

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES

SYMÉON BOZAPALIDES

Sur les quasi-limites

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 17, n° 3 (1976), p. 235-260

http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1976__17_3_235_0

© Andrée C. Ehresmann et les auteurs, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES QUASI-LIMITES

par Syméon BOZAPALIDES

Les quasi-limites sont apparues dans la littérature d'abord dans [5] sous forme de quasi-produits. Dans le cas général, J.W.Gray les a définies dans [4], et il les a utilisées pour résoudre certains problèmes d'existence de quasi-2-adjoints.

Dans cet article, on étudie plus en détail les quasi-limites. On montre que le plongement canonique d'une catégorie \underline{E} à limites dans la bicatégorie $Spn(\underline{E})$ des spans de \underline{E} transforme les limites de \underline{E} en quasi-limites dans $Spn(\underline{E})$. Les cônes quasi-limites constituent une polyade (n° 1, Proposition 1), et un choix de cônes quasi-limites se prolonge en un morphisme de $Fun(\underline{A}, \underline{B})$ vers $Bim(\underline{B})$ (n° 1, Proposition 2).

Au paragraphe 2 on étudie des problèmes de compatibilité des quasi-limites avec certains 2-foncteurs remarquables. Ainsi on montre que le 2-foncteur $\underline{A}(A, -): \underline{A} \rightarrow \underline{Cat}$ commute avec les quasi-limites projectives (n° 2, Théorème 2), ainsi que tout 2-foncteur qui admet un \underline{Cat} -adjoint à droite (n° 2, Théorème 2). On obtient comme corollaire le fait que les quasi-limites commutent avec les limites cartésiennes.

Enfin au paragraphe 3 on construit les quasi-limites dans les bicatégorie \underline{Dist} et $\mathbf{V}\text{-}\underline{Dist}$, des distributeurs et des distributeurs relatifs à la catégorie monoïdale \mathbf{V} respectivement, et on donne comme application la catégorie des proalgèbres sur un protriple.

1. Les quasi-limites.

Soit \underline{A} et \underline{B} deux bicatégories, $F: \underline{A} \rightarrow \underline{B}$ un morphisme de \underline{A} vers \underline{B} , c'est-à-dire une loi qui à tout objet A de \underline{A} associe un objet FA de \underline{B} , à toute flèche $f: A \rightarrow B$ de \underline{A} associe une flèche $Ff: FA \rightarrow FB$ de \underline{B} et à toute 2-cellule $\lambda: f \Rightarrow g: A \rightarrow B$ de \underline{A} associe une 2-cellule

$$F\lambda: Ff \Rightarrow Fg: FA \rightarrow FB \text{ de } \underline{\underline{B}};$$

on a de plus des 2-cellules

$$n_A: I_{FA} \Rightarrow F(I_A), \quad \forall A \in \text{Ob } \underline{\underline{A}},$$

$$\phi_{gf}: F(g) \circ F(f) \Rightarrow F(g \circ f), \quad \forall (f, g) \in \underline{\underline{A}}^*$$

($\underline{\underline{A}}^*$ désigne l'ensemble des couples de flèches composables de $\underline{\underline{A}}$),
qui vérifient les conditions de cohérence bien connues.

DEFINITIONS. 1° Un *quasi-cône projectif* de sommet $B \in \text{Ob } \underline{\underline{B}}$ et de base $F: \underline{\underline{A}} \rightarrow \underline{\underline{B}}$ est une collection de flèches de $\underline{\underline{B}}$,

$$\{\omega_A: B \rightarrow FA\}_{A \in \text{Ob } \underline{\underline{A}}},$$

et de 2-cellules de $\underline{\underline{B}}$,

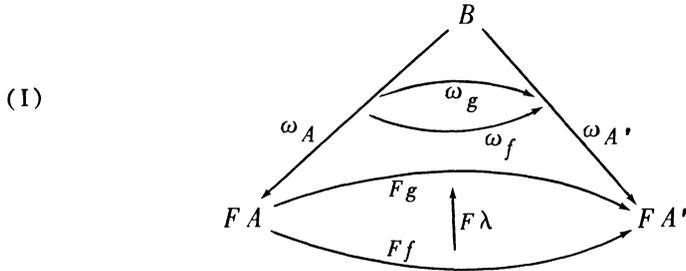
$$\{\omega_f: (Ff)\omega_{\delta_0 f} \Rightarrow \omega_{\delta_1 f}\}_{f \in \text{Fl } \underline{\underline{A}}}$$

($\delta_0 f, \delta_1 f$ désignent respectivement la source et le but de f),
telles que :

QCP 1. Pour toute 2-cellule $\lambda: f \Rightarrow g: A \rightarrow B$ dans $\underline{\underline{A}}$, on a

$$\omega_g \circ (F\lambda)\omega_A = \omega_f.$$

Ceci s'exprime par la commutativité du diagramme suivant :



QCP 2. Pour tout couple de flèches composables (f, g) dans $\underline{\underline{A}}$, on a :

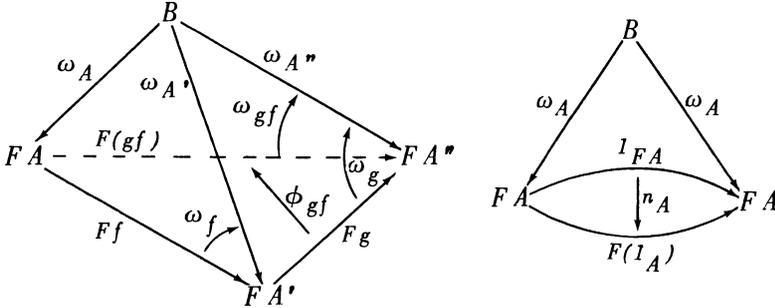
$$\omega_g \circ (Fg)\omega_f = \omega_{gf} \circ \phi_{gf}.$$

QCP 3. Pour tout objet A de $\underline{\underline{A}}$, on a

$$\omega_{I_A} \circ n_A \omega_A = \text{can}_A,$$

où can_A est l'isomorphisme canonique $I_{FA} \omega_A \xrightarrow{\sim} \omega_A$.

Les conditions QCP 2 et 3 s'expriment par la commutativité des deux diagrammes suivants :



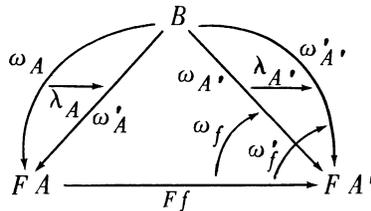
2° Une modification du quasi-cône projectif $\{\omega_A, \omega_f\}$, de base F et de sommet B , vers le quasi-cône projectif $\{\omega'_A, \omega'_f\}$ de mêmes base et sommet est une collection de 2-cellules

$$\{ \lambda_A : \omega_A \Rightarrow \omega'_A \}_{A \in \text{Ob } \underline{A}}$$

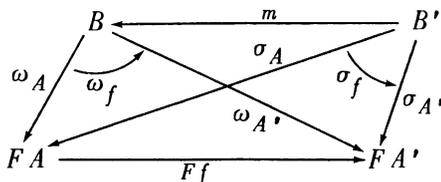
vérifiant la relation

$$\omega'_f \circ (Ff) \lambda_A = \lambda_{A'} \circ \omega_f \text{ pour } f: A \rightarrow A' \in \text{Fl } \underline{A}.$$

Ceci veut dire que le diagramme suivant commute :

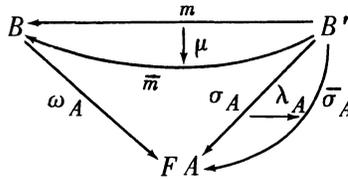


3° Un quasi-cône projectif $\{\omega_A, \omega_f\}$ de base F et de sommet B est dit *limite cartésienne projective* si, pour tout quasi-cône projectif $\{\sigma_A, \sigma_f\}$ de base F et de sommet B' , il existe une seule flèche $m: B' \rightarrow B$ telle que $\omega_A g = \sigma_A$, $\forall A \in \text{Ob } \underline{A}$, $\omega_f m = \sigma_f$, $\forall f \in \text{Fl } \underline{A}$



et si de plus, pour toute modification $\{\lambda_A\}$ de $\{\sigma_A, \sigma_f\}$ vers $\{\bar{\sigma}_A, \bar{\sigma}_f\}$, il existe une seule 2-cellule $\mu: m \Rightarrow \bar{m}$ (\bar{m} est l'unique flèche induite par $\{\bar{\sigma}_A, \bar{\sigma}_f\}$) telle que

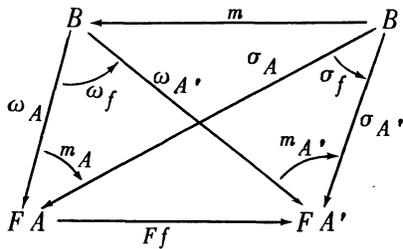
$$\omega_A \mu = \lambda_A, \quad \forall A \in \text{Ob } \underline{A}.$$



On écrit alors (avec un abus de notations évident) que $B = \text{cart-}\underline{\text{lim}} F$.

