CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

YVES DIERS

Foncteur pleinement fidèle dense classant les algèbres

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 17, nº 2 (1976), p. 171-186

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1976__17_2_171_0>

© Andrée C. Ehresmann et les auteurs, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE *Vol. XVII-2 (1976)*

FONCTEUR PLEINEMENT FIDELE DENSE CLASSANT LES ALGEBRES

par Yves DIERS

0. Introduction.

On définit une notion d'algèbre généralisant à la fois la notion d'algèbre pour une monade et la notion de faisceau d'une petite catégorie munie d'une classe de limites inductives. On utilise la notion d'adjonction partielle [10]. On montre qu'une algèbre à valeur dans une catégorie $\mathbf{X}$ s'identifie à un foncteur à valeur dans $\mathbf{X}^{\circ}$, adjoint à gauche partiel relativement à un foncteur pleinement fidèle dense. Chaque foncteur pleinement fidèle dense classe les algèbres d'un type donné. On caractérise les catégories d'algèbres à valeur dans les ensembles, à l'aide de la notion de limite inductive partiellement absolue [1].

On considère un foncteur pleinement fidèle dense $J: \mathbf{A}_0 \to \mathbf{A}$.

1. J-Théorie.

Suivant F. E. J. Linton [7], une *J-théorie* est un couple $(\mathbf{T}, t)$ d'une catégorie $\mathbf{T}$ ayant mêmes objets que $\mathbf{A}_0$ et d'un foncteur $t: \mathbf{A}_0^{\circ} \to \mathbf{T}$ qui induit l'identité sur les objets (on notera souvent $\mathbf{T}$ au lieu de $(\mathbf{T}, t)$).

La *catégorie J-$\mathbf{Th}$ des J-théories* est la sous-catégorie pleine de $(\mathbf{A}_0^{\circ}, \mathbf{Cat})$ ayant pour objets les J-théories. La *catégorie* $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ *des* $\mathbf{T}$-*algèbres* est définie par le produit fibré

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A}^{\mathbf{T}} \arrow[r, "k_{\mathbf{T}}"] \arrow[d, "U_{\mathbf{T}}"'] & {[\mathbf{T}, \mathbf{Ens}]} \arrow[d, "{[t, \mathbf{Ens}]}"] \\ \mathbf{A} \arrow[r, "J'"'] & {[\mathbf{A}_0^{\circ}, \mathbf{Ens}]} \end{tikzcd}$$

où J' désigne le foncteur associé à J [2].

Notons que $U_{\mathbf{T}}$ est fidèle, puisque $[t, \mathbf{Ens}]$ l'est et que $k_{\mathbf{T}}$ est un plongement plein, J' en étant un.

LEMME 1.0. *Si A est un objet de $\mathbf{A}$, si $a: \mathbf{T} \to \mathbf{Ens}$ est un foncteur et*

$$\eta : Hom_{\mathbf{A}}(J(\cdot), A) \to at$$

un isomorphisme, il existe un unique couple $((A, a'), \alpha)$ formé d'une $\mathbf{T}$-algèbre (A, a') et d'un isomorphisme $\alpha: a' \to a$ tels que $\alpha t = \eta$.

PREUVE. Soit $A_0, A_1 \in \mathbf{A}_0$ et $\omega: A_0 \to A_1$ un morphisme de $\mathbf{T}$. Si a' et α conviennent, on a

$$\eta_{A_1} . a'(\omega) = a(\omega) . \eta_{A_0} \quad \text{et par suite} \quad a'(\omega) = \eta_{A_1}^{-1} . a(\omega) . \eta_{A_0};$$

de même $\alpha_{A_0} = \alpha t_{A_0} = \eta_{A_0}$. On en déduit l'unicité de $((A, a'), \alpha)$. Définissons le foncteur $a': \mathbf{T} \to \mathbf{Ens}$ par

$$a'(A_0) = Hom_{\mathbf{A}}(JA_0, A) \quad \text{et} \quad a'(\omega) = \eta_{A_1}^{-1} . a(\omega) . \eta_{A_0}.$$

On a

$$a't(A_0) = a'(A_0) = Hom_{\mathbf{A}}(JA_0, A)$$

et, pour un morphisme $p: A_1 \to A_0$ de $\mathbf{A}_0$:

$$a't(p) = \eta_{A_1}^{-1} . at(p) . \eta_{A_0} = \eta_{A_1}^{-1} . \eta_{A_1} . Hom_{\mathbf{A}}(J(p), A) =$$
$$= Hom_{\mathbf{A}}(J(p), A).$$

Ainsi (A, a') est une $\mathbf{T}$-algèbre. En outre, la relation

$$\eta_{A_1} . a'(\omega) = a(\omega) . \eta_{A_0}$$

prouve que l'on définit une transformation naturelle

$$\alpha: a' \to a \quad \text{en posant} \quad \alpha_{A_0} = \eta_{A_0}.$$

PROPOSITION 1.1. *$U_{\mathbf{T}}$ crée les $\varprojlim$ et les $\varinjlim$ J-absolues [1].*

PREUVE. Puisque t induit l'identité sur les objets, le foncteur $[t, \mathbf{Ens}]$ crée les isomorphismes et, par suite, $U_{\mathbf{T}}$ aussi. Soit $D: \mathbf{I} \to \mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ un diagramme de $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ tel que $U_{\mathbf{T}}D: \mathbf{I} \to \mathbf{A}$ ait une $\varinjlim$ J-absolue $\tau: U_{\mathbf{T}}D \to A$. Notons $l: k_{\mathbf{T}}D \to a$ la $\varinjlim$ du diagramme $k_{\mathbf{T}}D$. Alors $lt: k_{\mathbf{T}} D \cdot t \to at$ est une $\underrightarrow{lim}$; or $k_{\mathbf{T}}\ D \cdot t = J'\ U_{\mathbf{T}}\ D$, donc il existe un isomorphisme

$$\eta : J'A \to at \quad \text{vérifiant} \quad \eta . J'\tau = lt.$$

Du Lemme 1.0, on infère qu'il existe une $\mathbf{T}$-algèbre (A, a') et un isomorphisme $\alpha : a' \to a$ vérifiant $\alpha t = \eta$. Alors $\alpha^{-1}.l : k_{\mathbf{T}} D \to a'$ est une $\underrightarrow{lim}$, et, $k_{\mathbf{T}}$ étant pleinement fidèle, il existe un cône inductif $m : D \to (A, a')$ qui est une $\underrightarrow{lim}$ de D et tel que $k_{\mathbf{T}}(m) = \alpha^{-1}.l$. On a alors

