

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES

YVES DIERS

Complétion monadique

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 17, n° 4 (1976), p. 363-396

http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1976__17_4_363_0

© Andrée C. Ehresmann et les auteurs, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

COMPLETION MONADIQUE

par Yves DIERS

0. Introduction.

Soit \mathbf{A} une catégorie à factorisation. On définit une factorisation (\mathbf{I}, \mathbf{P}) sur la catégorie des monades régulières sur \mathbf{A} et une factorisation (\mathbf{I}, \mathbf{P}) sur une catégorie de catégories au-dessus de \mathbf{A} , de telle façon que le foncteur contravariant sémantique y commute.

Si (\mathbf{M}, I) (resp. (\mathbf{N}, J)) est une catégorie au-dessus de \mathbf{A} , d'image monadique (i. e. de «codensity triple») \mathbf{T} (resp. \mathbf{S}), le morphisme canonique

$$\tilde{I}: (\mathbf{M}, I) \rightarrow (\mathbf{A}^{\mathbf{T}}, U_{\mathbf{T}}) \quad (\text{resp. } \tilde{J}: (\mathbf{N}, J) \rightarrow (\mathbf{A}^{\mathbf{S}}, U_{\mathbf{S}}))$$

appartient à \mathbf{P} . Un morphisme $K: (\mathbf{M}, I) \rightarrow (\mathbf{N}, J)$ définit un morphisme $t: \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{T}$ et, par suite, un morphisme

$$\mathbf{A}^t: (\mathbf{A}^{\mathbf{T}}, U_{\mathbf{T}}) \rightarrow (\mathbf{A}^{\mathbf{S}}, U_{\mathbf{S}}) \quad \text{tel que } \mathbf{A}^t \cdot \tilde{I} = \tilde{J} \cdot K.$$

On donne des conditions suffisantes pour que t soit dans \mathbf{P} ; alors \mathbf{A}^t appartient à \mathbf{I} , si bien que $\mathbf{A}^t \cdot \tilde{I}$ est la factorisation de $\tilde{J} \cdot K$ et que $(\mathbf{A}^{\mathbf{T}}, U_{\mathbf{T}})$ est l'image de $\tilde{J} \cdot K$. On ramène ainsi l'étude de $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ à celle de $\mathbf{A}^{\mathbf{S}}$, qui est triviale si J est monadique (i. e. triplable). En plus, on met ainsi en évidence la catégorie des I -pro-objets (i. e. \mathbf{M} -objets).

Moyennant la démonstration préalable d'une monadicité, par exemple celle de $\mathbf{Comp}^{\mathbf{T}_0}$ ou $\mathbf{IM}(\mathbf{T}_2)$ sur \mathbf{Ens} , les résultats de complétion monadique (i. e. équationnelle) des théorèmes 3.1, 3.2, 3.3 de J. F. Kennison et D. Gildenhuys dans [3] peuvent être retrouvés.

On donne de nombreux exemples, choisis pour une bonne part dans [3], où la méthode ci-dessus permet une description topologique de $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ et de la catégorie des pro-objets.

1. Catégorie à factorisation.

On appelle *catégorie à factorisation* une « bicatégorie » de Kennison [2]. On notera toujours \mathbf{I} et \mathbf{P} les deux classes de morphismes. Si \mathbf{A} et \mathbf{B} sont à factorisation, un foncteur $U: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$

commute à \mathbf{P} (resp. \mathbf{I}) si on a :

$$x \in \mathbf{P} \text{ (resp. } \mathbf{I} \text{)} \Rightarrow Ux \in \mathbf{P} \text{ (resp. } \mathbf{I} \text{)},$$

reflète \mathbf{P} (resp. \mathbf{I}) si on a :

$$Ux \in \mathbf{P} \text{ (resp. } \mathbf{I} \text{)} \Rightarrow x \in \mathbf{P} \text{ (resp. } \mathbf{I} \text{)},$$

commute à (resp. reflète) la factorisation s'il commute à (resp. reflète) \mathbf{P} et \mathbf{I} .

Notons qu'un foncteur qui commute à \mathbf{P} (resp. \mathbf{I}) et qui reflète les isomorphismes reflète \mathbf{I} (resp. \mathbf{P}); en effet: si $x = x_2 \cdot x_1$ est la factorisation de x et si $Ux \in \mathbf{I}$ (par exemple),

$$Ux = Ux_2 \cdot Ux_1 \text{ avec } Ux_1 \in \mathbf{P}$$

et d'après [2], Proposition 1.1 (4), Ux_1 est un isomorphisme et x_1 aussi, donc x appartient à \mathbf{I} .

Notons encore que, si \mathbf{A} est à factorisation, la catégorie duale \mathbf{A}^* l'est aussi et que, si \mathbf{X} est une catégorie, la catégorie $\mathbf{A}^{\mathbf{X}}$ est à factorisation, avec

$$a \in \mathbf{P} \text{ ssi } \forall X \in \mathbf{X}, a_X \in \mathbf{P}$$

et

$$a \in \mathbf{I} \text{ ssi } \forall X \in \mathbf{X}, a_X \in \mathbf{I}.$$

On considère dans toute la suite une catégorie à factorisation \mathbf{A} que l'on supposera complète à gauche.

2. Monade régulière.

La catégorie $\mathbf{Mon}(\mathbf{A})$ a pour objets les monades sur \mathbf{A} et pour morphismes de source $\mathbf{T}' = (T', \eta', \mu')$ et de but $\mathbf{T} = (T, \eta, \mu)$ les transformations naturelles $t: T' \rightarrow T$ vérifiant

$$t \eta' = \eta \quad \text{et} \quad \mu(t * t) = t \mu'.$$

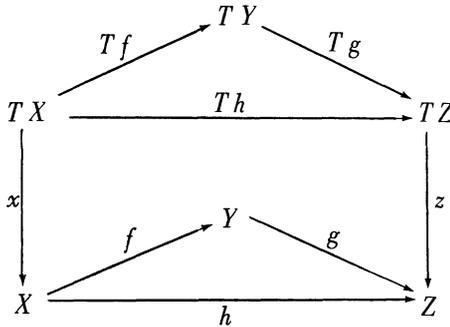
Une monade $\mathbf{T} = (T, \eta, \mu)$ est régulière si T commute à \mathbf{P} .

PROPOSITION 2.1. Si \mathbf{T} est régulière, $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ est munie d'une factorisation telle que $U_{\mathbf{T}}: \mathbf{A}^{\mathbf{T}} \rightarrow \mathbf{A}$ y commute et la reflète.

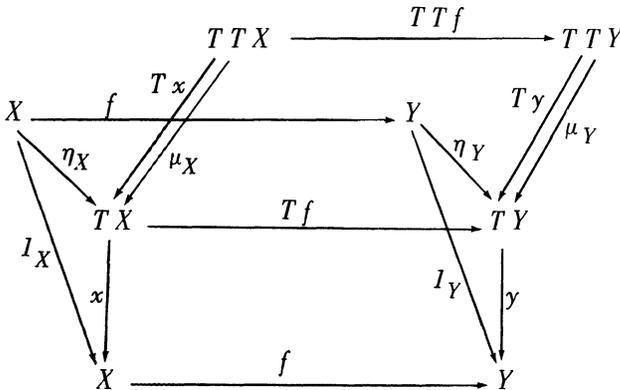
PREUVE. Si $h: (X, x) \rightarrow (Z, z)$ est dans $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$, on pose

$$h \in \mathbf{P} \text{ ssi } Uh \in \mathbf{P} \text{ et } h \in \mathbf{l} \text{ ssi } Uh \in \mathbf{l}.$$

Soit $h = g \circ f$ la décomposition de h dans \mathbf{A} avec $f: X \rightarrow Y$. Le diagramme commutatif



où $Tf \in \mathbf{P}$ et $g \in \mathbf{l}$, met en évidence un morphisme $\gamma: TY \rightarrow Y$ ([2], Proposition 1.1 (6)) rendant commutatif le diagramme augmenté. Le diagramme :



où $f, TTf \in \mathbf{P}$ sont des épimorphismes, montre que $(Y, \gamma) \in \mathbf{A}^{\mathbf{T}}$. En outre:

$$f: (X, x) \rightarrow (Y, \gamma) \in \mathbf{P} \quad \text{et} \quad g: (Y, \gamma) \rightarrow (Z, z) \in \mathbf{l}.$$

PROPOSITION 2.2. Si \mathbf{T}' est régulière et si $t: \mathbf{T}' \rightarrow \mathbf{T}$ appartient à \mathbf{P} , alors \mathbf{T} est régulière.

PREUVE. Si $f: X \rightarrow Y$ est dans \mathbf{P} , on a

$$t_Y \cdot T'f = Tf \cdot t_X \text{ avec } t_Y \cdot T'f \in \mathbf{P}$$

et par suite

$$Tf \cdot t_X \in \mathbf{P} \text{ donc } Tf \in \mathbf{P}$$

([2], Proposition 1.1 (2), dual).

La catégorie $\mathbf{Mon R}(\mathbf{A})$ a mêmes objets et mêmes morphismes unités que $\mathbf{Mon}(\mathbf{A})$ et pour morphismes non unités ceux de $\mathbf{Mon}(\mathbf{A})$ dont la source est une monade régulière. Posons

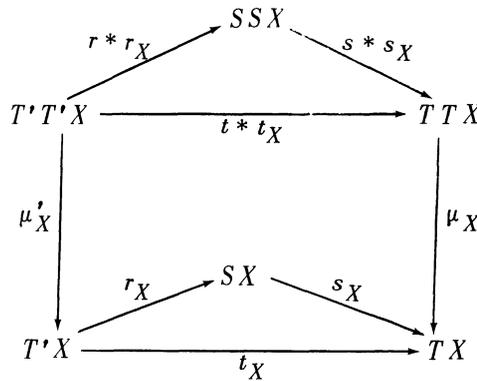
$$t \in \mathbf{P} \text{ (resp. } \mathbf{l} \text{) dans } \mathbf{Mon R}(\mathbf{A}) \text{ ssi } t \in \mathbf{P} \text{ (resp. } \mathbf{l} \text{) dans } \mathbf{A}^{\mathbf{A}}.$$

PROPOSITION 2.3. \mathbf{l} et \mathbf{P} munissent $\mathbf{Mon R}(\mathbf{A})$ d'une factorisation.

