CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

JEAN-YVES LE DIMET

G-variétés topologiques et *G*-microfibrés

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 17, nº 4 (1976), p. 397-435

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1976__17_4_397_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

Vol. XVII-4 (1976)

G-VARIETES TOPOLOGIQUES ET G-MICROFIBRES

par *Jean-Yves LE DIMET*

INTRODUCTION

Si les actions *différentiables* des groupes de Lie compacts sur les variétés ont été largement étudiées et continuent de l'être, on connaît moins bien les actions *continues* et les problèmes que pose leur *lissage.*

A part quelques exceptions comme les actions transitives qui se ramènent au cas différentiable, et les actions continues de S^1 sur $\mathbf{R}^3$ qui sont isomorphes à des actions linéaires, on connaît des exemples d'actions continues non-différentiables donnés par R.H. Bing (voir [B]) - une action de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ sur la sphère S^3 dont l'ensemble des points fixes est la sphère doublement cornue d'Alexander - et par D. Montgomery et L. Zippin [M-Z 2], et une théorie de lissage donnée par H. Ibisch (voir [I]). Ce lissage est obtenu à l'aide d'un foncteur k_G topologique défini essentiellement sur la catégorie des G-variétés libres.

Dans cette thèse nous montrons que la plupart des théorèmes utilisés dans [I] restent valables dans une autre catégorie de G-variétés topologiques qui s'obtient naturellement par abstraction à partir des G-variétés différentiables : c'est la catégorie des G-variétés topologiques X qui, autour de chaque point x appartenant à X, possèdent un voisinage ouvert G_x-invariant et G_x-homéomorphe à un ouvert d'un G_x-module réel ayant même dimension que X.

Pour ces objets, appelés simplement G-variétés topologiques dans ce texte, nous prouvons dans le paragraphe 2 qu'ils sont des G-ANR (= G-rétracts absolus de voisinages) - ce qui est connu pour les G-variétés différentiables - le paragraphe 1 étant consacré à la démonstration de quelques propriétés des G-espaces paracompacts, utiles par la suite.

Comme le but est de construire le foncteur k_G, nous donnons au paragraphe 3 la définition des microfibrés associés aux G-variétés topologiques définies plus haut, de telle façon que leurs microfibrés tangents ainsi que les G-fibrés vectoriels en constituent des exemples.

Dans le paragraphe 4 nous prouvons le théorème d'homotopie pour les G-microfibrés topologiques.

Comme H. Ibisch (voir [12]) a construit l'inverse stable d'un tel G-microfibré topologique, on a réuni tous les éléments assurant l'existence du foncteur k_G pour les G-variétés de notre catégorie.

Enfin, dans le paragraphe 5, nous prouvons l'analogue équivariant du théorème suivant dû à J.M. Kister et B. Mazur : Tout microfibré contient un unique fibré topologique.

Tous mes remerciements vont à M. Ibisch qui a dirigé ce travail, après m'avoir initié au sujet des G-microfibrés.

N.B.. Dans tout ce qui suit, G désigne un groupe de Lie compact. En ce qui concerne les G-espaces, la référence constante est le livre de Palais : «*The classification of G-spaces*», noté [P] dans le texte. Les notations utilisées sont donc celles de Palais. Ainsi $H \subset G$ signifie que H est un sous-groupe fermé de G, distinct de G ; les mots «invariant», «équivariant» sans autre précision veulent dire «G-invariant», «G-équivariant».

TABLE DES MATIERES

1. G-espaces paracompacts et partitions invariantes de l'unité

Il nous sera utile de savoir dans quels cas on peut disposer de partitions de l'unité constantes sur les orbites d'un G-espace.

1. DEFINITIONS. 1.1. Un recouvrement $\{A_i\}$ d'un G-espace est dit *invariant* si les A_i sont G-invariants, i. e. $GA_i = A_i$.

1.2. Une famille $\{A_i\}$ de parties d'un G-espace X est dite *G-localement finie* si tout point de X possède un voisinage invariant qui ne rencontre qu'un nombre fini de $A_i \in \{A_i\}$.

2. LEMME. *Soit X un G-espace. L'espace des orbites X/G est paracompact si et seulement si, pour tout recouvrement ouvert invariant de X, il existe un recouvrement ouvert invariant de X plus fin et G-localement fini.*

PREUVE. a) On suppose que X/G est paracompact. Soit $\{A_i\}$ un recouvrement ouvert invariant de X ; alors $\{\pi(A_i)\}$ est un recouvrement ouvert de X/G, car la projection canonique $\pi: X \to X/G$ est ouverte ([P], 1.1.3). Il existe alors un recouvrement ouvert $\{\tilde{V}_j\}$ de X/G plus fin que $\{\pi(A_i)\}$ et localement fini. Il est clair que les $V_j = \pi^{-1}(\tilde{V}_j)$ constituent un recouvrement ouvert invariant de X, G-localement fini et plus fin que $\{A_i\}$.

b) La réciproque est facile grâce aux bonnes propriétés de

$$\pi: X \to X/G.$$

3. LEMME. *Soit $\{U_i\}$ un recouvrement ouvert d'un G-espace X. Alors $\{U_i\}$ est localement fini si et seulement si $\{U_i\}$ est G-localement fini.*

PREUVE. Dans un sens, c'est évident. Réciproquement soit $\{U_i\}$ un recouvrement localement fini de X, soit $x \in X$ et Gx son orbite. Pour tout $gx \in Gx$ il existe un voisinage $W(gx)$ qui ne rencontre qu'un nombre fini de V_i. Mais Gx étant compact, il existe un nombre fini d'éléments de G, soient $g_1, g_2, \dots g_k$, tels que Gx soit contenu dans $\bigcup_{j=1}^{k} W(g_j x)$ qui constitue un voisinage de Gx. Alors ([P], 1.1.14) il existe un voisinage *invariant de* X, soit $V(x)$, tel que

$$Gx \subset V(x) \subset \bigcup_{j=1}^{k} W(g_j\, x).$$

Mais comme chacun des $W(g_j x)$ ne rencontre qu'un nombre fini de U_i, il est clair que le voisinage invariant $V(x)$ de x ne rencontre qu'un nombre fini de U_i.

4. PROPOSITION. *Si le G-espace X est paracompact, alors l'espace des orbites X/G est paracompact.*

PREUVE. Soit $\{U_i\}$ un recouvrement ouvert invariant de X. En vertu des Lemmes 2 et 3, il suffit d'exhiber un recouvrement invariant de X, localement fini et plus fin que $\{U_i\}$.

Il existe un recouvrement $\{V_j\}$ localement fini plus fin que $\{U_i\}$. Alors $\{GV_j\}$ est un recouvrement invariant de X, plus fin que $\{U_i\}$, car

$$V_j \subset U_i \quad \text{implique} \quad GV_j \subset U_i .$$

Reste à prouver que $\{GV_j\}$ est localement fini. Soit $U(x)$ un voisinage de x qui ne rencontre qu'un nombre fini de V_j ; d'après le Lemme 3 on peut supposer que $U(x)$ est G-invariant; alors $U(x)$ ne rencontre qu'un nombre fini de GV_j, car $U(x) \cap V_j = \emptyset$ implique $U(x) \cap GV_j = \emptyset$.

5. PROPOSITION. *Soit $\{U_i\}$ un recouvrement ouvert invariant localement fini du G-espace normal X. Alors il existe une partition invariante (et une enveloppe invariante) de l'unité subordonnée à $\{U_i\}$.*

PREUVE. Remarquons d'abord que X/G est normal si X l'est: cela résulte du fait que $\pi : X \to X/G$ est ouverte et fermée et que, d'autre part, tout voisinage d'une partie invariante d'un G-espace contient un voisinage invariant ([P], 1.1.14).

$\{\pi(U_i)\}$ constitue donc un recouvrement ouvert localement fini de l'espace normal X/G ; par conséquent, il existe une partition $\{\tilde{a}_i\}$ et une enveloppe $\{\tilde{\gamma}_i\}$ de l'unité subordonnée à $\pi(U_i)$. C'est-à-dire on a

$$Supp\, \tilde{a}_i \subset \pi(U_i), \quad Supp\, \tilde{\gamma}_i \subset \pi(U_i),$$
$$\sum_i \tilde{a}_i (Gx) = 1, \quad \sup_i \tilde{\gamma}_i (Gx) = 1 .$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "a_i\, ,\, \gamma_i"'] & X/G \arrow[d, "\tilde{a}_i\, ,\, \tilde{\gamma}_i"] \\ & {[0,1]} \end{tikzcd}$$

On pose alors

$$a_i = \tilde{a}_i \circ \pi \quad \text{et} \quad \gamma_i = \tilde{\gamma}_i \circ \pi .$$

Il est clair que les a_i, γ_i sont les applications G-invariantes (i.e. constantes sur les orbites) cherchées.

Un raisonnement classique ([BO], nº 4.4) permet d'obtenir le

6. COROLLAIRE. *Pour tout recouvrement ouvert invariant d'un G-espace paracompact X, il existe une partition (et une enveloppe) invariante de l'unité subordonnée à ce recouvrement.*

Dans la suite, nous aurons besoin du résultat suivant:

7. LEMME. *Soit X un G-espace paracompact et $\{V_j\}$ un recouvrement ouvert localement fini de X. Alors il existe un recouvrement fermé invariant de X, soit $\{F_i\}$, G-localement fini, tel que chaque F_i ne rencontre qu'un nombre fini de V_j.*

PREUVE. Soit $U(x)$ un voisinage invariant de $x \in X$ tel que $U(x)$ ne rencontre qu'un nombre fini de V_j. En utilisant la normalité de X/G, on peut trouver un voisinage fermé invariant de x, soit $F(x)$, et un voisinage ouvert invariant de x, soit $W(x)$, tels que

$$x \in Gx \subset W(x) \subset F(x) \subset U(x).$$

Les $\{W(x)\}$ forment un recouvrement ouvert invariant de X ; donc il existe un recouvrement ouvert invariant et localement fini plus fin que $\{W(x)\}_{x \in X}$, soit $\{W_i\}$. On pose $F_i = \overline{W}_i$. Alors:

- chaque F_i ne rencontre qu'un nombre fini de V_j, car pour tout F_i, il existe $x \in X$ tel que $F_i \subset U(x)$.
- $\{F_i\}$ est localement fini, car si un ouvert de X ne rencontre pas W_i, il ne rencontre pas son adhérence F_i.
- Enfin les F_i sont G-invariants.

2. G-variétés topologiques et G-ANR.

ANR étant l'abréviation de «rétract absolu de voisinage», l'expression «G-ANR» a alors le sens naturel suivant:

1. DEFINITION. On dit qu'un G-espace X (métrisable, à base dénombrable) est un G-ANR si toute application équivariante $f: A \to X$, où A est un fermé G-invariant d'un G-espace normal Y, se prolonge (de manière équivariante) sur un voisinage de A dans Y.

