

# CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES

## **Journées T.A.C. de Chantilly. Résumés des conférences**

*Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques*, tome 16, n° 4 (1975), p. 425-441

<[http://www.numdam.org/item?id=CTGDC\\_1975\\_\\_16\\_4\\_425\\_0](http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1975__16_4_425_0)>

© Andrée C. Ehresmann et les auteurs, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## JOURNEES T. A. C. DE CHANTILLY

### RESUMES DES CONFERENCES

#### INTRODUCTION

C'est au Centre «Les Fontaines» de Chantilly, au milieu d'un magnifique parc, que s'est déroulée en Septembre 1975 la Semaine de l'Université de Picardie ( sous les auspices du C.E.R.I.C., association créée par le Centre «Les Fontaines» et l'Université de Picardie ).

Dans le cadre de cette Semaine culturelle ont eu lieu, le Lundi 15 et le Mardi 16 Septembre, deux journées «Théorie et Applications des Catégories» ( T.A.C. ). Les conférences données à cette occasion sont résumées ci-après, à l'exclusion de celle de C. Auderset dont nous n'avons pas reçu le résumé ; les textes développés paraîtront ultérieurement.

Déjà la dernière journée du deuxième Colloque sur l'Algèbre des Catégories ( Amiens 1975 ) s'était passée à Chantilly, le Samedi 12 Juillet ; on trouvera également ici le résumé de l'exposé de J. Riguet, fait ce jour-là au Centre «Les Fontaines» ( celui de F. Linton n'a pas été résumé ).

Nous tenons à remercier les Pères Jésuites du Centre «Les Fontaines», et en particulier le Père Boutry, pour leur chaleureuse hospitalité. Nous espérons que d'autres mathématiciens auront l'idée d'organiser des Colloques dans ce lieu si propice à la discussion et à la méditation mathématique, non seulement dans les nombreuses salles de réunion, mais aussi dans les sentiers sous les arbres et au bord de l'étang.

A. Bastiani et C. Ehresmann

**PROGRAMME DES CONFÉRENCES**

*Lundi 15 Septembre :*

Michael BARR (Math. Dept., Mc Gill Univ., POB 6070 Station A, MONTREAL).

*Duality for vector spaces.*

Laurent COPPEY (Univ. Paris 7 et U.E.R. Math., 33 rue St Leu, 80039 AMIENS).

*Décompositions dans  $\mathbf{N}$  (division euclidienne généralisée).*

Syméon BOZAPALIDES (Dépt. de Math., Univ., IOANNINA, GRECE).

*$\mathbf{V}$ -catégories.*

Armin FREI (Math. Dept., Univ. B.C., 2075 Werbrooke Place, VANCOUVER B.C.).

*Théorie des formes du point de vue catégorique.*

José MESEGUER (Depto. de Electricidad y Elect., Fac. Ciencias, Univ.  
ZARAGOZA, ESPAGNE).

*Primitive and simple recursion in categories and topoi.*

*Mardi 16 Septembre (matin) :*

C. AUDERSET (Inst. de Math., Univ. de Fribourg, Pérolles, FRIBOURG, SUISSE).

*Techniques catégoriques en théorie des fonctions de variable complexe.*

Michael BARR.

*Duality for Banach spaces.*

**DUALITY FOR VECTOR SPACES. DUALITY FOR BANACH SPACES**

by Michael BARR

Let  $\mathbf{C}$  denote one of the two categories following :

1. An object of  $\mathbf{C}$  is a topological vector space over the discrete field  $K$  for which there is a neighborhood base at  $O$  of open subspaces. A map is a continuous linear map. For later reference, call a space *compact* if it is of the form  $K^X$  with the discrete topology.

2. An object of  $\mathbf{C}$  is the unit ball of a real or complex Banach space equipped with a second topology. If that second topology is the norm topology, that space is called *discrete*. We suppose that the topology is such that it is the weak topology for all continuous convex linear maps to discrete spaces. A map in the category is a convex linear map.

There are two (at least) reasonable internal *hom* structures on  $\mathbf{C}$ . The first, denoted  $(A, B)$ , takes all maps  $A \rightarrow B$  and gives it the topology of pointwise (simple) convergence. The second, denoted  $[A, B]$ , gives the same set the topology of uniform convergence on compact subobjects (compact/open topology). We also let

$$A^* = (A, I) \text{ and } A^\wedge = [A, I],$$

where  $I$  is the unit object (the field  $K$ , the interval  $[-1, 1]$ , the unit disc in  $\mathbf{C}$ , resp.). These are called the *weak* and *strong hom* and *weak* and *strong dual*.