$$J'\,U_{\mathbf{T}}(m) = k_{\mathbf{T}}(m).t = (\alpha^{-1}.l)\ t = (\alpha^{-1}t).(lt) = \eta^{-1}.(lt) = J'\tau$$

et par suite $U_{\mathbf{T}}(m) = \tau$. Soit maintenant $m_1 : D \to (A, a'_1)$ un cône inductif tel que $U_{\mathbf{T}}(m_1) = \tau$. Il existe un morphisme

$$h : (A, a') \to (A, a'_1) \quad \text{tel que} \quad h.m = m_1 .$$

Alors

$$U_{\mathbf{T}}(h).\,U_{\mathbf{T}}(m) = U_{\mathbf{T}}(m_1), \quad \text{c'est-à-dire } U_{\mathbf{T}}(h).\,\tau = \tau ;$$

par suite $U_{\mathbf{T}}(h)$ est un morphisme unité. Puisque $U_{\mathbf{T}}$ crée les isomorphismes, h est un morphisme unité et $m = m_1$. On en conclut que $U_{\mathbf{T}}$ crée les $\underrightarrow{lim}$ J-absolues. Le raisonnement ci-dessus reste valable en substituant $\underleftarrow{lim}$ à $\underrightarrow{lim}$ J-absolue.

COROLLAIRE 1.2. *Si* $\mathbf{A}$ *est à* $\underleftarrow{lim}$, $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ *est à* $\underleftarrow{lim}$ *préservées par* $U_{\mathbf{T}}$.

2. J-théorie algébrique.

DEFINITION 2.0. Une J-théorie $(\mathbf{T}, t)$ est *algébrique* si le foncteur $t^{\circ} : \mathbf{A}_0 \to \mathbf{T}^{\circ}$ a un J-adjoint à droite [10]. *La catégorie* $\mathbf{Th}(J)$ *des* J*-théories algébriques* est la sous-catégorie pleine de J-$\mathbf{Th}$ ayant pour objets les J-théories algébriques.

THEOREME 2.1. *Si* $\mathbf{T}$ *est une* J*-théorie algébrique, le foncteur* $U_{\mathbf{T}} : \mathbf{A}^{\mathbf{T}} \to \mathbf{A}$ *admet un* J*-adjoint à gauche.*

PREUVE. Soit $S : \mathbf{T}^{\circ} \to \mathbf{A}$ un J-adjoint à droite de t° . Si $A_0 \in \mathbf{A}_0$, l'objet SA_0 de $\mathbf{A}$, le foncteur $Hom_{\mathbf{T}}(A_0, \cdot) : \mathbf{T} \to \mathbf{Ens}$ et l'isomorphisme

$$\alpha_{A_0} : Hom_{\mathbf{A}}(J(\cdot), SA_0) \to Hom_{\mathbf{T}}(A_0, t(\cdot))$$

définissent, d'après le Lemme 1.0, une $\mathbf{T}$-algèbre (SA_0, a_{A_0}) , qu'on notera

$F_{\mathbf{T}}(A_0)$, et un isomorphisme $\beta_{A_0} : a_{A_0} \to Hom_{\mathbf{T}}(A_0, -)$. Si (A, a) est une **T**-algèbre, on a

$$Hom_{\mathbf{A}^{\mathbf{T}}}(F_{\mathbf{T}} A_0, (A, a)) \simeq Hom_{[\mathbf{T},\mathbf{Ens}]}(a_{A_0}, a) \simeq$$

$$\simeq Hom_{[\mathbf{T},\mathbf{Ens}]}(Hom_{\mathbf{T}}(A_0, -), a) \simeq a(A_0) = Hom_{\mathbf{A}}(J A_0, A)$$

de façon naturelle par rapport à (A, a). Alors, on peut définir un foncteur $F_{\mathbf{T}} : \mathbf{A}_0 \to \mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ J-adjoint à gauche de $U_{\mathbf{T}}$.

COROLLAIRE 2.2. *$U_{\mathbf{T}}$ commute avec les* $\varprojlim$.

DEFINITION 2.3. Une **T**-*algèbre à valeur dans une catégorie* **X** est un foncteur $F: \mathbf{T} \to \mathbf{X}$ tel que $F^{\circ} t^{\circ}$ admette un J-adjoint à droite. La *catégorie* $\mathbf{Alg}[\mathbf{T},\mathbf{X}]$ *des* **T**-*algèbres à valeur dans* **X** est la sous-catégorie pleine de $[\mathbf{T},\mathbf{X}]$ ayant pour objets les **T**-algèbres à valeur dans **X**.

DEFINITION 2.4. Une **T**-*coalgèbre à valeur dans une catégorie* **X** est un foncteur $F: \mathbf{T}^{\circ} \to \mathbf{X}$ tel que $F t^{\circ}$ admette un J-adjoint à droite. La *catégorie* $\mathbf{Coalg}[\mathbf{T},\mathbf{X}]$ *des* **T**-*coalgèbres à valeur dans* **X** est la sous-catégorie pleine de $[\mathbf{T}^{\circ},\mathbf{X}]$ ayant pour objets les **T**-coalgèbres à valeur dans **X**.

On a immédiatement la proposition suivante :

PROPOSITION 2.5. *Un foncteur $F: \mathbf{T} \to \mathbf{X}$ est une **T**-algèbre à valeur dans **X** si et seulement si le foncteur $F^{\circ}: \mathbf{T}^{\circ} \to \mathbf{X}^{\circ}$ est une **T**-coalgèbre à valeur dans $\mathbf{X}^{\circ}$; en outre, on a les isomorphismes:*

$$\mathbf{Coalg}[\mathbf{T},\mathbf{X}] \simeq \mathbf{Alg}[\mathbf{T},\mathbf{X}^{\circ}]^{\circ} \quad et \quad \mathbf{Alg}[\mathbf{T},\mathbf{X}] \simeq \mathbf{Coalg}[\mathbf{T},\mathbf{X}^{\circ}]^{\circ}.$$

3. Foncteur pleinement fidèle dense classant les T-coalgèbres.

THEOREME 3.0. *Il existe un foncteur $J_{\mathbf{T}} : \mathbf{T}^{\circ} \to \mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ pleinement fidèle dense ayant la propriété suivante : Un foncteur $F: \mathbf{T}^{\circ} \to \mathbf{X}$ est une **T**-coalgèbre à valeur dans **X** ssi il a un $J_{\mathbf{T}}$-adjoint à droite.*

On peut dire que le foncteur $J_{\mathbf{T}}$ *classe* les **T**-coalgèbres à valeur dans une catégorie.