4° Un quasi-cône projectif $\{\omega_A, \omega_f\}$ de base F et de sommet B est appelé *quasi-limite projective* si, pour tout quasi-cône projectif $\{\sigma_A, \sigma_f\}$, de base F et de sommet B' , il existe une flèche $m: B' \rightarrow B$ et des 2-cellules $\{m_A: \omega_A m \Rightarrow \sigma_A\}_{A \in \text{Ob } \underline{A}}$ telles que

$$\sigma_f \circ (Ff)m_A = m_A \circ (\omega_f m)$$



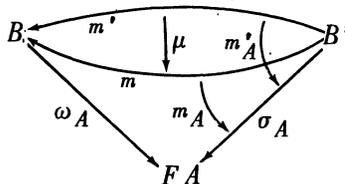
et si de plus, pour tout système $\{m': B' \rightarrow B, m'_A: \omega_A m' \Rightarrow \sigma_A\}$ tel que

$$\sigma_f \circ (Ff)m'_A = m'_A \circ (\omega_f m'),$$

il existe une seule 2-cellule $\mu: m' \Rightarrow m$ qui vérifie la relation

$$m_A \circ \omega_A \mu = m'_A, \quad \forall A \in \text{Ob } \underline{A}.$$

(II)



REMARQUES-EXEMPLES.

a) Si $\{\bar{m}, \bar{m}_A\}$ est un autre système vérifiant la propriété universelle ci-dessus, alors m et \bar{m} sont des flèches isomorphes, i. e. il existe des 2-cellules $\mu: m \Rightarrow \bar{m}$ et $\bar{\mu}: \bar{m} \Rightarrow m$ telles que

$$\bar{\mu}\mu = m, \quad \mu\bar{\mu} = \bar{m}, \quad \bar{m}_A = m_A \circ \omega_A \mu,$$

c'est-à-dire le système $\{m, m_A\}$ est unique à isomorphisme près.

b) Pour une base donnée F , sa quasi-limite n'est pas déterminée d'une manière unique. Il est clair que, parmi les cônes quasi-limites projectives de base donnée, il y a les limites cartésiennes projectives.

c) Soit $\{\omega_A, \omega_f\}, \{\sigma_A, \sigma_f\}$ et $\{\bar{\sigma}_A, \bar{\sigma}_f\}$ trois quasi-cônes de même base F et de sommets, le premier B et les deux autres B' . Supposons de plus que $\{\omega_A, \omega_f\}$ est une quasi-limite projective et que $\mu = \{\mu_A\}$ est une modification de $\{\bar{\sigma}_A, \bar{\sigma}_f\}$ vers $\{\sigma_A, \sigma_f\}$; alors on a une flèche \bar{m} de B' vers B et des 2-cellules $\{\bar{m}_A: \omega_A \bar{m} \Rightarrow \bar{\sigma}_A\}_{A \in Ob A}$ telles que

$$(1) \quad \bar{\sigma}_f \circ (Ff) \bar{m}_A = \bar{m}_A \circ (\omega_f \bar{m}).$$

Donc pour les 2-cellules

$$\{\mu_A \circ \bar{m}_A: \omega_A \bar{m} \Rightarrow \sigma_A\}_{A \in Ob A},$$

on a

$$\begin{aligned} \sigma_f \circ ((Ff)(\mu_A \circ \bar{m}_A)) &= \sigma_f \circ ((Ff)\mu_A \circ (Ff)\bar{m}_A) = \\ &= \mu_A \circ \bar{\sigma}_f \circ (Ff)\bar{m}_A = \mu_A \circ \bar{m}_A \circ (\omega_f \bar{m}) \end{aligned}$$

et par conséquent il existe une unique 2-cellule $\bar{\mu}: \bar{m} \Rightarrow m$ telle que

$$m_A \circ \omega_A \bar{\mu} = \mu_A \circ \bar{m}_A, \quad \forall A \in Ob A.$$

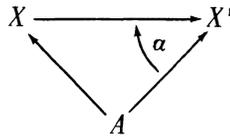
Cette $\bar{\mu}$ dépend fonctoriellement de $\mu = \{\mu_A\}$, car, si $\nu = \{\nu_A\}$ est une modification de $\{\bar{\sigma}_A, \bar{\sigma}_f\}$ vers $\{\bar{\sigma}_A, \bar{\sigma}_f\}$, des égalités

$$m_A \circ \omega_A (\bar{\mu} \circ \bar{\nu}) = m_A \circ \omega_A \bar{\mu} \circ \omega_A \bar{\nu} = \mu_A \circ \bar{m}_A \circ \omega_A \bar{\nu} = (\mu \circ \nu)_A \circ \bar{m}_A$$

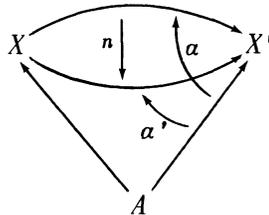
on déduit $\bar{\mu} \circ \bar{\nu} = \overline{\mu \circ \nu}$.

d) Soit \underline{A} une bicatégorie. Un objet *quasi-initial* de \underline{A} est un objet O de \underline{A} tel que la catégorie $\underline{A}(O, X)$ admette un objet terminal, quel que

soit l'objet X de \underline{A} . Il est évident qu'un tel objet est un cas particulier de quasi-limite. Considérons la bicatégorie A/\underline{A} des objets au-dessous de A , i.e. la bicatégorie dont les objets sont les flèches de \underline{A} de source A , dont les flèches sont les diagrammes



et dont les 2-cellules sont celles de \underline{A} rendant commutatifs les diagrammes de la forme



Alors un objet quasi-initial dans A/\underline{A} est une flèche $f: A \rightarrow X$ dont les extensions de Kan le long de n'importe quelle flèche $\kappa: A \rightarrow B$ de \underline{A} existent. Une telle flèche est appelée *flèche de Kan*. Dans Dist par exemple, la bicatégorie des distributeurs, toute flèche est une flèche de Kan, tandis que dans CAT, la 2-catégorie des catégories légitimes, tout foncteur F de A vers X , où A est petite et X cocomplète, est une flèche de Kan (théorème de Kan).

e) Par dualité on définit les quasi-limites inductives et, en inversant les seules 2-cellules ω_f , les quasi-limites coprojectives.

Soit \mathbf{E} une catégorie à produits fibrés ; la bicatégorie $Spn(\mathbf{E})$ des spans de \mathbf{E} est définie comme suit :

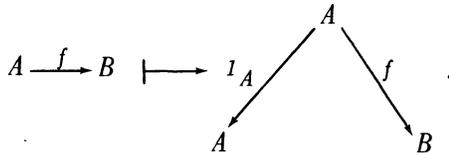
$$Ob\ Spn(\mathbf{E}) = Ob\ \mathbf{E} ;$$

Une flèche de A vers B , appelée *span*, est un triplet (δ_0, R, δ_1) , où δ_0, δ_1 sont des morphismes de \mathbf{E} de même source R , de buts A et B .

Une 2-cellule de (δ_0, R, δ_1) vers $(\bar{\delta}_0, \bar{R}, \bar{\delta}_1)$ est un morphisme

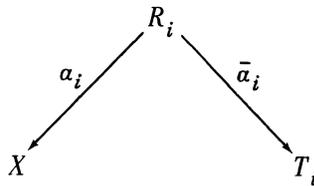
$$f: R \rightarrow \bar{R} \text{ tel que } \bar{\delta}_i f = \delta_i, \quad i = 0, 1.$$

On a un plongement fidèle $J: \mathbf{E} \rightarrow \text{Spn}(\mathbf{E})$ donné par

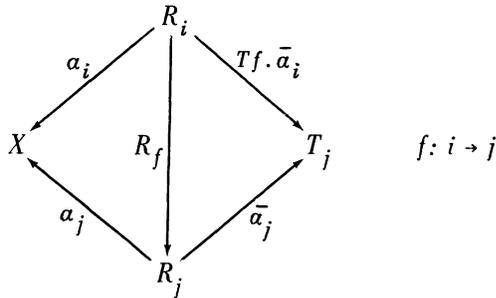


THEOREME 1.1. J transforme les limites projectives de \mathbf{E} en quasi-limites projectives de $\text{Spn}(\mathbf{E})$.