It is the case that any map  $A^\wedge \rightarrow I$ , a fortiori any map  $A^* \rightarrow I$ , is gotten by evaluation at an element of  $A$ . Thus

$$|A| \cong |A^{**}| \text{ and } |A| \cong |A^{\wedge\wedge}|,$$

where  $|-|$  denotes the associated discrete object. These isomorphisms are mediated by maps

$$A \rightarrow A^{**} \text{ and } A^{\wedge\wedge} \rightarrow A$$

which are always 1-1 and onto but not always isomorphisms. An object is called *weak reflexive* (resp. *strong reflexive*) when the first (resp. second)

of these maps is an isomorphism. Compact spaces are both but, for example, discrete ones are only strong reflexive (unless they are finite dimensional).

The weak *hom* gives a symmetric monoidal closed category. The full subcategory of weak reflexive spaces does too. However the fact that the discrete spaces are absent renders the category less than interesting.

The strong *hom* is not as well behaved. Although there is a tensor, it is neither symmetric nor associative. The best full subcategory seems to consist of those objects which are complete (in their natural uniformity) and which are, as complete spaces, compactly generated, i. e. which are the direct limit, in the category of complete spaces, of their compact subspaces. This category is closed symmetric monoidal and every space is reflexive. It includes the compact and discrete spaces.

**BICATEGORIES A TENSEURS**

par Syméon BOZAPALIDES

Une bicatégorie  $\mathcal{B}$  est à tenseurs si, pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{B}$  et pour toute petite catégorie  $\mathbf{I}$ , il existe un objet  $X \otimes \mathbf{I}$  tel que l'on ait l'isomorphisme naturel en  $A$  :

$$\mathcal{B}(X \otimes \mathbf{I}, A) \cong \mathcal{C}at(\mathbf{I}, \mathcal{B}(X, A)).$$

EXEMPLES. 1°  $\mathcal{C}od$ , la 2-catégorie des ensembles ordonnés.

2°  $\mathcal{C}at$ , la 2-catégorie des catégories.

3°  $V\text{-}\mathcal{C}at$ , la 2-catégorie des  $V$ -catégories, où  $V$  est une catégorie multiplicative bien complète à droite.

4°  $\mathcal{C}at(F)$ , la 2-catégorie des catégories internes à  $E$ , où  $E$  est un topos à sommes.

5°  $\mathcal{F}ib(B)$ , la 2-catégorie des fibrations au-dessus de  $B$ .

6°  $\mathcal{D}ist$ , la bicatégorie des distributeurs

7°  $V\text{-}\mathcal{D}ist$ , la bicatégorie des distributeurs relatifs à la catégorie multiplicative  $V$ .

8°  $\mathcal{D}ist(F)$ , la bicatégorie des distributeurs internes au topos  $E$ .

9° Les 2-catégories  $\mathcal{M}on$  et  $\mathcal{G}rp$  des monoïdes et des groupes respectivement sont à tenseurs (mais non à cotenseurs [1]).

On a les résultats suivants :

1.  $\mathcal{B}$  est à tenseurs si elle est coreprésentable et admet des  $\mathcal{C}at$ -co-limites.

2. Si  $\mathcal{B}$  est exacte à cotenseurs, alors  $\mathcal{B}im(\mathcal{B})$ , bicatégorie des bi-modules de  $\mathcal{B}$  [2], est à tenseurs.

3.  $- \otimes - : \mathcal{B} \times \mathcal{C}at \rightarrow \mathcal{B}$  est une « biopération » à droite de  $\mathcal{C}at$ , munie du produit de catégories, sur  $\mathcal{B}$ .

On dit que l'objet  $A$  de  $\mathcal{B}$  est *cocomplet* (resp. *complet*) si, pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{B}$ , pour toute petite catégorie  $\mathbf{I}$  et pour toute flèche  $f$  de  $X \otimes \mathbf{I}$  vers  $A$ , l'extension de Kan à gauche (resp. à droite) de  $f$  le long de la codiagonale  $\nabla_X : X \otimes \mathbf{I} \rightarrow X$  existe et si elle est préservée par toute flèche  $g : Y \rightarrow X$ .

Dans  $\text{Dist}$ ,  $V\text{-Dist}$ ,  $\text{Dist}(E)$  par exemple, tout objet est à la fois complet et cocomplet.