Il est bien connu que toute variété topologique est un ANR ; de même toute G-variété différentiable est un G-ANR (voir [P], 1.6.6) ; mais il n'est pas clair que toute G-variété, au sens large, ait cette propriété : il semble que l'action du groupe G puisse être parfois assez mauvaise pour qu'il n'en soit pas ainsi. C'est une des raisons pour lesquelles nous adopterons la définition suivante :

2. DEFINITION. X étant un G-espace, on note G_x le groupe d'isotropie de $x \in X$. Remarquons que, G_x étant un groupe de Lie compact, tout point x de X admet une base de voisinages G-invariants. Ceci étant, on dit qu'un G-espace X (à base dénombrable) est une *G-variété topologique de dimension n* si pour tout point $x \in X$, il existe un voisinage G-invariant de x, soit $U(x)$, et un plongement ouvert G_x-équivariant $h: U(x) \to \mathbf{R}^n(x)$, où $\mathbf{R}^n(x)$ est un G_x-espace euclidien au sens de Palais ([P], 1.1.19) ; on suppose de plus que $h(x) = 0 \in \mathbf{R}^n(x)$.

3. EXEMPLES DE G-VARIETES.

3.1. Une G-variété différentiable est une G-variété topologique (voir [K] et [M-Z] page 207, Theorem 1).

3.2. Toute variété topologique sur laquelle G agit librement est une G-variété topologique, car dans ce cas les groupes d'isotropie en chaque point sont réduits à l'identité.

Avant d'étudier quelques propriétés des G-ANR, nous allons prouver le

4. LEMME. *Soit $A = \bigcup_{n \geqslant 1} A_n$ un fermé invariant d'un G-espace normal Y, où les A_n sont des fermés invariants, deux à deux disjoints. Alors il existe un voisinage de A dans Y de la forme $U = \bigcup_{n \geqslant 1} U_n$, où U_n est un voisinage invariant de A_n, les U_n étant deux à deux disjoints.*

PREUVE. On considère **R** muni de la structure de G-espace trivial et on définit $f\colon A \to \mathbf{R}$ par $f| A_n = n$. Alors ([P] 1.4.3) f se prolonge en une application équivariante $\bar{f}\colon V \to \mathbf{R}$ où V est un voisinage invariant de A dans Y. On pose

$$V_n = \bar{f}^{-1}\left]n-\frac{1}{4},\ n+\frac{1}{4}\right[\quad \text{et} \quad U = \bigcup_{n \geqslant 1} U_n .$$

Il est clair que les U_n satisfont aux conditions données.

5. QUELQUES PROPRIETES DES G-ANR.

5.1. LEMME. *Tout ouvert invariant d'un G-ANR est un G-ANR.*

PREUVE. Soient V un ouvert invariant du G-ANR X, A un fermé invariant du G-espace normal Y et $f\colon A \to V$ une application équivariante. La composition de f avec l'inclusion $V \hookrightarrow X$ se prolonge à $\bar{f}\colon U \to X$ où U est un voisinage invariant de A dans Y. Alors $U_1 = \bar{f}^{-1}(V)$ est un voisinage invariant de A. On pose $f_1 = \bar{f}| U_1$; $f_1\colon U_1 \to V$ est un prolongement équivariant de f.

5.2. LEMME. *Si un G-espace X est réunion de deux G-ANR ouverts, alors X est un G-ANR.*

PREUVE. Il n'y a rien à changer à la démonstration de Hanner ([H], page 392); il suffit de remarquer que:

1° l'image réciproque par une application équivariante d'une partie G-invariante d'un G-espace est G-invariante;

2° le complémentaire d'une partie G-invariante d'un G-espace est également G-invariante.

5.3. LEMME. *Si le G-espace X est réunion dénombrable de G-ANR ouverts deux à deux disjoints, alors X est un G-ANR.*

PREUVE. Soit $X = \bigcup_{n \geqslant 1} O_n$, où les O_n sont des G-ANR tels que

$$O_p \cap O_q = \emptyset \quad \text{pour} \quad p \neq q .$$

On pose $A_n = f^{-1}(O_n)$, où $f\colon A \to X$ est une application équivariante, A étant un fermé du G-espace normal Y ; O_n étant fermé dans X, il s'ensuit que chaque A_n est un fermé invariant de A, donc de Y ; l'application

$$f_n = f \mid A_n : A_n \to O_n$$

se prolonge en une application équivariante $\bar{f}_n : U_n \to O_n$; en vertu du Lemme 4 on peut supposer que

$$U_p \cap U_q = \emptyset \quad \text{pour} \quad p \neq q \ ;$$

$U = \bigcup_{n>1} U_n$ est un voisinage invariant de A sur lequel on définit un prolongement $\bar{f} : U \to X$ de f par $\bar{f} \mid U_n = f_n$.

6. PROPOSITION. *Si le G-espace X (métrisable, à base dénombrable) possède un recouvrement formé de G-ANR ouverts, alors X est un G-ANR.*

PREUVE. (Comparer avec Hanner [H], page 394). On peut supposer que :

1° X est recouvert par une famille dénombrable de G-ANR ouverts, soit $X = \bigcup_{n>1} O_n$;

2° X est muni d'une métrique G-invariante :

$$d(x,y) = d(gx,gy) \quad \forall g \in G, \ \forall x \in X, \ \forall y \in X \quad ([\text{P}]\ 1.1.12).$$

On pose alors $U_n = \bigcup_{i=1}^{n} O_i$; d'après le Lemme 5.2, chaque U_n est un G-ANR. On définit $V_n \subset U_n$ par

$$V_n = \{ x \in X \mid d(x, X - U_n) > \frac{1}{n} \} \ ;$$

V_n est ouvert et G-invariant, car la métrique est G-invariante ; de plus d'après le Lemme 5.1, $\bar{V}_n$ est un G-ANR. Notons encore que $\bar{V}_n \subset V_{n+1}$. On définit alors une famille d'ouverts invariants $\{ W_n \}_{n \geqslant 1}$ par

$$W_1 = V_1, \quad W_2 = V_2, \quad W_n = V_n - \overline{V_{n-2}} \quad \text{pour } n \geqslant 3 \ ;$$

les W_n sont des G-ANR, toujours d'après le Lemme 5.1.

De l'inclusion $W_n \supset V_n - V_{n-1}$ on déduit que

$$X = \bigcup_{n \geqslant 1} W_n = \Big(\bigcup_{n \geqslant 1} W_{2n} \Big) \cup \Big(\bigcup_{n \geqslant 1} W_{2n-1} \Big). \tag{1}$$

Les W_{2n} (resp. W_{2n-1}) sont disjoints ; par conséquent d'après le Lemme 5.3, $\bigcup_{n \geqslant 1} W_{2n}$ (resp. $\bigcup_{n \geqslant 1} W_{2n-1}$) est un G-ANR. Il suit alors du Lemme 5.2 et de (1) que X est un G-ANR.

Le lemme suivant est une généralisation d'un résultat de Palais.

7. LEMME. *Soit* S *une* H*-tranche* $(H \subset G)$ *dans un* G*-espace* X, *et soit* $f: S \to Y$ *une application* H*-équivariante où* Y *est un* G*-espace. Alors* f *se prolonge de façon unique en une application équivariante* $\bar{f}: GS \to Y$.

PREUVE. Si $\bar{f}$ existe, on a

$$\bar{f}(gs) = gf(s), \quad s \in S, \quad g \in G,$$

ce qui prouve l'unicité de $\bar{f}$.

D'autre part, en raison des propriétés des tranches ([P], 1.7), il est possible de définir une application $\bar{f}: GS \to Y$ en posant $\bar{f}(gs) = g\,f(s)$. Reste à prouver la continuité de $\bar{f}$ ainsi définie.

Soit $\chi: U \to G$ une section locale dans G/H (i. e. U est un voisinage de H dans G/H et $p\chi = idU$, où $p: G \to G/H$ est la projection canonique). Pour $g_0 \in G$, l'application $F: g_0\, U \times S \to GS$ définie par

$$F(u, s) = g_0\, \chi(g_0^{-1} u)s$$

est un plongement ouvert dont l'image $W = F(g_0\, U \times S)$ est un voisinage de $g_0\, S$ dans GS homéomorphe à $g_0\, U \times S$ ([P], 1.7.9).

Soit alors $H: g_0\, U \times S \to Y$ définie par

$$H(u, s) = g_0\, \chi(g_0^{-1} u)f(s)\ ;$$

H est continue, et par conséquent $\bar{f} \mid W = H F^{-1}$ est continue.

$$\begin{tikzcd} g_0\, U \times S \arrow[r, "F", "\sim"'] \arrow[dr, "H"'] & W \arrow[d, "\bar{f} \mid W"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

On recouvre ainsi GS par des ouverts $\{W\}$ tels que $\bar{f} \mid W$ soit continue, et cela prouve la continuité de $\bar{f}$.

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le

8. THEOREME. *Toute* G*-variété topologique est un* G*-ANR.*

PREUVE. En vertu de la Proposition 6, il suffit d'exhiber un recouvrement de la G-variété X formé de G-ANR ouverts.

Cas 1. Soit $x \in X$ tel que $G_x \neq G$; soit S une tranche en x ; alors GS est un G-ANR :

GS, étant ouvert dans la variété X, est un ANR. Nous pouvons donc supposer que GS est un G_x-ANR, grâce au «Metatheorem» ([P], 1.8.1). Soit A un fermé invariant d'un G-espace normal Y et $f : A \to GS$ une application équivariante. Posons $S_1 = f^{-1}(S)$; S_1 est une G_x-tranche de A telle que $GS_1 = A$. Il existe une G_x-tranche de Y, soit S_2, telle que $S_1 = A \cap \bar{S}_2$ ([P], 1.7.15); S_1 est donc un fermé du G_x-espace normal $\bar{S}_2$ et

$$f_1 = f \mid S_1 : S_1 \to GS$$

est G_x-équivariante. GS étant un G_x-ANR, f_1 se prolonge à $\bar{f}_1 : V \to GS$, où V est un voisinage G_x-invariant de S_1 dans $\bar{S}_2$.

On peut encore supposer que V est ouvert dans S_2.

$$\begin{tikzcd}
S_1 \arrow[r, hook] \arrow[d, "f \mid S_1"'] & V \arrow[r] \arrow[dl, "\bar{f}_1"] & S_2 \\
GS & &
\end{tikzcd}$$

Mais d'après le Lemme 7, $\bar{f}_1$ se prolonge de façon unique en une application équivariante $\bar{f} : GV \to GS$, car, V étant ouvert G_x-invariant dans la G_x-tranche S_2 est encore une G_x-tranche. Or V étant un voisinage de S_1, GV est un voisinage de $GS_1 = A$; de plus $\bar{f} \mid A = f$. Ceci prouve que GS est un G-ANR.

Cas 2: Soit $x \in X$ tel que $G_x = G$. Il existe donc un voisinage G-invariant de x, soit U, et un plongement ouvert équivariant $h : U \to \mathbf{R}^n$, où $\mathbf{R}^n$ est muni d'une certaine structure de G-espace euclidien ; $h(U)$ est donc un ouvert invariant de $\mathbf{R}^n$ qui est un G-ANR ; donc $h(U)$, et par conséquent V, sont des G-ANR.