PREUVE. Soit $T: \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{E}$ un foncteur diagramme, et considérons un quasi-cône projectif de base $J \circ T$, c'est-à-dire une famille de spans



et de 2-cellules de spans



telles que $R_g \cdot R_f = R_{gf}$ pour tout couple de flèches composables

$$i \xrightarrow{f} j \xrightarrow{g} k .$$

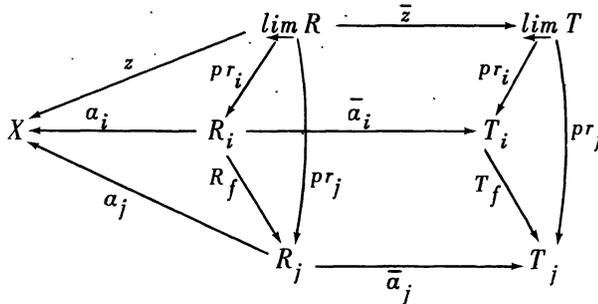
Ceci donne un foncteur $R: \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{E}$, avec

$$R(i) = R_i, \quad \forall i \in \text{Ob } \mathbf{I}, \quad R(f) = R_f, \quad \forall f \in \text{Fl } \mathbf{I},$$

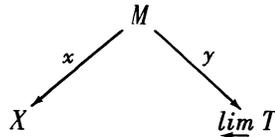
et deux transformations naturelles

$$\bar{a}: R \Rightarrow T, \quad a: R \Rightarrow \Delta_X$$

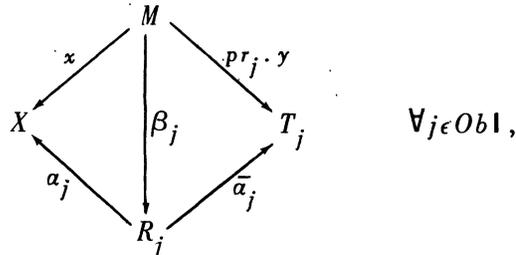
(Δ_X est le foncteur constant de \mathbf{I} vers \mathbf{E} prenant la valeur X)
 dont les composantes en l'objet i de \mathbf{I} sont \bar{a}_i et a_i respectivement. On considère alors $\varprojlim R$ dans \mathbf{E} et on obtient un span de X vers $\varprojlim T$ suivant le diagramme



($z = a_i \cdot pr_i$, $\forall i \in \text{Ob } \mathbf{I}$ et \bar{z} est induite par \bar{a})
 et une 2-cellule de $(z, \varprojlim R, pr_j \cdot \bar{z})$ vers (a_j, R_j, \bar{a}_j) qui est simplement pr_j . Ces données vérifient la relation qui exprime la commutativité du diagramme (I). Si l'on a un autre span



et une autre 2-cellule



alors la commutation du diagramme (I) s'exprime par les égalités

$$R_f \cdot \beta_i = \beta_j, \quad f: i \rightarrow j, \quad x = a_i \cdot \beta_i, \quad i \in \text{Ob } \mathbf{I},$$

d'où l'existence d'un seul morphisme $w: M \rightarrow \varprojlim R$ qui est un morphisme de (x, M, y) vers $(z, \varprojlim R, \bar{z})$ faisant commuter le diagramme (II). Cette construction donne en particulier les quasi-produits dans $\text{Spn}(\mathbf{E})$. ■

En ce qui concerne la structure de la classe des cônes quasi-limites on a le théorème suivant :

THEOREME 1.2. *Les cônes quasi-limites projectives de base donnée F forment une polyade, notée $qlp(F)$.*

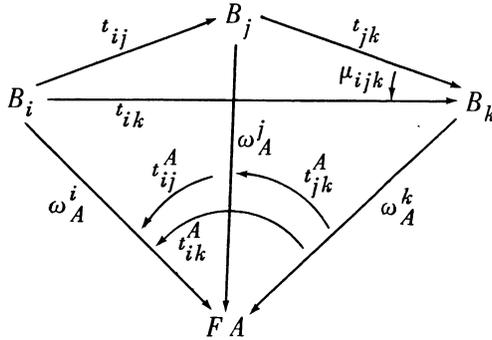
PREUVE. Notons $B_i\{\omega_A^i, \omega_f^i\}$ un tel cône de sommet B_i , et

$$t_{ij}: B_i \rightarrow B_j, \quad t_{ij}^A: \omega_A^j t_{ij} \rightarrow \omega_A^i$$

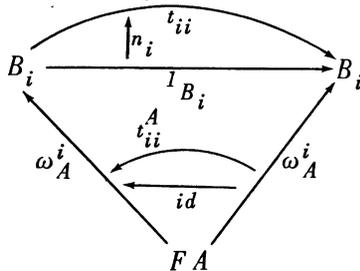
la flèche et la 2-cellule induites, de $B_i\{\omega_A^i, \omega_f^i\}$ vers $B_j\{\omega_A^j, \omega_f^j\}$. Si on a trois tels cônes B_i, B_j, B_k , alors il existe une seule 2-cellule

$$\mu_{ijk}: t_{jk} t_{ij} \Rightarrow t_{ik}$$

rendant commutatif le diagramme



De même il existe une seule 2-cellule $n_i: I_{B_i} \Rightarrow t_{ii}$ rendant commutatif



Ce sont respectivement les multiplications et les unités de $qlp(F)$, car, pour quatre cônes quasi-limites B_i, B_j, B_k, B_l on trouve successivement les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
t_{il}^A \circ (\omega_A^l (\mu_{ikl} \circ t_{kl} \mu_{ijk})) &= t_{il}^A \circ \omega_A^l \mu_{ikl} \circ \omega_A^l t_{kl} \mu_{ijk} = \\
&= t_{ik}^A \circ t_{kl}^A t_{ik} \circ \omega_A^l t_{kl} \mu_{ijk} = t_{ik}^A \circ \omega_A^k \mu_{ijk} \circ t_{kl}^A t_{jk} t_{ij} = \\
&= t_{ij}^A \circ t_{jk}^A t_{ij} \circ t_{kl}^A t_{jk} t_{ij} = t_{ij}^A \circ (t_{jk}^A \circ t_{kl}^A t_{jk}) t_{ij} = \\
&= t_{ij}^A \circ (t_{jl}^A \circ \omega_A^l \mu_{jkl}) t_{ij} = t_{ij}^A \circ t_{jl}^A t_{ij} \circ \omega_A^l \mu_{jkl} t_{ij} = \\
&= t_{il}^A \circ \omega_A^l \mu_{ijl} \circ \omega_A^l \mu_{jkl} t_{ij} = t_{il}^A \circ (\omega_A^l (\mu_{ijl} \circ \mu_{jkl} t_{ij})).
\end{aligned}$$

Par unicité, on obtient

$$(1) \quad \mu_{ijl} \circ \mu_{jkl} t_{ij} = \mu_{ikl} \circ t_{kl} \mu_{ijk}.$$

Il reste à établir les relations

$$(2) \quad \mu_{iij} \circ t_{ij} n_i = 1, \quad \mu_{ijj} \circ n_j t_{ij} = 1.$$

Montrons par exemple la première :

$$\begin{aligned}
t_{ij}^A \circ \omega_A^j (\mu_{iij} \circ t_{ij} n_i) &= t_{ij}^A \circ \omega_A^j \mu_{iij} \circ \omega_A^j t_{ij} n_i = \\
&= t_{ii}^A \circ t_{ij}^A t_{ii} \circ \omega_A^j t_{ij} n_i = t_{ii}^A \circ \omega_A^i n_i \circ t_{ij}^A = 1_{\omega_A^i} \circ t_{ij}^A = \\
&= t_{ij}^A = t_{ij}^A \circ \omega_A^j 1_{t_{ij}},
\end{aligned}$$

d'où $\mu_{iij} \circ t_{ij} n_i = 1$. (1) et (2) sont les axiomes de définition d'une polyade, et la preuve est achevée. ■