Un opérateur «op» sur  $\mathcal{B}$  est une loi qui à tout objet  $A$  de  $\mathcal{B}$  associe un objet  $A^{op}$  de façon que :

- i)  $(A^{op})^{op} = A$ ,
- ii)  $\mathcal{B}(X, A^{op}) = \mathcal{B}(X^{op}, A)^{op}$ .

4. L'objet  $A$  de  $\mathcal{B}$  est complet (resp. cocomplet) ssi pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{B}$  la catégorie  $\mathcal{B}(X, A)$  est complète (resp. cocomplète) et les foncteurs  $\mathcal{B}(g, A)$  préservent les limites projectives (resp. inductives) quel que soit  $g \in \text{Fl}(\mathcal{B})$ .

5. Si  $A$  est complet, alors  $A^{op}$  est cocomplet et vice-versa.

Les théorèmes suivants comparent diverses notions de complétude pour les objets d'une bicatégorie  $\mathcal{B}$  :

6. Si  $\mathcal{B}$  est à tenseurs et à cotenseurs, la notion de complétude définie ci-dessus coïncide avec celle définie à l'aide des cotenseurs [1].

7. Si  $A$  est un objet d'un cosmos élémentaire [3] absolument cocomplet, et si la classe des petits objets est fermée par tenseurs, alors  $A$  est cocomplet au sens défini ci-dessus.

1. S. BOZAPALIDES, Théorie formelle des catégories, *Séminaire Bénabou* 1974-75.
2. J. W. GRAY, Formal category theory: adjointness for 2-categories, *Lecture Notes in Mathematics* 391 (1974).
3. R. STREET, Elementary cosmoi, Abstracts of Sydney Category Theory Seminar 1972, *Lecture Notes in Mathematics* 420 (1975).

**DECOMPOSITIONS ADDITIVES DE  $\mathbf{N}$**

par Laurent COPPEY

On décrit explicitement toutes les décompositions de  $\mathbf{N}$  en « somme directe » de sous-ensembles :  $\mathbf{N} = \bigoplus_{i \in I} A_i$  (ce qui veut dire que  $\bigcap_{i \in I} A_i = \{0\}$ ) et que tout entier  $n$  s'écrit d'une façon unique  $\sum_i n_i$ , avec  $n_i \in A_i$ . La division euclidienne et plus généralement la notion de base fournissent déjà une infinité « non dénombrable » d'exemples ; le problème est entièrement résolu avec la notion de base « généralisée » : soit  $(b_k)_{k \in \mathbf{N}}$  une suite d'entiers telle que

$$b_0 = 1 \quad \text{et} \quad b_{k+1} = a_{k+1} b_k, \quad \text{avec} \quad a_k \geq 2,$$

quelque soit  $k$  ; tout entier  $n$  s'écrit alors de façon unique sous la forme

$$\sum_k n_k b_{k-1}, \quad \text{où} \quad 0 \leq n_k < a_k.$$

Soit encore  $P = (P_i)_{i \in I}$  une partition de  $\mathbf{N}$  et considérons les ensembles  $A_i$  suivants :

$$A_i = \{ n \in \mathbf{N} \mid k \notin P_i \implies n_k = 0 \};$$

alors  $\mathbf{N} = \bigoplus_{i \in I} A_i$ . Le résultat principal affirme que :

1° Toute décomposition additive de  $\mathbf{N}$  est de ce type ;

2° on peut supposer, sans restreindre la généralité, que la partition  $P$  et la suite  $(b_k)_{k \in \mathbf{N}}$  sont liées par la condition suivante : si  $k \in P_i$ , ou bien  $k+1 \notin P_i$ , ou bien tous les successeurs de  $k$  appartiennent encore à  $P_i$ .

La seconde hypothèse signifie que  $I$  est fini et un seul des  $P_i$  infini, soit  $P_{i_0}$  ; la valeur de la suite des  $b_n$  à partir de  $n_0 = \inf(P_{i_0})$  est sans influence sur la décomposition de  $\mathbf{N}$  correspondante, de sorte qu'il suffit de se donner  $(b_0, b_1, \dots, b_{n_0})$  ; le seul facteur infini est  $A_{i_0}$ .

Dans la première hypothèse, ou bien  $I$  est fini et il y a au moins 2 facteurs  $A_i$  infinis, ou bien  $I$  est infini et il peut y avoir alors un nombre quelconque ( $0$  et  $\infty$ 'y compris) de facteurs infinis.