3. La catégorie des G-microfibrés : Définition; exemples.

1. DEFINITION. Un *G-microfibré* est un diagramme

$$\chi : B \xrightarrow{i} E \xrightarrow{j} B \, ,$$

où E et B sont des G-espaces, i et j des applications équivariantes telles que $ji = id_B$. On suppose de plus que χ satisfait à la condition suivante de «G-trivialité locale» :

Pour tout $b \in B$, il existe un voisinage ouvert U de b , G_b-invariant (où G_b désigne le groupe d'isotropie en $b \in B$), un voisinage ouvert V de $i(b) \in E$, G_b-invariant, tels que

$$i(U) \subset V, \quad j(V) \subset U,$$

et un G_b-isomorphisme $h: V \to U \times \mathbf{R}^n(b)$, où $\mathbf{R}^n(b)$ est un G_b-espace euclidien, de sorte que le diagramme ci-dessous soit commutatif:

$$\begin{tikzcd}
& V \arrow[dd, "h"] \arrow[dr, "j/V"] & \\
U \arrow[ur, "i/U"] \arrow[dr, "\times 0"'] & & U \\
& U \times \mathbf{R}^n(b) \arrow[ur, "pr_1"'] &
\end{tikzcd}$$

N. B. : - Un G_b-isomorphisme est un homéomorphisme G_b-équivariant,

- $U \times \mathbf{R}^n(b)$ est muni de la structure de G_b-espace produit, i. e.

$$g(b', t) = (gb', gt) \quad \text{pour} \quad g \in G_b \quad \text{et} \ (b', t) \in U \times \mathbf{R}^n(b) ,$$

- l'entier n est la dimension du G-microfibré χ ,
- $\mathbf{R}^n(b)$ est la «fibre au-dessus de $b \in B$ ».

2. DEFINITION. Un *G-microfibré trivial* de base B est de la forme

$$B \xrightarrow{\times 0} B \times M \xrightarrow{pr_1} B ,$$

où M est un G-espace euclidien.

3. EXEMPLES DE G-MICROFIBRES.

3.1. Tout microfibré au sens de Milnor (voir [M]), où G agit trivialement, est un G-microfibré.

3.2. Un G-microfibré au sens de Ibisch (voir [I]), où G agit librement sur B , est un G-microfibré au sens défini précédemment, car dans ce cas les groupes d'isotropie en chaque point sont réduits à l'identité.

3.3. Soit χ un microfibré. On fait agir le groupe symétrique S_k sur la somme $\chi \oplus \chi \oplus \ldots \oplus \chi$ (k fois) en posant :

$$\sigma(e_1, e_2, \ldots, e_k) = (e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(k)})$$

pour $(e_1, \ldots, e_k)$ appartenant à l'espace total de $\chi \oplus \ldots \oplus \chi$,

$\sigma . b = b$ pour $b \in$ base de $\chi \oplus \chi \ldots \oplus \chi =$ base de χ .

Alors, muni de cette S_k-structure, $\chi \oplus \chi \oplus \ldots \oplus \chi$ est un S_k-microfibré.

3.4. *Tout G-fibré vectoriel au sens d'Atiyah-Segal (voir [S]) est un G-microfibré :*

Soit $\xi : E \xrightarrow{p} B$ un G-fibré vectoriel, b un point de B et $E_b = p^{-1}(b)$ la fibre au-dessus de B (qui est un G_b-espace euclidien). Considérons ξ en tant que G_b-fibré vectoriel ; les restrictions de ξ et du G_b-fibré trivial

$$B \times E_b \xrightarrow{pr_1} B$$

au G_b-espace fermé $\{ b \}$ sont G_b-isomorphes : $\xi / \{ b \} \approx B \times E_b / \{ b \}$. Par conséquent (voir [S], proposition 1.2) il existe un voisinage G_b-invariant de b , soit U , tel que ξ / U soit G_b-isomorphe à

$$U \times E_b \xrightarrow{pr_1} U .$$

On a donc le diagramme commutatif, où s désigne la section zéro (équivariante) de ξ et h un G_b-isomorphisme :

$$\begin{tikzcd} & p^{-1}(U) \arrow[dd, "h"] \arrow[dr, "p/p^{-1}(U)"] & \\ U \arrow[ur, "s/U"] \arrow[dr, "\times 0"'] & & U \\ & U \times E_b \arrow[ur, "pr_1"'] & \end{tikzcd}$$

Ce qui prouve que

$$B \xrightarrow{s} E \xrightarrow{p} B$$

est un G-microfibré.

3.5. *G-microfibré tangent à une G-variété:*

Soit X une G-variété topologique au sens du paragraphe précédent. Alors le diagramme

$$\tau(X):\ X \xrightarrow{\ \Delta\ } X\times X \xrightarrow{\ pr_1\ } X \ ,$$

où Δ est l'application diagonale, est un G-microfibré, dit *G-microfibré tangent à X*.

Il suffit naturellement de vérifier la condition de naturalité locale. Soit $x\in X$ et (U,ϕ) une carte en x (i.e. U est un voisinage G_x-invariant de x et $\phi: U\to \mathbf{R}^n(x)$ est un plongement ouvert G_x-équivariant dans le G_x-espace euclidien $\mathbf{R}^n(x)$ tel que $\phi(x)=0$). On peut supposer que ϕ est un G_x-isomorphisme, car $\phi(U)$ contient une boule ouverte centrée en 0 qui est G_x-isomorphe à $\mathbf{R}^n(x)$ (considérer l'application équivariante: $t\longmapsto t/(1-\|t\|)$).

On définit alors un G_x-isomorphisme $h: U\times U\to U\times\mathbf{R}^n(x)$ par

$$h(a,b)=(a,\phi(a)-\phi(b)).$$

Pour $g\in G_x$, on a

$$h(g(a,b))=h(ga,gb)=(ga,\phi(ga)-\phi(gb))=gh(a,b),$$

ce qui prouve que h est G_x-équivariante.

D'autre part le diagramme ci-dessous est clairement commutatif:

$$\begin{tikzcd}
 & U\times U \arrow[dd, "h"] \arrow[dr, "pr_1"] & \\
U \arrow[ur, "\Delta/U"] \arrow[dr, "\times 0"'] & & U \\
 & U\times\mathbf{R}^n(x) \arrow[ur, "pr_1"'] &
\end{tikzcd}$$

4. DEFINITION . MORPHISMES DE G-MICROFIBRES.

On désigne par $G\text{-}Top^2$ la catégorie dont les objets sont les couples (X,A) de G-espaces, où A est contenu dans X, et dont les morphismes sont les germes d'applications équivariantes définies sur des voisinages G-invariants de A dans X.

On notera $\phi : (X, A) \Longrightarrow (Y, B)$ les morphismes de $G\text{-}Top^2$.

Soit alors

$$\chi : B \xrightarrow{i} E \xrightarrow{j} B \quad \text{et} \quad \chi' : B' \xrightarrow{i'} E' \xrightarrow{j'} B'$$

des G-microfibrés. Un morphisme de χ dans χ' est un couple (Φ, f), où

$$\Phi : (E, i(B)) \Longrightarrow (E', i'(B'))$$

est un morphisme de $G\text{-}Top^2$ et $f: B \to B'$ est une application équivariante de sorte que, pour $\phi \in \Phi$, le diagramme suivant soit commutatif:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & U \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\phi"] & B \arrow[d, "f"] \\ B' \arrow[r, "i'"'] & E' \arrow[r, "j'"'] & B' \end{tikzcd}$$

Nous allons maintenant vérifier que la catégorie des G-microfibrés possède des images réciproques et des sommes de Whitney.

5. PROPOSITION. *Soit*

$$\chi : B \xrightarrow{i} E \xrightarrow{j} B$$

un G-microfibré; soit $f: B_1 \to B$ une application équivariante, où B_1 est un G-espace. Le microfibré

$$f^*(\chi): B_1 \xrightarrow{i_1} E_1 \xrightarrow{j_1} B_1 ,$$

défini comme il est d'usage, est un G-microfibré.

PREUVE. On a

$$B_1 \times E \supset E_1 = \{ (b_1, e) \mid f(b_1) = j(e) \} ,$$

$$j_1(b_1, e) = b_1, \quad i_1(b_1) = (b_1, i f(b_1)).$$

Il est clair que E_1 est un G-espace (pour la structure de G-espace produit sur $B_1 \times E$) et que j_1 et i_1 sont équivariantes.

Il reste à voir que $f^*(\chi)$ est G-localement trivial; soit $b_1 \in B_1$ et U un ouvert trivialisant, G_b-invariant, autour de $b = f(b_1)$. Le diagramme ci-dessous est commutatif, où h est un G_b-isomorphisme de la forme

$$h(e) = (j(e), k(e)).$$

$$\begin{tikzcd}
 & V \arrow[dr, "j/V"] \arrow[dd, "h"] & \\
U \arrow[ur, "i/U"] \arrow[dr, "\times 0"'] & & U \\
 & U \times \mathbf{R}^n(b) \arrow[ur, "pr_1"'] &
\end{tikzcd}$$

On pose alors

$$U_1 = f^{-1}(U), \quad V_1 = (U_1 \times V) \cap E_1$$

et l'on définit

$$h_1 : V_1 \to U_1 \times \mathbf{R}^n(b) \quad \text{par} \quad h_1(b_1, e) = (b_1, k(e)).$$

Il est facile de voir que G_{b_1} est contenu dans G_b ; par conséquent U_1 est un voisinage G_{b_1}-invariant de b_1 , $\mathbf{R}^n(b)$ est un G_{b_1}-espace euclidien et h_1 est un G_{b_1}-isomorphisme, de sorte que le diagramme ci-dessous commute

$$\begin{tikzcd}
 & V_1 \arrow[dr, "j_1/V_1"] \arrow[dd, "h_1"] & \\
U_1 \arrow[ur, "i_1/U_1"] \arrow[dr, "0\times"'] & & U_1 \\
 & U_1 \times \mathbf{R}^n(b) \arrow[ur, "pr_1"'] &
\end{tikzcd}$$

6. PROPOSITION.

$$\chi : B \xrightarrow{i} E \xrightarrow{j} B \quad \text{et} \quad \chi_1 : B \xrightarrow{i_1} E_1 \xrightarrow{j_1} B$$

étant deux G-microfibrés de même base B, *le microfibré* $\chi \oplus \chi_1$ *est un G-microfibré.*

PREUVE. Soit $b \in B$ et U un voisinage G_b-invariant de b trivialisant pour χ et χ_1 ; alors $\chi \oplus \chi_1 / U$ est G_b-isomorphe à

$$U \xrightarrow{\times 0} U \times (\mathbf{R}^n(b) \times \mathbf{R}^q(b)) \xrightarrow{pr_1} U$$

où n est la dimension de χ et q celle de χ_1 .

