambda_\alpha(b)))$$

et l'on regarde $B \times [0, 1]$ comme la réunion des deux fermés invariants

$$A_\alpha = \text{Supp } \lambda_\alpha \times [0, 1] \quad \text{et} \quad A'_\alpha = \{(b, t) \mid t > \lambda_\alpha(b)\}.$$

Soit $(\Psi_\alpha, r_\alpha): \chi / A_\alpha \rightarrow \chi$, où Ψ_α est définie par

$$\Psi_\alpha(\phi_\alpha(u', t)) = \phi_\alpha(u', \sup(t, \lambda_\alpha j(u')));$$

Ψ_α est clairement équivariante et (Ψ_α, r_α) est l'identité sur $\chi / A_\alpha \cap A'_\alpha$; d'autre part

$$j\Psi_\alpha(\phi_\alpha(u', t)) = (j(u'), \sup(t, \lambda_\alpha j(u')))$$

(voir diagramme (D)), ce qui fait que le diagramme ci-dessous commute :

$$\begin{array}{ccc} \chi / A_\alpha & \xrightarrow{(\Psi_\alpha, r_\alpha)} & \chi \\ & \searrow & \nearrow \\ & \chi / A_\alpha \cap A'_\alpha & \end{array}$$

Donc l'inclusion $\chi / A'_\alpha \hookrightarrow \chi$ coïncide avec (Ψ_α, r_α) sur $\chi / A_\alpha \cap A'_\alpha$.

A l'aide du Lemme 1 on peut construire un morphisme fibré

$$(R_\alpha, r_\alpha): \chi \rightarrow \chi.$$

Nous allons maintenant «composer» les (R_α, r_α) de façon à obtenir un morphisme fibré $(R, r): \chi \rightarrow \chi$, où $r: B \times I \rightarrow B \times I$ désigne la rétraction

$$r(b, t) = (b, 1).$$

Pour cela on munit l'ensemble des $\{a\}$ d'une relation de bon ordre et l'on considère un recouvrement fermé invariant G -localement fini, soit $\{B_\beta\}$, de

B tel que chaque B_β ne rencontre qu'un nombre fini de V_α (voir paragraphe 1.7). Pour B_β donné, soient

$$V_{\alpha_1}, V_{\alpha_2}, \dots, V_{\alpha_k}, \text{ avec } \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k,$$

les V_α que rencontre B_β . On définit (R_β, r_β) par

$$R_\beta = R_{\alpha_1} R_{\alpha_2} \dots R_{\alpha_k} \text{ et } r_\beta = r_{\alpha_1} r_{\alpha_2} \dots r_{\alpha_k} = r / B_\beta$$

(les autres r_α étant l'identité autour de B_β).

On recolle alors les $(R_\beta, r / B_\beta)$ à l'aide du Lemme 1 et on obtient le morphisme fibré $(R, r): \chi \rightarrow \chi$.

Il s'ensuit que χ est isomorphe à $r^* \chi$, qui est lui-même isomorphe à $(\chi / B \times I)$. C.Q.F.D.

4. PROPOSITION. *Tout G-microfibré χ de base $B \times I$, où B est paracompact, est isomorphe à $(\chi / B \times I) \times I$.*

PREUVE. Il suffit, en vertu de la proposition précédente, d'exhiber un recouvrement ouvert invariant $\{V_\alpha\}$ de B tel que $\chi / V_\alpha \times I$ soit isomorphe à $(\chi / V_\alpha \times I) \times I$.

Cas 1. Soit b un point fixe de B ; alors en raison du Lemme 2, il existe un voisinage V de B tel que $\chi / V \times I$ soit trivial; donc $\chi / V \times I$ est isomorphe à $(\chi / V \times I) \times I$.

Cas 2. Soit $b \in B$ avec un groupe d'isotropie $G_b \neq G$ et soit S une tranche en b . Alors $S \times I$ est une G_b -tranche de $S \times I$. Mais $S \times I$ est paracompact, par conséquent $\chi / S \times I$ est isomorphe (en tant que microfibré, en oubliant la G -structure) à $(\chi / S \times I) \times I$. Il existe donc un voisinage U de $i(S \times I)$ dans $j^{-1}(S \times I)$ (on peut supposer que U est G_b -invariant), un voisinage $U' \times I$ de $i(S \times I) \times I$ et un isomorphisme $f: U \rightarrow U' \times I$, tels que le diagramme ci-dessous soit commutatif:

$$\begin{array}{ccccc} S \times I & \xrightarrow{i} & U & \xrightarrow{j} & S \times I \\ \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow \\ S \times I \times I & \xrightarrow{i'} & U' \times I & \xrightarrow{j'} & S \times I \times I \end{array}$$

On peut supposer (Metatheorem [P], 1.8.1) que f est G_b -équivariante. Or U est un ouvert de la G_b -tranche $j^{-1}(S \times I)$. Par conséquent, en utilisant le Lemme 7, n° 2, f admet un prolongement unique en une application équivariante

$$\bar{f}: GU \rightarrow E((\chi/B \times I) \times I).$$

\bar{f} est clairement injective (utiliser le fait que f a un inverse et que l'identité de U se prolonge de manière unique à GU , donc en l'identité de GU). Par conséquent $\chi/GS \times I$ est isomorphe à $(\chi/GS \times I) \times I$; or GS est un voisinage de b . C.Q.F.D.