THEOREME 1.3. *Un choix de quasi-limites projectives définit un morphisme de $\text{Fun}(\underline{A}, \underline{B})$, la 2-catégorie des 2-foncteurs de \underline{A} vers \underline{B} dont les flèches sont les transformations quasi-naturelles, vers la bicatégorie $\text{Bim}(\underline{B})$ des bimodules de \underline{B} (voir [4]); ce morphisme est noté QLP .*

PREUVE. Pour tout 2-foncteur $F: \underline{A} \rightarrow \underline{B}$ on choisit un cône quasi-limite $B_F \in \text{qlp}(F)$; pour toute transformation quasi-naturelle $m = \{m_A, m_f\}$ de F vers G , soit

$$B_m: B_F \rightarrow B_G, \quad (B_m)_A: \sigma_A B_m \Rightarrow m_A \omega_A$$

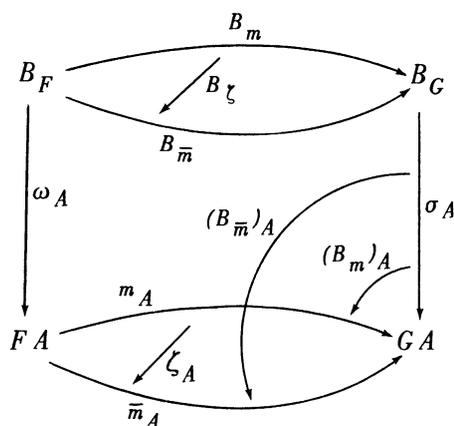
la flèche et les 2-cellules induites par le quasi-cône projectif

$$\{ m_A \omega_A, \omega_f \circ m_f \omega_A \} .$$

D'abord B_m est un distributeur de (B_F, t_{FF}) vers (B_G, t_{GG}) , où t_{FF} , t_{GG} sont les monades induites par les cônes $\{\omega_A, \omega_f\}$, $\{\sigma_A, \sigma_f\}$ respectivement, comme il résulte du Théorème 1.2. On peut donc poser

$$QLP(F) = (B_F, t_{FF}), \quad QLP(m) = B_m .$$

Si $\zeta = \{\zeta_A\}$ est une modification de $m = \{m_A, m_f\}$ vers $\bar{m} = \{\bar{m}_A, \bar{m}_f\}$, alors d'après la remarque c il existe une seule 2-cellule $B_\zeta: B_m \Rightarrow B_{\bar{m}}$ qui rend commutatif le diagramme



B_ζ est un morphisme de distributeurs, car

$$\begin{aligned} (B_{\bar{m}})_A \circ \sigma_A (B_\zeta \circ \mu_F) &= (B_{\bar{m}})_A \circ \sigma_A B_\zeta \circ \sigma_A \mu_F = \\ &= \zeta_A \omega_A \circ (B_m)_A \circ \sigma_A \mu_F = \zeta_A \omega_A \circ m_A t_{FF}^A \circ (B_m)_A t_{FF} = \\ &= \zeta_A \circ t_{FF}^A \circ (B_m)_A t_{FF} = \bar{m}_A t_{FF}^A \circ \zeta_A \omega_A t_{FF} \circ (B_m)_A t_{FF} = \\ &= \bar{m}_A t_{FF}^A \circ (\zeta_A \omega_A \circ (B_m)_A) t_{FF} = \\ &= \bar{m}_A t_{FF}^A \circ ((B_{\bar{m}})_A \circ \sigma_A B_\zeta) t_{FF} = \\ &= \bar{m}_A t_{FF}^A \circ (B_{\bar{m}})_A t_{FF} \circ \sigma_A B_\zeta t_{FF} = \\ &= (B_{\bar{m}})_A \circ \sigma_A \bar{\mu}_F \circ \sigma_A B_\zeta t_{FF} = (B_{\bar{m}})_A \circ \sigma_A (\bar{\mu}_F \circ B_\zeta t_{FF}) \end{aligned}$$

et par conséquent, par unicité :

$$(3) \quad \bar{\mu}_F \circ B_\zeta t_{FF} = B_\zeta \circ \mu_F ,$$

où $\mu_F, \bar{\mu}_F, t_{FF}, t_{FF}^A$, etc..., ont la même signification que les $\mu_{ijk}, t_{ii}, t_{ii}^A$, etc..., dans le Théorème 1.2. D'une façon analogue, on montre que

$$(4) \quad \begin{array}{ccc} t_{GG} B_m & \xrightarrow{\mu_G} & B_m \\ t_{GG} B_\zeta \downarrow & & \downarrow B_\zeta \\ t_{GG} B_{\bar{m}} & \xrightarrow{\bar{\mu}_G} & B_{\bar{m}} \end{array}$$

commute. (3) et (4) sont les conditions pour que B_ζ soit un morphisme de distributeurs, donc il est légitime de poser $QLP(\zeta) = B_\zeta$. D'après la remarque c, QLP est un foncteur sur la catégorie $Fun(\underline{A}, \underline{B})(F, G)$. Il reste à démontrer l'existence des 2-cellules, $\forall p: G \Rightarrow P$,

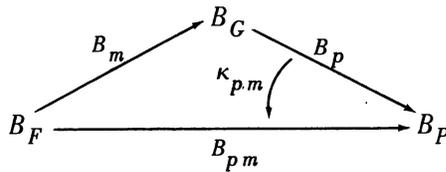
$$\phi_{p,m}: B_p \otimes B_m \Rightarrow B_{pm}, \quad \phi_G: 1_{B_G} \Rightarrow B_{1_G} \stackrel{!}{=} t_{GG},$$

ainsi que les conditions de cohérence qu'elles vérifient. Rappelons que, dans $Bim(\underline{B})$, $B_p \otimes B_m$ s'obtient par le conoyau suivant:

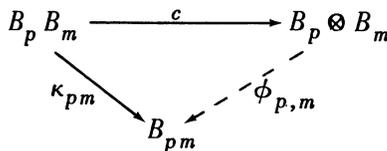
$$B_p t_{GG} B_m \xrightarrow{B_p \mu_G} B_p B_m \xrightarrow{c} B_p \otimes B_m \quad .$$

$$B_p t_{GG} B_m \xrightarrow{\nu_G B_m} B_p B_m$$

Par un procédé déjà utilisé on montre que la 2-cellule induite



égalise les $B_p \mu_G$ et $\nu_G B_m$, d'où l'existence d'une seule 2-cellule $\phi_{p,m}$ de $B_p \otimes B_m$ vers B_{pm} qui rend commutatif le triangle



On laisse au lecteur le soin de prouver les autres assertions. ■

2. Compatibilité des quasi-limites.

On va étudier la compatibilité des quasi-limites avec certains 2-foncteurs remarquables.

DEFINITION. On dit que le 2-foncteur $F: \underline{\underline{A}} \rightarrow \underline{\underline{B}}$ commute avec les quasi-limites projectives (resp. inductives) s'il transforme les cônes quasi-limites projectives (resp. inductives) de $\underline{\underline{A}}$ en cônes quasi-limites projectives (resp. inductives) de $\underline{\underline{B}}$ ou, formellement :

$$B\{\omega_A, \omega_f\} \in \text{qlp}(G) \text{ entraîne } FB\{F\omega_A, F\omega_f\} \in \text{qlp}(F \circ G), \quad G: \underline{\underline{1}} \rightarrow \underline{\underline{A}}.$$

THEOREME 2.1. Pour tout objet B de la 2-catégorie $\underline{\underline{B}}$, le 2-foncteur

$$\underline{\underline{B}}(B, -): \underline{\underline{B}} \rightarrow \underline{\underline{Cat}}$$

commute avec les quasi-limites projectives, c'est-à-dire

$$\bar{B}\{\omega_A, \omega_f\} \in \text{qlp}(F) \text{ entraîne}$$

$$\underline{\underline{B}}(B, \bar{B})\{\underline{\underline{B}}(B, \omega_A), \underline{\underline{B}}(B, \omega_f)\} \in \text{qlp}(\underline{\underline{B}}(B, F(-))).$$

PREUVE. Soit $\bar{B}\{\omega_A, \omega_f\} \in \text{qlp}(F)$; alors

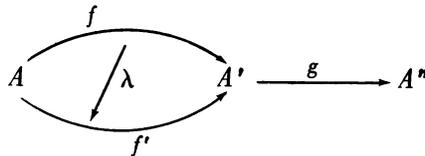
$$\underline{\underline{B}}(B, \bar{B})\{\underline{\underline{B}}(B, \omega_A), \underline{\underline{B}}(B, \omega_f)\}$$

est un quasi-cône projectif de sommet $\underline{\underline{B}}(B, \bar{B})$ et de base $\underline{\underline{B}}(B, F(-))$.

