

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES

ALBERTO MEDINA

Quelques remarques sur les feuilletages affines

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 17, n° 1 (1976), p. 59-68

http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1976__17_1_59_0

© Andrée C. Ehresmann et les auteurs, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

QUELQUES REMARQUES SUR LES FEUILLETAGES AFFINES

par Alberto MEDINA

Introduction.

Dans [4] P. Molino introduit des connexions sur le fibré normal à un feuilletage qui sont localement projetables le long des feuilles. Ce sont les connexions appelées transverses projetables. Mon propos ici est double : d'une part introduire une notion de connexion sur le fibré normal à une Γ_q -structure qui généralise celle de Molino et d'autre part étudier l'espace classifiant correspondant à de telles structures.

D'abord la connexion, qui est étudiée au paragraphe 2, n'est plus qu'un «opérateur différentiel» qui est localement la préimage par une projection d'une connexion sur l'espace euclidien. En particulier comme tout fibré principal et différentiable est Γ_q -structuré, notre notion de connexion permettra de retrouver celle de connexion usuelle. Au paragraphe 3 on mettra en évidence des propriétés cohomologiques du classifiant qui découlent des travaux de Bott et Heicht (voir [2]).

Dans le paragraphe 4 on donne quelques résultats concernant les classes caractéristiques (au sens de Bott-Haefliger) des feuilletages munis de telles connexions, de même qu'un résultat (qui m'a été signalé par P. Molino) sur les feuilletages de codimension 1, qui montre en particulier la non nullité de la classe d'Atiyah du feuilletage de Reeb.

Finalement dans le paragraphe 5 on introduit une catégorie où l'on peut considérer à la fois les classes caractéristiques des feuilletages et celles des connexions.

2. Γ_q -structures à connexion transverse.

Soit Γ_q le groupoïde des germes de difféomorphismes locaux de \mathbf{R}^q . Si σ est une Γ_q -structure sur l'espace topologique X définie par le cocycle

d'Haefliger $\{U_i, f_i, \gamma_{ji}\}$, le fibré vectoriel topologique $Q(\sigma)$ donné par le cocycle

$$g_{ij}(x) = d_{f_i(x)}(\gamma_{ji}^x)$$

est appelé le fibré normal à la Γ_q -structure. Il est clair qu'on a :

$$Q^i(\sigma) = Q(\sigma) \big|_{U_i} \simeq f_i^*(T\mathbf{R}^q).$$

De même,

$$Q^*(\sigma) = Q^*(\sigma) \big|_{U_i} \simeq f_i^*(T^*\mathbf{R}^q),$$

où $Q^*(\sigma)$ est le fibré dual correspondant. De plus si ρ est une section de $T\mathbf{R}^q$ (resp. de $T^*\mathbf{R}^q$) au-dessus d'un ouvert qui contient $f_i(U_i)$, ρ induit une section de $Q(\sigma)$ (resp. de $Q^*(\sigma)$) au-dessus de U_i , dite image réciproque de ρ par f_i , définie par :

$$(f_i^*\rho)(x) = \rho(f_i(x)) \quad \text{pour tout } x \in U_i.$$

Une section de $Q(\sigma)$ (resp. de $Q^*(\sigma)$) sur un ouvert U est dite *transversalement différentiable* si elle est localement de la forme $f_i^*\rho$. Une telle section est feuilletée, c'est-à-dire constante le long des feuilles. De façon analogue une fonction réelle sur un ouvert U de X est transversalement différentiable si elle est localement de la forme $g_i \circ f_i$, où g_i est une fonction différentiable sur un ouvert qui contient $f_i(U_i)$. Pour une telle fonction sa différentielle est définie par

$$(df)_x = (dg_i)_{f_i(x)}$$

pour tout x pour lequel $f = g_i \circ f_i$ est valable. Pour une section transversalement différentiable $s = f_i^*\rho$ on aura donc

$$(df)_x s = (dg_i)_{f_i(x)}(\rho).$$

Notons $\underline{Q}_T(\sigma)$ (resp. $\underline{Q}_T^*(\sigma)$) le faisceau des germes de sections de $Q(\sigma)$ (resp. de $Q^*(\sigma)$) transversalement différentiables et soit $\underline{Q}_T(\sigma)$ le faisceau des germes de fonctions transversalement différentiables sur (X, σ) .