PREUVE. a) On reprend les notations de la démonstration du Théorème 2.1

et on note $h : \mathbf{T}^o \to [\mathbf{T}, \mathbf{Ens}]$ le plongement canonique. Puisque le foncteur

$$[t, \mathbf{Ens}] : [\mathbf{T}, \mathbf{Ens}] \to [\mathbf{A}_0^o, \mathbf{Ens}]$$

crée les isomorphismes, il en est de même du foncteur

$$[\mathbf{T}^o, [t, \mathbf{Ens}]] : [\mathbf{T}^o, [\mathbf{T}, \mathbf{Ens}]] \to [\mathbf{T}^o, [\mathbf{A}_0^o, \mathbf{Ens}]] .$$

On en déduit que les foncteurs

$$J'S : \mathbf{T}^o \to [\mathbf{A}_0^o, \mathbf{Ens}] \quad \text{et} \quad h : \mathbf{T}^o \to [\mathbf{T}, \mathbf{Ens}]$$

et l'isomorphisme

$$\alpha_{\cdot} : J'S(.) = Hom_{\mathbf{A}}(J(-), S(.)) \to Hom_{\mathbf{T}}(., t(-)) = [\mathbf{T}^o, [t, \mathbf{Ens}]](h(.))$$

définissent de façon unique un foncteur $l : \mathbf{T}^o \to [\mathbf{T}, \mathbf{Ens}]$ et un isomorphisme $\beta : l \to h$ vérifiant

$$[t, \mathbf{Ens}]\, l = J'S \quad \text{et} \quad [t, \mathbf{Ens}]\, \beta = \alpha .$$

Alors le foncteur l est pleinement fidèle dense et il existe un unique foncteur $J_{\mathbf{T}} : \mathbf{T}^o \to \mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ vérifiant

$$k_{\mathbf{T}}\, J_{\mathbf{T}} = l \quad \text{et} \quad U_{\mathbf{T}}\, J_{\mathbf{T}} = S ;$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}_0 \arrow[dr, "t^o"] & & & \\
& \mathbf{T}^o \arrow[drr, bend left=40, "h"] \arrow[drr, "l"'] \arrow[drr, phantom, bend left=20, "\Uparrow\beta"] \arrow[dr, dashed, "J_{\mathbf{T}}"'] \arrow[ddr, bend right, "S"'] & & \\
& & \mathbf{A}^{\mathbf{T}} \arrow[r, "k_{\mathbf{T}}"'] \arrow[d, "U_{\mathbf{T}}"] & {[\mathbf{T}, \mathbf{Ens}]} \arrow[d, "{[t, \mathbf{Ens}]}"] \\
& & \mathbf{A} \arrow[r, "J'"'] & {[\mathbf{A}_0^o, \mathbf{Ens}]}
\end{tikzcd}$$

le foncteur $J_{\mathbf{T}}$ est pleinement fidèle dense (Lemme 10 [2]). En outre, le foncteur $J_{\mathbf{T}}\, t^o : \mathbf{A}_0 \to \mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ est J-adjoint à gauche de $U_{\mathbf{T}}$, puisque pour tout objet (A, a) de $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$, on a :

$$Hom_{\mathbf{A}^{\mathbf{T}}}(J_{\mathbf{T}} t^o(A_0), (A, a)) \simeq Hom_{[\mathbf{T}, \mathbf{Ens}]}(k_{\mathbf{T}} J_{\mathbf{T}}(A_0), a) =$$

$$= Hom_{[\mathbf{T}, \mathbf{Ens}]}(l A_0, a) \simeq Hom_{[\mathbf{T}, \mathbf{Ens}]}(h(A_0), a) \simeq$$

$$\simeq a(A_0) = Hom_{\mathbf{A}}(J(A_0), A)$$

de façon naturelle par rapport à (A, a). On en déduit que $J_{\mathbf{T}}\, t^{\circ} \simeq F_{\mathbf{T}}$ (en fait, on a même l'égalité).

b) Soit $F: \mathbf{T}^{\circ} \to \mathbf{X}$ un foncteur.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}_0 \arrow[r, "t^{\circ}"] \arrow[d, hook, "J"'] & \mathbf{T}^{\circ} \arrow[d, hook, "J_{\mathbf{T}}"'] \arrow[dr, "F"] & \\
\mathbf{A} & \mathbf{A}^{\mathbf{T}} \arrow[l, "U_{\mathbf{T}}"] & \mathbf{X} \arrow[l, dashed, "W"]
\end{tikzcd}$$

Si F est $J_{\mathbf{T}}$-adjoint à gauche de $W: \mathbf{X} \to \mathbf{A}^{\mathbf{T}}$, alors $F t^{\circ}$ est J-adjoint à gauche de $U_{\mathbf{T}} W$, puisque l'on a

$$Hom_{\mathbf{X}}(F t^{\circ} A_0, X) \simeq Hom_{\mathbf{A}^{\mathbf{T}}}(J_{\mathbf{T}}\, t^{\circ}(A_0), WX) \simeq$$

$$\simeq Hom_{\mathbf{A}^{\mathbf{T}}}(F_{\mathbf{T}}(A_0), WX) \simeq Hom_{\mathbf{A}}(J A_0, U_{\mathbf{T}} W X)$$

de façon naturelle par rapport à $A_0 \in \mathbf{A}_0$ et $X \in \mathbf{X}$. Par suite F est une $\mathbf{T}$-coalgèbre à valeur dans $\mathbf{X}$. Réciproquement, si F est une $\mathbf{T}$-coalgèbre à valeur dans $\mathbf{X}$, soit $V: \mathbf{X} \to \mathbf{A}$ un J-adjoint à droite de $F t^{\circ}$. Le foncteur

$$[\mathbf{X}, [t, \mathbf{Ens}]] : [\mathbf{X}, [\mathbf{T}, \mathbf{Ens}]] \to [\mathbf{X}, [\mathbf{A}_0^{\circ}, \mathbf{Ens}]]$$

créant les isomorphismes, le foncteur $J' V: \mathbf{X} \to [\mathbf{A}_0^{\circ}, \mathbf{Ens}]$, le foncteur $F': \mathbf{X} \to [\mathbf{T}, \mathbf{Ens}]$ associé à F, et l'isomorphisme

$$\gamma: J' V \to [t, \mathbf{Ens}]\, F'$$

définissent un foncteur $W: \mathbf{X} \to [\mathbf{T}, \mathbf{Ens}]$ et un isomorphisme $\delta: W \to F'$ vérifiant

$$[t, \mathbf{Ens}]\, W = J' V \quad \text{et} \quad [t, \mathbf{Ens}]\, \delta = \gamma .$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{X} \arrow[drr, bend left, "F'"] \arrow[drr, "W"'] \arrow[drr, phantom, bend left=15, "\Uparrow\delta"] \arrow[dr, dashed, "U"] \arrow[ddr, "V"'] & & \\
& \mathbf{A}^{\mathbf{T}} \arrow[r, "k_{\mathbf{T}}"] \arrow[d, "U_{\mathbf{T}}"] & {[\mathbf{T}, \mathbf{Ens}]} \arrow[d, "{[t, \mathbf{Ens}]}"] \\
& \mathbf{A} \arrow[r, "J'"] & {[\mathbf{A}_0^{\circ}, \mathbf{Ens}]}
\end{tikzcd}$$