Supposons que $\underline{\underline{X}}\{Q_A, Q_f\}$ soit un autre quasi-cône projectif dans $\underline{\underline{Cat}}$ de sommet $\underline{\underline{X}}$ et de base $\underline{\underline{B}}(B, F(-))$; alors on a les relations suivantes (axiomes QCP 1 - QCP 3) :

$$(5) \quad Q_g \circ \underline{\underline{B}}(B, Fg)Q_f = Q_{gf}, \quad Q_{f'} \circ \underline{\underline{B}}(B, F\lambda)Q_A = Q_f, \quad Q_{1_A} = 1_{Q_A}$$

pour



dans $\underline{\underline{A}}$. En évaluant les égalités (5) en $x \in \text{Ob } \underline{\underline{X}}$, on obtient

$$(6) \quad \begin{aligned} (Q_g)_x \circ (Fg)(Q_f)_x &= (Q_{gf})_x, \\ (Q_{f'})_x \circ (F\lambda)Q_A(x) &= (Q_f)_x, \quad (Q_{1_A})_x = 1, \end{aligned}$$

donc $B\{Q_A(x), (Q_f)_x\}$ est un quasi-cône projectif dans \underline{B} de sommet B , de base F , d'où l'existence d'une flèche $Q(x): B \rightarrow \bar{B}$ et de 2-cellules

$$\phi_{A,x}: \omega_A Q(x) \Rightarrow Q_A(x)$$

qui rendent commutatif le diagramme

$$(7) \quad \begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{Q(x)} & \bar{B} \\ \downarrow Q_A(x) & \searrow^{(Q_f)_x} & \downarrow \omega_f \\ F & \xrightarrow{Ff} & F' \\ \uparrow \phi_{A,x} & \swarrow_{\omega_A} & \uparrow \phi_{A',x} \\ B & \xrightarrow{Q_{A',x}} & \bar{B} \\ \downarrow Q_{A',x} & \searrow^{(Q_f)_{x'}} & \downarrow \omega_{f'} \\ F & \xrightarrow{Ff'} & F' \\ \uparrow \phi_{A',x} & \swarrow_{\omega_{A'}} & \uparrow \phi_{A,x} \\ B & \xrightarrow{Q(x)} & \bar{B} \end{array}$$

De plus, si $m: x \rightarrow x'$ est un morphisme de \underline{X} , en traduisant le fait que les Q_f sont des transformations naturelles, on obtient

$$(Q_f)_{x'} \circ (Ff)Q_A(m) = Q_{A',x}(m) \circ (Q_f)_x, \quad \forall f \in Fl \underline{A};$$

donc $\{Q_A(m)\}$ est une modification, d'où l'unique 2-cellule

$$Q(m): Q(x) \Rightarrow Q(x')$$

qui vérifie la relation

$$(8) \quad \phi_{A,x'} \circ \omega_A Q(m) = Q_A(m) \circ \phi_{A,x}.$$

D'après la remarque c du n° 1, Q est un foncteur de \underline{X} vers $\underline{B}(B, \bar{B})$ et les relations (7) et (8) nous disent que les $\phi_{A,x}$ sont les composantes des transformations naturelles qui vérifient les relations

$$Q_f \circ \underline{B}(B, Ff)\phi_A = \phi_{A'} \circ \underline{B}(B, \omega_f)Q, \quad f \in Fl \underline{A}.$$

D'autre part, si Q' est un foncteur de \underline{X} vers $\underline{B}(B, \bar{B})$ et

$$\{\phi'_A: \underline{B}(B, \omega_A)Q' \Rightarrow Q_A\}_{A \in Ob \underline{A}}$$

une famille de transformations naturelles vérifiant les relations

$$(9) \quad Q_f \circ \underline{B}(B, Ff)\phi'_A = \phi'_{A'} \circ \underline{B}(B, \omega_f)Q',$$

alors on a

$$(10) \quad (Q_f)_x \circ (Ff)\phi'_{A,x} = \phi'_{A',x} \circ \omega_f Q'(x),$$

$$(11) \quad \phi'_{A,x} \circ \omega_A Q'(m) = Q_A(m) \circ \phi'_{A,x},$$

où les égalités (10) sont les égalités (9) évaluées en $x \in \text{Ob } \underline{X}$ et où les égalités (11) expriment le fait que les ϕ'_A sont des transformations naturelles. Par conséquent il existe une unique flèche $\psi(x): Q'(x) \rightarrow Q(x)$ telle que

$$(12) \quad \phi_{A,x} \circ \omega_A \psi(x) = \phi'_{A,x}.$$

On doit prouver que ces $\psi(x)$ constituent une transformation naturelle de Q' vers Q . En effet, pour tout $m: x \rightarrow x'$ dans \underline{X} , on a

$$\begin{aligned} \phi_{A,x'} \circ \omega_A (Q(m) \circ \psi(x)) &= \phi_{A,x'} \circ \omega_A Q(m) \circ \omega_A \psi(x) = \\ &= Q_A(m) \circ \phi_{A,x} \circ \omega_A \psi(x) = Q_A(m) \circ \phi'_{A,x} = \phi'_{A,x'} \circ \omega_A Q'(m) = \\ &= \phi_{A,x'} \circ \omega_A \psi(x') \circ \omega_A Q'(m) = \phi_{A,x'} \circ \omega_A (\psi(x') \circ Q'(m)), \end{aligned}$$

d'où

$$Q(m) \circ \psi(x) = \psi(x') \circ Q'(m).$$

On a donc trouvé une transformation naturelle $\psi: Q' \Rightarrow Q$ telle que

$$\phi_A \circ \underline{\underline{B}}(B, \omega_A) \psi = \phi'_A$$

(en vertu de (12)).

Unicité: Soit $\bar{\psi}: Q' \Rightarrow Q$ telle que

$$(13) \quad \phi_A \circ \underline{\underline{B}}(B, \omega_A) \bar{\psi} = \phi'_A ;$$

alors (13) évalué en x donne

$$\phi_{A,x} \circ \omega_A \bar{\psi}(x) = \phi'_{A,x}$$

qui, avec (12), donne $\psi(x) = \bar{\psi}(x)$. Le théorème énoncé est donc prouvé. ■

Soit $G: \underline{\underline{C}} \rightarrow \underline{\underline{B}}$, $D: \underline{\underline{B}} \rightarrow \underline{\underline{C}}$ deux 2-foncteurs.

DEFINITION. On dit que G est *Cat-adjoint à gauche* de D si on a un isomorphisme

$$\phi_{C,B}: \underline{\underline{B}}(GC, B) \leftarrow \underline{\underline{C}}(C, DB)$$

naturel en C et B . On écrit alors $G \overline{Cat} D$.