PREUVE. Soit $t: \mathbf{T}' \rightarrow \mathbf{T}$ dans $\mathbf{Mon R}(\mathbf{A})$ de factorisation

$$t = s \cdot r \text{ avec } r: \mathbf{T}' \rightarrow \mathbf{S} \text{ et } s: \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{T} \text{ dans } \mathbf{A}^{\mathbf{A}}.$$

Le diagramme commutatif

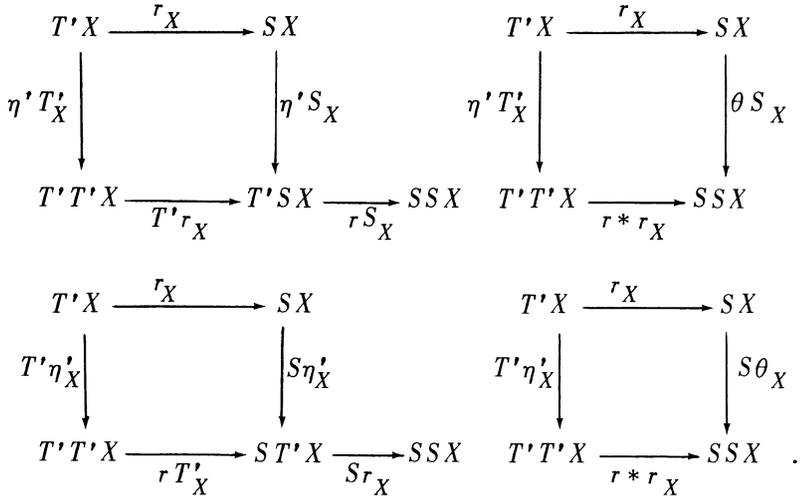


où $s_X \in \mathbf{l}$ et $r_S, T'r_X \in \mathbf{P}$ implique

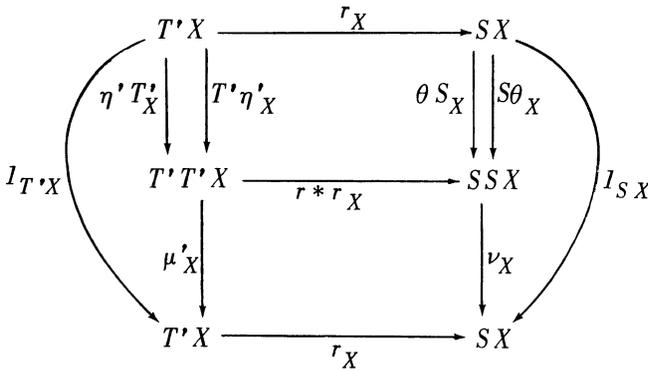
$$r * r_X = r_S \cdot T'r_X \in \mathbf{P},$$

montre qu'il existe un morphisme et un seul $\nu_X: SSX \rightarrow SX$ rendant commutatif le diagramme augmenté, l'unicité prouvant que l'on définit ainsi une

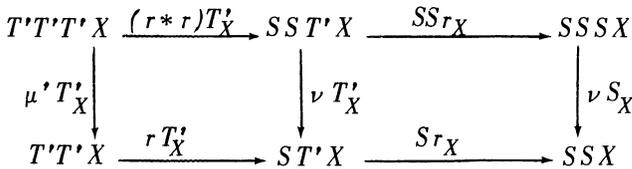
transformation naturelle $\nu: SS \rightarrow S$. En posant $\theta = r\eta'$, on obtient une monade $\mathbf{S} = (S, \theta, \nu)$ sur \mathbf{A} : en effet, la commutativité des diagrammes suivants de gauche implique celle des diagrammes de droite.



Le diagramme



où r_X est épimorphique, montre que $\nu(\theta S) = \nu(S\theta) = I_S$. Les diagrammes commutatifs suivants



$$\begin{array}{ccccc}
 T'T'T'X & \xrightarrow{T'(r*r)_X} & T'SSX & \xrightarrow{rSS_X} & SSSX \\
 \downarrow T'\mu'_X & & \downarrow T'\nu_X & & \downarrow S\nu_X \\
 T'T'X & \xrightarrow{T'r_X} & T'SX & \xrightarrow{rS_X} & SSX
 \end{array}$$

montrent la commutativité de

$$\begin{array}{ccc}
 T'T'T'X & \xrightarrow{r*r*r_X} & SSSX \\
 \downarrow \mu'T'_X & & \downarrow \nu S_X \\
 T'T'X & \xrightarrow{r*r_X} & SSX \\
 \downarrow \mu'_X & & \downarrow \nu_X \\
 T'X & \xrightarrow{r_X} & SX
 \end{array}$$

où $r*r*r_X$ est épimorphique. Ainsi on a $\nu(S\nu) = \nu(\nu S)$.

En outre r est un morphisme de monades $\mathbf{T}' \rightarrow \mathbf{S}$ et, d'après la Proposition 2.2, \mathbf{S} est régulière puisque \mathbf{T}' l'est et que $r \in \mathbf{P}$; comme $s \in \mathbf{I}$, $t = sr$ est une factorisation de t dans $\mathbf{Mon R}(\mathbf{A})$. Il est alors immédiat que $\mathbf{Mon R}(\mathbf{A})$ est à factorisation.

3. Plongement de Birkhoff.

Soit $(X, U) \in (\mathbf{Cat}, \mathbf{A})$ et x un morphisme de X .

x est un \mathbf{I} -monomorphisme (resp. \mathbf{P} -épimorphisme) si $Ux \in \mathbf{I}$ (resp. \mathbf{P}).

$Y \in X$ est un U -rétract de $X \in X$ s'il existe $x: X \rightarrow Y$ et y tels que $(Ux).y$ soit une unité de \mathbf{A} .

Soit $V: (X, U) \rightarrow (X', U')$ un morphisme de $(\mathbf{Cat}, \mathbf{A})$. V est un plongement de Birkhoff si V est un plongement plein dont l'image est fermée pour les produits, les \mathbf{I} -sous-objets et les U' -rétracts. V est un quotient de Birkhoff si tout objet de X' est un U' -rétract d'un \mathbf{I} -sous-objet d'un pro-

duit d'images d'objets de \mathbf{X} par V .

Un foncteur $U: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{A}$ est *injectif pour les sous-objets* (resp. les *objets quotients*) si pour tout $X \in \mathbf{X}$ et tout couple x_1, x_2 de monomorphismes de but X (resp. épimorphismes de source X) on a

$$Ux_1 = Ux_2 \implies x_1 = x_2.$$

On note \mathbf{C} la sous-catégorie de $(\mathbf{Cat}, \mathbf{A})$ ayant mêmes objets et mêmes morphismes unités et pour morphismes non unités ceux de but un foncteur fidèle qui crée les limites projectives et est injectif pour les sous-objets et les objets quotients.

PROPOSITION 3.1. *Les plongements de Birkhoff et les quotients de Birkhoff munissent \mathbf{C} d'une factorisation.*

PREUVE. (a) *Les quotients de Birkhoff sont stables par composition*: Soit $(\mathbf{X}, U) \in \mathbf{C}$, où U crée les \lim , et $X \in \mathbf{X}$. Un \mathbf{l} -sous-objet $\gamma: Y' \rightarrow Y$ d'un U -rétract $x: X \rightarrow Y$ de X est un U -rétract d'un \mathbf{l} -sous-objet de X ; en effet, l'image par U du produit fibré

$$\begin{array}{ccc} Y'' & \xrightarrow{\quad y' \quad} & X \\ \downarrow x' & & \downarrow x \\ Y' & \xrightarrow{\quad \gamma \quad} & Y \end{array} .$$

est un produit fibré; les épimorphismes scindés étant universels, Ux scindé entraîne Ux' scindé; d'après la Proposition 11 (9) duale de [2],

$$Uy \in \mathbf{l} \implies Uy' \in \mathbf{l};$$

ainsi Y' est U -rétract du \mathbf{l} -sous-objet Y'' de X . En outre, soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'objets de \mathbf{X} ; si Y_i est un U -rétract de X_i , $\prod_{i \in I} Y_i$ est un U -rétract de $\prod_{i \in I} X_i$; si Y_i est un \mathbf{l} -sous-objet de X_i , $\prod_{i \in I} Y_i$ est un \mathbf{l} -sous-objet de $\prod_{i \in I} X_i$ ([2] Proposition 11 (8)). Soit

$$V: (\mathbf{X}, U) \rightarrow (\mathbf{X}', U') \quad \text{et} \quad V': (\mathbf{X}', U') \rightarrow (\mathbf{X}'', U'')$$

deux quotients de Birkhoff dans \mathbf{C} . Un objet X'' de \mathbf{X}'' est un U'' -rétract

d'un l-sous-objet de $\prod_{i \in I} V'X'_i$ où $X'_i \in \mathbf{X}'$ et, pour tout $i \in I$, X'_i est U' -rétract d'un l-sous-objet de

$$\prod_{J \in J_i} VX_{iJ} \quad \text{où } X_{iJ} \in \mathbf{X} ;$$

alors $V'X'_i$ est un U'' -rétract d'un l-sous-objet de $\prod_{J \in J_i} V'VX_{iJ}$ et $\prod_{i \in I} V'X'_i$ est un U'' -rétract d'un l-sous-objet de $\prod_{i \in I} \prod_{J \in J_i} V'VX_{iJ}$; un l-sous-objet de $\prod_{i \in I} V'X'_i$ est un U'' -rétract d'un l-sous-objet de $\prod_{i \in I} \prod_{J \in J_i} V'VX_{iJ}$; finalement X'' est un U'' -rétract d'un l-sous-objet de $\prod_{i \in I} \prod_{J \in J_i} V'VX_{iJ}$.

(b) *Les quotients de Birkhoff sont des épimorphismes de \mathbf{C}* : Soit un quotient de Birkhoff $V: (\mathbf{X}, U) \rightarrow (\mathbf{X}', U')$ et $W_0, W_1: (\mathbf{X}', U') \rightarrow (\mathbf{X}'', U'')$ deux morphismes vérifiant $W_0 \cdot V = W_1 \cdot V$; soit $X' \in \mathbf{X}'$. Si $X' = VX$, alors

$$W_1 X' = W_1 VX = W_0 VX = W_0 X'.$$

Si $(X', (p_i)_{i \in I}) = \prod_{i \in I} VX_i$, on a

$$(U'X', (U'p_i)_{i \in I}) \approx \prod_{i \in I} U'VX_i = \prod_{i \in I} UX_i.$$

Or $W_0 p_i$ et $W_1 p_i$ satisfont à

$$U''W_0 p_i = U'p_i = U''W_1 p_i ;$$

U'' créant les $\underline{\lim}$, on a $W_0 p_i = W_1 p_i$ et par suite $W_0 X' = W_1 X'$. Si un l-sous-objet $x': X' \rightarrow X'_0$ d'un objet $X'_0 \in \mathbf{X}'$ est tel que $W_0 X'_0 = W_1 X'_0$, la relation

$$U''W_0 x' = U'x' = U''W_1 x',$$

jointe à l'injectivité de U'' pour les sous-objets, prouve que $W_0 x' = W_1 x'$ et par suite $W_0 X' = W_1 X'$. Si X' est par $x': X'_0 \rightarrow X'$ un U' -rétract d'un objet X'_0 vérifiant $W_0 X'_0 = W_1 X'_0$, la relation

$$U''W_0 x' = U'x' = U''W_1 x',$$

jointe à l'injectivité de U'' pour les objets-quotients, prouve que l'on a :

$$W_0 x' = W_1 x' \quad \text{et par suite } W_0 X' = W_1 X'.$$

La conclusion se déduit alors immédiatement de la définition d'un quotient de Birkhoff et de la fidélité de U'' .

(c) *Les plongements de Birkhoff sont stables par composition: Soit*

$$V: (\mathbf{X}, U) \rightarrow (\mathbf{X}', U') \text{ et } V': (\mathbf{X}', U') \rightarrow (\mathbf{X}'', U'')$$

deux plongements de Birkhoff; alors $V' \cdot V$ est un plongement plein; si $(X_i)_{i \in I}$ est une famille d'objets de \mathbf{X} , $\prod_{i \in I} V' V X_i$ est de la forme $V' X'$, puisque $V' \mathbf{X}'$ est fermée pour les produits. V' étant pleinement fidèle, on a $X' = \prod_{i \in I} V X_i$. Comme $V \mathbf{X}$ est fermée pour les produits, X' est de la forme $V X$ et par conséquent

$$\prod_{i \in I} V' V X_i = V' X' = V' V X.$$

Si $x'' : X'' \rightarrow V' V X$ est un \mathbf{l} -sous-objet, x'' est de la forme $V' x'$, car $V' \mathbf{X}'$ est fermée pour les \mathbf{l} -sous-objets; $x' : X' \rightarrow V X$, étant un \mathbf{l} -sous-objet, est de la forme $V x$, puisque $V \mathbf{X}$ est fermée pour les \mathbf{l} -sous-objets; par suite $x'' = V' V x$. D'une façon analogue on montre que $V' V \mathbf{X}$ est fermée pour les U'' -rétracts.

(d) Il est immédiat que les *plongements de Birkhoff sont des monomorphismes*.