On construit alors un foncteur $U: \mathbf{X} \to \mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ vérifiant

$$k_{\mathbf{T}}\, U = W \quad \text{et} \quad U_{\mathbf{T}}\, U = V.$$

On a

$$Hom_{\mathbf{A}^{\mathbf{T}}}(J_{\mathbf{T}} A_0, UX) \simeq Hom_{[\mathbf{T},\mathbf{Ens}]}(k_{\mathbf{T}} J_{\mathbf{T}} A_0, k_{\mathbf{T}} UX) \simeq$$

$$\simeq Hom_{[\mathbf{T},\mathbf{Ens}]}(l A_0, WX) \simeq Hom_{[\mathbf{T},\mathbf{Ens}]}(h A_0, F'X) \simeq$$

$$\simeq F'(X)(A_0) \simeq Hom_{\mathbf{X}}(F A_0, X)$$

de façon naturelle par rapport à $A_0 \in \mathbf{T}$ et $X \in \mathbf{X}$; par suite, U est $J_{\mathbf{T}}$-adjoint à gauche de F.

COROLLAIRE 3.1. *Les catégories* $\mathbf{Coalg}[\mathbf{T},\mathbf{X}]$ *et* $[\mathbf{T}^{\circ},\mathbf{X}]_{J_{\mathbf{T}}\text{-}d}$ *sont équivalentes; il en est de même des catégories*

$$\mathbf{Alg}[\mathbf{T},\mathbf{X}] \quad \textit{et} \quad [\mathbf{T}^{\circ},\mathbf{X}^{\circ}]^{\circ}_{J_{\mathbf{T}}\text{-}d}.$$

COROLLAIRE 3.2. *Pour un foncteur* $U: \mathbf{X} \to \mathbf{A}^{\mathbf{T}}$, *les conditions suivantes sont équivalentes:*

i) U *a un* $J_{\mathbf{T}}$*-adjoint à gauche.*

ii) U *est de la forme* $U = Hom_{\mathbf{X}}(F, -)$, *où* F *est une* $\mathbf{T}$*-coalgèbre à valeur dans* $\mathbf{X}$.

iii) $U_{\mathbf{T}}\, U$ *a un* J*-adjoint à gauche.*

Par suite, les catégories $[\mathbf{X},\mathbf{A}^{\mathbf{T}}]_{J_{\mathbf{T}}\text{-}g}$ *et* $\mathbf{Coalg}[\mathbf{T},\mathbf{X}]^{\circ}$ *sont équivalentes.*

PREUVE. F est $J_{\mathbf{T}}$-adjoint à gauche de U ssi F est une $\mathbf{T}$-coalgèbre, ssi $F t^{\circ}$ est un J-adjoint à gauche de $U_{\mathbf{T}}\, U$. On a alors

$$Hom_{\mathbf{A}^{\mathbf{T}}}(J_{\mathbf{T}}(.), U(-)) \simeq Hom_{\mathbf{X}}(F(.), -),$$

c'est-à-dire $k_{\mathbf{T}}\, U(-) = Hom_{\mathbf{X}}(F(.), -)$, que l'on a écrit $U = Hom_{\mathbf{X}}(F, -)$.

COROLLAIRE 3.3. *Un foncteur* $G: \mathbf{A}^{\mathbf{T}} \to \mathbf{X}$ *a un adjoint à droite si et seulement si il est un extension de Kan par* $J_{\mathbf{T}}$ *d'une* $\mathbf{T}$*-coalgèbre à valeur dans* $\mathbf{X}$.

PREUVE. Un foncteur $G: \mathbf{A}^{\mathbf{T}} \to \mathbf{X}$ a un adjoint à droite ssi: il commute avec les $\varinjlim$ $J_{\mathbf{T}}$-absolues et le foncteur $F = G J_{\mathbf{T}}$ a un $J_{\mathbf{T}}$-adjoint à droite

(Proposition 3.1 [2]), c'est-à-dire ssi il est une extension de Kan par rapport à $J_{\mathbf{T}}$ de la $\mathbf{T}$-coalgèbre F.

COROLLAIRE 3.4. *Si la catégorie* $\mathbf{A}$ *est à puissances, les catégories* $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ *et* $\mathbf{Alg}\,[\,\mathbf{T}, \mathbf{Ens}\,]$ *sont équivalentes.*

PREUVE. Si $\mathbf{A}$ est à puissances, la catégorie $\mathbf{A}$ est équivalente à la catégorie $[\,\mathbf{A}_0, \mathbf{Ens}^{\circ}\,]^{\circ}_{J\text{-}d}$. En effet, à l'objet A de $\mathbf{A}$, on associe le foncteur $Hom_{\mathbf{A}}(J(-), A): \mathbf{A}_0 \to \mathbf{Ens}^{\circ}$ qui est J-adjoint à gauche du foncteur $A^{(\,)}: \mathbf{Ens}^{\circ} \to \mathbf{A}$, puisque l'on a :

$$Hom_{\mathbf{Ens}^{\circ}}(Hom_{\mathbf{A}}(J A_0, A), X) \simeq Hom_{\mathbf{Ens}}(X, Hom_{\mathbf{A}}(J A_0, A)) \simeq$$
$$\simeq Hom_{\mathbf{A}}(J A_0, A^X).$$

Au foncteur $F: \mathbf{A}_0 \to \mathbf{Ens}^{\circ}$ qui est J-adjoint à gauche de $U: \mathbf{Ens}^{\circ} \to \mathbf{A}$, on associe l'objet $U(1)$ de $\mathbf{A}$. On montre que cela établit une équivalence entre $\mathbf{A}$ et $[\,\mathbf{A}_0, \mathbf{Ens}^{\circ}]^{\circ}_{J\text{-}d}$. On applique alors ce résultat au foncteur dense $J_{\mathbf{T}}: \mathbf{T}^{\circ} \to \mathbf{A}^{\mathbf{T}}$, où $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ est à puissances.