Si $f: C' \rightarrow C$, $g: B \rightarrow B'$ sont deux flèches dans $\underline{\underline{C}}$ et $\underline{\underline{B}}$ respectivement, de la naturalité de ϕ résulte la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \underline{\underline{B}}(GC, B) & \xleftarrow{\phi_{C,B}} & \underline{\underline{C}}(C, DB) \\ \underline{\underline{B}}(Gf, g) \downarrow & & \downarrow \underline{\underline{C}}(f, Dg) \\ \underline{\underline{B}}(GC', B') & \xleftarrow{\phi_{C',B'}} & \underline{\underline{C}}(C', DB') \end{array}$$

d'où les formules

$$\phi^{-1}(g \cdot \lambda \cdot Gf) = Dg \cdot \phi^{-1}(\lambda) \cdot f \quad GC \begin{array}{c} \curvearrowright \\ / \lambda \\ \curvearrowleft \end{array} B, \tag{14}$$

$$\phi(Dg \cdot \lambda' \cdot f) = g \cdot \phi(\lambda') \cdot Gf \quad C \begin{array}{c} \curvearrowright \\ / \lambda' \\ \curvearrowleft \end{array} DB.$$

THEOREME 2.2. *Dans la situation $G \overline{Cat} D$, D commute avec les quasi-limites projectives et G commute avec les quasi-limites inductives.*

PREUVE. Soit $B\{\omega_A, \omega_f\}$ un cône quasi-limite projective de base $F: \underline{\underline{A}} \rightarrow \underline{\underline{B}}$ (on suppose $\underline{\underline{A}}$ localement discrète) et $DB\{D\omega_A, D\omega_f\}$ sa projection par D sur $\underline{\underline{C}}$. Considérons de plus un quasi-cône projectif $C\{\sigma_A, \sigma_f\}$, dans $\underline{\underline{C}}$ de base $D \circ F$; alors $GC\{\phi\sigma_A, \phi\sigma_f\}$ est un quasi-cône projectif de base F , comme il résulte des relations (14). Par conséquent on a une flèche $x: GC \rightarrow B$ et des 2-cellules

$$x_A: \omega_A x \Rightarrow \phi\sigma_A, \quad \forall A \in Ob \underline{\underline{A}},$$

qui vérifient les équations :

$$\phi\sigma_f \circ (Ff)x_A = x_A \circ \omega_f x, \quad \forall f \in Fl \underline{\underline{A}}. \tag{15}$$

Les relations $\phi^{-1}(15)$ s'écrivent, en vertu de (14),

$$\phi^{-1}\phi\sigma_f \circ \phi^{-1}((Ff)x_A) = \phi^{-1}x_A \circ \phi^{-1}(\omega_f x),$$

ou bien

$$\sigma_f \circ (DFf)\phi^{-1}x_A = \phi^{-1}x_A \circ (D\omega_f)\phi^{-1}x.$$

Pour démontrer l'universalité du système $\{\phi^{-1}x, \phi^{-1}x_A\}$, soit $\{y, y_A\}$ un système tel que

$$\sigma_f \circ (DFf)y_A = y_A \circ (D\omega_f)y;$$

alors la 2-cellule $\phi^{-1}\kappa : y \Rightarrow \phi^{-1}x$, où κ est la solution unique de l'équation $x_A \circ \omega_A \kappa = \phi y_A$, est la seule 2-cellule vérifiant la relation

$$\phi^{-1}x_A \circ (D\omega_A)\phi^{-1}\kappa = y_A. \blacksquare$$

COROLLAIRE 2.3. *Les limites cartésiennes projectives commutent avec les quasi-limites projectives.*

PREUVE. On applique le théorème à la *Cat*-adjonction suivante :

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{\Delta} \\ \xleftarrow{\text{cart-lim}} \end{array} \text{Fun}(I, A)$$

3. Quasi-limites et distributeurs.

Dans ce paragraphe on construit les quasi-limites coprojectives et inductives dans les bicatégories Dist et V-Dist, des distributeurs et des **V**-distributeurs respectivement, où **V** est une catégorie monoïdale; la catégorie des proalgèbres sur un prottriple est un exemple de construction de ce genre.

On définit la composition du distributeur $\Phi : \mathcal{A} \dashrightarrow \mathcal{B}$ avec le distributeur $\Psi : \mathcal{B} \dashrightarrow \mathcal{C}$ par la formule

$$(\Phi \otimes \Psi)(C, A) = \frac{\coprod_{B \in \mathcal{B}} \Phi(B, A) \times \Psi(C, B)}{R}, \quad A \in \text{Obj } \mathcal{A}, \quad C \in \text{Obj } \mathcal{C},$$

où R est la plus petite relation d'équivalence contenant les couples

$$((\phi\beta, \gamma), (\phi, \beta\gamma)),$$

avec $\phi \in \Phi(B', A)$, $\gamma \in \Psi(C, B)$, $\beta : B \rightarrow B' \in \text{Fl } \mathcal{B}$, et où on a posé - pour simplifier l'écriture - $\phi\beta = \Phi(\beta, A)(\phi)$ et $\beta\gamma = \Psi(C, \beta)(\gamma)$.

On désigne par $\phi \otimes \gamma$ la classe d'équivalence du couple (ϕ, γ) . Soit

$$(15) \quad \mathbf{T} = (T, \{n_A: I_{TA} \Rightarrow T(I_A)\}, \{ \phi_{gf}: T(g) \otimes T(f) \Rightarrow T(gf) \})$$

un morphisme de la catégorie \underline{A} vers la bicatégorie Dist, et considérons la catégorie QT qui a pour objets les couples

$$(16) \quad X = (\{x_A\}_{A \in Ob \underline{A}}, \{m_f\}_{f \in Fl \underline{A}})$$

où

$$\begin{cases} x_A \in Ob TA, \quad \forall A \in Ob \underline{A}, \\ m_f \in T(f)(x_B, x_A), \quad \forall f: A \rightarrow B \in Fl \underline{A}, \\ \phi_{gf}(m_g \otimes m_f) = m_{gf}, \quad n_A(I_{x_A}) = m_{I_A}. \end{cases}$$

Un morphisme dans QT de (16) vers l'objet

$$Y = (\{y_A\}_{A \in Ob \underline{A}}, \{\kappa_f\}_{f \in Fl \underline{A}})$$

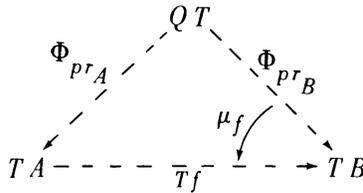
sera une famille de morphismes $\{a_A: x_A \rightarrow y_A\}_{A \in Ob \underline{A}}$ telle que

$$T(f)(x_B, a_A)(m_f) = T(f)(a_B, y_A)(\kappa_f), \quad f: A \rightarrow B,$$

ou brièvement $a_A \cdot m_f = \kappa_f \cdot a_B$. Pour tout objet A de \underline{A} , on a un foncteur projection canonique

$$pr_A: (\{x_A\}, \{m_f\}) \mapsto x_A \text{ de } QT \text{ vers } TA,$$

et pour tout morphisme f de \underline{A} on a des transformations naturelles



où Φ_{pr_A} est le distributeur représentable associé à pr_A , i. e.

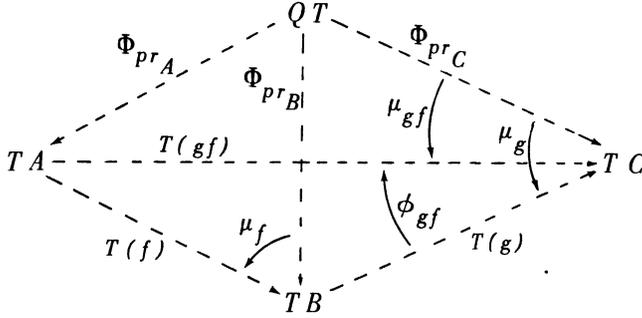
$$\Phi_{pr_A} = Hom_{TA}(-, pr_A)$$

et où μ_f est donné, au point (y, X) , $y \in Ob TB$, $X \in Ob QT$, par la fonction

$$\begin{aligned} \mu_{f,y,X}: \Phi_{pr_B}(y, X) = Hom_{TB}(y, x_B) &\rightarrow \{T(f) \otimes \Phi_{pr_A}\}(y, X) = \\ &= T(f)(y, x_A), \end{aligned}$$

$$\mu_{f,y,X}(z) = T(f)(z, x_A)(m_f) = z \cdot m_f, \quad z : y \rightarrow x_B.$$

On vérifie facilement que le diagramme

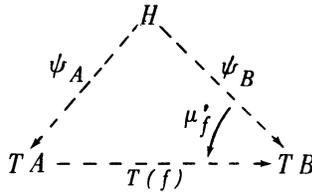


commute, i. e. que

$$\phi_{gf} \cdot \Phi_{prA} \otimes T(g) \cdot \mu_f \otimes \mu_g = \mu_{gf},$$

donc $\{\Phi_{prA}, \mu_f\}$ est un quasi-cône coprojectif de base T , de sommet QT .