On étend la question de façon intéressante en regardant  $\bigoplus$  comme



une loi de composition partielle dans l'ensemble  $P_o(\mathbf{N})$  des parties  $A$  de  $\mathbf{N}$  satisfaisant  $0 \in A$  :

$A \oplus B$  est défini si et seulement si  $A \setminus B \xrightarrow{+} A + B$  est une bijection.

On voit que  $(P_o(\mathbf{N}), \oplus)$  est un graphe multiplicatif fortement associatif (en abrégé f. a., ce qui signifie que, si  $X \oplus (Y \oplus Z)$  ou  $(X \oplus Y) \oplus Z$  est défini, les deux le sont et sont égaux). Si  $(G, *)$  est un graphe multiplicatif f. a., on définit une loi de composition  $\oplus$ , déduite de  $*$ , dans l'ensemble  $P_o(G)$  des parties  $A$  de  $G$  satisfaisant  $\alpha(A) \cap \beta(A) \subset A$ , et  $(P_o(G), \oplus)$  est encore un graphe multiplicatif f. a.; le cas du début correspond à  $G = \mathbf{N}$ .

Soit  $(G, *)$  un graphe multiplicatif f. a.; on définit aussi sa catégorie des diviseurs à gauche  $D(G)$  : ses objets sont les éléments de  $G$ , et  $(X', X)$  est une flèche de  $X$  vers  $X' * X$  si justement  $X' + X$  est défini; le fait que  $D(G)$  soit une catégorie résulte exactement de l'axiome « f. a. »; cela montre au passage que l'esquisse de « graphe multiplicatif f. a. » peut être choisie purement projective.  $D$  définit un foncteur qui est partiellement étudié dans un article (Esquisses Mathématiques 24, Amiens, 1976) développant cette conférence; certaines propriétés d'une loi de composition  $+$  de graphe multiplicatif f. a. sont plus faciles à définir dès qu'on se place dans  $D(G)$  et non dans  $G$ ; par exemple, on peut définir les composés infinis à inversibles près dans un graphe multiplicatif f. a., à l'aide des limites correspondantes dans la catégorie des diviseurs à gauche, etc...

Lorsque  $G = P_o(\mathbf{N})$ , on montre que la loi  $\oplus$  est simplifiable et n'a pas d'autre inversible que  $\{0\}$ , ce qui signifie encore que  $D(P_o(\mathbf{N}))$  est un ordre; les composés infinis existent dans  $P_o(\mathbf{N})$ ; on étudie les éléments premiers de  $P_o(\mathbf{N})$  (i. e. les atomes de l'ordre  $D(P_o(\mathbf{N}))$ ): il y a bien sûr les  $X_p = \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ , où  $p$  est un nombre premier, mais il y en d'autres, par exemple les atomes sans successeurs (maximaux); la décomposition en facteurs premiers dans  $P_o(\mathbf{N})$  est possible, mais elle n'est pas unique; ainsi,  $X_n$  admet autant de décompositions en facteurs premiers qu'il y a d'arrangements possibles des facteurs premiers de  $n$ , comptés avec leur multiplicité. On étudie aussi les éléments maximaux de  $D(P_o(\mathbf{N}))$  et on montre que tout  $X \in P_o(\mathbf{N})$  est facteur direct dans un élément maximal (non unique en général). Enfin on étudie, avec exemples et contre-exemples, les relations entre les *sup* dans  $D(P_o(\mathbf{N}))$  et les composés dans  $P_o(\mathbf{N})$ .

THEORIE DES FORMES

par Armin FREI

La notion de *forme* (shape) a été introduite en topologie par Borsuk et a été utilisée par d'autres dans des contextes topologiques. Mardešić en donna une définition au goût catégoriel, qui fut reprise par Le Van dans un contexte abstrait. Nous traitons ici la théorie des formes pour un foncteur  $K: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{J}$  quelconque au lieu de nous borner au plongement d'une sous-catégorie pleine, comme c'était le cas dans les situations mentionnées.

Soit  $\mathcal{P} \xrightarrow{K} \mathcal{J}$  un foncteur quelconque. Définissons une catégorie  $\mathcal{S}_K$ , la *catégorie de forme de K*, par  $|\mathcal{S}_K| = |\mathcal{J}|$  et

$$\mathcal{S}_K(X, Y) = \text{Nat}(\mathcal{J}(Y, K-), \mathcal{J}(X, K-)),$$

la composition des morphismes étant la composition de transformations naturelles.  $\mathcal{S}_K$  est donc la duale du «full clone of operations» de  $K$  de Linton.

