Cahiers de
topologie et géométrie différentielle
catégoriques

Gérard Bourdaud

Sur le théorème de complétion de Buchwalter-Pupier

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 17, nº 3 (1976), p. 327-331

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1976__17_3_327_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

Vol. XVII-3 (1976)

SUR LE THEOREME DE COMPLETION DE BUCHWALTER-PUPIER

par Gérard BOURDAUD

On propose une nouvelle démonstration de ce théorème, inspirée du théorème de complétion de Gillman-Jerison.

1. Propriétés des caractères.

Dans tout le texte, on désigne par X un espace uniforme, par $E(X)$ l'ensemble des écarts uniformément continus bornés de $X \times X$ dans $\mathbf{R}$ et par $C_{ub}(X)$ *l'algèbre des fonctions uniformément continues bornées de* X *dans* $\mathbf{R}$; on désignera par $Car(X)$ l'ensemble des *caractères* de l'algèbre $C_{ub}(X)$, c'est-à-dire des homomorphismes unitaires de $C_{ub}(X)$ dans $\mathbf{R}$; si x est un élément de X, on note $\hat{x}$ le caractère de Dirac $f \mapsto f(x)$; j désigne la transformation de Dirac

$$x \mapsto \hat{x} \quad \text{de } X \text{ dans } Car(X).$$

Il est clair que $C_{ub}(X)$ est un *treillis* pour les opérations usuelles; de plus (voir [1], 1.6) :

PROPOSITION 1. *Tout caractère de* $C_{ub}(X)$ *est un homomorphisme entre treillis.*

Soit a un caractère de $C_{ub}(X)$ et f une fonction uniformément continue bornée sur X ; supposons un instant qu'il existe $r > 0$ tel que, pour tout élément x de X, on ait :

$$|a(f)-f(x)| \geqslant r \,;$$

ceci entraîne que la fonction $(f-a(f))^{-1}$ est uniformément continue et bornée sur X, donc que $f-a(f)$ est inversible dans $C_{ub}(X)$, ce que contredit la relation $a(f-a(f))=0$; d'où :

PROPOSITION 2. *Pour tout* $a \in Car(X)$ *et tout* $f \in C_{ub}(X)$, *on a:*

$$\inf_{x\in X} |a(f)-f(x)| = 0.$$

2. Prolongement des écarts.

Si $p\in E(X)$ et $x\in X$, on a $p(x,-)\in C_{ub}(X)$; on peut donc poser :

$$\forall a\in Car(X), \quad \bar{p}(x,a) = a(p(x,-)).$$

$\bar{p}$ «prolonge» p , en ce sens que, pour $y\in X$, on a :

$$\bar{p}(x,\hat{y}) = p(x,y).$$

Par ailleurs, on montre, à l'aide de la Proposition 1, que $\bar{p}$ est une fonction positive et bornée et que

$$(1) \qquad \bar{p}(x,a) \leqslant \bar{p}(y,a)+p(x,y).$$

La relation (1) montre en particulier que la fonction $\bar{p}(-,a)$ est uniformément continue ; pour $b\in Car(X)$, on peut donc poser ;

$$\bar{\bar{p}}(b,a) = b(\bar{p}(-,a)).$$

Il est clair que $\bar{\bar{p}}$ prolonge $\bar{p}$; en utilisant de nouveau la Proposition 1 on montre que $\bar{\bar{p}}$ est une fonction positive et que

$$(2) \qquad \bar{\bar{p}}(b,a) \leqslant \bar{\bar{p}}(c,b)+\bar{\bar{p}}(c,a).$$

Désignons par $\hat{X}$ l'ensemble des caractères a tels que, pour tout $p\in E(X)$, on ait $\bar{\bar{p}}(a,a) = 0$; la relation (2) montre que $\bar{\bar{p}}$ est un écart sur $\hat{X}$; en outre, il est clair que j applique X dans $\hat{X}$.

PROPOSITION 3. *$\hat{X}$, muni de la structure uniforme déterminée par les écarts $\bar{\bar{p}}$, où p parcourt $E(X)$, est le complété séparé de X, via l'application j.*

ESQUISSE DE LA DEMONSTRATION. La Proposition 2, appliquée à $a\in\hat{X}$ et à $\bar{p}(-,a)$, entraîne l'existence, pour tout $r>0$, d'un $x\in X$ tel que l'on ait $\bar{p}(x,a)\leqslant r$; ceci montre que $j(X)$ est dense dans $\hat{X}$.

La relation $\bar{\bar{p}}(\hat{x},\hat{y}) = p(x,y)$ montre que j est une application uniformément continue de X dans $\hat{X}$ et même que X est l'espace uniforme initial déterminé par j et $\hat{X}$.

Si a et b sont deux caractères distincts, soit $f\in C_{ub}(X)$ telle que

$a(f) \neq b(f)$; si p désigne l'écart

$$p(x,y) = |f(x)-f(y)|,$$

on a (à l'aide de la Proposition 1) :

$$\bar{\bar{p}}(a,b) = |a(f)-b(f)|,$$

ce qui montre que $\hat{X}$ est séparé.

Soit $\hat{F}$ un filtre de Cauchy sur $\hat{X}$; pour $A \in \hat{F}$, $r > 0$ et $p \in E(X)$, on pose

$$T(A,p,r) = \{ x \in X \mid \bar{\bar{p}}(A,\hat{x}) \leqslant r \} ;$$

les $T(A,p,r)$ engendrent un filtre de Cauchy F sur X ; on peut poser, pour $f \in C_{ub}(X)$:

$$a(f) = \lim f(F).$$

On vérifie que $a \in \hat{X}$ et que $a = \lim \hat{F}$; ainsi $\hat{X}$ est complet.