Un foncteur *J-algébrique* est un foncteur de la forme $\mathbf{A}^{\tau}: \mathbf{A}^{\mathbf{T}} \to \mathbf{A}^{\mathbf{T}'}$, où $\tau: (\mathbf{T}', t') \to (\mathbf{T}, t)$ est un morphisme de J-théories algébriques et où $\mathbf{A}^{\tau}$ est défini par :

$$\mathbf{A}^{\tau}(A, a) = (A, a\tau) \quad \text{et} \quad \mathbf{A}^{\tau}(f) = f\,\tau.$$

COROLLAIRE 3.5. *Un foncteur J-algébrique* $\mathbf{A}^{\tau}: \mathbf{A}^{\mathbf{T}} \to \mathbf{A}^{\mathbf{T}'}$ *est une extension de Kan par* $J_{\mathbf{T}}$.

PREUVE. Les $\varinjlim$ $J_{\mathbf{T}}$-absolues de $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ sont exactement les $\varinjlim$ dont l'image par $U_{\mathbf{T}}$ est J-absolue, puisque l'on a

$$Hom_{\mathbf{A}^{\mathbf{T}}}(J_{\mathbf{T}} A_0, -) \simeq Hom_{\mathbf{A}^{\mathbf{T}}}(F_{\mathbf{T}} A_0, -) \simeq Hom_{\mathbf{A}}(J A_0, U_{\mathbf{T}}(-))$$

pour tout objet A_0 de $\mathbf{T}^{\circ}$. Un foncteur J-algébrique $\mathbf{A}^{\tau}: \mathbf{A}^{\mathbf{T}} \to \mathbf{A}^{\mathbf{T}'}$ vérifie $U_{\mathbf{T}'}\mathbf{A}^{\tau} = U_{\mathbf{T}}$. Il commute donc avec les $\varinjlim$ $J_{\mathbf{T}}$-absolues et, par suite, c'est une extension de Kan par $J_{\mathbf{T}}$ [2].

COROLLAIRE 3.6. *Un foncteur J-algébrique* $\mathbf{A}^{\tau}: \mathbf{A}^{\mathbf{T}} \to \mathbf{A}^{\mathbf{T}'}$ *a un adjoint à* *droite si et seulement si* $\mathbf{A}^{\tau}\, J_{\mathbf{T}}$ *est une coalgèbre à valeur dans* $\mathbf{A}^{\mathbf{T}'}$.

PREUVE. C'est une conséquence des corollaires 3.3 et 3.5.

4. J-sémantique et J-structure.

4.0. Soit $F: \mathbf{A}_0 \to \mathbf{X}$ un foncteur J-adjoint à gauche de $U: \mathbf{X} \to \mathbf{A}$. Si l'on note

$$F_1 : \mathbf{A}_0 \to \mathbf{I} \quad \text{et} \quad F_2 : \mathbf{I} \to \mathbf{X}$$

respectivement la coïmage pleine et l'image pleine de F [7], alors F_1 est J-adjoint à gauche de $U F_2$. Si l'on pose $\mathbf{T}_F = \mathbf{I}^o$ et $t_F = F_1^o$, le couple $(\mathbf{T}_F, t_F)$ est une J-théorie algébrique. Elle est dite *engendrée par* F.

4.1. Notons $\mathbf{Add}(J)$ la sous-catégorie pleine de $(\mathbf{A}_0, \mathbf{Cat})$ ayant pour objets les couples $(\mathbf{X}, F)$, où $F: \mathbf{A}_0 \to \mathbf{X}$ a un J-adjoint à droite, et définissons le foncteur $N: \mathbf{Th}(J) \to \mathbf{Add}(J)$ par

$$N(\mathbf{T}, t) = (\mathbf{T}^o, t^o) \quad \text{et} \quad N(\tau) = \tau^o$$

PROPOSITION 4.1. *Le foncteur* $N: \mathbf{Th}(J) \to \mathbf{Add}(J)$ *est pleinement fidèle et a un adjoint à gauche.*

PREUVE. Il est immédiat que N est pleinement fidèle. En outre, avec les notations ci-dessus, tout foncteur $G: \mathbf{T}^o \to \mathbf{X}$ vérifiant $G t^o = F$ est de la forme $G = F_2 H$, où $H: \mathbf{T}^o \to \mathbf{I}$ vérifie $H t^o = F_1$. Par suite, on a :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}_0 \arrow[r, "t^o"] \arrow[dr, "F_1"'] \arrow[drr, "F"] & \mathbf{T}^o \arrow[d, "H"] \arrow[dr, "G"] & \\
& \mathbf{I} \arrow[r, "F_2"'] & \mathbf{X}
\end{tikzcd}$$

$$Hom_{\mathbf{Add}(J)}((\mathbf{T}^o, t^o), (\mathbf{X}, F)) \simeq Hom_{\mathbf{Th}(J)}((\mathbf{T}, t), (\mathbf{T}_F, t_F))$$

de façon naturelle par rapport à $(\mathbf{T}, t) \in \mathbf{Th}(J)$. Si on pose

$$R(F) = (\mathbf{T}_F, t_F),$$

R se prolonge en un foncteur $\mathbf{Add}(J) \to \mathbf{Th}(J)$ adjoint à gauche de N.

4.2. Notons $\mathbf{Adg}(J)$ la sous-catégorie pleine de $(\mathbf{Cat}, \mathbf{A})$ ayant pour objets les couples $(\mathbf{X}, U)$, où $U: \mathbf{X} \to \mathbf{A}$ a un J-adjoint à gauche, et définissons le *foncteur J-sémantique* $M: \mathbf{Th}^{\circ}(J) \to \mathbf{Adg}(J)$ par

$$M(\mathbf{T}, t) = (\mathbf{A}^{\mathbf{T}}, U_{\mathbf{T}}) \quad \text{et} \quad M(\tau) = \mathbf{A}^{\tau}.$$

THEOREME 4.2. *Le foncteur J-sémantique $M: \mathbf{Th}^{\circ}(J) \to \mathbf{Adg}(J)$ est pleinement fidèle et admet un adjoint à gauche.*