Un foncteur canonique  $\mathcal{J} \xrightarrow{D} \mathcal{S}_K$  est défini par

$$DX = X \text{ et } Df = \mathcal{J}(f, K-).$$

$\mathcal{S}_K$  admet des descriptions alternatives. D'une part, on peut identifier tout objet  $X$  de  $\mathcal{S}_K$  à la comma-catégorie  $(X \downarrow K)$  et tout élément de  $\mathcal{S}_K(X, Y)$  à un foncteur  $(Y \downarrow K) \xrightarrow{\Omega} (X \downarrow K)$  qui commute avec les foncteurs d'oubli canoniques de  $(Y \downarrow K)$  et  $(X \downarrow K)$  vers  $\mathcal{P}$ . D'autre part,  $\mathcal{S}_K$  est isomorphe à la sous-catégorie pleine de  $(\mathcal{P}, \mathcal{E}_{n\Delta})^{op}$  engendrée par les images d'objets de  $\mathcal{J}$  par le foncteur canonique  $\mathcal{J} \rightarrow (\mathcal{P}, \mathcal{E}_{n\Delta})^{op}$ . On notera le lien entre cette dernière description et la duale de la théorie des catégories avec modèles.

Etant donnés deux foncteurs

$$\mathcal{Q} \xleftarrow{F} \mathcal{P} \xrightarrow{K} \mathcal{J},$$

nous noterons  $\dot{R}an_K F$  l'extension de Kan à droite, par points, de  $F$  le long de  $K$ .

THEOREME 1. Si  $\tilde{F} = \dot{R}an_K F$ , il existe un foncteur

$$\mathcal{S}_K \xrightarrow{\bar{F}} \mathcal{Q} \text{ tel que } \bar{F}D = \tilde{F},$$

*c'est-à-dire les extensions de Kan à droite par points sont des invariants de forme.*

PROPOSITION 2. *D est un isomorphisme si et seulement si K est codense.*

En imposant à K une condition - nous l'appellerons C - la théorie gagne de bonnes propriétés et, en même temps, s'aligne avec les théories de forme classique en topologie. Ainsi nous dirons que K satisfait à la condition C si la fonction

$$f \mapsto \mathcal{F}(f, K \cdot) : \mathcal{F}(Y, KA) \longrightarrow \mathcal{S}_K(Y, KA)$$

est bijective pour tout objet A de  $\mathcal{P}$  et tout objet Y de  $\mathcal{J}$ , c'est-à-dire si D est pleinement fidèle sur les paires du type (Y, KA).

La condition C est notamment satisfaite par les foncteurs codenses, les foncteurs pleins et les foncteurs riches (où K est riche si pour tout morphisme  $KA \xrightarrow{f} KB$  il existe une suite finie

$$A \xleftarrow{r_1} \xrightarrow{g_1} \dots \xleftarrow{r_n} \xrightarrow{g_n} B$$

de morphismes de  $\mathcal{P}$  telle que  $f = \prod (K g_i \circ (K r_i)^{-1})$ ).

Notons L le composé DK.

THEOREME 3. *Si K satisfait à la condition C, alors :*

(i) *L est codense et  $\mathcal{S}_K \cong \mathcal{S}_L$ .*

(ii) *Pour tout foncteur  $\mathcal{P} \xrightarrow{F} \mathcal{Q}$ ,  $\mathring{Ran}_K F$  existe si et seulement si  $\mathring{Ran}_L F$  existe; en outre*

$$\mathring{Ran}_K F \cong (\mathring{Ran}_L F)D \quad \text{et} \quad \mathring{Ran}_D(\mathring{Ran}_K F) \cong \mathring{Ran}_L F.$$

(iii) *Le foncteur  $\tilde{F}$  du théorème 1 est unique; en outre*

$$\tilde{F} = \mathring{Ran}_D \tilde{F} \cong \mathring{Ran}_L F.$$

(iv)  *$D \mathring{Ran}_K L$ .*

(v) *D est codense.*

(vi) *D est caractérisé par le fait qu'il est terminal parmi les foncteurs*

$$\mathcal{J} \xrightarrow{V} \mathcal{C}, \quad \text{où} \quad |\mathcal{C}| = |\mathcal{J}|$$

*et qui sont pleinement fidèles sur les paires du type (Y, KA).*

(vii)  $D$  est pleinement fidèle sur toute paire  $(X, Y)$ , où  $Y$  est un rétracte d'un objet du type  $KA$ .

REMARQUE. Pour que (ii) et (iii) soient vrais, il suffit que le foncteur évident  $(Y \downarrow K) \rightarrow (Y \downarrow L)$  induit par  $D$  soit initial. Or ce foncteur est un isomorphisme si et seulement si  $K$  satisfait à  $C$ .