En plagiant Milnor ([M], Lemma 6.4) ou Ibisch (cours de 3e cycle 1971-72, Nantes), on obtient les résultats suivants:

7. PROPOSITION. *Soit* χ *et* χ' *deux G-microfibrés de même base* B *et de même dimension. Soit* $(\Phi, 1_B): \chi \to \chi'$ *un morphisme de G-microfibrés tel que* Φ *ait un représentant injectif; alors* $(\Phi, 1_B)$ *est un isomorphisme.*

8. COROLLAIRE. *Soit* χ *et* χ' *deux G-microfibrés de même dimension et* $(\Phi, f): \chi \to \chi'$ *un morphisme tel que* Φ *possède un représentant injectif. Alors* χ *est isomorphe à* $f^*(\chi')$.

9. NOTE. Les morphismes $(\Phi, f): \chi \to \chi'$ tels que Φ possède un représentant injectif seront désormais appelés *morphismes fibrés.*

Le lemme suivant nous sera utile dans la suite:

10. LEMME. *Soit*

$$\chi: B \xrightarrow{i} E \xrightarrow{j} B$$

un G-microfibré où G agit trivialement sur la base B *que l'on suppose connexe. Alors il existe un G-espace euclidien* M *tel que* χ *soit localement isomorphe au G-microfibré trivial:*

$$B \xrightarrow{\times 0} B \times M \xrightarrow{pr_1} B.$$

PREUVE. Pour tout $b \in B$, il existe un voisinage $V(b)$ de b et un G-espace euclidien $\mathbf{R}^n(b)$ tel que $\chi / V(b)$ soit isomorphe à

$$V(b) \longrightarrow V(b) \times \mathbf{R}^n(b) \longrightarrow V(b).$$

Ainsi à chaque $b \in B$ on associe un G-espace euclidien, donc une représentation $\phi(b) \in Hom(G, O(n))$. L'application

$$\phi: B \to Hom(G, O(n))$$

ainsi définie est localement constante, donc constante car B est connexe; et $\phi(B)$ définit M .

11. LEMME. *Soit*

$$\chi : B \xrightarrow{\ i\ } E \xrightarrow{\ j\ } B$$

un G-microfibré de base paracompacte isomorphe à un microfibré trivial

$$B \xrightarrow{\ \times 0\ } B \times M \xrightarrow{\ pr_1\ } B\ .$$

Alors il existe un G-isomorphisme $h : E_1 \to B \times M$, *où* E_1 *est un voisinage de* $i(B)$ *dans* E *tel que le diagramme ci-dessous soit commutatif:*

$$\begin{tikzcd}
& E_1 \arrow[dr, "j"] \arrow[dd, "h"] & \\
B \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "0\times"'] & & B \\
& B \times M \arrow[ur, "pr_1"'] &
\end{tikzcd}$$

PREUVE. (Comparer avec [M], Lemme 2.3)

On peut d'abord supposer que E est un voisinage ouvert de $B \times 0$ dans $B \times M$. En utilisant une partition de l'unité, on construit une application $\lambda : B \to]0, 1]$ telle que

$$\|x\| < \lambda(b) \implies (b, x) \in E\ .$$

Pour $b \in B$, posons $k(b) = \inf_{g \in G} \lambda(gb)$; alors

k applique B dans $]0, 1]$, car G est compact;

k est clairement G-invariante;

k est continue, grâce à la compacité de G. (Il suffit de prouver que k est semi-continue inférieurement ; donc soit $t \in]0, 1]$ et $b \in B$ tel que $t < k(b)$; on a

$$t < \inf_{g \in G} \lambda(gb) < \lambda(gb), \quad \text{pour tout } g\ .$$

Par conséquent il existe un voisinage W_g de g et un voisinage V_g de b tels que $t < \lambda(W_g V_g)$. Mais il existe

$$g_1, g_2, \ldots, g_k \in G \quad \text{tels que} \quad G = W_{g_1} \cup W_{g_2} \cup \ldots \cup W_{g_k}\ ;$$

on pose alors $V = \bigcap_{i=1}^{k} V_{g_i}$ et l'on obtient $t < \lambda(GV)$; en utilisant une nouvelle fois la compacité de G, il vient $t < k(V)$.)

On définit alors

$$E \supset E_1 = \{ (b,x) \mid \|x\| < k(b) \}$$

et un G-isomorphisme $h : E_1 \to B \times M$ par

$$h(b,x) = \left(b, \frac{x}{k(b) - \|x\|}\right).$$

La norme sur M étant G-invariante, il est clair que E_1 est G-invariant et que h est équivariant.

Pour terminer ce paragraphe, donnons le résultat suivant :

12. PROPOSITION. *Tout G-microfibré ayant pour base un espace homogène de G est isomorphe (au sens des G-microfibrés) à un G-fibré vectoriel.*

PREUVE. a) Soit M un H-espace euclidien, où H est un sous-groupe fermé de G. On fait de $G \times M$ un H-espace en posant

$$h(g,m) = (gh^{-1}, hm) \quad \text{pour } h \in H \text{ et } (g,m) \in G \times M,$$

et l'on note $G \times_H M$ l'espace des orbites ainsi obtenu. On fait de $G \times_H M$ un G-espace en posant : $g[g',m] = [gg',m]$, où $[g',m]$ désigne la classe de $(g',m) \in G \times M$ dans $G \times_H M$. Soit $p : G \times_H M \to G/H$ l'application équivariante définie par

$$p[g,m] = gH \in G/H ;$$

alors $G \times_H M \xrightarrow{p} G/H$ est un G-fibré vectoriel (voir [S], n° 1.6).

b) Un G-microfibré ayant pour base un espace homogène de G se présente sous la forme

$$G/H \xrightarrow{i} E \xrightarrow{j} G/H.$$

Soit U un ouvert H-invariant trivialisant autour de $H \in G/H$ et M la fibre au-dessus de $H \in G/H$; il existe un isomorphisme H-équivariant

$$f : U \times M \to V,$$

où V est un voisinage H-invariant de $i(U)$, tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & V \arrow[dr, "j/V"] & \\
U \arrow[ur, "i/U"] \arrow[dr, "\times 0"'] & & U \\
 & U \times M \arrow[uu, "f"] \arrow[ur, "pr_1"'] &
\end{tikzcd}$$

Soit alors $a : G \times M \to E$ définie par $a(g,m) = gf(H,m)$. Elle induit une application $\tilde{a} : G \times_H M \to E$ qui est clairement équivariante. D'autre part $\tilde{a}$ est injective : si $\tilde{a}[g,m] = \tilde{a}[g',m']$, alors $gf(H,m) = g'f(H,m')$; en utilisant le fait que $jf = pr_1$, il vient

$$gH = g'H, \text{ où } g^{-1}g' = h \in H .$$

Par conséquent

$$f(H,m) = hf(H,m') = f(H,hm'),$$

ce qui prouve que $[g,m] = [g',m']$.

Enfin le diagramme ci-dessous, où s désigne la section zéro de

$$G \times_H M \xrightarrow{p} G/H ,$$

est commutatif.

$$\begin{tikzcd}
 & G/H \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "i"] & \\
G \times_H M \arrow[rr, "\tilde{a}"] \arrow[dr, "p"'] & & E \arrow[dl, "j"] \\
 & G/H &
\end{tikzcd}$$

4. Le théorème d'homotopie pour les G-microfibrés.

Le lemme suivant est la version équivariante du Lemme 6.6 de Milnor [M]. Il n'y a pratiquement rien à changer à la démonstration originale.

1. LEMME. *Soit χ un G-microfibré de base B et soit $\{B_\alpha\}$ une collection localement finie de fermés invariants recouvrant B. Supposons que, pour*

tout α, *il existe un morphisme fibré* $(\Phi_\alpha, f_\alpha): \chi / B_\alpha \to \eta$, *où* η *est un G-microfibré, tel que* (Φ_α, f_α) *et* (Φ_β, f_β) *coïncident sur* $\chi / B_\alpha \cap B_\beta$. *Alors il existe un morphisme fibré* $(\Phi, f): \chi \to \eta$ *qui prolonge les* (Φ_α, f_α).

PREUVE. B' étant la base de η, on définit $f: B \to B'$ par $f / B_\alpha = f_\alpha$; la continuité de f résulte du fait qu'une réunion localement finie de fermés est fermée.

Choisissons alors pour chaque Φ_α un représentant injectif $\phi_\alpha: U_\alpha \to E'$, où U_α est un voisinage ouvert invariant de $i(B_\alpha)$ dans E. Pour tout couple (α, β) tel que $B_\alpha \cap B_\beta \neq \emptyset$, il existe un voisinage ouvert invariant $U_{\alpha\beta}$ de $i(B_\alpha \cap B_\beta)$ dans $U_\alpha \cap U_\beta$ tel que $\phi_\alpha / U_{\alpha\beta} = \phi_\beta / U_{\alpha\beta}$. On définit alors $U \subset E$ comme étant l'ensemble des $e \in E$ tels que

(1) $j(e) \in B_\alpha$ entraîne $e \in U_\alpha$,

(2) $j(e) \in B_\alpha \cap B_\beta$ entraîne $e \in U_{\alpha\beta}$.

U est un voisinage ouvert de $i(B)$. Il est clair que U est G-invariant, car si $e \in U$ et $j(ge) \in B_\alpha$, on a

$$j(e) \in B_\alpha, \text{ d'où } e \in U_\alpha, \text{ d'où } ge \in U_\alpha ;$$

$$\begin{tikzcd}
B_\alpha \arrow[r, "i/B_\alpha"] \arrow[d, "f_\alpha"'] & U_\alpha \arrow[r, "j/U_\alpha"] \arrow[d, "\phi_\alpha"] & B_\alpha \arrow[d, "f_\beta"] \\
B' \arrow[r, "i'"'] & E' \arrow[r, "j'"'] & B'
\end{tikzcd}$$

et les ϕ_α définissent $\phi: U \to E'$ de telle sorte que (Φ, f) soit un morphisme fibré.

NOTE. Dans la suite I est l'intervalle $[0, 1]$. Si B est un G-espace, l'action de G sur $B \times I$ est définie par $g(b, t) = (gb, t)$.

2. LEMME. *Soit* χ *un G-microfibré de base* $B \times I$ *et soit* $b_0 \in B$ *un point fixe. Alors il existe un voisinage invariant* V *de* b_0 *tel que* $\chi / V \times I$ *soit trivial.*

PREUVE. G agit trivialement sur $b_0 \times I$; on applique alors le Lemme 11, n° 3, à $\chi / b_0 \times I$: il existe un G-espace euclidien M tel que $\chi / b_0 \times I$ soit localement isomorphe à

$$b_0 \times I \xrightarrow{\times 0} b_0 \times (I \times M) \xrightarrow{pr_1} b_0 \times I .$$

Pour $t \in I$, il existe un voisinage invariant V_t de b_0 et un voisinage $]t-\epsilon_t, t+\epsilon_t[$ de t tel que $\chi / V_t \times]t-\epsilon_t, t+\epsilon_t[$ soit isomorphe à

$$V_t \times]t-\epsilon_t, t+\epsilon_t[\times M .$$

En utilisant la compacité de I, on construit un voisinage invariant V de b_0 et une subdivision

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k = 1 \text{ de } I$$

tels que $\chi / V \times [t_i, t_{i+1}]$ soit isomorphe à

$$V \times [t_i, t_{i+1}] \xrightarrow{\times 0} V \times [t_i, t_{i+1}] \times M \xrightarrow{pr_1} V \times [t_i, t_{i+1}] .$$

En recollant ces isomorphismes à l'aide du lemme précédent, on obtient le résultat voulu (voir [M], Lemme 6.7).