PREUVE. Si $(\mathbf{X}, U)$ est un objet de $\mathbf{Adg}(J)$, choisissons un foncteur $F: \mathbf{A}_0 \to \mathbf{X}$ qui soit J-adjoint à gauche de U et posons $S(U) = (\mathbf{T}_F, t_F)$. On a

$$Hom_{\mathbf{Th}^{\circ}(J)}(S(U), (\mathbf{T}, t)) \simeq Hom_{\mathbf{Th}(J)}((\mathbf{T}, t), (\mathbf{T}_F, t_F)) \simeq$$
$$\simeq Hom_{\mathbf{Add}(J)}((\mathbf{T}^{\circ}, t^{\circ}), (\mathbf{X}, F))$$

de façon naturelle par rapport à $(\mathbf{T}, t) \in \mathbf{Th}(J)$. Montrons que l'on a

$$Hom_{\mathbf{Add}(J)}((\mathbf{T}^{\circ}, t^{\circ}), (\mathbf{X}, F)) \simeq Hom_{\mathbf{Adg}(J)}((\mathbf{X}, U), (\mathbf{A}^{\mathbf{T}}, U_{\mathbf{T}})). \quad \bullet$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}_0 \arrow[r, "t^{\circ}"] \arrow[d, hook, "J"'] \arrow[rrd, "F"] & \mathbf{T}^{\circ} \arrow[rd, "G"] \arrow[dd, hook, "J_{\mathbf{T}}"] & \\
 & & \mathbf{X} \arrow[lld, "U"] \arrow[ld, "W"] \\
\mathbf{A} & \mathbf{A}^{\mathbf{T}} \arrow[l, "U_{\mathbf{T}}"] &
\end{tikzcd}$$

Si $G: \mathbf{T}^{\circ} \to \mathbf{X}$ vérifie $G t^{\circ} = F$, on a construit dans la démonstration du Théorème 3.0 un foncteur

$$W: \mathbf{X} \to \mathbf{A}^{\mathbf{T}} \quad \text{vérifiant} \quad U_{\mathbf{T}} W = U.$$

Réciproquement, si $W: \mathbf{X} \to \mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ est un foncteur vérifiant $U_{\mathbf{T}} W = U$, il a un $J_{\mathbf{T}}$-adjoint à gauche $G': \mathbf{T}^{\circ} \to \mathbf{X}$ et, par suite, il existe un isomorphisme $\beta: G' t^{\circ} \to F$, puisque $G' t^{\circ}$ et F sont J-adjoints à gauche de U. Le foncteur

$$[t^{\circ}, \mathbf{X}] : [\mathbf{T}^{\circ}, \mathbf{X}] \to [\mathbf{A}_0, \mathbf{X}]$$

créant les isomorphismes, le foncteur $G': \mathbf{T}^{\circ} \to \mathbf{X}$, le foncteur $F: \mathbf{A}_0 \to \mathbf{X}$ et l'isomorphisme $\beta: G' t^{\circ} \to F$ définissent un foncteur $G: \mathbf{T}^{\circ} \to \mathbf{X}$ et un isomorphisme $\gamma: G' \to G$ vérifiant

$$t^\circ G = F \quad \text{et} \quad t^\circ \gamma = \beta .$$

On établit ainsi une correspondance biunivoque entre

$$Hom_{\mathbf{Add}(J)}((\mathbf{T}^\circ, t^\circ), (\mathbf{X}, F)) \quad \text{et} \quad Hom_{\mathbf{Adg}(J)}((\mathbf{X}, U), (\mathbf{A}^\mathbf{T}, U_\mathbf{T})),$$

qui est naturelle par rapport à $(\mathbf{T}, t)$. Cela achève de montrer que S se prolonge en un foncteur adjoint à gauche de M. En outre $SM(\mathbf{T}, t) \simeq (\mathbf{T}, t)$ et, par suite, M est un foncteur pleinement fidèle.

5. Caractérisation des catégories J-algébriques.

Soit $U: \mathbf{X} \to \mathbf{A}$ un foncteur admettant un J-adjoint à gauche F. Notons $(\mathbf{T}, t)$ la J-théorie algébrique engendrée par F et $V: \mathbf{X} \to \mathbf{A}^\mathbf{T}$ le foncteur morphisme d'adjonction de la J-sémantique (Théorème 4.2).

DEFINITION 5.0. Le couple $(\mathbf{X}, U)$ *est J-algébrique* si le foncteur V est une équivalence.

THEOREME 5.1. *Un couple $(\mathbf{X}, U)$ est J-algébrique si et seulement si: U a un J-adjoint à gauche, il reflète les isomorphismes et relève les limites inductives J-absolues.*

PREUVE. Le foncteur F s'écrit $F = G\, t^\circ$, où $G: \mathbf{T}^\circ \to \mathbf{X}$ est un foncteur pleinement fidèle (4.0). Le Théorème 3.0 montre que G est $J_\mathbf{T}$-adjoint à gauche de V. D'après le Théorème 4.0 de [2], V est une équivalence ssi V reflète les isomorphismes et relève les $\varinjlim$ $J_\mathbf{T}$-absolues. Or $U_\mathbf{T}$ reflète les isomorphismes, et les $\varinjlim$ $J_\mathbf{T}$-absolues de $\mathbf{A}^\mathbf{T}$ sont exactement les $\varinjlim$ dont l'image par $U_\mathbf{T}$ est une $\varinjlim$ J-absolue. On en déduit que V est une équivalence ssi U reflète les isomorphismes et relève les $\varinjlim$ J-absolues.

REMARQUE 5.2. Le foncteur V est un isomorphisme si et seulement si, en plus, U crée les isomorphismes.

COROLLAIRE 5.3 [3]. *Une sous-catégorie J-réflexive fermée pour les limites inductives J-absolues est J-réflexive véritable* [3].

PREUVE. Soit $\mathbf{M}$ une sous-catégorie de $\mathbf{A}$ vérifiant les hypothèses. Notons η le morphisme de J-adjonction. D'après le Théorème 5.1, $\mathbf{M}$ est de la forme $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$, où $(\mathbf{T}, t)$ est une J-théorie algébrique. Le morphisme de J-adjonction de $(\mathbf{T}, t)$ est encore $\eta: J \to St^{\circ}$. Si A est un objet de $\mathbf{A}$ tel que $Hom_{\mathbf{A}}(\eta, A)$ est un isomorphisme, le foncteur

$$Hom_{\mathbf{A}}(S^{\circ}(\cdot), A): \mathbf{T} \to \mathbf{Ens}$$

et l'isomorphisme

$$Hom_{\mathbf{A}}(\eta, A): Hom_{\mathbf{A}}(S^{\circ}t(\cdot), A) \to Hom_{\mathbf{A}}(J(\cdot), A)$$

définissent une $\mathbf{T}$-algèbre de la forme (A, a) (Lemme 1.0).

REMARQUE 5.4. Le Corollaire 5.3 est à la base de la caractérisation des J-variétés dans [3]. Ainsi la caractérisation des J-variétés apparaît-elle comme une application de la caractérisation des catégories J-algébriques.