Clairement $\underline{Q}_T(\sigma)$ et $\underline{Q}_T^*(\sigma)$ sont des $\underline{Q}_T(\sigma)$ -modules localement libres. On pose :

DEFINITION. Une connexion transverse sur $Q(\sigma)$ est un opérateur différentiel D du premier ordre,

$$D: \underline{Q}_T(\sigma) \rightarrow \underline{Q}_T^*(\sigma) \otimes_{\underline{Q}_T(\sigma)} \underline{Q}_T(\sigma)$$

tel que

$$D(fs) = df \otimes s + fDs$$

pour tout $f \in \underline{Q}_T(\sigma)$ et tout $s \in \underline{Q}_T(\sigma)$.

Soit $\underline{Q}_T^i(\sigma)$ le faisceau des germes de sections transversalement différentiables de $Q(\sigma)$ au-dessus de U_i . Si D_i est une connexion sur $T\mathbf{R}^q$ au-dessus d'un ouvert qui contient $f_i(U_i)$, on définit

$$f_i^* D_i: \underline{Q}_T^i(\sigma) \rightarrow \underline{Q}_T^{*i}(\sigma) \otimes \underline{Q}_T^i(\sigma)$$

par

$$(f_i^* D_i)(f_i^* \rho_k) = \sum_{l=1}^q f_i^*(\theta_{kl}^i) \otimes f_i^*(\rho_l)$$

si

$$D_i \rho_k = \sum_{l=1}^q \theta_{kl}^i \otimes \rho_l.$$

On en déduit alors :

PROPOSITION 1. La donnée d'une connexion transverse D sur $Q(\sigma)$ équivaut à la donnée d'une famille $\{D_i\}$ de connexions sur $T\mathbf{R}^q$ au-dessus d'ouverts contenant $f_i(U_i)$ et d'un opérateur D ,

$$D: \underline{Q}_T(\sigma) \rightarrow \underline{Q}_T^*(\sigma) \otimes_{\underline{Q}_T(\sigma)} \underline{Q}_T(\sigma)$$

tel que

$$D|_{\underline{Q}_T^i(\sigma)} = f_i^*(D_i).$$

Une Γ_q -structure dont le fibré normal admet une connexion au sens précédent est dite à connexion transverse, ou simplement Γ_q -structure affine. Dans le cas où X est une variété différentiable et σ un feuilletage, on retrouve la notion de feuilletage à connexion transverse projetable. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un feuilletage soit affine est la nullité de la classe d'Atiyah-Molino (voir [4]).

On remarque que toute variété de dimension q est munie d'une Γ_q -structure naturelle à connexion transverse, à savoir celle définie par son

atlas structurel. Ici une connexion transverse est une connexion linéaire sur la variété. Par ailleurs, si X est une variété différentiable, on montre immédiatement :

PROPOSITION 2. *Le graphe d'une Γ_q -structure affine est le germe d'un micro-fibré feuilleté à connexion transverse.*

3. Espace classifiant.

Soit \mathcal{C} le faisceau (sur \mathbf{R}^q) des germes de connexion sur \mathbf{R}^q . \mathcal{C} est une variété différentiable (non séparée) munie d'une connexion. Notons $\Gamma_q(A)$ le groupoïde topologique des germes de transformations affines de \mathcal{C} , et soit $B\Gamma_q(A)$ son espace classifiant. Il y a sur $B\Gamma_q(A)$ une $\Gamma_q(A)$ -structure naturelle \mathcal{U} . Celle-ci est donnée par le cocycle

$$\{U_i, \gamma_{ij}\} \quad \text{avec } U_i = \mathcal{U}_i^{-1}([0, 1]) \text{ et} \\ \gamma_{ij}: U_i \cap U_j \rightarrow \Gamma_q(A), \quad \gamma_{ij}((t_0 x_0, t_1 x_1, \dots)) = x_i x_j^{-1}.$$

De plus $Q(\mathcal{U})$ est doté d'une connexion canonique, à savoir la préimage de celle de \mathcal{C} par les applications $f_i = \gamma_{ii}$.

Par conséquent toute $\Gamma_q(A)$ -structure est à connexion transverse. Réciproquement toute Γ_q -structure affine est, d'après la proposition 1-1, une $\Gamma_q(A)$ -structure.