(e) *Tout morphisme $\mathbb{W} : (\mathbf{X}, U) \rightarrow (\mathbf{X}'', U'')$ se factorise en un quotient de Birkhoff et un plongement de Birkhoff: Soit \mathbf{X}' la sous-catégorie pleine de \mathbf{X}'' ayant pour objets les U'' -rétracts des \mathbf{l} -sous-objets des produits d'images d'objets de \mathbf{X} par \mathbb{W} . On note:*

$$V' : \mathbf{X}' \rightarrow \mathbf{X}'' \text{ le plongement, } U' = U'' \cdot V',$$

$$V : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}' \text{ le foncteur induit par } \mathbb{W}.$$

Comme V' est un plongement, U' est fidèle et injectif pour les sous-objets et les objets-quotients. Si $x : X \rightarrow Y$ est un noyau dans \mathbf{X}'' avec $Y \in \mathbf{X}'$, de factorisation $x = x_2 \cdot x_1$, alors x_1 est un noyau et appartient à \mathbf{P} , donc x_1 est un isomorphisme et par suite x appartient à \mathbf{l} et $X \in \mathbf{X}'$; ainsi \mathbf{X}' est fermée pour les noyaux. En ajoutant le fait que \mathbf{X}' est fermée pour les produits, on conclut que \mathbf{X}' est fermée pour les $\underline{\lim}$, et que U' crée les $\underline{\lim}$. Il est en outre immédiat que $V : (\mathbf{X}, U) \rightarrow (\mathbf{X}', U')$ est un quotient de

Birkhoff et que $V': (\mathbf{X}', U') \rightarrow (\mathbf{X}'', U'')$ est un plongement de Birkhoff, d'après la démonstration de la Proposition 3.1 (a).

(f) La factorisation est unique à isomorphisme près: Soit

$$\mathbb{W} = L' \cdot L \quad \text{avec } L: (\mathbf{X}, U) \rightarrow (\mathbf{Y}, U_1) \text{ et } L': (\mathbf{Y}, U_1) \rightarrow (\mathbf{X}'', U'')$$

une factorisation. $L' \mathbf{Y}$ est une sous-catégorie de Birkhoff de \mathbf{X}'' qui contient $L' L \mathbf{X} = \mathbb{W} \mathbf{X}$ et par suite \mathbf{X}' . De plus tout $Y \in \mathbf{Y}$ est U_1 -rétract d'un \mathbf{l} -sous-objet de $\prod_{i \in I} L X_i$, de sorte que $L' Y$ est U'' -rétract d'un \mathbf{l} -sous-objet de

$$\prod_{i \in I} L' L X_i = \prod_{i \in I} \mathbb{W} X_i ;$$

il appartient donc à \mathbf{X}' , et ainsi $L' \mathbf{Y} = \mathbf{X}'$ et $\mathbf{Y} \approx \mathbf{X}'$.

DEFINITION 3.2. Si $\mathbb{W} = V' \cdot V$ est la factorisation de \mathbb{W} , on appelle V' l'image de Birkhoff de \mathbb{W} .

4. Sémantique monadique.

La sémantique monadique sur \mathbf{A} est le foncteur

$$S: \mathbf{Mon}(\mathbf{A})^o \rightarrow (\mathbf{Cat}, \mathbf{A})$$

défini par $S \mathbf{T} = (\mathbf{A}^{\mathbf{T}}, U_{\mathbf{T}})$ et $S t = \mathbf{A}^t$, où

$$\mathbf{A}^t(X, x) = (X, x, t_X) \quad \text{et} \quad \mathbf{A}^t f = f.$$

Notons que la sémantique monadique est pleinement fidèle, que $U_{\mathbf{T}}$ crée les $\underline{\lim}$, est injectif pour les sous-objets et les objets-quotients et par conséquent qu'elle induit un foncteur $\mathbf{Mon R}(\mathbf{A})^o \rightarrow \mathbf{C}$ noté de même.

THEOREME 4.1. Un morphisme $t: \mathbf{T}' \rightarrow \mathbf{T}$ appartient à \mathbf{P} (resp. \mathbf{I}) ssi $\mathbf{A}^t: \mathbf{A}^{\mathbf{T}'} \rightarrow \mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ est un plongement de Birkhoff (resp. un quotient de Birkhoff). En d'autres termes, la sémantique monadique commute à la factorisation et la reflète.

PREUVE. Soit $t: \mathbf{T}' \rightarrow \mathbf{T}$ dans $\mathbf{Mon R}(\mathbf{A})$.

(a) Si t appartient à \mathbf{I} , tout objet de $\mathbf{A}^{\mathbf{T}'}$ est $U_{\mathbf{T}'}$ -rétract d'un objet

de la forme $(T'X, \mu'_X)$, et $t_X: T'X \rightarrow TX \in \mathbf{l}$ implique que $(T'X, \mu'_X)$ est un \mathbf{l} -sous-objet de $\mathbf{A}^t(TX, \mu_X)$; ainsi \mathbf{A}^t est un quotient de Birkhoff.

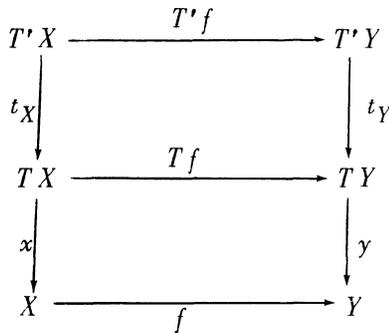
(b) On suppose dans la suite que t appartient à \mathbf{P} . Montrons que \mathbf{A}^t est un plongement plein: La relation $U_{\mathbf{T}'} \cdot \mathbf{A}^t = U_{\mathbf{T}}$, jointe à la fidélité de $U_{\mathbf{T}}$, montre que \mathbf{A}^t est fidèle; si

$$(X, x), (Y, y) \in \mathbf{A}^{\mathbf{T}'} \text{ vérifient } \mathbf{A}^t(X, x) = \mathbf{A}^t(Y, y),$$

alors $(X, x \cdot t_X) = (Y, y \cdot t_Y)$ et par suite

$$X = Y \text{ et } x \cdot t_X = y \cdot t_Y,$$

d'où l'on déduit $x = y$, puisque $t_X \in \mathbf{P}$ est un épimorphisme; ainsi on obtient $(X, x) = (Y, y)$ et \mathbf{A}^t est un plongement. Si f est un morphisme: $\mathbf{A}^t(X, x) \rightarrow \mathbf{A}^t(Y, y)$, le diagramme extérieur

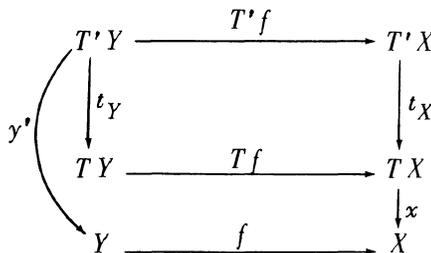


est commutatif et, puisque t_X est épimorphique, le diagramme inférieur l'est aussi; donc f est un morphisme $(X, x) \rightarrow (Y, y)$ et \mathbf{A}^t est plein.

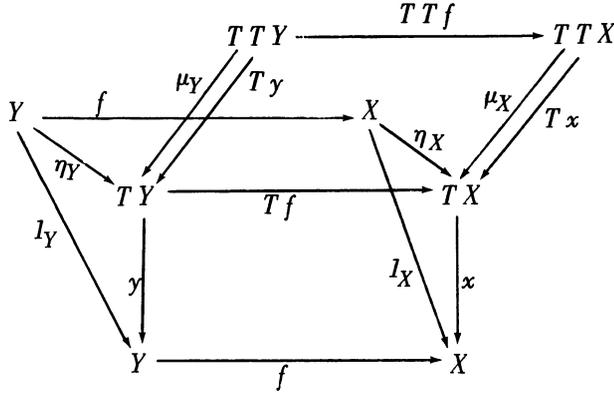
(c) $\mathbf{A}^t(\mathbf{A}^{\mathbf{T}'})$ est fermée pour les \mathbf{l} -sous-objets: Soit

$$(X, x) \in \mathbf{A}^{\mathbf{T}'}, (Y, y') \in \mathbf{A}^{\mathbf{T}'}, \text{ et } f: (Y, y') \rightarrow \mathbf{A}^t(X, x)$$

un \mathbf{l} -monomorphisme de $\mathbf{A}^{\mathbf{T}'}$; le diagramme commutatif



où $t_Y \in \mathbf{P}$ et $f \in \mathbf{I}$, met en évidence un morphisme $y: TY \rightarrow Y$ rendant commutatif le diagramme augmenté; le diagramme



où f est monomorphique, implique que $(Y, y) \in \mathbf{A}^{\mathbf{T}}$; alors

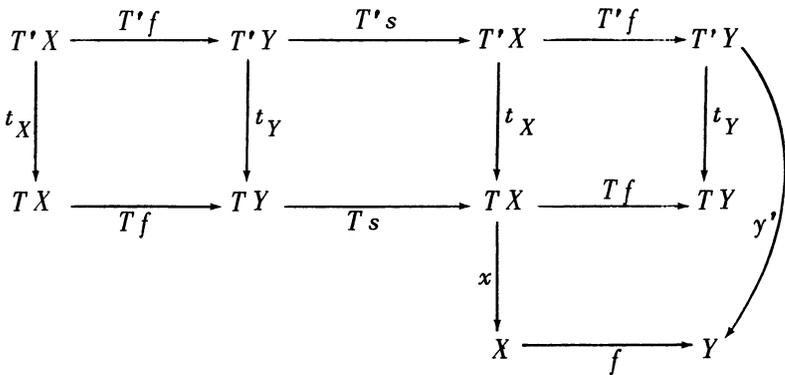
$$\mathbf{A}^t(Y, y) = (Y, y \cdot t_Y) = (Y, y')$$

et $\mathbf{A}^t(\mathbf{A}^{\mathbf{T}})$ est fermée pour les \mathbf{I} -sous-objets.

(d) $\mathbf{A}^t(\mathbf{A}^{\mathbf{T}})$ est fermée pour les $U_{\mathbf{T}}$ -rétractés: si

$$(X, x) \in \mathbf{A}^{\mathbf{T}}, (Y, y') \in \mathbf{A}^{\mathbf{T}'}, f: \mathbf{A}^t(X, x) \rightarrow (Y, y') \text{ et } s: Y \rightarrow X$$

vérifient $f \cdot s = I_Y$, on pose $y = f \cdot x \cdot T s$; alors $y \cdot T f = f \cdot x$; en effet, le diagramme commutatif



montre que l'on a

$$y \cdot (T f) \cdot t_X = f \cdot x \cdot (T s) \cdot t_Y \cdot T' f = f \cdot x \cdot t_X \cdot (T' s) \cdot T' f =$$

$$= y'.(T'f).(T's). T'f = y'. T'f = f.x.t_X$$

et par suite $y.Tf = f.x$; alors

$$y.t_Y.T'f = y.(Tf).t_X = f.x.t_X = y'.T'f ;$$

or f étant un épimorphisme scindé, $T'f$ en est un aussi et par suite on a $y.t_Y = y'$; on voit que $(Y, y) \in \mathbf{A}^T$ par un raisonnement analogue à celui de la Proposition 2.1, et $\mathbf{A}^t(Y, y) = (Y, y')$.

(e) $\mathbf{A}^t(\mathbf{A}^T)$ est fermée pour les produits, puisque U_T et $U_{T'}$ créent les produits.

(f) Ainsi la sémantique monadique commute à la factorisation et, étant pleinement fidèle, elle reflète les isomorphismes donc aussi la factorisation.

5. Stabilité des P-quotients cofiltrés.

Soit \mathbf{X} une catégorie et \mathbf{P} une classe de morphismes de \mathbf{X} . Si λ est un objet de \mathbf{X} , on sait que le foncteur but $(X, \mathbf{X}) \rightarrow \mathbf{X}$ crée les \varprojlim . Notons $\mathbf{P}(X)$ la sous-catégorie pleine de (X, \mathbf{X}) dont les objets sont les \mathbf{P} -quotients de X .