NOTATION. Si $\chi : B \to E \to B$ est un G-microfibré, on note $\chi \times I$ le G-microfibré

$$B \times I \longrightarrow E \times I \longrightarrow B \times I .$$

3. PROPOSITION. *Soit χ un G-microfibré de base $B \times I$, où B est paracompact. On suppose qu'il existe un recouvrement ouvert invariant $\{ V_\alpha \}$ de B tel que $\chi / V_\alpha \times I$ soit isomorphe à $(\chi / V_\alpha \times \{1\}) \times I$ par un isomorphisme induisant l'identité sur la base ($B \times \{1\} \times I$ étant identifié à $B \times I$). Alors χ est isomorphe à $(\chi / B \times \{1\}) \times I$.*

PREUVE. Pour tout α, il existe un voisinage U_α de $i(V_\alpha \times I)$ isomorphe (en tant que G-espace) à un voisinage $U'_\alpha \times I$ de $i(V_\alpha \times 1) \times I$ de telle sorte que le diagramme ci-dessous soit commutatif:

$$\text{(D)} \qquad \begin{array}{ccccc} V_\alpha \times I & \xrightarrow{i} & U_\alpha & \xrightarrow{j} & V_\alpha \times I \\ \uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \phi_\alpha} & & \uparrow \\ V_\alpha \times 1 \times I & \xrightarrow[i']{} & U'_\alpha \times I & \xrightarrow[j']{} & V_\alpha \times 1 \times I \end{array}$$

En vertu de la Proposition 4, n° 1, on peut supposer que le recouvrement $\{V_\alpha\}$ est G-localement fini ; il existe donc une enveloppe *invariante* de l'unité, soit $\{\lambda_\alpha\}$, subordonnée à $\{V_\alpha\}$.

On désigne alors par

$$r_\alpha : B\times[0,1] \to B\times[0,1]$$

l'application équivariante définie par

$$r_\alpha(b,t) = (b, sup(t, \lambda_\alpha(b))$$

et l'on regarde $B\times[0,1]$ comme la réunion des deux fermés invariants

$$A_\alpha = Supp\ \lambda_\alpha \times[0,1] \quad \text{et} \quad A'_\alpha = \{(b,t) \mid t > \lambda_\alpha(b)\}.$$

Soit $(\Psi_\alpha, r_\alpha) : \chi/A_\alpha \to \chi$, où Ψ_α est définie par

$$\Psi_\alpha(\phi_\alpha(u',t)) = \phi_\alpha(u', sup(t, \lambda_\alpha j(u'))\ ;$$

Ψ_α est clairement équivariante et (Ψ_α, r_α) est l'identité sur $\chi/A_\alpha \cap A'_\alpha$; d'autre part

$$j\Psi_\alpha(\phi_\alpha(u',t)) = (j(u'), sup(t, \lambda_\alpha j(u'))$$

(voir diagramme (D)), ce qui fait que le diagramme ci-dessous commute :

$$\begin{tikzcd} \chi/A_\alpha \arrow[rr, "(\Psi_\alpha, r_\alpha)"] \arrow[dr] & & \chi \\ & \chi/A_\alpha \cap A'_\alpha \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

Donc l'inclusion $\chi/A'_\alpha \hookrightarrow \chi$ coïncide avec (Ψ_α, r_α) sur $\chi/A_\alpha \cap A'_\alpha$. A l'aide du Lemme 1 on peut construire un morphisme fibré

$$(R_\alpha, r_\alpha) : \chi \to \chi\ .$$

Nous allons maintenant «composer» les (R_α, r_α) de façon à obtenir un morphisme fibré $(R,r) : \chi \to \chi$, où $r : B\times I \to B\times I$ désigne la rétraction

$$r(b,t) = (b, 1)\ .$$

Pour cela on munit l'ensemble des $\{\alpha\}$ d'une relation de bon ordre et l'on considère un recouvrement fermé invariant G-localement fini, soit $\{B_\beta\}$, de

B tel que chaque B_β ne rencontre qu'un nombre fini de V_α (voir paragraphe 1.7). Pour B_β donné, soient

$$V_{\alpha_1}, V_{\alpha_2}, \dots, V_{\alpha_k}, \quad \text{avec} \quad \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k,$$

les V_α que rencontre B_β. On définit (R_β, r_β) par

$$R_\beta = R_{\alpha_1} R_{\alpha_2} \dots R_{\alpha_k} \quad \text{et} \quad r_\beta = r_{\alpha_1} r_{\alpha_2} \dots r_{\alpha_k} = r / B_\beta$$

(les autres r_α étant l'identité autour de B_β).

On recolle alors les $(R_\beta, r/B_\beta)$ à l'aide du Lemme 1 et on obtient le morphisme fibré $(R, r) : \chi \to \chi$.

Il s'ensuit que χ est isomorphe à $r^*\chi$, qui est lui-même isomorphe à $(\chi / B \times I)$. C.Q.F.D.

4. PROPOSITION. *Tout G-microfibré χ de base $B \times I$, où B est paracompact, est isomorphe à $(\chi / B \times 1) \times I$.*

PREUVE. Il suffit, en vertu de la proposition précédente, d'exhiber un recouvrement ouvert invariant $\{V_\alpha\}$ de B tel que $\chi / V_\alpha \times I$ soit isomorphe à $(\chi / V_\alpha \times 1)) \times I$.

Cas 1. Soit b un point fixe de B ; alors en raison du Lemme 2, il existe un voisinage V de B tel que $\chi / V \times I$ soit trivial ; donc $\chi / V \times I$ est isomorphe à $(\chi / V \times 1) \times I$.

Cas 2. Soit $b \in B$ avec un groupe d'isotropie $G_b \neq G$ et soit S une tranche en b. Alors $S \times I$ est une G_b-tranche de $S \times I$. Mais $S \times I$ est paracompact, par conséquent $\chi / S \times I$ est isomorphe (en tant que microfibré, en oubliant la G-structure) à $(\chi / S \times \{1\}) \times I$. Il existe donc un voisinage U de $i(S \times I)$ dans $j^{-1}(S \times I)$ (on peut supposer que U est G_b-invariant), un voisinage $U' \times I$ de $i(S \times 1) \times I$ et un isomorphisme $f : U \to U' \times I$, tels que le diagramme ci-dessous soit commutatif:

$$\begin{tikzcd}
S \times I \arrow[r, "i"] \arrow[d] & U \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f"] & S \times I \arrow[d] \\
S \times 1 \times I \arrow[r, "i'"'] & U' \times I \arrow[r, "j'"'] & S \times 1 \times I
\end{tikzcd}$$

On peut supposer (Metatheorem [P], 1.8.1) que f est G_b-équivariante. Or U est un ouvert de la G_b-tranche $j^{-1}(S\times I)$. Par conséquent, en utilisant le Lemme 7, n° 2, f admet un prolongement unique en une application équivariante

$$\bar{f}: GU \to E((\chi/B\times 1)\times I).$$

$\bar{f}$ est clairement injective (utiliser le fait que f a un inverse et que l'identité de U se prolonge de manière unique à GU, donc en l'identité de GU). Par conséquent $\chi/GS\times I$ est isomorphe à $(\chi/GS\times 1)\times I$; or GS est un voisinage de b. C.Q.F.D.

5. THEOREME. *Soit χ un G-microfibré de base B, soit C un G-espace paracompact et $f_0, f_1: C\to B$ deux applications équivariantes G-homotopes. Alors $f_0^*(\chi)$ et $f_1^*(\chi)$ sont des G-microfibrés isomorphes.*

PREUVE. Soit $F: C\times I\to B$ une G-homotopie reliant f_0 à f_1.

Alors $F^*(\chi)$ est un G-microfibré de base $C\times I$; donc en vertu de la proposition précédente :

$$F^*(\chi)\approx (F^*(\chi)/(C\times 1))\times I\approx (F^*(\chi)/(C\times 0))\times I\,;$$

or

$$F^*(\chi)/C\times 1\approx f_1^*(\chi),\quad F^*(\chi)/C\times 0\approx f_0^*(\chi).$$

Par conséquent $f_1^*(\chi)$ est isomorphe à $f_0^*(\chi)$.

5. Le théorème de Kister-Mazur équivariant.

Le but du paragraphe est de prouver la version équivariante du résultat suivant : Tout microfibré contient un unique fibré (voir [KI] et [HO]).

1. DEFINITION. Un *G-fibré topologique* est un diagramme

$$\xi:\ B\xrightarrow{\ s\ }E\xrightarrow{\ p\ }B,$$

où E et B sont des G-espaces, s et p des applications équivariantes telles que $ps = id_B$. On suppose de plus que ξ vérifie la condition suivante de trivialité locale :

Pour tout $b\in B$, il existe un voisinage G_b-invariant de B, soit U, un

G_b-module $\mathbf{R}^n(b)$ et un homéomorphisme G_b-équivariant

$$h : p^{-1}(U) \to U \times \mathbf{R}^n(b)$$

tel que le diagramme ci-dessous soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dl, "s/U"'] \arrow[dr, "\times 0"] & \\ p^{-1}(U) \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "p/p^{-1}(U)"'] & & U \times \mathbf{R}^n(b) \arrow[dl, "pr_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

2. $\xi : B \xrightarrow{s} E \xrightarrow{p} B$ et $\xi' : B' \xrightarrow{s'} E' \xrightarrow{p'} B'$

étant deux G-fibrés, un morphisme $(f, h) : \xi \to \xi'$ est un couple d'applications équivariantes tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "h"] \arrow[d, "s"'] & B' \arrow[d, "s'"] \\ E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & E' \arrow[d, "p'"] \\ B \arrow[r, "h"'] & B' \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

Il est facile de voir que, si $(f, 1_B)$ est un morphisme entre G-fibrés de même base B tel que f soit une bijection sur chaque fibre, alors $(f, 1_B)$ est un isomorphisme (cf. n° 3).

On a aussi le :

3. THEOREME *(d'homotopie pour les G-fibrés). Soit ξ un G-fibré de base B paracompacte et $f_0, f_1 : B' \to B$ deux applications équivariantes G-homotopes. Alors $f_0^*(\xi)$ et $f_1^*(\xi)$ sont deux G-fibrés isomorphes.*

4. DEFINITION. Soit ξ un G-fibré et μ un G-microfibré de même base B et de même dimension. On dit que μ *contient* ξ s'il existe un plongement

équivariant $h: E(\xi) \hookrightarrow E(\mu)$ compatible avec les projections et les sections :

$$\begin{tikzcd}
& B \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
E(\xi) \arrow[rr, hook, "h"] \arrow[dr] & & E(\mu) \arrow[dl] \\
& B &
\end{tikzcd} .$$

Si μ contient ξ, il est clair que μ et ξ sont isomorphes en tant que G-microfibrés.