$B\Gamma_q(A)$ est donc l'espace classifiant pour notre structure, et un feuilletage à connexion transverse projetable au sens de Molino [4] est une $\Gamma_q(A)$ -structure sur une variété différentiable définie par un cocycle $\{U_i, \gamma_{ij}\}$, où les applications

$$f_i = \gamma_{ii}: U_i \rightarrow \mathcal{C}$$

sont des submersions. On remarque aussi qu'une connexion sur une variété différentiable de dimension q est la préimage (par l'application qui classifie sa $\Gamma_q(A)$ -structure) de la connexion sur $Q(\mathcal{U})$.

Par ailleurs il est évident que l'on pourra donner des théorèmes de classification des $\Gamma_q(A)$ -feuilletages sur les variétés ouvertes analogues à ceux donnés par Haefliger dans [3]. En particulier, si ν est l'application au

niveau des classifiants induite par l'application

$$\Gamma_q(A) \rightarrow GL(q), \quad g_x(f) \mapsto (df)_x,$$

et si $t: X \rightarrow BGL(n)$ est l'application qui classe le fibré tangent à une variété ouverte X de dimension n , on aura, avec les notations de [3] :

THEOREME 1. *Il y a une correspondance biunivoque entre les classes d'homotopie intégrables des $\Gamma_q(A)$ -feuilletages sur X et les classes d'homotopie des relèvements de t dans $B\Gamma_q(A) \times BGL(n-q)$.*

COROLLAIRE. *Soit E un sous-fibré de rang $n-q$ de TX et $g: X \rightarrow BGL(q)$ une application qui classe le fibré vectoriel complémentaire à E . Alors E est homotope à un $\Gamma_q(A)$ -feuilletage si et seulement si g peut se relever dans $B\Gamma_q(A)$.*

Notons aussi que l'on a :

THEOREME 2. *L'application*

$$\nu^*, p: H^p(BGL(q); \mathbf{R}) \rightarrow H^p(B\Gamma_q(A); \mathbf{R})$$

est nulle pour $p > q$.

PREUVE. Elle découle immédiatement de la proposition 2 et du fait que les classes de Pontrjagin du fibré normal à un $\Gamma_q(A)$ -feuilletage sont nulles en dimension supérieure à la codimension du feuilletage.

Etudions maintenant la cohomologie entière de $B\Gamma_q(A)$.

Soit $E \xrightarrow{\pi} X$ un fibré vectoriel de rang q et de groupe structural fini G . Si $\{U_i, \phi_i\}$ est un atlas trivialisant, $\pi^{-1}(U_i)$ est muni d'un feuilletage de codimension q par la projection canonique $U_i \times \mathbf{R}^q \rightarrow \mathbf{R}^q$. Comme G est fini, les changements de coordonnées $g_{ij}(x)$ préservent ces feuilletages, et par conséquent E est muni d'un feuilletage global \mathcal{F} . Celui-ci est un $\Gamma_q(A)$ -feuilletage (il est en fait un feuilletage à « bundle-like » métrique), car les g_{ij} préservent la connexion de Levi-Civita sur \mathbf{R}^q correspondant à une métrique riemannienne pour laquelle les g_{ij} sont des isométries. En particulier comme $Q(\mathcal{F}) \cong \pi^*(E)$, on pourra toujours construire des feuilletages affines tels que l'anneau de Pontrjagin entier $Pont(Q(\mathcal{F}))$ soit non nul en dimensions aussi grandes que l'on voudra.

On remarque aussi que, puisque le fibré

$$S^{2n-1} \times_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{C} \text{ sur } S^{2n-1}/\mathbf{Z}_p$$

est muni d'un feuilletage affine transverse à la fibration, on aura, tout en suivant les idées de Bott et Heisch (voir [2]), les résultats suivants :

THEOREME 3. *L'application*

$$\nu^* : H^*(BGL(q); \mathbf{Z}_p) \rightarrow H^*(B\Gamma_q(A); \mathbf{Z}_p)$$

est injective pour $q \geq 2$ et p premier impair.

THEOREME 4. *L'application*

$$\nu^* : H^*(BGL(q); \mathbf{Z}) \rightarrow H^*(B\Gamma_q(A); \mathbf{Z})$$

est injective pour $q \geq 2$.