On dit que les \mathbf{P} -quotients cofiltrés sont stables si, pour tout $X \in \mathbf{X}$, $\mathbf{P}(X)$ est fermée pour les \varprojlim cofiltrantes, c'est-à-dire si, pour tout petit diagramme cofiltrant $d: \mathbf{D} \rightarrow (X, \mathbf{X})$, en posant

$$d_i = (X_i, x_i) \text{ pour tout } i \in \mathbf{D},$$

$$X_0 = \varprojlim_{i \in \mathbf{D}} X_i, \quad x = (x_i)_{i \in \mathbf{D}}: X \rightarrow X_0,$$

on a

$$(\forall i \in \mathbf{I}, x_i \in \mathbf{P}) \implies x \in \mathbf{P}.$$

On définit immédiatement la notion duale.

Un diagramme cofiltrant $d: \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{X}$ est \mathbf{P} -régulier si:

$$\text{pour tout } a \text{ dans } \mathbf{D}, da \in \mathbf{P}.$$

LEMME 5.1. Soit \mathbf{X} et \mathbf{Y} deux catégories munies d'une classe \mathbf{P} et soit $V: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ un foncteur qui commute à \mathbf{P} , reflète \mathbf{P} et commute aux \varprojlim cofiltrantes \mathbf{P} -régulières. Si on a

$$g \cdot f \in \mathbf{P} \implies g \in \mathbf{P}$$

et si, dans \mathbf{Y} , les \mathbf{P} -quotients cofiltrés sont stables, ils le sont aussi dans \mathbf{X} .

PREUVE. Avec les notations ci-dessus, supposons $x_i \in \mathbf{P}$ pour tout $i \in \mathbf{D}$; alors le diagramme $d: \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{X}$ est \mathbf{P} -régulier, donc $U X_0 = \varprojlim_{i \in \mathbf{D}} U X_i$; en outre

$U x_i \in \mathbf{P}$, d'où $U x \in \mathbf{P}$, et par suite $x \in \mathbf{P}$.

PROPOSITION 5.2. Si \mathbf{T} est une monade régulière sur \mathbf{A} et si dans \mathbf{A} les \mathbf{P} -quotients cofiltrés sont stables, ils le sont aussi dans $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$.

PREUVE. Il suffit d'appliquer le lemme précédent et la Proposition 2.1, qui précise, en outre, la factorisation sur $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$.

6. Complétion monadique.

Soit $l: \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{A}$ un foncteur.

L'image monadique de l , quand elle existe, est la monade $\mathbf{T} = (T, \eta, \mu)$ sur \mathbf{A} que Linton appelle «codensity triple» dans [4], la complétion monadique de l étant $(\mathbf{A}^{\mathbf{T}}, U_{\mathbf{T}})$.

Alors T est la coextension de Kan de l relativement à l et, si on désigne par $\epsilon: T.l \rightarrow l$ le morphisme associé, η et μ sont définis par les relations:

$$\epsilon(\mu l) = l_I \quad \text{et} \quad \epsilon(\mu l) = l\epsilon(T\epsilon).$$

L'image monadique $\tilde{\mathbf{T}}$ du foncteur canonique $\tilde{l}: \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ est l'image monadique seconde de l , $(\mathbf{A}^{\mathbf{T}})^{\tilde{\mathbf{T}}}$ étant la complétion monadique seconde de l .

On définit l'image monadique d'ordre $n \in \mathbf{N}^*$ et même l'image monadique d'ordre α , pour tout ordinal α [0].

Notons que, si l'image monadique d'ordre $\alpha + 1$ est isomorphe à l'unité, la complétion monadique d'ordre α est la catégorie des l -pro-objets (i. e. \mathbf{M} -objets dans [0] et [3]).

PROPOSITION 6.1. Si l'image monadique d'ordre α est idempotente, l'ima-

ge monadique d'ordre $a + 1$ est isomorphe à l'unité et, par suite, la complétion monadique d'ordre a est la catégorie des l -pro-objets.

PREUVE. On peut supposer $a = 1$. Puisque $U_{\mathbf{T}}$ crée les $\overleftarrow{\lim}$ et est pleinement fidèle, la coextension de Kan de $\tilde{I}: \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ relativement à \tilde{I} existe et, par suite, l'image monadique seconde $\tilde{\mathbf{T}} = (\tilde{T}, \tilde{\nu}, \tilde{\mu})$ aussi; en outre $U_{\mathbf{T}} \cdot \tilde{T}$ est la coextension de Kan de $U_{\mathbf{T}} \cdot \tilde{I}$ relativement à \tilde{I} et T est encore la coextension de Kan de $U_{\mathbf{T}} \cdot \tilde{T}$ relativement à $U_{\mathbf{T}}$, le morphisme associé étant $\epsilon_I: T \cdot U_{\mathbf{T}} \rightarrow U_{\mathbf{T}} \cdot \tilde{T}$. Cette composition des extensions de Kan, jointe aux définitions de μ et $\tilde{\mu}$, permet d'écrire

$$(U_{\mathbf{T}} \tilde{\mu})(\epsilon_I \tilde{T})(T \epsilon_I) = \epsilon_I(\mu U_{\mathbf{T}}).$$

Or $U_{\mathbf{T}}$ étant pleinement fidèle, ϵ_I est un isomorphisme; \mathbf{T} étant idempotente, μ est un isomorphisme, de sorte que $\epsilon_I \tilde{T}$, $T \epsilon_I$, $\mu U_{\mathbf{T}}$ sont des isomorphismes. On en déduit que $U_{\mathbf{T}} \tilde{\mu}$ est un isomorphisme ainsi que $\tilde{\mu}$, car $U_{\mathbf{T}}$ est pleinement fidèle. Ainsi $\tilde{\mathbf{T}}$ est idempotente et

$$U_{\tilde{\mathbf{T}}}: (\mathbf{A}^{\mathbf{T}})^{\tilde{\mathbf{T}}} \rightarrow \mathbf{A}^{\mathbf{T}}$$

est un plongement plein. Or tout $(X, x) \in \mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ est isomorphe à un objet de la forme (TX, μ_X) , lui-même de la forme $\overleftarrow{\lim}_{i \in \mathbf{D}} IX_i$; le fait que $U_{\tilde{\mathbf{T}}}$ crée les $\overleftarrow{\lim}$ montre que

$$(X, x) \in U_{\tilde{\mathbf{T}}} (\mathbf{A}^{\mathbf{T}})^{\tilde{\mathbf{T}}},$$

et par suite $U_{\tilde{\mathbf{T}}}$ est un isomorphisme et $\tilde{\mathbf{T}}$ est isomorphe à l'unité.

THEOREME 6.2. Si $I: \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{A}$, $J: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{A}$ sont des foncteurs tels que:

1° I se factorise par J en un foncteur pleinement fidèle K dont l'image est fermée pour les produits finis et les l -sous-objets.

2° \mathbf{N} est complète à gauche, \mathbf{P} -colocalement petite et à factorisation,

3° J est un adjoint à droite et commute à \mathbf{P} ,

4° dans \mathbf{A} ou dans \mathbf{N} les \mathbf{P} -quotients cofiltrés sont stables.

Alors:

(1) L'image monadique de I existe et est un \mathbf{P} -quotient de l'image monadique \mathbf{S} de J .

(2) La complétion monadique de I est isomorphe à l'image de Birkhoff

de $\tilde{J}.K: (\mathbf{M}, I) \rightarrow (\mathbf{A}^S, U_S)$.

PREUVE. Identifions \mathbf{M} à une sous-catégorie pleine de \mathbf{N} et notons $f \mapsto \bar{f}$ la bijection d'adjonction :

$$\text{Hom}_{\mathbf{A}}(X, JN) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{N}}(LX, N),$$

où L est un adjoint à gauche de J , la naturalité par rapport à n dans \mathbf{N} s'écrivant : pour tout $n: N \rightarrow N'$ dans \mathbf{N} et tout $f: X \rightarrow JN$ dans \mathbf{A} , on a $\overline{(Jn).f} = n.\bar{f}$. Soit $X \in \mathbf{A}$.

(a) Soit $(X, I)_0$ la sous-catégorie pleine de (X, I) dont les objets sont les morphismes (M, f) tels que $\bar{f} \in \mathbf{P}$. $(X, I)_0$ est préordonnée puisque, si

$$m, m': (M, f) \rightarrow (M', f') \text{ dans } (X, I)_0,$$

on a

$$(Im).f = f' = (Im').f,$$

puis successivement

$$\overline{(Im).f} = \overline{(Im').f}, \quad m.\bar{f} = m'.\bar{f}, \quad m = m'.$$

(b) $(X, I)_0$ est petite, puisque \mathbf{N} étant \mathbf{P} -localement petite, LX a, à isomorphisme près, un ensemble de \mathbf{P} -quotients; il y a donc, à isomorphisme près, un ensemble de morphismes de la forme $\bar{f}: LX \rightarrow M$ appartenant à \mathbf{P} , donc un ensemble de morphismes $f: X \rightarrow JM$ objets de $(X, I)_0$.

(c) Montrons que $(X, I)_0$ est cofiltrante. Soit

$$(M, f), (M', f') \in (X, I)_0.$$

Le produit $(M \times M'; p_1, p_2)$ de M et M' existe dans \mathbf{N} , est dans \mathbf{M} d'après l'hypothèse 1, et on a

$$J(M \times M') \approx JM \times JM',$$

puisque J est un adjoint à droite. \mathbf{N} étant à factorisation, le morphisme $(\bar{f}, \bar{f}'): LX \rightarrow M \times M'$ se factorise en

$$(\bar{f}, \bar{f}') = h.g \quad \text{où } g: LX \rightarrow N \text{ et } h: N \rightarrow M \times M'.$$

Or $h \in \mathbf{I}$ et $M \times M' \in \mathbf{M}$ implique $N \in \mathbf{M}$ d'après l'hypothèse 1 et, J commutant à \mathbf{P} , on a $Jg \in \mathbf{P}$. Alors

$$(N, (Jg).\theta_X) \in (X, I)_0 ,$$

où $\theta: I \rightarrow S = J.L$, puisque

$$\overline{(Jg).\theta_X} = g \in \mathbf{P} ,$$

$p_1.h$ est un morphisme $(N, (Jg).\theta_X) \rightarrow (M, f)$ car

$$(Jp_1).(Jh).(Jg).\theta_X = (Jp_1).J(\bar{f}, \bar{f}^t).\theta_X = (J\bar{f}).\theta_X = f ,$$

et $p_2.h$ est un morphisme $(N, (Jg).\theta_X) \rightarrow (M', f')$ étant donné que

$$(Jp_2).(Jh).(Jg).\theta_X = (Jp_2).J(\bar{f}, \bar{f}^t).\theta_X = f' .$$

(d) Montrons que $(X, I)_0$ est initiale dans (X, I) . Soit

$$(M, f) \in (X, I) \text{ et } \bar{f} = h.g \text{ avec } h: N \rightarrow M$$

la factorisation de \bar{f} ; alors

$$N \in \mathbf{M} \text{ et } (N, (Jg).\theta_X) \in (X, I)_0 ,$$

puisque $\overline{(Jg).\theta_X} = g \in \mathbf{P}$. Alors h est un morphisme

$$h: (N, (Jg).\theta_X) \rightarrow (M, f)$$

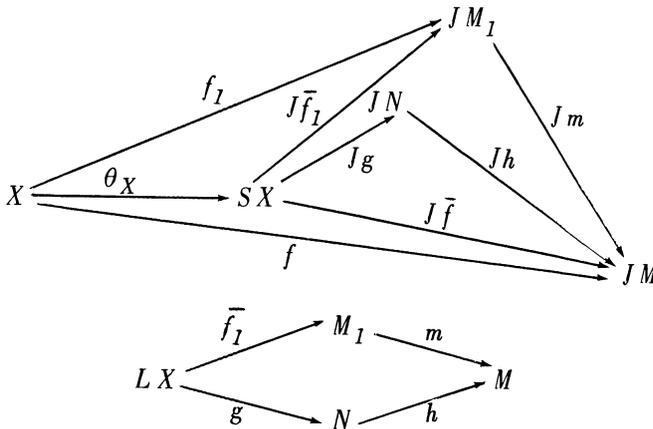
car

$$(Jh).(Jg).\theta_X = (J\bar{f}).\theta_X = f .$$

En outre, si

$$(M_1, f_1) \in (X, I)_0 \text{ et } m: (M_1, f_1) \rightarrow (M, f) \text{ dans } (X, I) ,$$

la commutativité du premier diagramme ci-dessous implique celle du second.