6. Exemples.

EXEMPLE 6.0. Notons $\mathbf{Cardfin}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Ens}$ ayant pour objets les cardinaux finis et $J: \mathbf{Cardfin} \to \mathbf{Ens}$ le foncteur d'inclusion. Un foncteur $F: \mathbf{Cardfin} \to \mathbf{X}$ a un J-adjoint à droite ssi il commute avec les sommes finies (Ex. 5.1 [2]). Une J-théorie algébrique est alors une théorie algébrique au sens de F.W. Lawvere [6] et, pour toute catégorie $\mathbf{X}$, $\mathbf{Alg}[\mathbf{T}, \mathbf{X}]$ est la catégorie des $\mathbf{T}$-algèbres à valeur dans $\mathbf{X}$ au sens de F.W. Lawvere. On retrouve alors les résultats suivants :

Les catégories $\mathbf{Alg}[\mathbf{T}, \mathbf{Ens}]$ et $\mathbf{Ens}^{\mathbf{T}}$ sont équivalentes [7].

Le foncteur $U: \mathbf{Ens}^{\mathbf{T}} \to \mathbf{Ens}$ crée les $\underrightarrow{lim}$ filtrantes et les conoyaux réflexifs.

Un foncteur algébrique $\mathbf{Ens}^{\mathbf{T}} \to \mathbf{Ens}^{\mathbf{T}'}$ a un adjoint à droite ssi il commute avec les sommes finies de l'algèbre libre à un générateur [9].

Si $\mathbf{X}$ est complète à droite, les catégories

$$\mathbf{Coalg}[\mathbf{T}, \mathbf{X}], \quad [\mathbf{Ens}^{\mathbf{T}}, \mathbf{X}]_d, \quad [\mathbf{X}, \mathbf{Ens}^{\mathbf{T}}]_g^{\circ}$$

sont équivalentes (on utilise ici la Proposition 3.1 de [2]).

EXEMPLE 6.1. Soit I un ensemble. On note $\mathbf{Cardfin}^{(I)}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Ens}^I$ ayant pour objets les I-familles à support fini de cardinaux finis, i.e. les I-familles $(X_i)_{i\in I}$ où l'ensemble $\{i \in I \mid X_i \neq 0\}$ est fini, et on note

$$J : \mathbf{Card\,fin}^{(I)} \to \mathbf{Ens}^I$$

le foncteur d'inclusion. Un foncteur $F : \mathbf{Card\,fin}^{(I)} \to \mathbf{X}$ a un J-adjoint à droite ssi il commute avec les sommes finies. Une J-théorie algébrique est alors une théorie algébrique sur I-termes au sens de J. Bénabou [0] et, pour toute catégorie $\mathbf{X}$, $\mathbf{Alg}[\mathbf{T},\mathbf{X}]$ est la catégorie des $\mathbf{T}$-algèbres à valeur dans $\mathbf{X}$ au sens de J. Bénabou. On obtient alors des résultats analogues à ceux des théories au sens de Lawvere.

EXEMPLE 6.2. On note $\mathbf{Card}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Ens}$ ayant pour objets les cardinaux et on note $J : \mathbf{Card} \to \mathbf{Ens}$ le foncteur d'inclusion. Un foncteur $F : \mathbf{Card} \to \mathbf{X}$ a un J-adjoint à droite ssi il commute avec les sommes. Une J-théorie algébrique est alors une théorie variétale au sens de F. E. J. Linton [8] et, pour toute catégorie $\mathbf{X}$, $\mathbf{Alg}[\mathbf{T},\mathbf{X}]$ est la catégorie des $\mathbf{T}$-algèbres à valeur dans $\mathbf{X}$ au sens de F. E. J. Linton. On retrouve dans ce cas les résultats suivants :

Les catégories $\mathbf{Alg}[\mathbf{T},\mathbf{Ens}]$ et $\mathbf{Ens}^{\mathbf{T}}$ sont équivalentes [7].

Le foncteur $U_{\mathbf{T}}$ crée les $\underrightarrow{lim}$ $U_{\mathbf{T}}$-absolues.

Un foncteur $\mathbf{Ens}^{\mathbf{T}} \to \mathbf{X}$ a un adjoint à droite ssi il commute avec les $\underrightarrow{lim}$.

Un foncteur variétal $\mathbf{Ens}^{\mathbf{T}} \to \mathbf{Ens}^{\mathbf{T}'}$ a un adjoint à droite ssi il commute avec les sommes de l'algèbre libre à un générateur.

Si $\mathbf{X}$ est à conoyaux, un foncteur $U : \mathbf{X} \to \mathbf{Ens}^{\mathbf{T}}$ a un adjoint à gauche ssi $U_{\mathbf{T}}U : \mathbf{X} \to \mathbf{Ens}$ en a un et les catégories

$$\mathbf{Coalg}[\mathbf{T},\mathbf{X}], \quad [\mathbf{Ens}^{\mathbf{T}},\mathbf{X}]_d, \quad [\mathbf{X},\mathbf{Ens}^{\mathbf{T}}]_g^{\circ}$$

sont équivalentes (on utilise ici la Proposition 3.1 de [2]).

EXEMPLE 6.3. On note $J : \mathbf{Card}^I \to \mathbf{Ens}^I$ le foncteur d'inclusion. Un foncteur $F : \mathbf{Card}^I \to \mathbf{X}$ a un J-adjoint à droite ssi il commute avec les sommes. Une J-théorie algébrique est alors une «théorie variétale sur I-termes». On obtient des propriétés analogues à celles des théories variétales.

EXEMPLE 6.4. Soit (T, η, μ) une monade sur $\mathbf{A}$. On note $\mathbf{A}_T$ la catégorie de Kleisli de (T, η, μ) et $F_T : \mathbf{A} \to \mathbf{A}_T$ le foncteur associé [5]. L'égalité

$$Hom_{\mathbf{A}_T}(X, Y) = Hom_{\mathbf{A}}(X, TY)$$

est naturelle par rapport à l'objet X de $\mathbf{A}_T$. En effet, en notant $*$ la composition dans $\mathbf{A}_T$, on a, pour $\omega : Y \to TZ$ et $p : X \to Y$ dans $\mathbf{A}$, la relation

$$\omega * F_T(p) = \omega * (T(p).\eta_X) = \mu_Z . T(\omega). T(p). \eta_X =$$

$$\mu_Z . T(\omega p). \eta_X = \mu_Z . \eta_Z . \omega . p = \omega . p ,$$

ce qui implique que le diagramme

$$\begin{tikzcd} Hom_{\mathbf{A}_T}(F_T Y, Z) \arrow[r] \arrow[d, "Hom_{\mathbf{A}_T}(F_T p, Z)"'] & Hom_{\mathbf{A}}(Y, TZ) \arrow[d, "Hom_{\mathbf{A}}(p, TZ)"] \\ Hom_{\mathbf{A}_T}(F_T X, Z) \arrow[r] & Hom_{\mathbf{A}}(X, TZ) \end{tikzcd}$$