5. THEOREME. Soit χ un G -microfibré de base B , soit C un G -espace paracompact et $f_0, f_1: C \rightarrow B$ deux applications équivariantes G -homotopes. Alors $f_0^*(\chi)$ et $f_1^*(\chi)$ sont des G -microfibrés isomorphes.

PREUVE. Soit $F: C \times I \rightarrow B$ une G -homotopie reliant f_0 à f_1 .

Alors $F^*(\chi)$ est un G -microfibré de base $C \times I$; donc en vertu de la proposition précédente :

$$F^*(\chi) \simeq (F^*(\chi)/(C \times I)) \times I \simeq (F^*(\chi)/(C \times 0)) \times I;$$

or

$$F^*(\chi)/C \times I \simeq f_1^*(\chi), \quad F^*(\chi)/C \times 0 \simeq f_0^*(\chi).$$

Par conséquent $f_1^*(\chi)$ est isomorphe à $f_0^*(\chi)$.

5. Le théorème de Kister-Mazur équivariant.

Le but du paragraphe est de prouver la version équivariante du résultat suivant : Tout microfibré contient un unique fibré (voir [KI] et [HO]).

1. DEFINITION. Un G -fibré topologique est un diagramme

$$\xi: B \xrightarrow{s} E \xrightarrow{p} B,$$

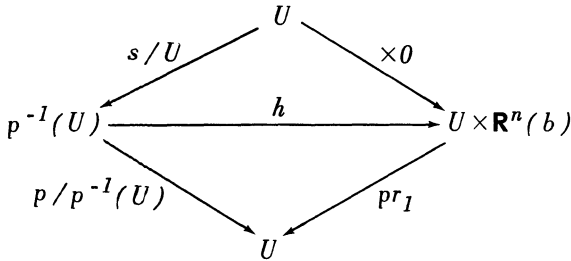
où E et B sont des G -espaces, s et p des applications équivariantes telles que $ps = id_B$. On suppose de plus que ξ vérifie la condition suivante de trivialité locale :

Pour tout $b \in B$, il existe un voisinage G_b -invariant de B , soit U , un

G_b -module $\mathbf{R}^n(b)$ et un homéomorphisme G_b -équivariant

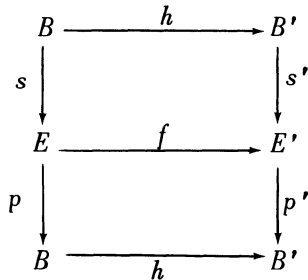
$$h: p^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbf{R}^n(b)$$

tel que le diagramme ci-dessous soit commutatif :



2. $\xi: B \xrightarrow{s} E \xrightarrow{p} B$ et $\xi': B' \xrightarrow{s'} E' \xrightarrow{p'} B'$

étant deux G -fibrés, un morphisme $(f, h): \xi \rightarrow \xi'$ est un couple d'applications équivariantes tel que le diagramme



soit commutatif.

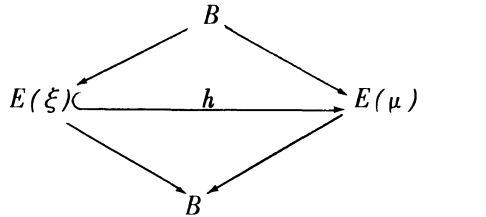
Il est facile de voir que, si (f, I_B) est un morphisme entre G -fibrés de même base B tel que f soit une bijection sur chaque fibre, alors (f, I_B) est un isomorphisme (cf. n° 3).

On a aussi le :

3. THEOREME (d'homotopie pour les G -fibrés). Soit ξ un G -fibré de base B paracompacte et $f_0, f_1: B' \rightarrow B$ deux applications équivariantes G -homotopes. Alors $f_0^*(\xi)$ et $f_1^*(\xi)$ sont deux G -fibrés isomorphes.

4. DEFINITION. Soit ξ un G -fibré et μ un G -microfibré de même base B et de même dimension. On dit que μ contient ξ s'il existe un plongement

équivariant $h: E(\xi) \hookrightarrow E(\mu)$ compatible avec les projections et les sections :



Si μ contient ξ , il est clair que μ et ξ sont isomorphes en tant que G -microfibrés.

5. PROPOSITION. Soit μ un G -microfibré de base $B = GS$, où S est une H -tranche ($H \subset G$, $H \neq G$); alors μ contient un unique G -fibré.

PREUVE. D'après le théorème de Kister-Mazur, μ/S contient un unique fibré topologique. Nous pouvons donc supposer (Metatheorem) que μ/S contient un unique H -fibré.

Ceci étant, remarquons qu'il existe une bijection entre les H -fibrés de base S et les G -fibrés de base $G \times_H S = GS$ (voir [5], page 132) : Tout H -fibré de base S de la forme $S \rightarrow E \rightarrow S$ se prolonge en un G -fibré

$$G \times_H S \rightarrow G \times_H E \rightarrow G \times_H S ;$$

le seul point à vérifier est la trivialité locale de ce dernier fibré : elle provient de la trivialité locale de $G \xrightarrow{can} G/H$ (voir [ST], pages 30-32). Réciproquement, un G -fibré de base GS se restreint à un H -fibré de base S .

Et ceci prouve que μ contient un unique G -fibré.