Nous supposons dorénavant que  $K$  possède un adjoint à gauche:  $F$ . Soit  $(\eta, \varepsilon): F \dashv K$  l'adjonction. Nous noterons  $\mathbf{T} = (T, \eta, \mu)$  le triple et  $\mathbf{C} = (C, \varepsilon, \delta)$  le cotriple induits,  $\mathcal{J}_T$  la catégorie de Kleisli de  $\mathbf{T}$  et  $F_T$  le foncteur canonique  $\mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}_T$ .

THEOREME 4. Il existe un isomorphisme  $\mathcal{S}_K \xrightarrow{I} \mathcal{J}_T$  tel que  $F_T = ID$ , et  $D$  possède un adjoint à gauche  $H$  tel que la paire  $H \dashv D$  induit  $\mathbf{T}$ .

Ceci est vrai dès que  $\overset{\circ}{\text{Ran}}_K K$  existe ( $\mathbf{T}$  étant alors le triple de co-densité de  $K$ ) donc a fortiori si  $K$  possède un adjoint à droite.

Les foncteurs  $D, F, F_T$  et  $T$  rendent inversibles les mêmes morphismes de  $\mathcal{J}$ ; notons  $S$  leur famille.

PROPOSITION 5. Pour toute adjonction  $F \dashv K$ ,  $\mathbf{T}$  est idempotent si et seulement si  $\mathbf{C}$  est idempotent.

THEOREME 6. Les assertions suivantes sont équivalentes:

- (i)  $K$  satisfait à  $C$ .
- (ii)  $\mathbf{T}$  et  $\mathbf{C}$  sont idempotents.
- (iii)  $K$  est riche.
- (iv) Il existe un isomorphisme  $\mathcal{J}[S^{-1}] \xrightarrow{I} \mathcal{S}_K$  tel que

$$D = JF_S, \text{ où } \mathcal{J} \xrightarrow{F_S} \mathcal{J}[S^{-1}]$$

est le foncteur canonique.

Dans la situation du théorème 6 on a une réciproque du théorème 1: un foncteur  $\mathcal{J} \xrightarrow{G} \mathcal{Q}$  se factorise par  $D$  si et seulement si

$$G = \overset{\circ}{\text{Ran}}_K(GK) \quad (\text{extension de Kan absolue}).$$

**PRIMITIVE AND SIMPLE RECURSION IN CATEGORIES AND TOPOI**

by Jose MESEGUER and Ignacio SOLS

In this Note, several definitions for simple and primitive recursion in categories are given, and their mutual relationships studied for different types of categories going from symmetric monoidal ones to topoi.

**1. Definition of Peano** (cf. Osius).

An object  $N$  and a pair of morphisms

$$I \xrightarrow{o} N \xrightarrow{s} N$$

in an elementary topos  $\mathbf{E}$  are called a *Peano object* if:

(i)  $s$  is monic,

(ii)

$$\begin{array}{ccc}
 0 & \xrightarrow{!} & N \\
 ! \downarrow & & \downarrow s \\
 1 & \xrightarrow{o} & N
 \end{array}$$

is a pullback

(where  $0$  is the initial object),

(iii) for all  $N \xrightarrow{U} \Omega$ :

$$o \in U \wedge \exists ! s(U) \subset U \implies U = \text{true}_N.$$

**2. Definition NNOSR** (cf. Lawvere).

Given a symmetric monoidal category  $(\mathbf{C}, \otimes, I)$ , an object  $N \in \mathbf{C}$  and a pair of morphisms

$$I \xrightarrow{o} N \xrightarrow{s} N$$

in  $\mathbf{C}$ , we say that  $N$  is a *natural numbers object with respect to simple recursion* if for each  $X \in \mathbf{C}$  and each pair of morphisms

$$I \xrightarrow{x} X \xrightarrow{f} X$$

in  $\mathbf{C}$ , there exists a unique  $f' : N \rightarrow X$  such that

$$\begin{array}{ccccc}
 & & N & \xrightarrow{s} & N \\
 & \nearrow o & \downarrow f' & = & \downarrow f' \\
 I & \xrightarrow{x} & X & \xrightarrow{f} & X
 \end{array}$$