Comme $f_I \in \mathbf{P}$ et $h \in \mathbf{I}$, il existe un morphisme $m_I: M_I \rightarrow N$ rendant commutatifs les diagrammes augmentés. Alors m_I est un morphisme

$$m_I: (M_I, f_I) \rightarrow (N, (Jg) \cdot \theta_X).$$

(e) Si $b: (X, I)_0 \rightarrow \mathbf{M}$ est le foncteur but, $RX = \varprojlim K b$ existe d'après l'hypothèse 2; notons $r_X: LX \rightarrow RX$ le morphisme défini par:

$$p_f \cdot r_X = \bar{f} \quad \text{pour tout } (M, f) \in (X, I)_0,$$

où p_f désigne la projection d'indice (M, f) . Comme J commute aux \varprojlim ,

$$TX = \varprojlim J K b = J R X$$

existe pour tout $X \in \mathbf{A}$. On sait que TX définit la coextension de Kan $\cdot T$ de I relativement à I , et par suite l'image monadique $\mathbf{T} = (T, \eta, \mu)$ de I et que l'on a un morphisme

$$t: \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{T} \quad \text{défini par } t_X = J r_X.$$

Si dans \mathbf{N} les \mathbf{P} -quotients cofiltrés sont stables, r_X appartient à \mathbf{P} et, J commutant à \mathbf{P} , on a $t_X \in \mathbf{P}$, d'où $t \in \mathbf{P}$. Si dans \mathbf{A} les \mathbf{P} -quotients cofiltrés sont stables,

$$t_X: SX \rightarrow J R X = \varprojlim J K b$$

est défini par $(J p_f) \cdot t_X = J \bar{f}$; or $J \bar{f} \in \mathbf{P}$, donc $t_X \in \mathbf{P}$ et $t \in \mathbf{P}$. On conclut que \mathbf{T} est un \mathbf{P} -quotient de \mathbf{S} .

(f) $\mathbf{A}^t: (\mathbf{A}^{\mathbf{T}}, U_{\mathbf{T}}) \rightarrow (\mathbf{A}^{\mathbf{S}}, U_{\mathbf{S}})$ est un plongement de Birkhoff d'après Théorème 4.1. Par ailleurs

$$\tilde{I}: (\mathbf{M}, I) \rightarrow (\mathbf{A}^{\mathbf{T}}, U_{\mathbf{T}})$$

est un quotient de Birkhoff, puisque tout objet (X, x) de $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ est $U_{\mathbf{T}}$ -rétract de (TX, μ_X) qui est \varprojlim d'objets images par I . Alors \mathbf{A}^t est l'image de Birkhoff de $\mathbf{A}^t \cdot \tilde{I} = \tilde{J} \cdot K$.

COROLLAIRE 6.3. *Si $J = 1_{\mathbf{A}}$ dans le théorème précédent, alors l'image monadique de I est idempotente et sa complétion monadique est isomorphe à la catégorie des I -pro-objets.*

PREUVE. La monade unité, notée \mathbf{A} , est un objet initial de $\mathbf{Mon}(\mathbf{A})$, le morphisme $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{T} = (T, \eta, \mu)$ étant η . Puisqu'ici $t: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{T}$, alors

$$t = \eta \text{ et } \mathbf{A}^t = U_{\mathbf{T}},$$

qui est alors pleinement fidèle. Ainsi \mathbf{T} est idempotent et la Proposition 6.1 permet de conclure.

Lorsque

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}_0} \text{ et } J = U_{\mathbf{T}_0},$$

où \mathbf{T}_0 est une monade sur \mathbf{A} , les résultats précédents se complètent en le théorème suivant, où 4' désigne l'hypothèse 4 du Théorème 6.2 dans sa seconde éventualité.

THEOREME 6.4. Si

$$I: \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{A} \text{ et } U_{\mathbf{T}_0}: \mathbf{A}^{\mathbf{T}_0} \rightarrow \mathbf{A}$$

sont deux foncteurs satisfaisant aux conditions 1, 2, 3, 4 du Théorème 6.2, alors :

(1) L'image monadique de I est un \mathbf{P} -quotient de \mathbf{T}_0 .

(2) La complétion monadique de I est isomorphe à l'image de Birkhoff de $I_0: (\mathbf{M}, I) \rightarrow (\mathbf{A}^{\mathbf{T}_0}, U_{\mathbf{T}_0})$.

(3) L'image monadique seconde de I existe et est idempotente.

(4) La complétion monadique seconde de I , la catégorie des I -pro-objets, la complétion monadique de I_0 et la catégorie des I_0 -pro-objets sont isomorphes. Elles sont des images de Birkhoff de

$$I_0: (\mathbf{M}, I_0) \rightarrow (\mathbf{A}^{\mathbf{T}_0}, I_{\mathbf{A}^{\mathbf{T}_0}}),$$

dans 4'.

(5) En outre, si dans 4' tout $U_{\mathbf{T}_0}$ -rétract d'un I -pro-objet est un I -pro-objet, la complétion monadique est isomorphe à toutes les catégories de (1).

PREUVE. (a) L'image monadique de $U_{\mathbf{T}_0}$ étant \mathbf{T}_0 , les conclusions (1) et (2) découlent du Théorème 6.2.

(b) Plaçons-nous dans l'hypothèse 4'. L'image monadique

$$\tilde{\mathbf{T}}_0 = (\tilde{T}_0, \tilde{\eta}_0, \tilde{\mu}_0) \text{ de } I_0$$

existe et est idempotente (Corollaire 6.3). Sa complétion monadique, à sa-

voir $(\mathbf{A}^{\mathbf{T}_0})^{\tilde{\mathbf{T}}_0}$, est l'image de Birkhoff de

$$I_0 : (\mathbf{M}, I_0) \rightarrow (\mathbf{A}^{\mathbf{T}_0}, I_{\mathbf{A}^{\mathbf{T}_0}}),$$

est isomorphe à la catégorie des I_0 -pro-objets et

$$U_{\tilde{\mathbf{T}}_0} : (\mathbf{A}^{\mathbf{T}_0})^{\tilde{\mathbf{T}}_0} \rightarrow \mathbf{A}^{\mathbf{T}_0}$$

est un plongement plein. En factorisant I_0 en $I_0 = \mathbf{A}^t \cdot \tilde{I}$, où $t: \mathbf{T}_0 \rightarrow \mathbf{T}$, et en composant les coextensions de Kan correspondantes, on montre comme dans la démonstration de la Proposition 6.1 que l'image monadique $\tilde{\mathbf{T}}$ de \tilde{I} existe et est idempotente. Alors $(\mathbf{A}^{\mathbf{T}})^{\tilde{\mathbf{T}}}$ est isomorphe à la catégorie des I -pro-objets et $U_{\tilde{\mathbf{T}}} : (\mathbf{A}^{\mathbf{T}})^{\tilde{\mathbf{T}}} \rightarrow \mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ est un plongement plein (Proposition 6.1). Or les deux plongements pleins

$$\mathbf{A}^t \cdot U_{\tilde{\mathbf{T}}} : (\mathbf{A}^{\mathbf{T}})^{\tilde{\mathbf{T}}} \rightarrow \mathbf{A}^{\mathbf{T}_0} \quad \text{et} \quad U_{\tilde{\mathbf{T}}_0} : (\mathbf{A}^{\mathbf{T}_0})^{\tilde{\mathbf{T}}_0} \rightarrow \mathbf{A}^{\mathbf{T}_0}$$

ont pour image la sous-catégorie pleine de $\mathbf{A}^{\mathbf{T}_0}$ ayant pour objets les I_0 -pro-objets, donc $(\mathbf{A}^{\mathbf{T}})^{\tilde{\mathbf{T}}} \approx (\mathbf{A}^{\mathbf{T}_0})^{\tilde{\mathbf{T}}_0}$. Dans l'hypothèse 5, on voit immédiatement que l'image de Birkhoff de

$$I_0 : (\mathbf{M}, I_0) \rightarrow (\mathbf{A}^{\mathbf{T}_0}, I_{\mathbf{A}^{\mathbf{T}_0}})$$

égale l'image de Birkhoff de

$$I_0 : (\mathbf{M}, I) \rightarrow (\mathbf{A}^{\mathbf{T}_0}, U_{\mathbf{T}_0}).$$

(c) Dans l'hypothèse 4, on peut encore démontrer que $\tilde{\mathbf{T}}_0$ existe, et est idempotente. En effet, les foncteurs I_0 et $I_{\mathbf{A}^{\mathbf{T}_0}}$ vérifient les hypothèses 1, 2, 3 du Théorème 6.2, et par suite les parties (a), (b), (c), (d) en totalité, et (e) partiellement, de la démonstration sont valables. Ainsi on a un morphisme $t_0 : \mathbf{A}^{\mathbf{T}_0} \rightarrow \tilde{\mathbf{T}}_0$, où $\mathbf{A}^{\mathbf{T}_0}$ désigne la monade unité de $\mathbf{A}^{\mathbf{T}_0}$, qui, pour tout $(X, x_0) \in \mathbf{A}^{\mathbf{T}_0}$, est défini par :

$$p_{f_0} \cdot t_0 (X, x_0) = f_0, \quad \text{où} \quad f_0 : (X, x_0) \rightarrow I_0 \cdot M \in \mathbf{P}.$$

Appliquant le foncteur $U_{\mathbf{T}_0}$ qui commute aux \varprojlim , on a

$$(U_{T_0} p_{f_0}) \cdot (U_{T_0} t_0(X, x_0)) = U_{T_0} f_0.$$

Or U_{T_0} commute à \mathbf{P} , donc $U_{T_0} f_0 \in \mathbf{P}$; puisque dans \mathbf{A} les \mathbf{P} -quotients cofiltrés sont stables, $U_{T_0} t_0(X, x_0) \in \mathbf{P}$ est un épimorphisme, et $t_0(X, x_0)$ aussi, car U_{T_0} est fidèle (partie (b) de la démonstration du Théorème 4.1) et \tilde{T}_0 est idempotente. La démonstration se poursuit alors comme en (b) ci-dessus.

PROPOSITION 6.5. Si $l: \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{A}$ et $J: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{A}$ ont des images monadiques et si l se factorise par J en un quotient de Birkhoff $K: (\mathbf{M}, I) \rightarrow (\mathbf{N}, J)$, l'image monadique \mathbf{S} de J est un l -sous-objet de l'image monadique \mathbf{T} de l et le morphisme $(\mathbf{A}^T, U_T) \rightarrow (\mathbf{A}^S, U_S)$ est un quotient de Birkhoff.

PREUVE. Avec les notations de la démonstration 6.2, on a $\tilde{J} \cdot K = \mathbf{A}^t \cdot \tilde{I}$. Or

$$\tilde{J}: (\mathbf{N}, J) \rightarrow (\mathbf{A}^S, U_S)$$

est un quotient de Birkhoff ((f) de la démonstration 6.2), donc

$$\tilde{J} \cdot K = \mathbf{A}^t \cdot \tilde{I} \in \mathbf{P};$$

par suite $\mathbf{A}^t \in \mathbf{P}$ ([2] Proposition 1.1) et $t \in I$ (Théorème 4.1).

7. Applications.

Dans \mathbf{Ens} , soit \mathbf{T} une monade, \mathbf{T}_0 une monade de rang fini (i.e. une théorie algébrique suivant Lawvere), \mathbf{T}_1 la monade des groupes, \mathbf{T}_2 une monade de rang fini au-dessus de \mathbf{T}_1 . Si \mathbf{B} est une catégorie à produits (resp. produits finis), on note \mathbf{B}^T (resp. \mathbf{B}^{T_0}) la catégorie des \mathbf{T} - (resp. \mathbf{T}_0)-algèbres dans \mathbf{B} .