6. NOTATIONS. 1° M et N étant deux G -espaces euclidiens de même dimension, on note $\mathcal{P}(M, N)$ l'espace des plongements de M dans N préservant l'origine ; $\mathcal{P}(M, N)$ est muni de la topologie CO ; $\mathcal{H}(M, N)$ désigne le sous-espace de $\mathcal{P}(M, N)$ constitué des homéomorphismes.

On fait de $\mathcal{P}(M, N)$ un G -espace en définissant $g \cdot f$, pour $g \in G$ et $f \in \mathcal{P}(M, N)$, par

$$(g \cdot f)(x) = gf(g^{-1}x) .$$

Il est clair que $\mathcal{H}(M, N)$ est alors une partie invariante de $\mathcal{P}(M, N)$.

Remarquons que f est un plongement équivariant de M dans N si et seulement si f est un point fixe du G -espace $\mathcal{P}(M, N)$. On note $\mathcal{P}_G(M, N)$ l'ensemble des points fixes de $\mathcal{P}(M, N)$ et $\mathcal{P}_G(M, N) \cap \mathcal{H}(M, N)$ est désigné par $\mathcal{H}_G(M, N)$. On écrit $\mathcal{P}(M)$, $\mathcal{H}(M)$, $\mathcal{H}_G(M)$ au lieu de $\mathcal{P}(M, M)$, $\mathcal{H}(M, M)$, $\mathcal{H}_G(M, M)$.

2° Dans la suite $\epsilon_M(B)$ désigne le G -fibré trivial

$$B \xrightarrow{\times 0} B \times M \xrightarrow{pr_1} B.$$

De plus un morphisme injectif entre G -fibrés de même dimension sera appelé un *plongement*.

Le théorème suivant est la version équivariante (légèrement modifiée) d'un résultat de Kister ([KI], Theorem 1); la démonstration est reportée à la fin de ce paragraphe.

7. THEOREME. *Il existe une G -homotopie $F: \mathcal{P}(M, N) \times I \rightarrow \mathcal{P}(M, N)$ telle que :*

- (1) $F(f, 0) = f$ pour tout f dans $\mathcal{P}(M, N)$;
- (2) $F(f, 1) \in \mathcal{H}(M, N)$;
- (3) $F(h, t) \in \mathcal{H}(M, N)$ pour tout $h \in \mathcal{H}(M, N)$ et tout $t \in I$;
- (4) Il existe une application invariante $r: \mathcal{P}(M, N) \rightarrow]0, 1]$ telle que :

$$F(f, 1)(v) = f(v) \text{ pour } \|v\| < r(f).$$

- (5) Enfin F applique $\mathcal{P}_G(M, N) \times I$ dans $\mathcal{P}_G(M, N)$.

8. PROPOSITION. *S'il existe un plongement $\phi: \epsilon_M(B) \hookrightarrow \epsilon_N(B)$, alors il existe un isomorphisme $\Phi: \epsilon_M(B) \simeq \epsilon_N(B)$ ayant même germe que ϕ .*

PREUVE. Un plongement $\phi: \epsilon_M(B) \rightarrow \epsilon_N(B)$ est de la forme

$$\phi(x, v) = (x, f_x(v)),$$

où $x \mapsto f_x$ est une application continue $f: B \rightarrow \mathcal{P}(M, N)$; ϕ étant équivariante, on a $f_{gx}(gv) = gf_x(v)$, ce qui s'écrit encore

$$f_{gx}(v) = gf_x(g^{-1}v) = (g \cdot f_x)(v),$$

en utilisant la structure de G -espace de $\mathcal{P}(M, N)$; et ceci prouve que l'ap-

plication $f: B \rightarrow \mathcal{P}(M, N)$ est équivariante. F étant la déformation définie au théorème précédent, on considère

$$F \circ (f \times id): B \times I \rightarrow \mathcal{P}(M, N),$$

et l'on définit l'isomorphisme $\Phi: \epsilon_M(B) \approx \epsilon_N(B)$ par

$$\Phi(x, v) = (x, F(f_x, I)(v)).$$

Soit alors V le voisinage invariant de $B \times 0$ dans $B \times M$ défini par

$$V = \{ (x, v) \mid \|v\| < r(f_x) \}.$$

Pour $(x, v) \in V$ on a

$$\Phi(x, v) = (x, F(f_x, I)(v)) = (x, f_x(v)) = \phi(x, v),$$

ce qui prouve que Φ et ϕ ont même germe.

9. COROLLAIRE. Soit ξ un G -fibré de base B et $\phi: \epsilon_M(B) \hookrightarrow \xi$ un plongement.

1° Si ξ est trivial, il existe un isomorphisme $\Phi: \epsilon_M(B) \approx \xi$ ayant même germe que ϕ .

2° Si W est une partie invariante de B telle qu'il existe un isomorphisme $\Psi: \xi/W \rightarrow \epsilon_N(W)$, alors il existe un isomorphisme

$$\Psi': \xi/W \rightarrow \epsilon_M(W).$$

PREUVE. Le 1° est évident.

Pour le 2° : il existe un isomorphisme $\Phi: \epsilon_M(W) \approx \epsilon_N(W)$ ayant même germe que le plongement $\Psi: \xi/W \hookrightarrow \epsilon_N(W)$; $\Psi' = \Phi^{-1}\Psi$ est l'isomorphisme cherché.