**3. Definition NNOPR** (cf. Freyd).

Given the data as in the NNOSR definition above, we say that  $N$  is a natural numbers object with respect to primitive recursion if, for each  $A, B \in \mathbf{C}$  and for each pair of morphisms

$$A \xrightarrow{r} B \xrightarrow{t} B$$

in  $\mathbf{C}$ , there exists a unique  $\alpha_{rt}: A \otimes N \rightarrow B$  such that

$$\begin{array}{ccccc}
 & & A \otimes N & \xrightarrow{A \otimes s} & A \otimes N \\
 & A \otimes 1 & \nearrow A \otimes o & & \searrow \alpha_{rt} \\
 & \sim & A & \xrightarrow{r} & B \\
 & & & & \xrightarrow{t} & B \\
 & & & & & \downarrow \alpha_{rt} \\
 & & & & & B
 \end{array}$$

**4. Definition AMSR** (cf. Arbib-Manes).

Let  $\mathbf{C}$  be a category. We say that  $\mathbf{C}$  has the AMSR property if for each  $X \in \mathbf{C}$  there exists an object  $X^{\mathcal{G}}$  and a pair of morphisms

$$X \xrightarrow{o} X^{\mathcal{G}} \xrightarrow{s} X^{\mathcal{G}}$$

such that, for each  $Y \in \mathbf{C}$  and each pair of arrows

$$X \xrightarrow{x} Y \xrightarrow{f} Y$$

in  $\mathbf{C}$ , there exists a unique  $f': X^{\mathcal{G}} \rightarrow Y$  such that

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X^{\mathcal{G}} & \xrightarrow{s} & X^{\mathcal{G}} \\
 & o & \nearrow & & \searrow f' \\
 X & = & & & \\
 & x & \searrow & & \downarrow f' \\
 & & Y & \xrightarrow{f} & Y
 \end{array}$$

**5. Definition FMA** (cf. Joyal).

Let  $\mathbf{C}$  be a monoidal symmetric category. We say that  $\mathbf{C}$  has free monoids with respect to actions if for each object  $X$  of  $\mathbf{C}$  there exists a monoid  $(X^*, m, e)$  in  $\mathbf{C}$  and a morphism  $\eta_X: X \rightarrow X^*$  such that, given any other object  $A$  and any morphism  $f: A \otimes X \rightarrow A$  in  $\mathbf{C}$ , there is a unique action  $\hat{f}: A \otimes X^* \rightarrow A$  extending  $f$ , that is:

(i)

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes X & \xrightarrow{A \otimes \eta_X} & A \otimes X^* \\
 & \searrow f & \downarrow \hat{f} \\
 & & A
 \end{array}$$

=

(ii)

$$\begin{array}{ccc}
 & & A \otimes X^* \\
 & \nearrow A \otimes e & \downarrow \hat{f} \\
 A \otimes I & & A \\
 & \searrow \sim &
 \end{array}$$

=

(iii)

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes X^* \otimes X^* & \xrightarrow{\hat{f} \otimes X^*} & A \otimes X^* \\
 \downarrow A \otimes m & & \downarrow \hat{f} \\
 A \otimes X^* & \xrightarrow{\hat{f}} & A
 \end{array}$$

=

(iv) If

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes X & \xrightarrow{f} & A \\
 b \otimes X \downarrow & = & \downarrow b \\
 B \otimes X & \xrightarrow{g} & B
 \end{array}$$

then

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes X^* & \xrightarrow{\hat{f}} & A \\
 b \otimes X^* \downarrow & & \downarrow b \\
 B \otimes X^* & \xrightarrow{\hat{g}} & B
 \end{array}$$

**6. Definition GSR.**

Let  $\mathbf{C}$  be a monoidal symmetric category. We say that  $\mathbf{C}$  has *general simple recursion* if for each  $X \in \mathbf{C}$  there exist an object  $X^*$  and a pair of morphisms

$$I \xrightarrow{e} X^* \quad X^* \otimes X \xrightarrow{z} X^*$$

such that, for each object  $A$  of  $\mathbf{C}$  and morphisms

$$I \xrightarrow{a} A, \quad A \otimes X \xrightarrow{f} A$$

in  $\mathbf{C}$ , there exists a unique morphism  $f' : X^* \rightarrow A$  such that :

(i)

$$\begin{array}{ccc}
 & & X^* \\
 & \nearrow e & \downarrow f' \\
 I & & A \\
 & \searrow a &
 \end{array}$$

=

(ii)

$$\begin{array}{ccc}
 X^* \otimes X & \xrightarrow{z} & X^* \\
 f \otimes X \downarrow & & \downarrow f \\
 A \otimes X & \xrightarrow{t} & A
 \end{array}
 =$$