THEOREME 5. $H_{4k-1}(B\Gamma_q(A); \mathbf{Z})$ *est infini-engendré si $2k > q$ et $q \geq 2$.*

Plus particulièrement si $F\Gamma_q(A)$ est la fibre de ν , espace classifiant pour les $\Gamma_q(A)$ -structures à fibré normal trivial,

le groupe $\pi_k(F\Gamma_q(A))$ est infini-engendré pour un certain k .

4. Classes caractéristiques et classe d'Atiyah.

Les $\Gamma_q(A)$ -structures ont des propriétés spéciales concernant leurs classes caractéristiques. Ainsi par exemple le théorème 2 permet d'énoncer le résultat suivant :

PROPOSITION 3. *Si σ est une $\Gamma_q(A)$ -structure sur un espace topologique paracompact, alors*

$$Pon^k(Q(\sigma)) = 0 \text{ pour } k > q.$$

THEOREME 6. *Les classes caractéristiques d'une $\Gamma_q(A)$ -structure sur une variété différentiable correspondant aux éléments du noyau de l'homomorphisme canonique*

$$T^* : H^*(WO_q) \rightarrow H^*(WO_{[q/2]})$$

sont nulles.

THEOREME 7. *Les classes de Bott-Haefliger d'une $\Gamma_q(A)$ -structure sur*

une variété différentiable sont des obstructions à la trivialité de son fibré normal.

PREUVE. Pour démontrer le théorème 6 il suffit (compte tenu de la proposition 2) de faire deux remarques. D'abord le fait que, si

$$(X, \sigma) \xrightarrow{i} (E, \tau) \rightarrow (X, \sigma)$$

est un micro-fibré qui représente le graphe de (X, σ) , X étant un espace localement compact et paracompact et σ une $\Gamma_q(A)$ -structure sur X , alors la connexion sur $Q(\sigma)$ est la préimage par i de la connexion sur $Q(\tau)$; et ensuite la nullité, pour un $\Gamma_q(A)$ -feuilletage, des classes correspondant au noyau T^* (voir [5]).

Pour démontrer le théorème 7 considérons la base de $H^*(W_q)$ donnée par les cocycles

$$\alpha = C_{i_1} \otimes C_{i_2} \otimes \dots \otimes C_{i_s} \otimes b_{j_1} \wedge b_{j_2} \wedge \dots \wedge b_{j_t}, \quad j_1 \leq i_1$$

avec

$$1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_s \leq q, \quad 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_t \leq q, \\ i_1 + i_2 + \dots + i_s \leq q, \quad i_1 + i_2 + \dots + i_s + j_1 > q.$$

D'après la proposition 3 les classes correspondant aux cocycles de la forme $C_{i_1} \otimes C_{i_2} \otimes \dots \otimes C_{i_s}$ sont nulles pour

$$i_1 + i_2 + \dots + i_s > [q/2].$$

Donc s'il existe une classe non nulle elle doit correspondre à un α pour lequel on ait

$$i_1 + i_2 + \dots + i_s \leq [q/2].$$

Alors

$$i_1 \leq [q/2] \quad \text{et} \quad j_1 \leq [q/2]$$

et dans ce cas on ne peut pas avoir

$$i_1 + i_2 + \dots + i_s + j_1 > q.$$

Par conséquent toutes les classes d'une $\Gamma_q(A)$ -structure à fibré normal trivial sont nulles.

Mais la nullité de la classe d'Atiyah-Molino (du feuilletage) n'a pas

seulement des répercussions sur les classes du feuilletage. En fait elle impose des conditions de stabilité pour la structure comme le montre déjà l'étude faite par Molino dans [5]. Dans cet ordre d'idées on indique ici le résultat suivant concernant les feuilletages de codimension 1.