Un noyau de $X \in \mathbf{Top-Sep}^{\mathbf{T}_2}$ est un sous-ensemble H de X de la forme

$$H = \{ x \in X \mid f(x) = I \},$$

où f est un morphisme de $\mathbf{Ens}^{\mathbf{T}_2}$; alors le groupe X/H est muni naturellement d'une structure de \mathbf{T}_2 -algèbre; une classe de X est une partie de la forme xH , où $x \in X$ et où H est un noyau. X est linéairement compact si tout filtre de classes fermées de X a une intersection non vide.

$\mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$ est la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Top-Sep}^{\mathbf{T}_2}$ ayant pour objets les \mathbf{T}_2 -algèbres topologiques séparées linéairement compactes ayant une base de voisinages ouverts de l'origine formée de noyaux. $\mathbf{LM}(\mathbf{T}_2)$ est la sous-catégorie pleine de $\mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$ ayant pour objets les \mathbf{T}_2 -algèbres topologiques X séparées linéairement compactes «maximales», i.e. telles que, si H est un noyau fermé de X et si la \mathbf{T}_2 -algèbre discrète X/H est linéairement compacte, alors H est un ouvert de X . $\mathbf{Ens}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{T}_2}$ est la catégorie des \mathbf{T}_2 -algèbres discrètes linéairement compactes. $\mathbf{Ens}_{\mathbf{Ar}}^{\mathbf{T}_2}$ est la catégorie des \mathbf{T}_2 -algèbres discrètes artiniennes, i.e. telles que toute suite décroissante de noyaux est stationnaire [3].

PROPOSITION 7.1. *Les \mathbf{P} -quotients cofiltrés sont stables pour :*

- (1) $\mathbf{A} = \mathbf{Top-Sep}$ et $\mathbf{P} =$ les morphismes denses.
- (2) $\mathbf{A} = \mathbf{Top-Sep}^{\mathbf{T}}$ et $\mathbf{P} =$ les morphismes denses.
- (3) $\mathbf{A} = \mathbf{Comp}^{\mathbf{T}^\circ}$ ou $\mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$ et $\mathbf{P} =$ les morphismes surjectifs.
- (4) $\mathbf{A} = \mathbf{LM}(\mathbf{T}_2)$ et $\mathbf{P} =$ les morphismes surjectifs, si \mathbf{A} est monadique sur \mathbf{Ens} .

Les \mathbf{l} -sous-objets filtrés sont stables pour :

- (5) $\mathbf{A} = \mathbf{Top}$ ou $\mathbf{Top-Sep}$ et $\mathbf{l} =$ les morphismes injectifs.
- (6) $\mathbf{A} = \mathbf{Ens}^{\mathbf{T}^\circ}$, où \mathbf{A} est localement de présentation finie [8], et $\mathbf{l} =$ les monomorphismes ou les noyaux.

PREUVE. (a) Soit \mathbf{P} la classe des morphismes denses de $\mathbf{Top}^{\mathbf{T}}$ ou de $\mathbf{Top-Sep}^{\mathbf{T}}$, i.e. des \mathbf{T} -homomorphismes continus $f: X \rightarrow Y$ dont l'image $f(\setminus)$ est dense dans Y . Montrons que, dans \mathbf{Top} , les \mathbf{P} -quotients cofiltrés sont stables. Avec les notations du 5, montrons que $x(X)$ est dense dans X_0 , x_i étant dense. X_0 étant muni de la topologie initiale définie par les projections $p_i: X_0 \rightarrow X_i$, un ouvert de base non vide U de X_0 est de la forme $U = \bigcap_{i \in I_0} p_i^{-1}(U_i)$, où I_0 est une partie finie de $Ob(\mathbf{D})$ et U_i un ouvert de X_i ; le diagramme étant cofiltrant, il existe $i_0 \in I$ tel que

$$p_i = q_{ii_0} \cdot p_{i_0} \quad \text{avec} \quad q_{ii_0}: X_{i_0} \rightarrow X_i,$$

pour tout $i \in I_0$ et par suite $U_{i_0} = \bigcap_{i \in I_0} q_{ii_0}^{-1}(U_i)$ est un ouvert de X_{i_0} vé-

rifiant

$$p_{i_0}^{-1}(U_{i_0}) = \bigcap_{i \in I_0} p_{i_0}^{-1} q_{i i_0}^{-1}(U_{i_0}) = \bigcap_{i \in I_0} p_i^{-1}(U_i) = U ;$$

alors U_{i_0} est non vide et on a

$$x^{-1}(U) = x^{-1} p_{i_0}^{-1}(U_{i_0}) = x_{i_0}^{-1}(U_{i_0}) \neq \emptyset .$$

Cela montre que $x(X)$ est dense dans X_0 .

(b) Les foncteurs

$$\mathbf{Top}^T \text{ ou } \mathbf{Top-Sep}^T \rightarrow \mathbf{Top}$$

commutant aux \varprojlim , à \mathbf{P} et reflétant \mathbf{P} , les \mathbf{P} -quotients cofiltrés sont stables dans \mathbf{Top}^T et dans $\mathbf{Top-Sep}^T$ (Lemme 5.1). On sait, en outre, que les morphismes denses de $\mathbf{Top-Sep}$ sont les épimorphismes et que les morphismes denses de \mathbf{Comp}^T sont les morphismes surjectifs.

(c) Soit $f: X \rightarrow Y$ dans $\mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$. Si

$$H = \{ x \in X \mid f(x) = 1 \} ,$$

la \mathbf{T}_2 -algèbre X/H est isomorphe à la \mathbf{T}_2 -algèbre $f(X)$; munie de la topologie quotient de celle de X , elle devient un objet de $\mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$ ([3], paragraphe 3, remarque (2)); munie de la topologie induite par celle de Y , $f(X)$ devient aussi un objet de $\mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$, qui est, par suite, complet ([3] paragraphe 3, remarque (3)), et donc fermé dans Y .

Ainsi les morphismes denses de $\mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$ ou $\mathbf{LM}(\mathbf{T}_2)$ sont les morphismes surjectifs. Soit \mathbf{P} la classe de ces morphismes. Le foncteur

$$\mathbf{L}(\mathbf{T}_2) \rightarrow \mathbf{Top-Sep}^{T_2}$$

commutant aux \varprojlim cofiltrantes \mathbf{P} -régulières ([3] paragraphe 3, Théorème (2)), à \mathbf{P} et reflétant \mathbf{P} , les \mathbf{P} -quotients cofiltrés sont stables dans la catégorie $\mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$.

(d) Reprenons les notations du 5 dans $\mathbf{LM}(\mathbf{T}_2)$. Soit X_I la \varprojlim de $(X_i)_{i \in \mathbf{D}}$ dans $\mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$; puisque $x_i \in \mathbf{P}$ dans $\mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$, on a

$$x_I: X \rightarrow X_I \in \mathbf{P} \text{ dans } \mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$$

d'après (c). Par ailleurs le foncteur $\mathbf{L}(\mathbf{T}_2) \rightarrow \mathbf{Ens}$ commute aux \varprojlim co-

filtrantes **P**-régulières et le foncteur $\mathbf{LM}(\mathbf{T}_2) \rightarrow \mathbf{Ens}$ commute aux \varprojlim , puisqu'il est monadique (hypothèse 4). Alors les ensembles X_0 et X_1 sont isomorphes, ainsi que les applications

$$x: X \rightarrow X_0 \quad \text{et} \quad x_1: X \rightarrow X_1$$

et par suite x est surjective. Cela montre que les **P**-quotients cofiltrés sont stables dans $\mathbf{LM}(\mathbf{T}_2)$.

(e) Si **A** est localement de présentation finie [8], les sous-objets (resp. les sous-objets qui sont des noyaux) filtrés sont stables, puisque les \varprojlim filtrantes commutent aux \varprojlim finies [8]. En outre, \mathbf{T}_0 étant de rang fini, $\mathbf{Ens}^{\mathbf{T}_0}$ est localement de présentation finie [8].

(f) Soit **I** la classe des morphismes injectifs de **Top** ou **Top-Sep**. Le foncteur $\mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Ens}$ commute aux \varprojlim , à **I** et reflète **I**. Puisque les **I**-sous-objets filtrés sont stables dans **Ens** (e), dans **Top** aussi. Dans **Top-Sep**, avec les notations duales de celles du 5, la \varprojlim de $(X_i)_{i \in \mathbf{D}}$ dans **Top** est séparée et c'est alors la \varprojlim dans **Top-Sep**. Ainsi les **I**-sous-objets filtrés sont stables dans **Top-Sep**.

On appelle *foncteur monadique* un foncteur triplable selon Beck.

Soit $U: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ et $V: \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}$ deux foncteurs.

LEMME 7.2. (a) Si V est un adjoint à droite pleinement fidèle et si U a une complétion monadique, $V.U$ a une complétion monadique isomorphe à celle de U ; en particulier si U est monadique, $V.U$ aussi.

(b) Si **A** est à conoyaux et si V et $V.U$ sont monadiques, U aussi.

PREUVE. (a) Si U est monadique, $V.U$ est un adjoint à droite et est monadique d'après le critère de Beck. Si $\mathbf{T} = (T, \eta, \mu)$ est l'image monadique de U , T est la coextension de Kan de U relativement à U ; par suite, si F est un adjoint à gauche de V , $V.T.F$ est la coextension de Kan de $V.U$ relativement à $V.U$. Or

$$V.T.F = V.U_{\mathbf{T}}.F_{\mathbf{T}}.F$$

est aussi la coextension de Kan de $V.U_{\mathbf{T}}: \mathbf{B}^{\mathbf{T}} \rightarrow \mathbf{C}$ relativement à $V.U_{\mathbf{T}}$; ce foncteur étant monadique, $(\mathbf{B}^{\mathbf{T}}, V.U_{\mathbf{T}})$ est la complétion monadique

de $V.U$.

(b) Si \mathbf{A} a des conoyaux, U a un adjoint à gauche ([5] paragraphe 1, Corollaire 1) et la sémantique est pleinement fidèle. On applique alors le critère de Beck.

LEMME 7.3. *Les foncteurs*

$$\mathbf{Comp}^{\mathbf{T}_0} \rightarrow \mathbf{Comp} \text{ ou } \mathbf{Top-Sep} \text{ ou } \mathbf{Top} \text{ ou } \mathbf{Ens}^{\mathbf{T}_0}$$

sont monadiques.

PREUVE. $\mathbf{Comp}^{\mathbf{T}_0} \rightarrow \mathbf{Ens}$ étant monadique,

$$\mathbf{Comp}^{\mathbf{T}_0} \rightarrow \mathbf{Comp} \text{ ou } \mathbf{Ens}^{\mathbf{T}_0}$$

le sont (Lemme 7.2 (b)), de même que

$$\mathbf{Comp}^{\mathbf{T}_0} \rightarrow \mathbf{Top-Sep} \text{ ou } \mathbf{Top}$$

(Lemme 7.2 (a)).

Remarquons que pour $\mathbf{A} = \mathbf{Ens}$, un $U_{\mathbf{T}_0}$ -rétract de $X \in \mathbf{A}^{\mathbf{T}_0}$ est un quotient de X par une équivalence compatible avec les opérations de \mathbf{T}_0 ; on dira un *quotient de X* .

EXEMPLE 7.4. $\mathbf{Ens fin}^{\mathbf{T}_0} \rightarrow \mathbf{Comp}^{\mathbf{T}_0} \text{ ou } \mathbf{Top-Sep}^{\mathbf{T}_0} \text{ ou } \mathbf{Top}^{\mathbf{T}_0}$.