REMARQUE. Soit X un espace replet non compact. Munissons X de la structure uniforme la moins fine rendant uniformément continues toutes les applications continues de X dans $\mathbf{R}$. Alors X est un espace uniforme complet (voir [1], 15.14) et $Car(X)$ est le compactifié de Stone-Čech de X ; ceci montre qu'en général $\hat{X}$ est strictement inclus dans $Car(X)$.

3. Ecarts et bornés uniformément équicontinus.

Soit A une partie bornée uniformément équicontinue de $C_{ub}(X)$; on définit un écart borné uniformément continu sur X en posant :

$$p_A(x,y) = \sup_{f \in A} |f(x)-f(y)|.$$

Inversement, à tout $p \in E(X)$ est associé un borné uniformément équicontinu de $C_{ub}(X)$, à savoir

$$A(p) = \{ p(x,-) \mid x \in X \}.$$

On vérifie facilement que $p = p_{A(p)}$.

PROPOSITION 4. *Soit A une partie bornée uniformément équicontinue de*

$C_{ub}(X)$. A admet une borne supérieure dans $C_{ub}(X)$; si on adjoint à A les bornes supérieures de ses sous-ensembles, on obtient une partie bornée uniformément équicontinue stable par bornes supérieures.

En effet, si B est contenu dans A et si $g = \sup B$, on a :

$$|g(x)-g(y)| \leqslant p_A(x,y).$$

PROPOSITION 5. *Soit A une partie bornée uniformément équicontinue de $C_{ub}(X)$ et a un caractère de $C_{ub}(X)$. Si $\bar{\bar{p}}_A(a,a) = 0$, alors :*

$$\inf_{x \in X} (\sup_{f \in A} |f(x)-a(f)|) = 0.$$

PREUVE. D'après la Proposition 2, si $\bar{\bar{p}}_A(a,a) = 0$, c'est que, pour tout $r > 0$, il existe $x \in X$ tel que $\bar{p}_A(x,a) < r$. Si $f \in A$, on a :

$$|f(x)-a(f)| \leqslant \bar{p}_A(x,a),$$

ce qui achève la preuve.

4. Interprétation du complété.

PROPOSITION 6. *Soit a un caractère de $C_{ub}(X)$; les énoncés suivants sont équivalents :*

(i) Pour tout $p \in E(X)$, $\bar{\bar{p}}(a,a) = 0$.

(ii) Pour toute famille $(f_i)_{i \in I}$ bornée uniformément équicontinue de $C_{ub}(X)$, on a :

$$a(\sup_{i \in I} f_i) = \sup_{i \in I} a(f_i).$$

(iii) La restriction de a à tout borné uniformément équicontinu A de $C_{ub}(X)$ est continue quand on munit A de la topologie de la convergence simple.

ESQUISSE DE LA PREUVE. Soit a un caractère vérifiant (ii) et $p \in E(X)$; soit $A = A(p)$; on obtient

$$p(x,-) = \sup_{f \in A} |f(x)-f|,$$

ce qui entraîne

$$\bar{p}(-,a) = \sup_{f \in A} |f-a(f)|,$$

d'où

$$\bar{\bar{p}}(a, a) = \sup_{f \in A} |a(f) - a(f)| = 0 .$$

Soit a un caractère vérifiant (i), A un borné uniformément équicontinu de $C_{ub}(X)$, $r > 0$ et $f \in A$. Il existe (Proposition 5) $x \in X$ tel que

$$|a(g) - g(x)| \leqslant r/3 \quad \text{pour tout} \quad g \in A \ ;$$

pour un élément g de A vérifiant $|f(x) - g(x)| \leqslant r/3$ on obtient

$$|a(f) - a(g)| \leqslant r ,$$

ce qui prouve (iii).

Soit a un caractère vérifiant (iii) et $(f_i)_{i \in I}$ une famille bornée uniformément équicontinue de $C_{ub}(X)$. Si A est obtenu en saturant par bornes supérieures l'ensemble des f_i (Proposition 4), $\sup_{i \in I} f_i$ est la limite simple, dans A, des

$$f_J = \sup_{i \in J} f_i \ , \quad \text{où } J \text{ est une partie finie de } I .$$

D'après la Proposition 1, $a(f_J) = \sup_{i \in J} a(f_i)$; il s'ensuit

$$a(\sup_{i \in I} f_i) = \sup_{i \in I} a(f_i).$$

Si A est un borné uniformément équicontinu de $C_{ub}(X)$ et a, b deux éléments de $\hat{X}$, la Proposition 6 (ii) a pour conséquence

$$\bar{\bar{p}}_A(a, b) = \sup_{f \in A} |a(f) - b(f)| .$$

Ceci montre que la structure uniforme de $\hat{X}$ est celle de la convergence sur les bornés uniformément équicontinus de $C_{ub}(X)$; c'est ainsi que l'on retrouve de théorème de Buchwalter-Pupier [2].

1. GILLMAN-JERISON, *Rings of continuous functions*, Van Nostrand, 1960.

2. BUCHWALTER-PUPIER, *C.R.A.S.* Paris 273 (1971), 96-98.

U. E. R. de Mathématiques
Université Paris 7, Tour 45,
2 Place Jussieu, 75005 PARIS