THEOREME 8. *Si \mathcal{F} est un $\Gamma_1(A)$ -feuilletage sur une variété compacte et simplement connexe, alors toutes les feuilles sont difféomorphes entre elles.*

PREUVE. Prenons sur $Q(\mathcal{F})$ une connexion transverse ω et notons Ω sa forme de courbure. Comme Ω est de type $(2, 0)$, ω est sans holonomie. La variété étant simplement connexe, on peut assurer l'existence d'un champ global, ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE. *Le feuilletage de Reeb a une classe d'Atiyah-Molino $\neq 0$.*

5. Fibrés Γ_q -structurés à connexion transverse.

Soit (X, σ) un espace topologique muni d'une Γ_q -structure σ . Si $E \rightarrow X$ est un fibré vectoriel de rang m , on dira que E est Γ_q -structuré s'il est défini par un cocycle

$$g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow GL(m, \mathbf{R}),$$

où les g_{ij} sont des fonctions transversalement différentiables. On voit immédiatement que, si E et E' sont deux fibrés Γ_q -structurés sur (X, σ) , il en est de même pour les fibrés E^* , $Hom(E, E')$, $E \otimes E'$ et $\wedge^p(E)$.

Il est clair aussi que, si σ est une $\Gamma_q(A)$ -structure, alors $Q(\sigma)$ (et $Q^*(\sigma)$) est Γ_q -structuré. Une section s d'un fibré Γ_q -structuré E est transversalement différentiable si elle est localement de la forme $s = f_i s_i$, où s_i est une section basique de E (par rapport à la trivialisations qui a pour fonctions de transition des fonctions transversalement différentiables) et où f_i est une fonction transversalement différentiable.

Soit \underline{E}_T le faisceau des germes de sections transversalement différentiables du fibré E . \underline{E}_T est un \underline{Q}_T -module localement libre. On pose :

DEFINITION. *Une connexion transverse sur le fibré Γ_q -structuré $E \rightarrow (X, \sigma)$ est la donnée d'un opérateur différentiel D du premier ordre*

$$D : \underline{E}_T \rightarrow \underline{Q}_T^*(\sigma) \otimes \underline{E}_T$$

tel que

$$D(fs) = df \otimes s + fDs$$

pour tout $f \in \underline{O}_T$ et tout $s \in \underline{E}_T$.

On remarque que tout fibré vectoriel différentiable sur une variété X de dimension q est Γ_q -structuré par rapport à la Γ_q -structure naturelle sur X . Ici la notion de connexion transverse coïncide avec celle de connexion usuelle.

Les notions de fibré Γ_q -structuré, section transversalement différentiable et connexion transverse ont aussi un sens pour des fibrés principaux à fibre un groupe de Lie. En particulier tout fibré principal différentiable sur une variété de dimension q est Γ_q -structuré.

Fixons maintenant le groupe de Lie G et considérons la catégorie \mathcal{C} ayant pour objets les G -fibrés principaux Γ_q -structurés munis d'une connexion transverse, et pour morphismes les homomorphismes de fibrés qui préservent la Γ_q -structure et la connexion.

On définit une classe caractéristique de première espèce pour la catégorie \mathcal{C} comme étant une transformation naturelle

$$N: \mathcal{C} \rightarrow H^*(\cdot, \mathbf{R}) \quad \text{telle que } N(P \rightarrow X) \in H^*(X, \mathbf{R}).$$

Par contre une telle transformation naturelle est appelée classe caractéristique de deuxième espèce pour \mathcal{C} si

$$N(P \rightarrow X) \in H^*(P, \mathbf{R}).$$

\mathcal{C} est alors une catégorie où l'on récupère les classes caractéristiques des fibrés principaux différentiables, des $\Gamma_q(A)$ -structures et même celles de Chern-Simons.

BIBLIOGRAPHIE

1. BOTT R., Lectures on characteristic classes and foliations, *Lecture Notes in Math.* 279, Springer (1972).
2. BOTT R., HEITSCH J., A remark on the integral cohomology of $B\mathbb{I}_q$, *Topology* 11 (1972), p. 141.
3. HAEFLIGER A., Homotopy and Integrability, *Lecture Notes in Math.* 197, Springer (1970), p. 33.
4. MOLINO P., Classe d'Atiyah d'un feuilletage et connexions transverses projectables, *C.R.A.S. Paris* 272 (1971), p. 779.
5. MOLINO P., Propriétés cohomologiques et propriétés topologiques des feuilletages à connexion transverse projectable (à paraître dans *Topology*).

Département de Mathématiques
Université de Montpellier
Place E. Bataillon
34060 MONTPELLIER CEDEX