Notons d'abord que les complétions monadiques de

$$\mathbf{Ens fin}^{\mathbf{T}_0} \rightarrow \mathbf{Top-Sep}^{\mathbf{T}_0} \text{ ou } \mathbf{Top}^{\mathbf{T}_0}$$

sont isomorphes à celles de

$$I: \mathbf{Ens fin}^{\mathbf{T}_0} \rightarrow \mathbf{Comp}^{\mathbf{T}_0}$$

(lemme 7.2 (a)). $\mathbf{Comp}^{\mathbf{T}_0}$ est à factorisation avec pour \mathbf{P} la classe des morphismes surjectifs et pour \mathbf{I} celle des morphismes injectifs; en outre les \mathbf{P} -quotients cofiltrés γ sont stables (Proposition 7.2). Le Corollaire 6.3 s'applique à I , et la complétion monadique de I est isomorphe à la catégorie des I -pro-objets, appelés \mathbf{T}_0 -algèbres profinies, qui sont encore les sous- \mathbf{T}_0 -algèbres topologiques fermées des produits de \mathbf{T}_0 -algèbres discrètes.

(a) Si \mathbf{T}_0 est la monade unité, c'est la catégorie des espaces topologiques compacts de dimension 0 ([1] Chapitre 6, paragraphe 2, Théorème 11).

(b) Si $\mathbf{T}_0 = \mathbf{T}_1$, c'est la catégorie des groupes profinis, i. e. des groupes topologiques séparés ayant une base de voisinages ouverts de I formée de sous-groupes distingués ([7] Chapitre 1, paragraphe 1, Théorème 2).

(c) Si $\mathbf{T}_0 = \mathbf{T}_2$, c'est la catégorie des \mathbf{T}_2 -algèbres topologiques telles que le groupe topologique sous-jacent soit profini; en effet, le foncteur

$$\mathbf{Comp}^{\mathbf{T}_2} \rightarrow \mathbf{Comp}^{\mathbf{T}_1}$$

crée les \varprojlim et, par suite, un objet de $\mathbf{Comp}^{\mathbf{T}_2}$ est un pro-objet ssi son image dans $\mathbf{Comp}^{\mathbf{T}_1}$ est un pro-objet.

EXEMPLE 7.5. $\mathbf{Ens fin}^{\mathbf{T}_0} \rightarrow \mathbf{Ens}$ ou $\mathbf{Ens}^{\mathbf{T}_0}$.

Le foncteur

$$I: \mathbf{Ens fin}^{\mathbf{T}_0} \rightarrow \mathbf{Ens}$$

se factorise par

$$I_0: \mathbf{Ens fin}^{\mathbf{T}_0} \rightarrow \mathbf{Comp}^{\mathbf{T}_0}$$

et le foncteur monadique $\mathbf{Comp}^{\mathbf{T}_0} \rightarrow \mathbf{Ens}$. Le Théorème 6.4 s'applique:

(a) Si \mathbf{T}_0 est la monade unité, I_0 est un quotient de Birkhoff, puisque tout compact est un sous-espace topologique fermé d'un espace topologique de la forme $[0, 1]^X$ et que $[0, 1]$ est quotient d'un espace topologique de la forme $\{0, 1\}^Y$ où $\{0, 1\}$ est discret; alors la complétion monadique de I est \mathbf{Comp} (Proposition 6.5 et Théorème 6.4 (2)) et la complétion monadique seconde, isomorphe à la catégorie des I -pro-objets, est la catégorie des espaces topologiques compacts de dimension 0 (7.4 (a)).

(b) Si $\mathbf{T}_0 = \mathbf{T}_1$, la complétion monadique seconde est isomorphe à la catégorie des groupes profinis (7.4 (b)) qui est fermée pour les quotients; elle est isomorphe à la complétion monadique de I (Théorème 6.4 (5)).

(c) Si $\mathbf{T}_0 = \mathbf{T}_2$, la complétion monadique, isomorphe à la complétion monadique seconde, est la catégorie des \mathbf{T}_0 -algèbres profinies (idem (b)).

(d) Dans le cas général, la complétion monadique de I est la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Comp}^{\mathbf{T}_0}$ ayant pour objets les quotients des \mathbf{T}_0 -algèbres profinies.

(e) Le foncteur

$$\mathbf{Ens\ fin}^{\mathbf{T}_0} \rightarrow \mathbf{Ens}^{\mathbf{T}_0}$$

se factorisant par I_0 et le foncteur monadique

$$\mathbf{Comp}^{\mathbf{T}_0} \rightarrow \mathbf{Ens}^{\mathbf{T}_0}$$

(Lemme 7.3), le Théorème 6.4 s'applique et les complétions monadiques sont isomorphes aux précédentes.

EXEMPLE 7.6. $\mathbf{Ens\ fin}^{\mathbf{T}_0} \rightarrow \mathbf{Comp}$ ou $\mathbf{Top-Sep}$ ou \mathbf{Top} .

Notons d'abord que les complétions monadiques de

$$\mathbf{Ens\ fin}^{\mathbf{T}_0} \rightarrow \mathbf{Top-Sep} \text{ ou } \mathbf{Top}$$

sont isomorphes à celles de

$$\mathbf{Ens\ fin}^{\mathbf{T}_0} \rightarrow \mathbf{Comp}$$

(Lemme 7.3 (a)). Le foncteur

$$I: \mathbf{Ens\ fin}^{\mathbf{T}_0} \rightarrow \mathbf{Comp}$$

se factorisant par le foncteur

$$I_0: \mathbf{Ens\ fin}^{\mathbf{T}_0} \rightarrow \mathbf{Comp}^{\mathbf{T}_0}$$

et le foncteur monadique

$$\mathbf{Comp}^{\mathbf{T}_0} \rightarrow \mathbf{Comp}$$

(Lemme 7.3 (b)), le Théorème 6.4 s'applique. La complétion monadique seconde est isomorphe à la catégorie des \mathbf{T}_0 -algèbres profinies et la complétion monadique à la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Comp}^{\mathbf{T}_0}$ dont les objets sont les quotients ayant une section continue des \mathbf{T}_0 -algèbres profinies, et par suite est isomorphe à une sous-catégorie pleine de la complétion monadique de

$$\mathbf{Ens\ fin}^{\mathbf{T}_0} \rightarrow \mathbf{Ens}.$$

En particulier pour $\mathbf{T}_0 = \mathbf{T}_2$, elles sont isomorphes.

EXEMPLE 7.7. $\mathbf{Ens}^T \rightarrow \mathbf{Top-Sep}^T$ ou \mathbf{Top}^T .

Les complétions monadiques de $\mathbf{Ens}^T \rightarrow \mathbf{Top}^T$ sont isomorphes à celles de

$$l : \mathbf{Ens}^T \rightarrow \mathbf{Top-Sep}^T$$

(Lemme 7.2 (a)). $\mathbf{Top-Sep}^T$ est à factorisation avec pour \mathbf{P} la classe des morphismes denses et pour \mathbf{I} celle des morphismes injectifs fermés initiaux; en outre les \mathbf{P} -quotients cofiltrés y sont stables (Proposition 7.1). Le Corollaire 6.3 s'applique et la complétion monadique de l est isomorphe à la catégorie des l -pro-objets, appelés \mathbf{T} -algèbres prodiscrètes; ce sont encore les sous- \mathbf{T} -algèbres fermées des produits de \mathbf{T} -algèbres discrètes.

EXEMPLE 7.8. $\mathbf{Ens}^T \rightarrow \mathbf{Top-Sep}$ ou \mathbf{Top} .

Le Lemme 7.2 (a) s'applique. Le foncteur $l : \mathbf{Ens}^T \rightarrow \mathbf{Top-Sep}$ se factorise par

$$l_0 : \mathbf{Ens}^T \rightarrow \mathbf{Top-Sep}^T$$

et par le foncteur monadique

$$\mathbf{Top-Sep}^T \rightarrow \mathbf{Top-Sep}$$

(on applique le critère de Beck). Le Théorème 6.4 s'applique. La complétion monadique seconde est la catégorie des \mathbf{T} -algèbres prodiscrètes et la complétion monadique est isomorphe à la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Top-Sep}^T$ ayant pour objets les quotients, ayant une section continue, de \mathbf{T} -algèbres discrètes.

EXEMPLE 7.9. $\mathbf{Ens}_L^{T_2} \rightarrow \mathbf{Top-Sep}$ ou \mathbf{Top} ou $\mathbf{Top-Sep}^{T_2}$ ou \mathbf{Top}^{T_2} , avec $\mathbf{T}_2 =$ monade des A -modules.

Le foncteur

$$l : \mathbf{Ens}_L^{T_2} \rightarrow \mathbf{Top-Sep}$$

se factorise par le foncteur monadique

$$\mathbf{Top-Sep}^{T_2} \rightarrow \mathbf{Top-Sep}$$

en

$$l_0 : \mathbf{Ens}_L^{T_2} \rightarrow \mathbf{Top-Sep}^{T_2} ,$$

dont l'image est fermée pour les produits finis et les sous-objets initiaux fermés. Le Théorème 6.4 s'applique. La complétion monadique seconde de I , la complétion monadique de I_0 et la catégorie des I -pro-objets sont isomorphes à $\mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$. Si $X \in \mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$ a pour \mathfrak{b} .se de voisinages ouverts de l'origine $(H_i)_{i \in \mathbf{D}}$, où les H_i sont des noyaux, on définit un diagramme cofiltrant: $(X/H_i)_{i \in \mathbf{D}}$ de $\mathbf{Ens}^{\mathbf{T}_2}$ dont la \varprojlim est

$$(X_0, (p_i)) \text{ dans } \mathbf{Top-Sep}^{\mathbf{T}_2},$$

et on note

$$x_i: X \rightarrow X/H_i \quad \text{et} \quad x = (x_i)_{i \in \mathbf{D}}: X \rightarrow X_0$$

les morphismes canoniques; x est surjective (Proposition 7.1 (3)); pour tout $i \in \mathbf{D}$, on a

$$\text{Ker } x \subset \text{Ker } x_i = H_i, \text{ d'où } \text{Ker } x = \{1\};$$

x est ouverte, puisque $x(H_i) = p_i^{-1}(1)$ est un ouvert de X_0 ; ainsi x est un isomorphisme de $\mathbf{Top-Sep}^{\mathbf{T}_2}$ et X est un I -pro-objet. En outre $\mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$ est fermée pour les \varprojlim de $\mathbf{Top-Sep}^{\mathbf{T}_2}$, ce qui permet de conclure. Mais $\mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$ est aussi fermée pour les $U_{\mathbf{T}_0}$ -rétracts: en effet, si $X \in \mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$ et $f: X \rightarrow Y$ dans $\mathbf{Top-Sep}^{\mathbf{T}_2}$ admet une section continue, f est finale et par suite Y est un quotient de X ; c'est donc un objet de $\mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$ ([3] paragraphe 3, Remarque (2)). $\mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$ est alors isomorphe à la complétion monadique de I . Comme précédemment, les résultats restent valables en remplaçant $\mathbf{Top-Sep}$ par \mathbf{Top} .