10. LEMME. Soit ξ un G -fibré de base B , où B est un G -espace normal, et soit $\phi: \epsilon_M(B) \hookrightarrow \xi$ un plongement. On suppose de plus que l'on peut recouvrir B par deux ouverts invariants W_1 et W_2 tels qu'il existe des isomorphismes

$$\Phi_i: \epsilon_M(W_i) \approx \xi/W_i \quad (i = 1, 2),$$

Φ_1 ayant même germe que $\phi/\epsilon_M(W_1)$. Alors il existera un isomorphisme $\Phi: \epsilon_M(B) \approx \xi$ ayant même germe que ϕ et tel que

$$\Phi/\epsilon_M(W_1 - W_2) = \Phi_1/\epsilon_M(W_1 - W_2).$$

PREUVE. (Comparer avec [HO], Lemma 3.1.)

Comme il existe un plongement

$$\phi / \epsilon_M(W_2) : \epsilon_M(W_2) \hookrightarrow \xi / W_2 ,$$

on peut supposer que Φ_2 a même germe que ϕ (cf. Corollaire 9). Soit alors α_i ($i = 1, 2$) une partition invariante de l'unité subordonnée à $\{W_i\}_{i=1,2}$. On pose $a = \alpha_1 / W_2$ et

$$A = W_2 - \alpha_2^{-1}]0, 1] = \alpha^{-1}(1) \subset \alpha^{-1}]0, 1] \subset W_1 \cap W_2 .$$

Soit $\beta : \epsilon_M(W_2) \rightarrow \epsilon_M(W_2)$ définie par

$$\beta(x, v) = (x, a(x)v) .$$

Il est clair que la restriction de β à $\epsilon_M(\alpha^{-1}]0, 1])$ est un isomorphisme.

On définit alors un isomorphisme $\Psi_2 : \epsilon_M(W_2) \rightarrow \epsilon_M(W_2)$ par

$$\Psi_2(x, v) = \begin{cases} \beta^{-1} \Phi_2^{-1} \Phi_1 \beta(x, v), & \text{pour } (x, v) \in \alpha^{-1}]0, 1] \times M , \\ (x, v) & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

La continuité de Ψ_2 résulte du fait que $\Phi_2^{-1} \Phi_1 / W_1 \cap W_2$ a même germe que l'identité.

Enfin, on définit $\Phi : \epsilon_M(B) \approx \xi$ par

$$\Phi / W_2 = \Phi_2 \Psi_2 \quad \text{et} \quad \Phi / W_1 - \text{Supp} \alpha_2 = \Phi_1 / W_1 - \text{Supp} \alpha_2 .$$

Et l'on obtient bien le résultat voulu, car $\{W_1 - \text{Supp} \alpha_2, W_2\}$ forme un recouvrement ouvert invariant de B et $\Phi_1 / A = \Phi_2 \Psi_2 / A$.

11. PROPOSITION. Soit $\phi : \epsilon_M(B) \hookrightarrow \xi$ un plongement, où B est paracompacte. Alors il existe un isomorphisme $\Phi : \epsilon_M(B) \approx \xi$ de germe ϕ .

PREUVE.

a) Il existe un recouvrement ouvert invariant $\{W_j\}_{j \in J}$ de B tel que ξ / W_j soit isomorphe à $\epsilon_M(W_j)$:

- Si b est un point fixe de B , alors il existe un voisinage ouvert invariant $V(b)$ de b tel que $\xi / V(b)$ soit trivial.

- Si $b \in B$ est tel que $G_b \neq G$, on désigne par S une tranche en b . Alors, $\epsilon_M(GS)$ et ξ / GS sont deux G -fibrés contenus dans le microfibré ξ / GS . D'après la Proposition 5 ils sont isomorphes en tant que G -fibrés.

- Enfin, en appliquant le Corollaire 9 précédent, on obtient le résultat voulu.

b) Construction de $\Phi: \epsilon_M(B) \approx \xi$ (voir [HO], Lemma 3.2).

Soit $\{a_j\}_{j \in J}$ une partition invariante de l'unité subordonnée au recouvrement $\{W_j\}$. On pose

$$W_K = \bigcup_{j \in K} W_j, \quad a_K = \sum_{j \in K} a_j,$$

et l'on considère la famille \mathcal{F} des couples

$$(K, \Phi_K), \quad \text{où } \Phi_K: \epsilon_M(W_K) \approx \xi / W_K$$

est un isomorphisme de germe ϕ / W_K . En vertu du Corollaire 9, \mathcal{F} n'est pas vide. On introduit dans \mathcal{F} la relation d'ordre suivante :

$$\begin{aligned} (K, \Phi_K) \leq (K', \Phi_{K'}) &\iff \\ K \subset K', \quad x \in W_K \quad \text{et} \quad a_K(x) = a_{K'}(x) &\implies \\ \Phi_K / \epsilon_M(Gx) = \Phi_{K'} / \epsilon_M(Gx). & \end{aligned}$$

Si $(K_r, \Phi_r)_{r \in R}$ est une partie totalement ordonnée de \mathcal{F} , alors elle possède une borne supérieure. Par conséquent, d'après l'axiome de Zorn, \mathcal{F} possède un élément maximal, soit (K, Φ_K) . Si $K \neq J$, soit $j \in J - K$; posons

$$K' = K \cup \{j\}, \quad W_1 = W_K, \quad W_2 = W_j$$

et considérons la partition invariante de l'unité subordonnée à $\{W_1, W_2\}$ et définie par

$$a_1 = a_K / a_{K'}, \quad a_2 = a_j / a_{K'}.$$

En appliquant le Lemme 10, on construit un couple $(K', \Phi_{K'}) > (K, \Phi_K)$, ce qui contredit la maximalité de (K, Φ_K) .