5. PROPOSITION. *Soit μ un G-microfibré de base $B = GS$, où S est une H-tranche ($H \subset G$, $H \neq G$); alors μ contient un unique G-fibré.*

PREUVE. D'après le théorème de Kister-Mazur, μ/S contient un unique fibré topologique. Nous pouvons donc supposer (Metatheorem) que μ/S contient un unique H-fibré.

Ceci étant, remarquons qu'il existe une bijection entre les H-fibrés de base S et les G-fibrés de base $G \times_H S = GS$ (voir [5], page 132) : Tout H-fibré de base S de la forme $S \to E \to S$ se prolonge en un G-fibré

$$G \times_H S \to G \times_H E \to G \times_H S ;$$

le seul point à vérifier est la trivialité locale de ce dernier fibré : elle provient de la trivialité locale de $G \xrightarrow{can} G/H$ (voir [ST], pages 30-32). Réciproquement, un G-fibré de base GS se restreint à un H-fibré de base S.

Et ceci prouve que μ contient un unique G-fibré.

6. NOTATIONS. 1° M et N étant deux G-espaces euclidiens de même dimension, on note $\mathcal{P}(M,N)$ l'espace des plongements de M dans N préservant l'origine ; $\mathcal{P}(M,N)$ est muni de la topologie CO ; $\mathcal{H}(M,N)$ désigne le sous-espace de $\mathcal{P}(M,N)$ constitué des homéomorphismes.

On fait de $\mathcal{P}(M,N)$ un G-espace en définissant $g.f$, pour $g \in G$ et $f \in \mathcal{P}(M,N)$, par

$$(g.f)(x) = gf(g^{-1}x) .$$

Il est clair que $\mathcal{H}(M,N)$ est alors une partie invariante de $\mathcal{P}(M,N)$.

Remarquons que f est un plongement *équivariant de M dans N* si et seulement si f est un *point fixe* du G-espace $\mathcal{P}(M,N)$. On note $\mathcal{P}_G(M,N)$ l'ensemble des points fixes de $\mathcal{P}(M,N)$ et $\mathcal{P}_G(M,N) \cap \mathcal{H}(M,N)$ est désigné par $\mathcal{H}_G(M,N)$. On écrit $\mathcal{P}(M)$, $\mathcal{H}(M)$, $\mathcal{H}_G(M)$ au lieu de $\mathcal{P}(M,M)$, $\mathcal{H}(M,M)$, $\mathcal{H}_G(M,M)$.

2° Dans la suite $\epsilon_M(B)$ désigne le G-fibré trivial

$$B \xrightarrow{\times 0} B \times M \xrightarrow{pr_1} B.$$

De plus un morphisme injectif entre G-fibrés de même dimension sera appelé un *plongement.*

Le théorème suivant est la version équivariante (légèrement modifiée) d'un résultat de Kister ([KI], Theorem 1); la démonstration est reportée à la fin de ce paragraphe.

7. THEOREME. *Il existe une G-homotopie $F: \mathcal{P}(M,N)\times I \to \mathcal{P}(M,N)$ telle que :*

(1) $F(f,0) = f$ pour tout f dans $\mathcal{P}(M,N)$;

(2) $F(f,1) \in \mathcal{H}(M,N)$;

(3) $F(h,t) \in \mathcal{H}(M,N)$ pour tout $h \in \mathcal{H}(M,N)$ et tout $t \in I$;

(4) Il existe une application invariante $r: \mathcal{P}(M,N) \to]0,1]$ telle que :

$$F(f,1)(v) = f(v) \quad \text{pour} \quad \|v\| < r(f).$$

(5) Enfin F applique $\mathcal{P}_G(M,N)\times I$ dans $\mathcal{P}_G(M,N)$.

8. PROPOSITION. *S'il existe un plongement $\phi: \epsilon_M(B) \hookrightarrow \epsilon_N(B)$, alors il existe un isomorphisme $\Phi: \epsilon_M(B) \approx \epsilon_N(B)$ ayant même germe que ϕ.*

PREUVE. Un plongement $\phi: \epsilon_M(B) \to \epsilon_N(B)$ est de la forme

$$\phi(x,v) = (x, f_x(v)),$$

où $x \mapsto f_x$ est une application continue $f: B \to \mathcal{P}(M,N)$; ϕ étant équivariante, on a $f_{gx}(gv) = g f_x(v)$, ce qui s'écrit encore

$$f_{gx}(v) = g f_x(g^{-1}v) = (g \cdot f_x)(v),$$

en utilisant la structure de G-espace de $\mathcal{P}(M,N)$; et ceci prouve que l'application $f: B \to \mathcal{P}(M,N)$ est équivariante. F étant la déformation définie au théorème précédent, on considère

$$F \circ (f \times id) : B \times I \to \mathcal{P}(M,N)\ ,$$

et l'on définit l'isomorphisme $\Phi : \epsilon_M(B) \approx \epsilon_N(B)$ par

$$\Phi(x,v) = (x,\ F(f_x, 1)(v))\ .$$

Soit alors V le voisinage invariant de $B \times 0$ dans $B \times M$ défini par

$$V = \{ (x,v) \mid \|v\| < r(f_x) \}\ .$$

Pour $(x,v) \in V$ on a

$$\Phi(x,v) = (x,\ F(f_x, 1)(v)) = (x, f_x(v)) = \phi(x,v),$$

ce qui prouve que Φ et ϕ ont même germe.

9. COROLLAIRE. *Soit ξ un G-fibré de base B et $\phi : \epsilon_M(B) \hookrightarrow \xi$ un plongement.*

1° Si ξ est trivial, il existe un isomorphisme $\Phi : \epsilon_M(B) \approx \xi$ ayant même germe que ϕ.

2° Si W est une partie invariante de B telle qu'il existe un isomorphisme $\Psi : \xi / W \to \epsilon_N(W)$, alors il existe un isomorphisme

$$\Psi' : \xi / W \to \epsilon_M(W)\ .$$

PREUVE. Le 1° est évident.

Pour le 2° : il existe un isomorphisme $\Phi : \epsilon_M(W) \approx \epsilon_N(W)$ ayant même germe que le plongement $\Psi : \xi / W \hookrightarrow \epsilon_N(W)$; $\Psi' = \Phi^{-1}\Psi$ est l'isomorphisme cherché.

10. LEMME. *Soit ξ un G-fibré de base B, où B est un G-espace normal, et soit $\phi : \epsilon_M(B) \hookrightarrow \xi$ un plongement. On suppose de plus que l'on peut recouvrir B par deux ouverts invariants W_1 et W_2 tels qu'il existe des isomorphismes*

$$\Phi_i : \epsilon_M(W_i) \approx \xi / W_i \quad (i = 1, 2),$$

Φ_1 ayant même germe que $\phi / \epsilon_M(W_1)$. Alors il existera un isomorphisme $\Phi : \epsilon_M(B) \approx \xi$ ayant même germe que ϕ et tel que

$$\Phi / \epsilon_M(W_1 - W_2) = \Phi_1 / \epsilon_M(W_1 - W_2).$$

PREUVE. (Comparer avec [HO], Lemma 3.1.)

Comme il existe un plongement

$$\phi/\epsilon_M(W_2): \epsilon_M(W_2) \hookrightarrow \xi/W_2 ,$$

on peut supposer que Φ_2 a même germe que ϕ (cf. Corollaire 9). Soit alors α_i ($i = 1, 2$) une partition invariante de l'unité subordonnée à $\{W_i\}_{i=1,2}$. On pose $\alpha = \alpha_1 / W_2$ et

$$A = W_2 - \alpha_2^{-1}\,]0, 1] = \alpha^{-1}(1) \subset \alpha^{-1}\,]0, 1] \subset W_1 \cap W_2 .$$

Soit $\beta : \epsilon_M(W_2) \to \epsilon_M(W_2)$ définie par

$$\beta(x, v) = (x, \alpha(x)v) .$$

Il est clair que la restriction de β à $\epsilon_M(\alpha^{-1}\,]0, 1])$ est un isomorphisme. On définit alors un isomorphisme $\Psi_2 : \epsilon_M(W_2) \to \epsilon_M(W_2)$ par

$$\Psi_2(x, v) = \begin{cases} \beta^{-1}\Phi_2^{-1}\Phi_1\beta(x, v), & \text{pour } (x, v) \in \alpha^{-1}\,]0, 1] \times M , \\ (x, v) & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

La continuité de Ψ_2 résulte du fait que $\Phi_2^{-1}\Phi_1 / W_1 \cap W_2$ a même germe que l'identité.

Enfin, on définit $\Phi : \epsilon_M(B) \approx \xi$ par

$$\Phi / W_2 = \Phi_2 \Psi_2 \quad \text{et} \quad \Phi / W_1 - \mathit{Supp}\,\alpha_2 = \Phi_1 / W_1 - \mathit{Supp}\,\alpha_2 .$$

Et l'on obtient bien le résultat voulu, car $\{W_1 - \mathit{Supp}\,\alpha_2 , W_2\}$ forme un recouvrement ouvert invariant de B et $\Phi_1 / A = \Phi_2 \Psi_2 / A$.

11. PROPOSITION. *Soit $\phi : \epsilon_M(B) \hookrightarrow \xi$ un plongement, où B est paracompacte. Alors il existe un isomorphisme $\Phi : \epsilon_M(B) \approx \xi$ de germe ϕ.*

PREUVE.

a) Il existe un recouvrement ouvert invariant $\{W_j\}_{j \in J}$ de B tel que ξ / W_j soit isomorphe à $\epsilon_M(W_j)$:

- Si b est un point fixe de B, alors il existe un voisinage ouvert invariant $V(b)$ de b tel que $\xi / V(b)$ soit trivial.

- Si $b \in B$ est tel que $G_b \neq G$, on désigne par S une tranche en b. Alors, $\epsilon_M(GS)$ et ξ / GS sont deux G-fibrés contenus dans le microfibré ξ / GS. D'après la Proposition 5 ils sont isomorphes en tant que G-fibrés.

- Enfin, en appliquant le Corollaire 9 précédent, on obtient le résultat voulu.

b) Construction de $\Phi : \epsilon_M(B) \approx \xi$ (voir [HO], Lemma 3.2).