REMARQUE 7.10. En général, $\mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$ n'est pas monadique sur \mathbf{Ens} . Néanmoins le foncteur $U: \mathbf{L}(\mathbf{T}_2) \rightarrow \mathbf{Ens}$ est un adjoint à droite, $\mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$ est à conoyaux U -absolus et U y commute. En effet, les foncteurs

$$\mathbf{L}(\mathbf{T}_2) \rightarrow \mathbf{Top-Sep} \quad \text{et} \quad \mathbf{Top-Sep} \rightarrow \mathbf{Ens}$$

étant des adjoints à droite, U aussi; soit $f, g: X \rightarrow Y$ dans $\mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$ tels que, dans \mathbf{Ens} , $h: UY \rightarrow Z$ soit un conoyau absolu de (f, g) ; alors comme $\mathbf{Ens}^{\mathbf{T}_2}$ est monadique sur \mathbf{Ens} , on a

$$Z \in \mathbf{Ens}^{\mathbf{T}_2} \text{ et } h = \text{coker}(f, g) \text{ dans } \mathbf{Ens}^{\mathbf{T}_2}.$$

En munissant Z de la topologie quotient de celle de Y , on obtient

$$Z \in \mathbf{Top}^{\mathbf{T}_2} \text{ et } h = \text{coker}(f, g) \text{ dans } \mathbf{Top}^{\mathbf{T}_2}.$$

Or $f-g$ est dans $\mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$ et, par suite, $(f-g)(X) \in \mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$ est un sous-objet fermé de Y ; donc

$$Z = \text{coker}(f, g) = \text{coker}(f-g) = Y/(f-g)(X)$$

dans $\mathbf{Top}^{\mathbf{T}_2}$, Z est séparé et, par conséquent,

$$h = \text{coker}(f, g) \text{ dans } \mathbf{Top-Sep}^{\mathbf{T}_2}.$$

Puisque $Y \in \mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$, on en déduit $Z \in \mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$ et

$$h = \text{coker}(f, g) \text{ dans } \mathbf{L}(\mathbf{T}_2).$$

EXEMPLE 7.11. $\mathbf{Ens}_{\mathbf{Ar}}^{\mathbf{T}_2} \rightarrow \mathbf{Top-Sep}$ ou \mathbf{Top} ou $\mathbf{Top-Sep}^{\mathbf{T}_2}$ ou $\mathbf{Top}^{\mathbf{T}_2}$, où \mathbf{T}_2 est la monade des A -modules sur un anneau artinien A .

Le Théorème 6.4 s'applique de la même façon qu'en 7.9. On obtient ici la sous-catégorie pleine $\mathbf{L}'(\mathbf{T}_2)$ de $\mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$ ayant pour objets ceux qui ont une base de voisinages ouverts de l'origine $(H_i)_{i \in \mathbf{D}}$ telle que X/H_i appartienne à $\mathbf{Ens}_{\mathbf{Ar}}^{\mathbf{T}_2}$.

EXEMPLE 7.12. $\mathbf{Ens}_{\mathbf{Ar}}^{\mathbf{T}_2} \rightarrow \mathbf{Ens}$ ou $\mathbf{Ens}^{\mathbf{T}_2}$, où \mathbf{T}_2 est défini comme précédemment.

Le foncteur $U': \mathbf{L}'(\mathbf{T}_2) \rightarrow \mathbf{Ens}$ est un adjoint à droite. $\mathbf{L}'(\mathbf{T}_2)$ est à conoyaux U' -absolus et U' y commute: en effet, ces propriétés sont vraies pour U (7.10) et $\mathbf{L}'(\mathbf{T}_2)$ est fermée pour les conoyaux de $\mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$. Montrons que U' reflète les unités: si $f: X \rightarrow Y$ dans $\mathbf{L}'(\mathbf{T}_2)$ est tel que $U'f$ soit l'application identique de $U'X$, les \mathbf{T}_2 -algèbres X et Y sont identiques et la topologie de X est plus fine que celle de Y ; si H est un noyau ouvert de X tel que $X/H \in \mathbf{Ens}_{\mathbf{Ar}}^{\mathbf{T}_2}$, alors H est fermé dans X , donc linéairement compact dans X et aussi dans Y , donc fermé dans Y ; et alors, si $p: X \rightarrow X/H$ est la projection,

$$\{p(K) \mid H \subset K \text{ et } K \text{ est un noyau ouvert de } Y\}$$

a un élément minimal $p(K_0)$ et, par suite, K_0 est minimal dans

$$\{ K \mid H \subset K \text{ et } K \text{ est un noyau ouvert de } Y \} .$$

Or $H = \bigcap_{i \in \mathbf{D}} H + H_i$ ([3] Lemme 1.4 (c)), où $H + H_i$ est un noyau ouvert de Y contenant H , si $(H_i)_{i \in \mathbf{D}}$ désigne une base de voisinages ouverts de l'origine de Y ; donc $H + H_i \supset K_0$ et $H = K_0$ est un ouvert de Y ; il s'ensuit $X = Y$. Le critère de Beck montre que U' est monadique. Le foncteur

$$I: \mathbf{Ens}_{\mathbf{Ar}}^{\mathbf{T}_2} \rightarrow \mathbf{Ens}$$

se factorisant par U' , le Théorème 6.4 s'applique. Or le foncteur

$$\mathbf{Ens}_{\mathbf{Ar}}^{\mathbf{T}_2} \rightarrow \mathbf{L}'(\mathbf{T}_2)$$

étant cogénérateur (7.11), c'est un quotient de Birkhoff, de sorte que la complétion monadique de I est isomorphe à $\mathbf{L}'(\mathbf{T}_2)$. C'est aussi la catégorie des I -pro-objets. Le résultat est le même pour le foncteur

$$\mathbf{Ens}_{\mathbf{Ar}}^{\mathbf{T}_2} \rightarrow \mathbf{Ens}^{\mathbf{T}_2} .$$

EXEMPLE 7.13. $\mathbf{Ens}^{\mathbf{T}_2} \rightarrow \mathbf{Ens}$ ou $\mathbf{Ens}^{\mathbf{T}_2}$, où \mathbf{T}_2 est la monade des A -modules.

L'étude nécessite quelques résultats préliminaires.

LEMME 7.13.1. Pour $X \in \mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$, on a $X \in \mathbf{LM}(\mathbf{T}_2)$ ssi pour tout Y dans $\mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$ ayant la même structure de \mathbf{T}_2 -algèbre que X et une topologie plus fine, on a $X = Y$.

PREUVE. Soit

$$X \in \mathbf{LM}(\mathbf{T}_2) \text{ et } Y \in \mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$$

vérifiant l'hypothèse ci-dessus. Si H est un noyau ouvert de Y , il est fermé et par suite, si on le munit de la topologie induite, il est dans $\mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$. Si K est le même noyau H muni de la topologie induite par celle de X , on a $K \in \mathbf{Top-Sep}^{\mathbf{T}_2}$, et même $K \in \mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$, puisque la topologie est moins fine que celle de H . Alors K est complet ([3] paragraphe 3, Remarque (3)), donc fermé dans X . Puisque

$$X/K = Y/H \in \mathbf{Ens}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{T}_2} ,$$

d'où $Y \in \mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$ ([9] Proposition 9). Comme Y a une topologie plus fine que celle de X , on a $Y = X$ et l'ensemble H est un ouvert de Y . Ceci montre que X est dans $\mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$.

LEMME 7.13.2. $\mathbf{L}(\mathbf{T}_2) \rightarrow \mathbf{Ens}$ reflète les unités.

PREUVE. Si $X, Y \in \mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$ ont le même ensemble sous-jacent et si l'application identique $f: X \rightarrow Y$ est dans $\mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$, alors X et Y ont la même structure de \mathbf{T}_2 -algèbre, d'où $X = Y$ d'après le Lemme précédent.

LEMME 7.13.3. $\mathbf{L}(\mathbf{T}_2) \rightarrow \mathbf{Ens}$ est un adjoint à droite.

PREUVE. Le foncteur $\mathbf{L}(\mathbf{T}_2) \rightarrow \mathbf{Top-Sep}$ étant un adjoint à droite (7.10), $\mathbf{L}(\mathbf{T}_2) \rightarrow \mathbf{Ens}$ aussi. Si F est un de ses adjoints à gauche, montrons que :

$$FE \in \mathbf{L}(\mathbf{T}_2) \text{ pour } E \in \mathbf{Ens}.$$

Si $X \in \mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$ a même structure de \mathbf{T}_2 -algèbre que FE et une topologie plus fine, l'application identique $f: X \rightarrow FE$ est dans $\mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$; en outre, il existe

$$g: FE \rightarrow X \text{ dans } \mathbf{L}(\mathbf{T}_2) \text{ tel que } g \cdot \eta_E = \eta_E;$$

alors $f \cdot g \cdot \eta_E = \eta_E$, et par suite $f \cdot g = I_{FE}$. Ainsi g est l'application identique et la topologie de FE est plus fine que celle de X , donc $X = FE$.

LEMME 7.13.4. $\mathbf{L}(\mathbf{T}_2) \rightarrow \mathbf{Ens}$ est monadique.

PREUVE. Si $U: \mathbf{L}(\mathbf{T}_2) \rightarrow \mathbf{Ens}$, $\mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$ a des conoyaux U -absolus et U y commute, puisque cette propriété est vraie pour $\mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$ et que $\mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$ est fermée pour les conoyaux de $\mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$. Il suffit alors d'appliquer le critère de Beck.

COMPLETIONS MONADIQUES DE $I: \mathbf{Ens}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{T}_2} \rightarrow \mathbf{Ens}$.

$\mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$ est à factorisation avec pour \mathbf{P} (resp. \mathbf{I}) la classe des morphismes surjectifs (resp. injectifs). Les \mathbf{P} -quotients cofiltrés sont stables dans $\mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$ (Proposition 7.1 (4)). Le foncteur I se factorise par

$$I_0: \mathbf{Ens}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{T}_2} \rightarrow \mathbf{L}(\mathbf{T}_2),$$

dont l'image est fermée pour les produits finis et les sous-objets. Le Théorème 6.4 s'applique. Or $\mathbf{Ens}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{T}_2} \rightarrow \mathbf{L}(\mathbf{T}_2)$ étant générateur (7.10), il en

est de même de $\mathbf{Ens}_L^{T_2} \rightarrow \mathbf{LM}(T_2)$, qui est ainsi un quotient de Birkhoff. Alors la complétion monadique de I est isomorphe à $\mathbf{LM}(T_2)$ (Proposition 6.5 et Théorème 6.4 (2)) et à la catégorie des I -pro-objets. Par ailleurs, le résultat reste valable pour

$$I: \mathbf{Ens}_L^{T_2} \rightarrow \mathbf{Ens}^{T_2}.$$

EXEMPLE 7.14. *Complétion comonadique de $\mathbf{Comp} \rightarrow \mathbf{Top-Sep}$.*

$\mathbf{Top-Sep}$ est à factorisation, \mathbf{P} (resp. \mathbf{I}) étant la classe des morphismes surjectifs finaux (resp. injectifs). Les \mathbf{I} -sous-objets filtrés de la catégorie $\mathbf{Top-Sep}$ sont stables (Proposition 7.1 (5)). \mathbf{Comp} est fermée pour les sommes directes finies et les \mathbf{P} -quotients. Le dual du Corollaire 6.3 s'applique alors. La complétion monadique est isomorphe à la catégorie des ind-objets. On montre immédiatement qu'elle est isomorphe à la catégorie des espaces topologiques « compactly generated » ([6], VII-8).

REFERENCES.

0. APPELGATE H. et TIERNEY M., Iterated cotriples, *Lecture Notes in Math.* 137, Springer (1970), 56-99.
1. ENGELKING R., *Outline of general Topology*, 1968.
2. KENNISON J. F., Full reflexive subcategories and generalized covering spaces, *J. Math.* 12 (1968), 353-365.
3. KENNISON J. F. et GILDENHUYS D., Equational completion, model induced triples and pro-objects, *J. Pure and Ap. Algebra* 2 (1971), 317-346.
4. LINTON F. E. J., An outline of functorial Semantics, *Lecture Notes in Math.* 80, Springer (1969), 7-52.
5. LINTON F. E. J., Coequalizers in categories of algebras, *Lecture Notes in Math.* 80 (1969), 75-90.
6. MACLANE S., *Categories for the working mathematician*, Springer, 1971.
7. SHATZ S. S., *Profinite groups, Arithmetic and Geometry*, Princeton Univ. Press, 1972.
8. ULMER F., Locally α -presentable and locally α -generated categories, *Lecture Notes in Math.* 195, Springer (1971), 230-247.
9. ZELINSKY D., Linearly compact modules and rings, *Amer. J. Math.* 75 (1953), 79-90.

Département de Mathématiques
U. E. R. des Sciences Exactes et Naturelles
Mont Houy
59326 VALENCIENNES