12. COROLLAIRE. *Tout G-microfibré trivial (de base paracompacte) contient un unique G-fibré.*

PREUVE. Soit μ un microfibré trivial de base B . D'après le Lemme 11, n° 3, il existe un plongement $\phi: \epsilon_M(B) \hookrightarrow \mu$. Supposons que μ contienne un autre G -fibré, soit ξ . Alors ξ et $\epsilon_M(B)$ sont isomorphes en tant que

G-microfibrés. On déduit du Lemme 11, n° 3, à nouveau qu'il existe un plongement $\epsilon_M(B) \hookrightarrow \xi$; la proposition précédente donne le résultat voulu.

13. LEMME. Soit μ un G-microfibré. On suppose que :

1° la base B de μ est un G-espace métrisable,

2° il existe deux ouverts invariants V_1, V_2 tels que $B = V_1 \cup V_2$,

3° V_2 est soit un ouvert invariant trivialisant, soit de la forme

$$V_2 = GS, \text{ où } S \text{ est une } H\text{-tranche } (H \subset G, H \neq G),$$

4° μ/V_1 contient un G-fibré ξ_1 .

Alors μ contient un G-fibré.

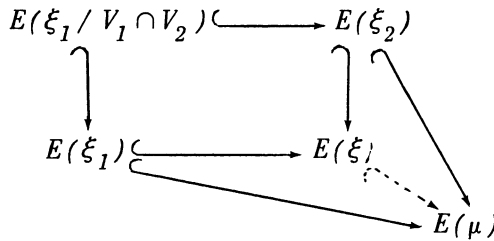
PREUVE.

Cas 1: V_2 est un ouvert invariant trivialisant.

D'après le Corollaire précédent, μ/V_2 contient un unique G-fibré, soit ξ_2 . De même $\mu/V_1 \cap V_2$ contient un unique G-fibré ; par conséquent, il existe un isomorphisme

$$\alpha : \xi_1 / V_1 \cap V_2 \approx \xi_2 / V_1 \cap V_2.$$

On pose alors $\xi = \xi_1 \cup_{\alpha} \xi_2$; ξ est un G-fibré qui se plonge dans μ .



Cas 2: $V_2 = GS$, où S est une H-tranche.

D'après la Proposition 5, μ/V_2 contient un unique G-fibré, soit ξ_2 . Posons $V = V_1 \cap V_2$. Il existe

$$g \in G \text{ tel que } gS \cap V \neq \emptyset.$$

Alors $S_1 = gS \cap V$ est une gHg^{-1} -tranche telle que $GS_1 = V$. Toujours d'après la Proposition 5, μ/V contient un unique G-fibré ; par conséquent, il existe un isomorphisme

$$\alpha : \xi_1 / V_1 \cap V_2 \approx \xi_2 / V_1 \cap V_2.$$

On termine alors comme dans le Cas 1.

14. COROLLAIRE. Soit μ un G -microfibré de base B métrisable et compacte. On suppose qu'il existe un G -fibré ξ de base V , où V est un ouvert invariant de B , tel que ξ soit contenu dans μ/V . Alors si F est un fermé invariant de V , il existe un voisinage invariant V' de F dans V et un G -fibré η contenu dans μ tel que $\xi/V' \approx \eta/V'$.

PREUVE. En utilisant la compacité de B , on peut trouver une famille finie V_1, V_2, \dots, V_n d'ouverts invariants de B tels que :

$$a) B - V \subset \bigcup_{i=1}^n V_i \subset B - A,$$

b) chaque V_i est soit de la forme GS_i , où S_i est une H_i -tranche (avec $H_i \subset G$), soit tel que μ/V_i soit trivial.

On applique alors le Lemme précédent un nombre fini de fois.

15. PROPOSITION. Tout G -microfibré de base compacte contient un unique G -fibré.

PREUVE. L'existence d'un G -fibré contenu dans μ résulte directement du corollaire précédent avec $V = \emptyset$. Il nous reste à prouver l'unicité.

Soit ξ_0 et ξ_1 deux G -fibrés contenus dans μ ; soit t_0 et t_1 deux nombres réels $0 < t_0 < t_1 < 1$. On pose

$$V = B \times ([0, t_0] \cup]t_1, 1]) \text{ et } \xi = \xi_0 \times [0, t_0] \cup \xi_1 \times]t_1, 1];$$

alors ξ est un G -fibré de base V contenu dans $(\mu \times [0, 1])/V$. En appliquant le corollaire précédent, on construit un G -fibré $\bar{\xi}$ prolongeant ξ/V' , où V' est un voisinage invariant de $B \times \{0, 1\}$ dans V (i. e. $\bar{\xi}/V' \approx \xi/V'$).

Mais en raison du théorème d'homotopie pour les G -fibrés, on a

$$\xi_0 = \xi/B \times 0 \approx \bar{\xi}/B \times 0 \approx \bar{\xi}/B \times 1 \approx \xi/B \times 1 = \xi_1.$$

16. THEOREME. Soit μ un G -microfibré dont la base B est localement compacte à base dénombrable. Alors μ contient un unique G -fibré.