Soit $\{a_j\}_{j \in J}$ une partition invariante de l'unité subordonnée au recouvrement $\{W_j\}$. On pose

$$W_K = \bigcup_{j \in K} W_j, \quad a_K = \sum_{j \in K} a_j,$$

et l'on considère la famille $\mathcal{F}$ des couples

$$(K, \Phi_K), \text{ où } \Phi_K : \epsilon_M(W_K) \approx \xi / W_K$$

est un isomorphisme de germe ϕ / W_K. En vertu du Corollaire 9, $\mathcal{F}$ n'est pas vide. On introduit dans $\mathcal{F}$ la relation d'ordre suivante :

$$(K, \Phi_K) \leqslant (K', \Phi_{K'}) \iff$$
$$K \subset K', \quad x \in W_K \quad \text{et} \quad a_K(x) = a_{K'}(x) \implies$$
$$\Phi_K / \epsilon_M(Gx) = \Phi_{K'} / \epsilon_M(Gx).$$

Si $(K_r, \Phi_r)_{r \in R}$ est une partie totalement ordonnée de $\mathcal{F}$, alors elle possède une borne supérieure. Par conséquent, d'après l'axiome de Zorn, $\mathcal{F}$ possède un élément maximal, soit (K, Φ_K). Si $K \neq J$, soit $j \in J - K$; posons

$$K' = K \cup \{j\}, \quad W_1 = W_K, \quad W_2 = W_j$$

et considérons la partition invariante de l'unité subordonnée à $\{W_1, W_2\}$ et définie par

$$a_1 = a_K / a_{K'}, \quad a_2 = a_j / a_{K'}.$$

En appliquant le Lemme 10, on construit un couple $(K', \Phi_{K'}) > (K, \Phi_K)$, ce qui contredit la maximalité de (K, Φ_K).

12. COROLLAIRE. *Tout G-microfibré trivial (de base paracompacte) contient un unique G-fibré.*

PREUVE. Soit μ un microfibré trivial de base B. D'après le Lemme 11, n° 3, il existe un plongement $\phi : \epsilon_M(B) \hookrightarrow \mu$. Supposons que μ contienne un autre G-fibré, soit ξ. Alors ξ et $\epsilon_M(B)$ sont isomorphes en tant que

G-microfibrés. On déduit du Lemme 11, n° 3, à nouveau qu'il existe un plongement $\epsilon_M(B) \hookrightarrow \xi$; la proposition précédente donne le résultat voulu.

13. LEMME. *Soit μ un G-microfibré. On suppose que:*

1° la base B de μ est un G-espace métrisable,

2° il existe deux ouverts invariants V_1, V_2 tels que $B = V_1 \cup V_2$,

3° V_2 est soit un ouvert invariant trivialisant, soit de la forme

$$V_2 = GS, \text{ où } S \text{ est une } H\text{-tranche } (H \subset G,\ H \neq G),$$

4° μ / V_1 contient un G-fibré ξ_1.

Alors μ contient un G-fibré.

PREUVE.

Cas 1: V_2 est un ouvert invariant trivialisant.

D'après le Corollaire précédent, μ / V_2 contient un unique G-fibré, soit ξ_2. De même $\mu / V_1 \cap V_2$ contient un unique G-fibré; par conséquent, il existe un isomorphisme

$$a : \xi_1 / V_1 \cap V_2 \approx \xi_2 / V_1 \cap V_2 .$$

On pose alors $\xi = \xi_1 \underset{a}{\cup} \xi_2$; ξ est un G-fibré qui se plonge dans μ.

$$\begin{tikzcd}
E(\xi_1 / V_1 \cap V_2) \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & E(\xi_2) \arrow[d, hook] \arrow[dr, hook] & \\
E(\xi_1) \arrow[r, hook] \arrow[drr, hook] & E(\xi) \arrow[dr, dashed] & \\
& & E(\mu)
\end{tikzcd}$$

Cas 2: $V_2 = GS$, où S est une H-tranche.

D'après la Proposition 5, μ / V_2 contient un unique G-fibré, soit ξ_2. Posons $V = V_1 \cap V_2$. Il existe

$$g \in G \quad \text{tel que} \quad gS \cap V \neq \emptyset .$$

Alors $S_1 = gS \cap V$ est une gHg^{-1}-tranche telle que $GS_1 = V$. Toujours d'après la Proposition 5, μ / V contient un unique G-fibré ; par conséquent, il existe un isomorphisme

$$a : \xi_1 / V_1 \cap V_2 \approx \xi_2 / V_1 \cap V_2 .$$

On termine alors comme dans le Cas 1.

14. COROLLAIRE. *Soit μ un G-microfibré de base B métrisable et compacte. On suppose qu'il existe un G-fibré ξ de base V, où V est un ouvert invariant de B, tel que ξ soit contenu dans μ / V. Alors si F est un fermé invariant de V, il existe un voisinage invariant V' de F dans V et un G-fibré η contenu dans μ tel que $\xi / V' \approx \eta / V'$.*

PREUVE. En utilisant la compacité de B, on peut trouver une famille finie $V_1, V_2, \ldots, V_n$ d'ouverts invariants de B tels que :

a) $B - V \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_i \subset B - A$,

b) chaque V_i est soit de la forme GS_i, où S_i est une H_i-tranche (avec $H_i \subset G$), soit tel que μ / V_i soit trivial.

On applique alors le Lemme précédent un nombre fini de fois.

15. PROPOSITION. *Tout G-microfibré de base compacte contient un unique G-fibré.*

PREUVE. L'existence d'un G-fibré contenu dans μ résulte directement du corollaire précédent avec $V = \emptyset$. Il nous reste à prouver l'unicité.

Soit ξ_0 et ξ_1 deux G-fibrés contenus dans μ ; soit t_0 et t_1 deux nombres réels $0 < t_0 < t_1 < 1$. On pose

$$V = B \times ([0, t_0[\cup] t_1, 1]) \quad \text{et} \quad \xi = \xi_0 \times [0, t_0[\cup \xi_1 \times] t_1, 1] \ ;$$

alors ξ est un G-fibré de base V contenu dans $(\mu \times [0, 1])/V$. En appliquant le corollaire précédent, on construit un G-fibré $\bar{\xi}$ prolongeant ξ / V', où V' est un voisinage invariant de $B \times \{0, 1\}$ dans V (i.e. $\bar{\xi} / V' \approx \xi / V'$). Mais en raison du théorème d'homotopie pour les G-fibrés, on a

$$\xi_0 = \xi / B \times 0 \approx \bar{\xi} / B \times 0 \approx \bar{\xi} / B \times 1 \approx \xi / B \times 1 = \xi_1 \ .$$

16. THEOREME. *Soit μ un G-microfibré dont la base B est localement compacte à base dénombrable. Alors μ contient un unique G-fibré.*

PREUVE. Si B est localement compacte à base dénombrable, alors B/G possède la même propriété. Et puisque $\pi : B \to B/G$ est une application propre ([P], 1.1.9), on peut trouver une famille $\{B_n\}_{n\geqslant 0}$ de compacts invariants tels que

$$B_n \subset \overset{\circ}{B}_{n+1} \quad \text{et} \quad B = \bigcup_{n\geqslant 0} B_n ,$$

les $\overset{\circ}{B}_n$ étant également G-invariants.

D'après ce qui précède, on sait que μ/B_n contient un unique G-fibré

$$\xi_n : B_n \xrightarrow{\sigma_n} E_n \xrightarrow{p_n} B_n .$$

Il existe donc des isomorphismes $a_n : \xi_n \approx \xi_{n+1}/B_n$. On définit alors un G-fibré

$$\xi : B \xrightarrow{\sigma} \varinjlim E \xrightarrow{p} B.$$

Le seul point à vérifier est la trivialité locale de ξ ainsi défini : pour tout $x \in B$ il existe un voisinage G_x-invariant, soit U, contenu dans $\overset{\circ}{B}_n$ pour un certain n ; alors ξ/U et ξ_n/U sont isomorphes en tant que G_x-fibrés.

Il nous reste encore à prouver l'unicité de ξ.

Soit ξ' et ξ'' deux G-fibrés contenus dans μ . On pose

$$\xi = \xi' \times [0, t[\cup \xi'' \times]s, 1] \quad \text{avec} \quad 0 < 1/4 < t < s < 3/4 < 1.$$

Soit $n \geqslant 1$; d'après la construction faite en 14, il existe deux nombres

$$t_n , s_n \quad (0 < 1/4 < t_n < t < s < s_n < 3/4)$$

tels que $\xi / B_n \times ([0, t_n[\cup] s_n, 1])$ se prolonge en un G-fibré ξ_n de base $B_n \times I$. On considère alors le G-fibré

$$\eta_n = \xi_n \cup (\xi / B_{n+1} \times ([0, t_n[\cup] s_n, 1])$$

de base

$$B_n \times I \cup B_{n+1} \times ([0, t_n [\cup] s_n, 1]).$$

Alors il existe un G-fibré ξ de base $B_{n+1} \times I$ qui prolonge

$$\eta_n / V_n \times I \cup B_{n+1} \times ([0, t_{n+1}[\cup] s_{n+1}, 1]),$$

où V_n est un voisinage invariant de B_{n-1} et t_{n+1}, s_{n+1} deux réels tels que

$$1/4 < t_{n+1} < t < s < s_{n+1} < 3/4.$$

On obtient ainsi un diagramme commutatif de la forme

$$\begin{tikzcd}
\xi / V_n \times ([0, t_{n+1}[\cup] s_{n+1}, 1]) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \xi_n / V_n \times I \arrow[d, hook] \\
\xi / B_{n+1} \times ([0, t_{n+1}[\cup] s_{n+1}, 1]) \arrow[r] & \xi_{n+1} / B_{n+1} \times I
\end{tikzcd}$$

d'où l'on déduit par récurrence une famille d'inclusions

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \cdot \arrow[d, hook] \\
\xi / V_n \times ([0, 1/4[\cup] 3/4, 1]) \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \xi_n / V_n \times I \arrow[d, hook] \\
\xi / V_{n+1} \times ([0, 1/4[\cup] 3/4, 1]) \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \xi_{n+1} / V_{n+1} \times I \arrow[d, hook] \\
\cdot \arrow[r, hook] & \cdot
\end{tikzcd}$$

Ceci permet de construire un G-fibré $\eta = \varinjlim (\xi_n / V_n \times I)$ de base $B \times I$, contenant $\xi / B \times [0, 1/4[\cup] 3/4, 1]$. En utilisant à nouveau le théorème d'homotopie, on en déduit que :

$$\xi' = \xi / B \times 0 \approx \xi / B \times 1 = \xi'' .$$

17. DEMONSTRATION DU THEOREME 7.

Nous la ferons par une succession de lemmes.

17.1. NOTATIONS. 1° Pour $a \geqslant 0$, $D_M(a)$ désigne la boule fermée centrée en 0 de rayon a de M. On écrira parfois simplement $D(a)$ dans les cas non ambigüs.

2° Si K est un compact de M contenant l'origine, le *rayon de* K est le $\sup \{ r \mid D_M(r) \subset K \}$.