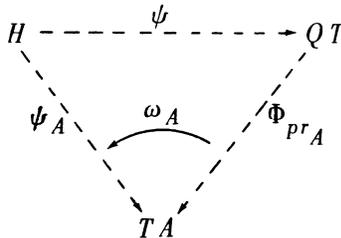
Pour tout quasi-cône coprojectif $\{\psi_A, \mu'_f\}$ de base T et de sommet H



le distributeur $\psi : H \dashrightarrow QT$ défini par

$$\psi(X, h) = \prod_{x_A \in X} \psi_A(x_A, h),$$

et les 2-cellules



dont la (x, h) -composante

$$(\Phi_{pr_A} \otimes \psi)(x, h) = \frac{\prod_{X \in QT} Hom_{TA}(x, x_A) \times \prod_{x_A \in X} \psi_A(x_A, h)}{R} \xrightarrow{\omega_{A,x,h}} \psi_A(x, h),$$

$x \in Ob TA, h \in Ob H$, est définie par

$$\omega_{A,x,h}(z \otimes \{y_A\}_{A \in Ob \underline{A}}) = \psi_A(z, h)(y_A) = z \cdot y_A,$$

où $y_A \in \psi_A(x_A, h), \forall A \in Ob \underline{A}$, sont tels que

$$\mu'_f \cdot \omega_B = T(f) \otimes \omega_A \cdot \mu_f \otimes \psi.$$

Pour démontrer l'universalité des données $\{\psi, \omega_A\}$, soit $\{\bar{\psi}, \bar{\omega}_A\}$ un autre système vérifiant la relation

$$\mu'_f \cdot \bar{\omega}_B = T(f) \otimes \bar{\omega}_A \cdot \mu_f \otimes \bar{\psi};$$

alors la transformation naturelle $\delta : \bar{\psi} \Rightarrow \psi$, où

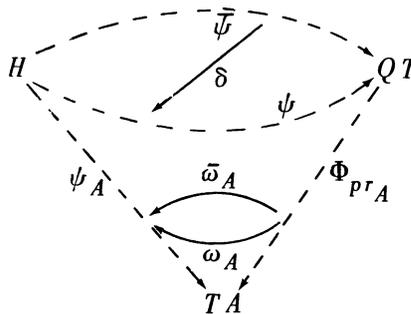
$$\delta_{X,h} : \bar{\psi}(X, h) \rightarrow \psi(X, h) = \prod_{x_A \in X} \psi_A(x_A, h),$$

$X \in Ob QT, h \in Ob H$, est définie par

$$p_A \cdot \delta_{X,h}(y) = \bar{\omega}_{A,x_A,h}(I_{x_A} \otimes y) \in \psi_A(x_A, h)$$

(p_A désigne la projection canonique du produit $\prod \psi_A(x_A, h)$ vers le facteur $\psi_A(x_A, h)$),

est la seule transformation naturelle rendant commutatif le diagramme



Donc $QT\{\Phi_{pr_A}, \mu_f\}$ est une quasi-limite coprojective de base T .

Pour obtenir une quasi-limite inductive de T , on remplace les Φ_{pr_A} par les $\Phi^{pr_A} = Hom_{TA}(pr_A-, -)$ et on procède de façon duale.

Si T est un comorphisme (n_A et ϕ_{gf} dans (15) sont inversés), alors dans (16) on exige cette fois

$$\phi_{gf}(m_{gf}) = m_g \otimes m_f, \quad n_A(m_{l_A}) = l_{x_A}.$$

En résumé :

THEOREME 3.1. La bicatégorie $Dist$ est à quasi-limites. ■

REMARQUE. Si T prend ses valeurs dans $\underline{Cat} \subset \underline{Dist}$, alors $QT\{\Phi_{pr_A}, \mu_f\}$ est aussi dans \underline{Cat} et c'est la limite cartésienne coprojective de T .

Soit $\mathbf{V} = (V, \otimes, l, a, l, r)$ une catégorie monoïdale.

La bicatégorie $\mathbf{V}\text{-}\underline{Dist}$ des distributeurs relatifs à \mathbf{V} est définie comme suit :

Ses objets sont les \mathbf{V} -catégories $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \dots$

Une flèche de \mathcal{A} vers \mathcal{B} , appelée un \mathbf{V} -distributeur, est une application $\Phi: Ob \mathcal{B} \times Ob \mathcal{A} \rightarrow Ob V$ et deux familles de morphismes de V :

$$\begin{aligned} & \{ \phi_{AA'} : \Phi(B, A) \otimes \mathcal{A}(A, A') \rightarrow \Phi(B, A') \}_{A, A' \in Ob \mathcal{A}}, \\ & \{ \phi_{B'B} : \mathcal{B}(B', B) \otimes \Phi(B, A) \rightarrow \Phi(B', A) \}_{B', B \in Ob \mathcal{B}}, \end{aligned}$$

telles que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{array}{ccc} \Phi(B, A) \otimes \mathcal{A}(A, A') \otimes \mathcal{A}(A', A'') & \xrightarrow{1 \otimes c} & \Phi(B, A) \otimes \mathcal{A}(A, A'') \\ \downarrow \phi_{AA'} \otimes 1 & & \downarrow \phi_{AA''} \\ \Phi(B, A') \otimes \mathcal{A}(A', A'') & \xrightarrow{\phi_{A'A''}} & \Phi(B, A'') \\ \\ \Phi(B, A) \otimes I & \xrightarrow{1 \otimes n_A} & \Phi(B, A) \otimes \mathcal{A}(A, A) \\ & \searrow \sim & \downarrow \phi_{AA} \\ & & \Phi(B, A) \end{array}$$

On a deux diagrammes analogues pour l'action $\phi_{B'B}$ et de plus

$$\begin{array}{ccc}
 \mathfrak{B}(B', B) \otimes \Phi(B, A) \otimes \mathfrak{A}(A, A') & \xrightarrow{1 \otimes \phi_{AA'}} & \mathfrak{B}(B', B) \otimes \Phi(B, A') \\
 \downarrow \phi_{B'B} \otimes 1 & & \downarrow \phi_{B'B} \\
 \Phi(B', A) \otimes \mathfrak{A}(A, A') & \xrightarrow{\phi_{AA'}} & \Phi(B', A')
 \end{array}$$

(Il y a un abus de notations évident, pour simplifier.) On écrit $\Phi : \mathfrak{A} \dashrightarrow \mathfrak{B}$.

Une 2-cellule de Φ vers $\Psi : \mathfrak{A} \dashrightarrow \mathfrak{B}$ est une collection de morphismes de V ,

$$\{ \lambda_{BA} : \Phi(B, A) \rightarrow \Psi(B, A) \}_{B \in \text{Ob } \mathfrak{B}, A \in \text{Ob } \mathfrak{A}}$$

faisant commuter les diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccc}
 \Phi(B, A) \otimes \mathfrak{A}(A, A') & \xrightarrow{\phi_{AA'}} & \Phi(B, A') \\
 \downarrow \lambda_{BA} \otimes 1 & & \downarrow \lambda_{BA'} \\
 \Psi(B, A) \otimes \mathfrak{A}(A, A') & \xrightarrow{\gamma_{AA'}} & \Psi(B, A') \\
 \\
 \mathfrak{B}(B', B) \otimes \Phi(B, A) & \xrightarrow{\phi_{B'B}} & \Phi(B', A) \\
 \downarrow 1 \otimes \lambda_{BA} & & \downarrow \lambda_{B'A} \\
 \mathfrak{B}(B', B) \otimes \Psi(B, A) & \xrightarrow{\gamma_{B'B}} & \Psi(B', A)
 \end{array}$$

Le composé de $\Phi : \mathfrak{A} \dashrightarrow \mathfrak{B}$ avec $\Psi : \mathfrak{B} \dashrightarrow \mathfrak{C}$ est donné par le conoyau :

$$\coprod_{B, B' \in \text{Ob } \mathfrak{B}} \Psi(C, B) \otimes \mathfrak{B}(B, B') \otimes \Phi(B', A) \xrightarrow{\delta_0} \coprod_{B \in \text{Ob } \mathfrak{B}} \Psi(C, B) \otimes \Phi(B, A)$$