PREUVE. Si B est localement compacte à base dénombrable, alors B/G possède la même propriété. Et puisque $\pi : B \rightarrow B/G$ est une application pro-

pre ([P], 1.1.9), on peut trouver une famille $\{B_n\}_{n \geq 0}$ de compacts invariants tels que

$$B_n \subset \overset{\circ}{B}_{n+1} \text{ et } B = \bigcup_{n \geq 0} B_n,$$

les $\overset{\circ}{B}_n$ étant également G -invariants.

D'après ce qui précède, on sait que μ/B_n contient un unique G -fibré

$$\xi_n: B_n \xrightarrow{\sigma_n} E_n \xrightarrow{p_n} B_n.$$

Il existe donc des isomorphismes $\alpha_n: \xi_n \approx \xi_{n+1}/B_n$. On définit alors un G -fibré

$$\xi: B \xrightarrow{\sigma} \varinjlim E \xrightarrow{p} B.$$

Le seul point à vérifier est la trivialité locale de ξ ainsi défini: pour tout $x \in B$ il existe un voisinage G_x -invariant, soit U , contenu dans $\overset{\circ}{B}_n$ pour un certain n ; alors ξ/U et ξ_n/U sont isomorphes en tant que G_x -fibrés.

Il nous reste encore à prouver l'unicité de ξ .

Soit ξ' et ξ'' deux G -fibrés contenus dans μ . On pose

$$\xi = \xi' \times [0, t[\cup \xi'' \times]s, 1] \text{ avec } 0 < 1/4 < t < s < 3/4 < 1.$$

Soit $n \geq 1$; d'après la construction faite en 14, il existe deux nombres

$$t_n, s_n \quad (0 < 1/4 < t_n < t < s < s_n < 3/4)$$

tels que $\xi/B_n \times ([0, t_n[\cup]s_n, 1])$ se prolonge en un G -fibré ξ_n de base $B_n \times I$. On considère alors le G -fibré

$$\eta_n = \xi_n \cup (\xi/B_{n+1} \times ([0, t_n[\cup]s_n, 1])$$

de base

$$B_n \times I \cup B_{n+1} \times ([0, t_n[\cup]s_n, 1]).$$

Alors il existe un G -fibré ξ de base $B_{n+1} \times I$ qui prolonge

$$\eta_n / V_n \times I \cup B_{n+1} \times ([0, t_{n+1}[\cup]s_{n+1}, 1]),$$

où V_n est un voisinage invariant de B_{n-1} et t_{n+1}, s_{n+1} deux réels tels que

$$1/4 < t_{n+1} < t < s < s_{n+1} < 3/4.$$

On obtient ainsi un diagramme commutatif de la forme

$$\begin{array}{ccc}
 \xi / V_n \times ([0, t_{n+1}[\cup] s_{n+1}, 1]) & \xrightarrow{\quad} & \xi_n / V_n \times I \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \xi / B_{n+1} \times ([0, t_{n+1}[\cup] s_{n+1}, 1]) & \xrightarrow{\quad} & \xi_{n+1} / B_{n+1} \times I
 \end{array}$$

d'où l'on déduit par récurrence une famille d'inclusions

$$\begin{array}{ccc}
 \vdots & \xrightarrow{\quad} & \vdots \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \xi / V_n \times ([0, 1/4[\cup] 3/4, 1]) & \hookrightarrow & \xi_n / V_n \times I \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \xi / V_{n+1} \times ([0, 1/4[\cup] 3/4, 1]) & \hookrightarrow & \xi_{n+1} / V_{n+1} \times I \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \vdots & \xrightarrow{\quad} & \vdots
 \end{array}$$

Ceci permet de construire un G -fibré $\eta = \varinjlim (\xi_n / V_n \times I)$ de base $B \times I$, contenant $\xi / B \times [0, 1/4[\cup] 3/4, 1]$. En utilisant à nouveau le théorème d'homotopie, on en déduit que :

$$\xi' = \xi / B \times 0 \simeq \xi / B \times 1 = \xi'' .$$

17. DEMONSTRATION DU THEOREME 7.

Nous la ferons par une succession de lemmes.

17.1. NOTATIONS. 1° Pour $a \geq 0$, $D_M(a)$ désigne la boule fermée centrée en 0 de rayon a de M . On écrira parfois simplement $D(a)$ dans les cas non ambigus.

2° Si K est un compact de M contenant l'origine, le rayon de K est le $\sup \{r \mid D_M(r) \subset K\}$.

17.2. Construction d'une homotopie : Soit

$$\mathbf{R}^4 \supset P = \{(a, b, c, d) \mid 0 \leq a < b < d, a < c < d\} .$$

On désigne par $\theta : P \times I \rightarrow \mathcal{H}_G(M)$ l'application définie par

$$\theta_t(a, b, c, d)(x) = \begin{cases} x & \text{si } \|x\| \leq a \text{ ou } \|x\| \geq d, \\ \frac{(1-t)b + tc - a}{b-a} \left(1 - \frac{a}{\|x\|}\right)x + \frac{a}{\|x\|} x & \text{pour } a \leq \|x\| \leq b, \\ \frac{(1-t)b + tc - d}{b-d} \left(1 - \frac{d}{\|x\|}\right)x + \frac{d}{\|x\|} x & \text{pour } b \leq \|x\| \leq d. \end{cases}$$