**7. Definition GPR.**

$\mathbf{C}$ , symmetric monoidal, has *general primitive recursion* if, with the same data as in GSR above, for each  $A, B \in \mathbf{C}$  and morphisms

$$r: A \rightarrow B, \quad t: B \otimes X \rightarrow B,$$

there exists a unique  $\alpha_{rt}: A \otimes X^* \rightarrow B$  such that

(i)

$$\begin{array}{ccc}
 & A \otimes e \nearrow & A \otimes X^* \\
 A \otimes I & & \downarrow \alpha_{rt} \\
 & \sim \searrow & A \\
 & & \downarrow r \\
 & & B
 \end{array}
 =$$

(ii)

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes X^* \otimes X & \xrightarrow{A \otimes z} & A \otimes X^* \\
 \alpha_{rt} \otimes X \downarrow & & \downarrow \alpha_{rt} \\
 B \otimes X & \xrightarrow{t} & B
 \end{array}
 =$$

**8. Remark.**

The following implications are immediate (and left to the reader):

$$\text{NNOPR} \Rightarrow \text{NNOSR},$$

$$\text{AMSR} \Rightarrow \text{NNOSR} \quad (\text{for } \mathbf{C} \text{ symmetric monoidal}),$$

$$\text{GPR} \Rightarrow \text{GSR},$$

$$\text{GSR} \Rightarrow \text{NNOSR},$$

$$\text{GPR} \Rightarrow \text{NNOPR},$$

$$\text{GCPR} \Rightarrow \text{CPR}.$$

**9. Proposition.** For  $\mathbf{E}$  an elementary topos,  $\text{NNOSR} \iff \text{PEANO}$ .

PROOF. Cf. Osius (Lecture Notes in Mathematics 274, Springer, 1972).



**10. Proposition.** *If  $\mathbf{C}$  has GPR, then  $\mathbf{C}$  has FMA.*

HINT FOR PROOF. Define :

$$\eta_X := X \xrightarrow{\sim} I \otimes X \xrightarrow{e \otimes X} X^* \otimes X \xrightarrow{z} X^*,$$

$$m := \alpha_{rt}, \quad \text{for } r = 1_{X^*}, \quad t = z.$$

**11. Proposition.** *If  $\mathbf{C}$  is closed symmetric monoidal and if  $\mathbf{C}$  has GSR, then  $\mathbf{C}$  has GPR.*

HINT FOR PROOF. Given

$$A \xrightarrow{r} B, \quad B \otimes X \xrightarrow{t} B,$$

consider the unique  $f'$  associated by GSR to the maps  $\overline{r} : I \rightarrow B^A$ ,

$$f := B^A \otimes X \xrightarrow{\overline{ev_A(B) \otimes X}} (B \otimes X)^A \xrightarrow{t^A} B^A;$$

then  $\alpha_{rt} = \overline{f'}$ .

**12. Proposition.** *For  $\mathbf{C}$  symmetric monoidal, NNOPR  $\implies$  AMSR.*

PROOF. Define

$$B^{\mathcal{E}} := B \otimes N, \quad 0 := B \xrightarrow{\sim} B \otimes I \xrightarrow{B \otimes o} B \otimes N,$$

$$s := B \otimes N \xrightarrow{B \otimes s} B \otimes N;$$

given  $x : B \rightarrow Y$ ,  $f : Y \rightarrow Y$ , then  $f' = \alpha_{xj}$ .

**13. Theorem.** *If  $\mathbf{E}$  is an elementary topos with NNOSR, then  $\mathbf{E}$  has GSR.*

**THEORIE DES JEUX ET FONCTIONS DE GRUNDY  
DU POINT DE VUE DE LA THEORIE DES CATEGORIES**

*par Jacques RIGUET*

On sait que la notion de noyau en théorie des graphes permet de définir une stratégie gagnante pour un jeu sur un graphe ou plus généralement sur un gracte.

Dans le cas du jeu de Nim, Bouton a défini une fonction qui donne une recette pour gagner, ce qui revient donc à une recette pour découvrir un noyau du gracte décrivant la marche du jeu.

Plus généralement, Grundy a défini pour les jeux sur les gractes une notion de fonction (appelée depuis « fonction de Grundy ») telle que, si  $f$  est une telle fonction,  $\tilde{f}^{-1}(0)$  est un noyau.

L'essentiel de cette communication consiste à montrer que, pour une certaine classe de jeux, on peut « linéariser »  $f$ ,  $\tilde{f}^{-1}(0)$  devenant donc un noyau au sens catégorique usuel.