δ_1

$$\downarrow \xi \\
 (\Psi \otimes \Phi)(C, A)$$

où

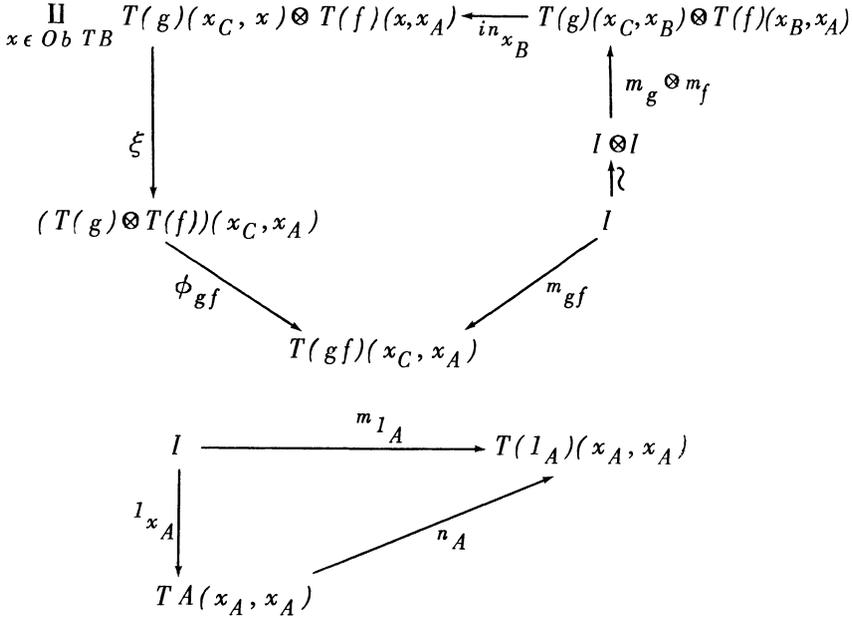
$$\delta_0 \cdot in_{(B, B')} = in_B \cdot (1 \otimes \phi_{BB'}), \quad \delta_1 \cdot in_{(B, B')} = in_{B'} \cdot (\gamma_{BB'} \otimes 1).$$

Soit $T : \underline{A} \rightarrow \underline{\mathbf{V}}\text{-Dist}$ un morphisme d'une catégorie \underline{A} vers $\underline{\mathbf{V}}\text{-Dist}$ et

QT la \mathbf{V} -catégorie qui a pour objets les couples

$$(17) \quad X = (\{x_A\}_{A \in \text{Ob } \underline{A}}, \{m_f\}_{f \in \text{Fl } \underline{A}}),$$

où x_A est un objet de la \mathbf{V} -catégorie TA et m_f un morphisme de I vers $T(f)(x_B, x_A)$, tels que les diagrammes suivants commutent



$$(\phi_{gf}: T(g) \otimes T(f) \Rightarrow T(gf), \quad n_A: TA(-, -) \Rightarrow T(I_A))$$

proviennent du morphisme T et ξ est le conoyau qui définit

$$(T(g) \otimes T(f))(x_C, x_A).$$

L'objet des morphismes de (17) vers l'objet $Y = (\{y_A\}, \{\kappa_f\})$ est donné par le noyau suivant:

$$(18) \quad QT(X, Y) \xrightarrow{\zeta} \prod_{A \in \text{Ob } \underline{A}} TA(x_A, y_A) \xrightarrow[\delta_1]{\delta_0} \prod_{f \in \underline{A}(A, B)} T(f)(x_B, y_A)$$

où $pr_f \cdot \delta_0$ et $pr_f \cdot \delta_1$ sont les morphismes

$$\begin{array}{c}
 \prod_{A \in \text{Ob } \underline{A}} TA(x_A, y_A) \xrightarrow{pr_A} TA(x_A, y_A) \xrightarrow{\simeq} I \otimes TA(x_A, y_A) \longrightarrow \\
 \xrightarrow{m_f \otimes I} T(f)(x_B, x_A) \otimes TA(x_A, y_A) \xrightarrow{T(f)_{x_A y_A}} T(f)(x_B, y_A)
 \end{array}$$

et

$$\begin{aligned} \prod_{A \in \text{Ob } \underline{A}} TA(x_A, y_A) &\xrightarrow{pr_B} TB(x_B, y_B) \xrightarrow{\sim} TB(x_B, y_B) \otimes I \longrightarrow \\ &\xrightarrow{I \otimes \kappa_f} TB(x_B, y_B) \otimes T(f)(y_B, y_A) \xrightarrow{T(f)_{x_B y_B}} T(f)(x_B, y_A) \end{aligned}$$

respectivement.

On démontre à l'aide de grands diagrammes que QT est une \mathbf{V} -catégorie.

On a les \mathbf{V} -foncteurs projections canoniques $pr_A: QT \rightarrow TA$ tels que

$$(\{x_A\}, \{m_f\}) \mapsto x_A, \quad QT(X, Y) \xrightarrow{pr_A \cdot \zeta} TA(x_A, y_A),$$

où ζ est le noyau (18). Enfin les 2-cellules :

$$\mu_f: T(f) \otimes \Phi_{pr_B} \Rightarrow \Phi_{pr_A}, \quad f: A \rightarrow B \in \text{Fl } \underline{A},$$

sont définies par les diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{array}{ccc} TB(y, x_B) & \xrightarrow{\mu_{f, y, X}} & T(f)(y, x_A) \\ \downarrow \wr & & \uparrow T(f)_{yx_B} \\ TB(y, x_B) \otimes I & \xrightarrow{I \otimes m_f} & TB(y, x_B) \otimes T(f)(x_B, x_A) \end{array}$$

On prouve facilement que le quasi-cône $\{\Phi_{pr_A}, \mu_f\}$ est une quasi-limite coprojective de base T , d'où :

THEOREME 3.2. *La bicatégorie $\mathbf{V}\text{-Dist}$ est à quasi-limites. ■*

APPLICATION. PROTRIPLES.

DEFINITION. On appelle *protriple sur une catégorie \underline{A}* un triplet (T, η, μ) formé d'un endodistributeur $T: \underline{A}^{op} \times \underline{A} \rightarrow \text{Ens}$ de \underline{A} et de transformations naturelles

$$n: T \Rightarrow \text{Hom}_{\underline{A}}(-, -), \quad \mu: T \Rightarrow T \otimes T$$

telles que

$$(\mu \otimes I) \cdot \mu = (I \otimes \mu) \cdot \mu, \quad (I \otimes \eta) \cdot \mu = \text{can}, \quad (\eta \otimes I) \cdot \mu = \text{can},$$

où *can* désigne les isomorphismes canoniques

$$T \otimes \text{Hom}(-, -) \approx T, \quad \text{Hom}(-, -) \otimes T \approx T.$$

En d'autres termes, les protriples sont les comorphismes de la catégorie $\mathbf{1}$ vers *Dist.*

EXEMPLES. 1° Les triples sur $\underline{A} : T$ est coreprésentable, $T = \text{Hom}(\bar{T}, -)$.

2° Les cotriples sur $\underline{A} : T$ est représentable, $T = \text{Hom}(-, \bar{T})$.

3° Les protriples sur la catégorie $\mathbf{1}$ sont les comonoïdes.

4° $\text{Hom}_{\underline{A}}(-, -)$ est le protriples identique.

La catégorie des *proalgèbres de* (T, η, μ) , notée *Proalg*(T), a pour objets les couples (x, m_x) , où x est un objet de \underline{A} et $m_x \in T(x, x)$, vérifiant les équations :

$$\mu(m_x) = m_x \otimes m_x, \quad \eta(m_x) = I_x.$$

Un morphisme de (x, m_x) vers (y, m_y) est un morphisme $f: x \rightarrow y$ de \underline{A} tel que

$$T(f, y)(m_y) = T(x, f)(m_x).$$

Proalg(T) est le sommet de la quasi-limite de $T: \mathbf{1} \rightarrow \underline{\text{Dist.}}$

Dans les exemples 1 et 2, la catégorie *Proalg*(T) est la catégorie des algèbres et des coalgèbres respectivement de \bar{T} .

Enfin, on peut transporter tous ces résultats dans le cas relatif.

REFERENCES.

1. J. BENABOU, Introduction to bicategories, *Lecture Notes in Math.* 47, Springer (1967).
2. J. BENABOU, Les distributeurs, *Rapport Inst. Math. Univ. Catholique Louvain* 33 (1973).
3. J. W. GRAY, The categorical comprehension scheme, *Lecture Notes in Math.* 99, Springer (1969).
4. J. W. GRAY, Formal category theory: adjointness for 2-categories, *Lecture Notes in Math.* 391, Springer (1974).
5. D. PUPPE, Korrespondenzen in abelschen Kategorien, *Math. Ann.* 148 (1962).

Department of Mathematics
University of Ioannina
IOANNINA
GRECE