17.3. LEMME. \mathbf{R}^4 étant muni de la structure de G-espace trivial, on considère le G-espace

$$Q = \{ (f, h; a, b, c, d) \} \subset \mathcal{P}(M, N) \times \mathcal{P}(N) \times \mathbf{R}^4$$

avec

$$\begin{aligned} f(M) &\subset h(N), \\ 0 < a < b, \quad 0 < c < d &\text{ et } f(D_M(c)) \supset h(D_N(b)). \end{aligned}$$

Il existe une G-homotopie $\phi : Q \times I \rightarrow \mathcal{H}(N)$ telle que

- (1) $\phi_0(f, h; a, b, c, d) = id_N$,
- (2) $\phi_1(f, h; a, b, c, d)(hD_N(b)) \supset f(D_M(c))$,
- (3) $\phi_t(f, h; a, b, c, d)$ est l'identité sur $h(D_N(a))$ et $N - \widehat{f(D_M(d))}$.

PREUVE. Soit a' le rayon de $f^{-1}h(D_N(a))$, b' celui de $f^{-1}h(D_N(b))$. On a $a' < b' \leq c < d$, car

$$h(D_N(a)) \subset h(D_N(b)) \subset f(D_M(c)).$$

Soit a'' le rayon de $h^{-1}f(D_M(a'))$: on a $a'' \leq a < b$. On définit $\sigma \in \mathcal{H}(N)$ par

$$\sigma = \begin{cases} h\theta_1(0, a, a'', b)h^{-1} & \text{sur } h(D_N(b)) \\ id & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

et $\Psi_t \in \mathcal{H}(N)$ par

$$\Psi_t = \begin{cases} f\theta_t(a', b', c, d)f^{-1} & \text{sur } f(D_M(d)), \\ id & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

On pose alors $\phi_t = \sigma^{-1} \Psi_t \sigma$.

Compte tenu du fait que $\theta_t(-) \in \mathcal{K}_C(M)$, il est facile de voir que ϕ est équivariante.

17.4. LEMME. *Il existe une application équivariante $k: \mathcal{P}(M, N) \rightarrow \mathcal{P}(N)$ telle que*

1^o *pour tout entier $i \geq 0$ on ait $k(f)(D_N(i)) = D_N(r_i)$, où r_i est le rayon de $f(D_M(i))$;*

2^o *il existe une application invariante $r': \mathcal{P}(M, N) \rightarrow]0, 1[$ ayant la propriété $k(f)(x) = x$ pour $x \in D_N(r'(f))$.*

PREUVE. Posons $r'(f) = (1/2) \inf(r_1, 1)$; la continuité de r' provient de [KI], Proposition 3. On définit alors k par :

$$k(f)(x) = \begin{cases} x & \text{si } \|x\| < r'(f), \\ \frac{1}{1-r'(f)} [(r_1 - r'(f))x + r'(f)(1-r_1) \frac{x}{\|x\|}] & \text{pour } r'(f) \leq \|x\| \leq 1, \\ (r_{i+1} - r_i)x + [r_i(1+i) - ir_{i+1}] \frac{x}{\|x\|} & \text{pour } 0 < i \leq \|x\| \leq i+1. \end{cases}$$

17.5. LEMME. *Soit $F: \mathcal{P}(M, N) \times]0, 1[\rightarrow \mathcal{P}(M, N)$ une application équivariante telle que pour tout entier $n \geq 1$ on ait*

$$F(f, t)(x) = F(f, 1 - (1/2)^n)(x)$$

pour $\|x\| \leq n$ et $1 - (1/2)^n \leq t < 1$. Alors F peut être prolongée de façon équivariante sur $\mathcal{P}(M, N) \times I$.

PREUVE. On définit

$$F(f, 1) = \lim_{t \rightarrow 1} F(f, t).$$

Pour la continuité en $(f, 1)$, voir [KI], Proposition 5.

Il reste à montrer que $F(-, 1)$ est équivariante, mais cela est clair car

$$\|F(f, t)(g^{-1}x) - F(f, 1)(g^{-1}x)\| < \epsilon$$

implique

$$\|gF(f, t)(g^{-1}x) - gF(f, 1)(g^{-1}x)\| < \epsilon,$$

par conséquent

$$\lim_{t \rightarrow 1} F(g \cdot f, t)(x) = \lim_{t \rightarrow 1} gF(f, t)(g^{-1}x) = g \lim_{t \rightarrow 1} F(f, t)(g^{-1}x),$$

ce qui s'écrit encore $gF(f, 1) = F(g \cdot f, 1)$.

17.6. LEMME.

1° Il existe une G-homotopie $\alpha: \mathcal{P}(M, N) \times I \rightarrow \mathcal{P}(N)$ telle que:

- (a) $\alpha_0 = k$ (cf. Lemme 17.4),
- (b) $\alpha_1(f)(N) = f(M)$ pour tout $f \in \mathcal{P}(M, N)$,
- (c) $\alpha_1(f)(D(r'(f))) = id$.

2° Il existe une G-homotopie $\beta: \mathcal{P}(M, N) \times I \rightarrow \mathcal{P}(N)$ telle que

- (a) $\beta_0 = k$,
- (b) $\beta_1(f) = id_N$, pour tout $f \in \mathcal{P}(M, N)$.