17.2. *Construction d'une homotopie :* Soit

$$\mathbf{R}^4 \supset P = \{ (a, b, c, d) \mid 0 \leqslant a < b < d, \ a < c < d \} .$$

On désigne par $\theta : P \times I \to \mathcal{H}_G(M)$ l'application définie par

$$\theta_t(a,b,c,d)(x) = \begin{cases} x \text{ si } \|x\| \leqslant a \text{ ou } \|x\| \geqslant d, \\ \dfrac{(1-t)b+tc-a}{b-a}\left(1-\dfrac{a}{\|x\|}\right)x + \dfrac{a}{\|x\|}\,x \\ \qquad\qquad \text{pour } a \leqslant \|x\| \leqslant b, \\ \dfrac{(1-t)b+tc-d}{b-d}\left(1-\dfrac{d}{\|x\|}\right)x + \dfrac{d}{\|x\|}\,x \\ \qquad\qquad \text{pour } b \leqslant \|x\| \leqslant d. \end{cases}$$

17.3. LEMME. $\mathbf{R}^4$ *étant muni de la structure de G-espace trivial, on considère le G-espace*

$$Q = \{(f,h;a,b,c,d)\} \subset \mathcal{P}(M,N) \times \mathcal{P}(N) \times \mathbf{R}^4$$

avec

$f(M) \subset h(N)$,

$0 < a < b$, $0 < c < d$ *et* $f(D_M(c)) \supset h(D_N(b))$.

Il existe une G-homotopie $\phi : Q \times I \to \mathcal{H}(N)$ *telle que*

(1) $\phi_0(f,h;a,b,c,d) = id_N$,

(2) $\phi_1(f,h;a,b,c,d)(h D_N(b)) \supset f(D_M(c))$,

(3) $\phi_t(f,h;a,b,c,d)$ *est l'identité sur* $h(D_N(a))$ *et* $N - \overline{f(\overset{\circ}{D}_M(d))}$.

PREUVE. Soit a' le rayon de $f^{-1}h(D_N(a))$, b' celui de $f^{-1}h(D_N(b))$. On a $a' < b' \leqslant c < d$, car

$$h(D_N(a)) \subset h(D_N(b)) \subset f(D_M(c)).$$

Soit a'' le rayon de $h^{-1}f(D_M(a'))$: on a $a'' \leqslant a < b$. On définit $\sigma \in \mathcal{H}(N)$ par

$$\sigma = \begin{cases} h\theta_1(0,a,a'',b)h^{-1} & \text{sur } h(D_N(b)) \\ id & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

et $\Psi_t \in \mathcal{H}(N)$ par

$$\Psi_t = \begin{cases} f\theta_t(a',b',c,d)f^{-1} & \text{sur } f(D_M(d)), \\ id & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

On pose alors $\phi_t = \sigma^{-1}\Psi_t\sigma$.

Compte tenu du fait que $\theta_t(-) \in \mathcal{H}_G(M)$, il est facile de voir que ϕ est équivariante.

17.4. LEMME. *Il existe une application équivariante* $k: \mathcal{P}(M,N) \to \mathcal{P}(N)$ *telle que*

1° pour tout entier $i \geqslant 0$ *on ait* $k(f)(D_N(i)) = D_N(r_i)$, *où* r_i *est le rayon de* $f(D_M(i))$;

2° il existe une application invariante $r': \mathcal{P}(M,N) \to]0,1]$ *ayant la propriété* $k(f)(x) = x$ *pour* $x \in D_N(r'(f))$.

PREUVE. Posons $r'(f) = (1/2)\inf(r_1, 1)$; la continuité de r' provient de [KI], Proposition 3. On définit alors k par :

$$k(f)(x) = \begin{cases} x \quad \text{si} \quad \|x\| < r'(f), \\ \dfrac{1}{1-r'(f)}[(r_1 - r'(f))x + r'(f)(1-r_1)\dfrac{x}{\|x\|}] \\ \qquad \text{pour} \quad r'(f) \leqslant \|x\| \leqslant 1, \\ (r_{i+1} - r_i)x + [r_i(1+i) - i r_{i+1}]\dfrac{x}{\|x\|} \\ \qquad \text{pour} \quad 0 < i \leqslant \|x\| \leqslant i+1. \end{cases}$$

17.5. LEMME. *Soit* $F: \mathcal{P}(M,N) \times [0,1[\to \mathcal{P}(M,N)$ *une application équivariante telle que pour tout entier* $n \geqslant 1$ *on ait*

$$F(f,t)(x) = F(f, 1-(1/2)^n)(x)$$

pour $\|x\| \leqslant n$ *et* $1-(1/2)^n \leqslant t < 1$. *Alors* F *peut être prolongée de façon équivariante sur* $\mathcal{P}(M,N) \times I$.

PREUVE. On définit

$$F(f,1) = \lim_{t \to 1} F(f,t).$$

Pour la continuité en $(f,1)$, voir [KI], Proposition 5.

Il reste à montrer que $F(-,1)$ est équivariante, mais cela est clair car

$$\| F(f,t)(g^{-1}x) - F(f,1)(g^{-1}x) \| < \epsilon$$

implique

$$\| g F(f,t)(g^{-1}x) - gF(f,1)(g^{-1}x)\| < \epsilon ,$$

par conséquent

$$\lim_{t\to 1} F(g.f,t)(x) = \lim_{t\to 1} gF(f,t)(g^{-1}x) = g \lim_{t\to 1} F(f,t)(g^{-1}x),$$

ce qui s'écrit encore $gF(f,1) = F(g.f,1)$.

17.6. LEMME.

1° Il existe une G-homotopie $\alpha : \mathcal{P}(M,N)\times I \to \mathcal{P}(N)$ *telle que:*

(a) $\alpha_0 = k$ *(cf. Lemme 17.4),*

(b) $\alpha_1(f)(N) = f(M)$ *pour tout* $f\in \mathcal{P}(M,N)$,

(c) $\alpha_1(f)(D(r'(f))) = id$.

2° Il existe une G-homotopie $\beta : \mathcal{P}(M,N)\times I \to \mathcal{P}(N)$ *telle que*

(a) $\beta_0 = k$,

(b) $\beta_1(f) = id_N$, *pour tout* $f\in \mathcal{P}(M,N)$.

PREUVE. 1° On pose $\alpha_0 = k$. Puis on définit α_t pour $t\in[0,1/2]$ par

$$\alpha_t(f) = \phi_{2t}(f,\alpha_0(f);1,1,2,3)\,\alpha_0(f),$$

où ϕ est la G-homotopie construite en 17.3.

Supposons avoir défini α_t pour $t\in[0,(1/2)^n]$. Alors pour

$$t\in[1-(1/2)^n, 1-(1/2)^{n+1}]$$

on pose

$$\alpha_t(f)=\phi_{2^{n+1}t-2(2^n-1)}(f,\alpha_{1-(1/2)^n}(f);n+1,n+1,n+2,n+3)\alpha_{1-(1/2)^n}(f).$$

Finalement α_1 est défini comme étant $\lim_{t\to 1}\alpha_t$, ce qui est possible car

$$\alpha_t(f)/D(n) = \alpha_{1-(1/2)^n}(f)/D(n)$$

$$\text{pour } t\in[1-(1/2)^n, 1-(1/2)^{n+1}] .$$

Remarquons encore que, si $\|x\| \leqslant r'(f) \leqslant 1$, alors

$$\alpha_0(f)(x) = x = \alpha_{1/2}(f)(x) = \alpha_1(f)(x).$$

Par conséquent

$$\alpha_1(f)/D(r'(f)) = id.$$

2° Pour $n < a$, on désigne par $\gamma_t(n, a) \in \mathcal{H}_G(N)$ l'homéomorphisme qui laisse fixe $D(n)$ et transforme $D(a)-D(n)$ en

$$D((1-t)a+(n-1)t)-D(n),$$

l'extérieur de $D(a)$ subissant la dilatation correspondante :

$$\gamma_t(n,a)(x) = \begin{cases} x \quad \text{si} \quad \|x\| \leqslant n, \\ \dfrac{(1-t)a-(n-1)t-n}{a-n} x + \dfrac{nt(a-n-1)}{a-n} \dfrac{x}{\|x\|} \\ \qquad\qquad \text{pour} \quad n \leqslant \|x\| \leqslant a, \\ x + ((n-1)t-at)\dfrac{x}{\|x\|} \quad \text{pour} \quad \|x\| \geqslant a. \end{cases}$$

Notons que $\gamma_0(n, a) = id$.

On construit alors β de la façon suivante :

$$\beta_0 = k,$$

$$\beta_t(f) = \gamma_{2t}(0, r_1)\beta_0(f) \quad \text{pour} \quad t \in [0, 1/2],$$

$$\beta_t(f) = \gamma_{4t-2}(1, s_2)\beta_{1/2}(f) \quad \text{pour} \quad t \in [1/2, 3/4],$$

$$s_2 \text{ étant tel que } \beta_{1/2}(f)(D(2)) = D(s_2),$$

$$\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\beta_1 = \lim_{t \to 1} \beta_t .$$

17.7. *Construction de* $F : \mathcal{P}(M,N) \times I \to \mathcal{H}(M,N)$: F est définie par

$$F(f,t) = \begin{cases} \alpha_{1-2t}(f)\alpha_1^{-1}(f)f & \text{pour} \quad t \in [0, 1/2], \\ \beta_{2t-1}(f)\beta_1^{-1}(f)f & \text{pour} \quad t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Désignons alors par $r(f)$ le rayon de $f^{-1}(D(r'(f)))$; pour $\|x\| \leqslant r(f)$, il vient

$$F(f,1)(x) = \beta_1(f)\alpha_1^{-1}(f)f(x) = f(x).$$

BIBLIOGRAPHIE.

B. BING R. H., A homeomorphism between the 3-sphere and the sum of two solid horned spheres, *Ann. of Math.* 56 (1952), 354-362.

BO. BOURBAKI N., *Topologie générale, livre III*, chap. 9, Hermann, Paris, 1958.

H. HANNER O., Some theorems on absolute neighborhood retracts, *Arkiv. Mat.* 1 (1950), 389-408.

HO. HOLM P., The microbundle representation theorem, *Acta Math.* 117 (1967), 191-213.

I. IBISCH H., Microfibrés équivariants et lissage d'actions de groupes de Lie compacts, *C. R. A. S. Paris* 272 (1971), 1038-1040.

I 2. IBISCH H., Microfibrés normaux équivariants, *C. R. A. S. Paris* 279 (1974), 155-156.

KI. KISTER J. M., Microbundles are fibre-bundles, *Ann. of Math.* 80 (1964), 190-199.

K. KOSZUL J. L., Sur certains groupes de transformations de Lie, *Colloque Géo. Diff. Strasbourg* (1963).

M. MILNOR J., Microbundles, *Topology* 3, Supp. 1 (1964), 53-79.

M-Z. MONTGOMERY and ZIPPIN, *Topological transformation groups*, Interscience Publishers Inc., New-York, 1955.

M-Z 2. MONTGOMERY and ZIPPIN, Examples of transformation groups, *Proc. A. M. S.* 5 (1954), 460-465.

P. PALAIS R., The classification of G-spaces, *Mem. A. M. S.* 36 (1960).

S. SEGAL G., Equivariant K-theory, *I. H. E. S.* 34 (1968), 129-151.

ST. STEENROD N., *The topology of fibre bundles*, Princeton Univ. Press, 1951.

Institut de Mathématiques et d'Informatique
Université de Nantes
38 Boulevard Michelet, B. P. 1044
44037 NANTES CEDEX