est commutatif. On en déduit que le couple $(\mathbf{A}_T^{\circ}, F_T^{\circ})$ est une $1_{\mathbf{A}}$-théorie algébrique, notée $\mathbf{T}$. Le foncteur $U_{\mathbf{T}} : \mathbf{A}^{\mathbf{T}} \to \mathbf{A}$ admet alors un adjoint à gauche et il crée les $\underrightarrow{lim}$ $U_{\mathbf{T}}$-absolues. La catégorie $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ est isomorphe à la catégorie d'Eilenberg-Moore de (T, η, μ) [4]. On retrouve dans ce cas les résultats suivants :

Les catégories $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ et $\mathbf{Alg}[\mathbf{T}, \mathbf{Ens}]$ sont équivalentes [7].

Si $\mathbf{X}$ est à conoyaux, un foncteur $U : \mathbf{X} \to \mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ a un adjoint à gauche ssi $U_{\mathbf{T}} U$ en a un, et les catégories

$$\mathbf{Coalg}[\mathbf{T}, \mathbf{X}], \quad [\mathbf{A}^{\mathbf{T}}, \mathbf{X}]_d, \quad [\mathbf{X}, \mathbf{A}^{\mathbf{T}}]_d^{\circ}$$

(non localement petites en général) sont équivalentes.

EXEMPLE 6.5. Soit $\mathbf{I}$ une petite catégorie munie d'une classe C de petites limites inductives. On note $h : \mathbf{I} \to [\mathbf{I}^{\circ}, \mathbf{Ens}]$ le plongement canonique et $[C]$ la classe des $\underrightarrow{lim}$ des diagrammes $h\phi$, où ϕ est un diagramme de $\mathbf{I}$ ayant une $\underrightarrow{lim}$ de classe C. On note $[\mathbf{I}]$ la sous-catégorie pleine de $[\mathbf{I}^{\circ}, \mathbf{Ens}]$ ayant pour objets les objets $\underrightarrow{lim}$ de $[C]$,

$$k : \mathbf{I} \to [\mathbf{I}] \quad \text{et} \quad J : [\mathbf{I}] \to [\mathbf{I}^{\circ}, \mathbf{Ens}]$$

les foncteurs d'inclusion. Le foncteur k est dense par $\varinjlim$ de classe $[C]$ [2] et le foncteur J est isomorphe au foncteur k' associé à k. Par suite, un foncteur $F: [\mathbf{I}] \to \mathbf{X}$ a un J-adjoint à droite ssi il commute avec les $\varinjlim$ de classe $[C]$ (Proposition 3.1 [2]). En particulier, il existe un foncteur $l: [\mathbf{I}] \to \mathbf{I}$ et un seul, à isomorphisme près, qui commute avec les $\varinjlim$ de classe $[C]$ et qui vérifie $lk = 1_{\mathbf{I}}$. Le couple $(\mathbf{I}^{\circ}, l^{\circ})$ est alors une J-théorie algébrique, notée $\mathbf{T}$ (le foncteur l étant surjectif sur les objets, on peut identifier son image pleine avec $\mathbf{I}$). Puisque les $\varinjlim$ de classe C de $\mathbf{I}$ sont les images par l des $\varinjlim$ de classe $[C]$ de $[\mathbf{I}]$, un foncteur $F: \mathbf{I} \to \mathbf{X}$ commute avec les $\varinjlim$ de classe C ssi le foncteur $Fl: [\mathbf{I}] \to \mathbf{X}$ commute avec les $\varinjlim$ de classe $[C]$. On en déduit qu'un foncteur $F: \mathbf{I}^{\circ} \to \mathbf{X}$ est une $\mathbf{T}$-algèbre ssi il est un $\mathbf{I}$-faisceau, et par suite que la catégorie $\mathbf{Alg}[\mathbf{T}, \mathbf{Ens}]$ est identique à la catégorie $\tilde{\mathbf{I}}$ des $\mathbf{I}$-faisceaux. On retrouve alors qu'un foncteur $F: \tilde{\mathbf{I}} \to \mathbf{X}$ a un adjoint à droite ssi il commute avec les $\varinjlim$ et que, si $\mathbf{X}$ est une catégorie complète à droite, les catégories

$$\mathbf{Cofais}[\mathbf{I}, \mathbf{X}], \quad [\tilde{\mathbf{I}}, \mathbf{X}]_d, \quad [\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{I}}]_g^{\circ}$$

sont équivalentes.

REFERENCES

0. J. BENABOU, Structures algébriques dans les catégories (Thèse, Paris, 1966), *Cahiers Topo. et Géo. Diff.* IX-3 (1967).

1. Y. DIERS, J-adjonction, $\varinjlim$ J-absolues et J-théorie algébrique, *C.R.A.S. Paris* 278, série A (1974), 1009-1012.

2. Y. DIERS, Type de densité d'une sous-catégorie pleine, *Ann. Soc. Sc. Bruxelles* 90-I (1976), 25-47.

3. Y. DIERS, Variétés d'une catégorie, *Ann. Soc. Sc. Bruxelles* 90-II (1976), 159-172.

4. S. EILENBERG et J.C. MOORE, Adjoint functors and triples, *Ill. J. Math.* 9 (1965), 381-398.

5. H. KLEISLI, Every standard construction is induced by a pair of adjoint functors, *Proc. A.M.S.* 50 (1965), 544-546.

6. F.W. LAWVERE, Functorial semantics of algebraic theories, *Proc. Acad. Sc.* 50 (1963), 869-872.

7. F.E.J. LINTON, An outline of functorial semantics, Sem. on triples and categ. homology Theory, *Lecture Notes in Math.* 80, Springer (1969), 7-52.

8. F.E.J. LINTON, Some aspects of equational categories, *Proc. Conf. categ. Al. La Jolla*, 1965, Springer (1966), 84-94.

9. G. MICHON, Coalgèbre et extension de Kan, *C.R.A.S. Paris* 276, série A (1973), 1091-1093.

10. F. ULMER, Properties of dense and relative adjoint functors, *J. of Algebra* 8 (1968), 77-85.

Département de Mathématiques
U. E. R. Sciences Exactes et Naturelles
Centre Universitaire de Valenciennes
Le Mont-Houy, 59326 VALENCIENNES