PREUVE. 1° On pose $\alpha_0 = k$. Puis on définit α_t pour $t \in [0, 1/2]$ par

$$\alpha_t(f) = \phi_{2t}(f, \alpha_0(f); 1, 1, 2, 3) \alpha_0(f),$$

où ϕ est la G-homotopie construite en 17.3.

Supposons avoir défini α_t pour $t \in [0, (1/2)^n]$. Alors pour

$$t \in [1 - (1/2)^n, 1 - (1/2)^{n+1}]$$

on pose

$$\alpha_t(f) = \phi_{2^{n+1}t - 2(2^n - 1)}(f, \alpha_{1 - (1/2)^n}(f); n+1, n+1, n+2, n+3) \alpha_{1 - (1/2)^n}(f).$$

Finalement α_1 est défini comme étant $\lim_{t \rightarrow 1} \alpha_t$, ce qui est possible car

$$\alpha_t(f) / D(n) = \alpha_{1 - (1/2)^n}(f) / D(n)$$

$$\text{pour } t \in [1 - (1/2)^n, 1 - (1/2)^{n+1}].$$

Remarquons encore que, si $\|x\| \leq r'(f) \leq 1$, alors

$$\alpha_0(f)(x) = x = \alpha_{1/2}(f)(x) = \alpha_1(f)(x).$$

Par conséquent

$$\alpha_1(f) / D(r'(f)) = id.$$

2° Pour $n < a$, on désigne par $\gamma_t(n, a) \in \mathcal{H}_G(N)$ l'homéomorphisme qui laisse fixe $D(n)$ et transforme $D(a) - D(n)$ en

$$D((1-t)a + (n-1)t) - D(n),$$

l'extérieur de $D(a)$ subissant la dilatation correspondante :

$$\gamma_t(n, a)(x) = \begin{cases} x & \text{si } \|x\| \leq n, \\ \frac{(1-t)a - (n-1)t - n}{a-n} x + \frac{nt(a-n-1)}{a-n} \frac{x}{\|x\|} & \text{pour } n \leq \|x\| \leq a, \\ x + ((n-1)t - at) \frac{x}{\|x\|} & \text{pour } \|x\| \geq a. \end{cases}$$

Notons que $\gamma_0(n, a) = id$.

On construit alors β de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \beta_0 &= k, \\ \beta_t(f) &= \gamma_{2t}(0, r_1)\beta_0(f) \text{ pour } t \in [0, 1/2], \\ \beta_t(f) &= \gamma_{4t-2}(1, s_2)\beta_{1/2}(f) \text{ pour } t \in [1/2, 3/4], \\ &\quad s_2 \text{ étant tel que } \beta_{1/2}(f)(D(2)) = D(s_2), \\ \dots &= \dots\dots\dots \\ \beta_1 &= \lim_{t \rightarrow 1} \beta_t. \end{aligned}$$

17.7. Construction de $F: \mathcal{P}(M, N) \times I \rightarrow \mathcal{H}(M, N)$: F est définie par

$$F(f, t) = \begin{cases} \alpha_{1-2t}(f)\alpha_1^{-1}(f)f & \text{pour } t \in [0, 1/2], \\ \beta_{2t-1}(f)\beta_1^{-1}(f)f & \text{pour } t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Désignons alors par $r(f)$ le rayon de $f^{-1}(D(r'(f)))$; pour $\|x\| \leq r(f)$, il vient

$$F(f, 1)(x) = \beta_1(f)\alpha_1^{-1}(f)f(x) = f(x).$$

BIBLIOGRAPHIE.

- B. BING R. H., A homeomorphism between the 3-sphere and the sum of two solid horned spheres, *Ann. of Math.* 56 (1952), 354- 362.
- BO. BOURBAKI N., *Topologie générale, livre III*, chap. 9, Hermann, Paris, 1958.
- H. HANNER O., Some theorems on absolute neighborhood retracts, *Arkiv. Mat.* 1 (1950), 389- 408.
- HO. HOLM P., The microbundle representation theorem, *Acta Math.* 117 (1967), 191- 213.
- I. IBISCH H., Microfibrés équivariants et lissage d'actions de groupes de Lie compacts, *C. R. A. S. Paris* 272 (1971), 1038- 1040.
- I2. IBISCH H., Microfibrés normaux équivariants, *C. R. A. S. Paris* 279 (1974), 155- 156.
- KI. KISTER J. M., Microbundles are fibre-bundles, *Ann. of Math.* 80 (1964), 190- 199.
- K. KOSZUL J. L., Sur certains groupes de transformations de Lie, *Colloque Géo. Diff. Strasbourg* (1963).
- M. MILNOR J., Microbundles, *Topology* 3, Supp. 1 (1964), 53- 79.
- M-Z. MONTGOMERY and ZIPPIN, *Topological transformation groups*, Interscience Publishers Inc., New-York, 1955.
- M-Z 2. MONTGOMERY and ZIPPIN, Examples of transformation groups, *Proc. A. M. S.* 5 (1954), 460- 465.
- P. PALAIS R., The classification of G-spaces, *Mem. A. M. S.* 36 (1960).
- S. SEGAL G., Equivariant K-theory, *I. H. E. S.* 34 (1968), 129- 151.
- ST. STEENROD N., *The topology of fibre bundles*, Princeton Univ. Press, 1951.

Institut de Mathématique et d'Informatique
 Université de Nantes
 38 Boulevard Michelet, B. P. 1044
 44037 NANTES CEDEX