

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES

Deuxième colloque sur l'algèbre des catégories. Amiens-1975. Résumés des conférences

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome
16, n° 3 (1975), p. 217-340

http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1975__16_3_217_0

© Andrée C. Ehresmann et les auteurs, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**DEUXIEME COLLOQUE SUR L'ALGEBRE DES CATEGORIES
AMIENS - 1975**

RESUMES DES CONFERENCES

INTRODUCTION

par A. BASTIANI et C. EHRESMANN

C'est du 7 au 12 Juillet 1975 que nous avons organisé à Amiens un deuxième Colloque sur l'Algèbre des Catégories (annoncé à la fin du premier Colloque sur l'Algèbre des Catégories qui s'était déroulé à Amiens en Juillet 1973). Ce Colloque a réuni une cinquantaine de mathématiciens, parmi lesquels la plupart des participants du premier Colloque. En particulier, une trentaine de catégoristes étrangers sont venus d'Australie, des Etats-Unis, du Canada, d'Afrique, d'Europe. Il y aurait eu sans doute plus de participants si des difficultés matérielles ne nous avaient empêchés d'envoyer assez tôt les invitations.

Ci-après, on trouvera les résumés de la plupart des conférences données à ce Colloque (ainsi que trois résumés d'articles qui n'ont pu être exposés faute de temps). En comparant avec les exposés du Colloque de 1973 (voir *Cahiers de Topologie et Géométrie différentielle* XIV-2, 1973), on constate qu'en ces deux années la Théorie des Catégories s'est développée dans diverses directions, surtout en vue d'applications dans des domaines variés. Grosso modo, les sujets traités peuvent se répartir comme suit :

Structures algébriques et généralisations : Diers, Gray, Kelly, Kock, Lair, Meisen, Ulmer.

Catégories enrichies (catégories doubles, 2-catégories, V-catégories) : Bastiani - Ehresmann, Borceux, Bourn, Lindner, Linton.

Topos élémentaires et généralisations : Bourn, Diaconescu, Fourman, Guitart, Sols, Stout.

Applications des catégories en

Logique : Blanc, Joyal, Mijoule, Reyes;

Théorie des groupes : Hilton, Kleisli, Wischnewsky;

Algèbre homologique : Baumgartner, Duskin, Lavendhomme, Mac Donald;

Topologie et Géométrie différentielle : Brummer, Guitart, Hoff, Porter, Pradines, Tanré;

Combinatoire et Théorie des Jeux : Leroux, Riguet;

Théorie des Automates : Meseguer-Pfender, Sols.

Huit conférences ne sont pas résumées ici :

celles de Brummer, Diaconescu, Duskin, Lavendhomme, Linton, Meisen, qui ne nous ont malheureusement pas envoyé de texte,

celle de Riguet, faite à Chantilly le Samedi, qui paraîtra dans le fascicule 4 (avec les résumés des exposés faits à Chantilly en Septembre),

la nôtre, qui est résumée dans l'introduction de notre article : Multiple functors, Part 1, *Cahiers de Topologie et Géométrie différentielle* XV-3.

Enfin, nous désirons remercier vivement tous ceux qui nous ont aidés dans l'organisation de ce Colloque : M. BONVALET, alors Recteur de l'Académie d'Amiens, qui a bien voulu présider le dîner officiel du Lundi, l'Université de Picardie, qui a financé ce Colloque, et avant tout son Président M. Roland PEREZ, qui a eu la gentillesse d'ouvrir ce Colloque et de venir à plusieurs reprises se joindre aux participants ; les chercheurs de notre équipe de recherche T.A.C., et plus particulièrement Bernard FERRIF et Anne-Marie KEMPF, qui se sont chargés de nombreuses tâches matérielles pendant tout le Colloque ; le Père BOUTRY qui a accueilli les participants au Centre «Les Fontaines» à Chantilly le Samedi.

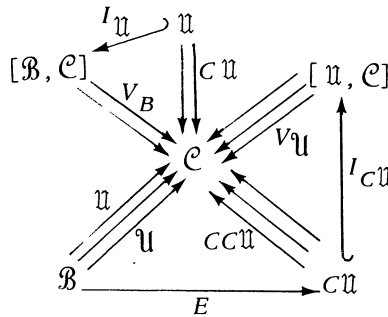
ON THE EVALUATION OF FUNCTORS - APPLICATIONS

by Karlheinz BAUMGARTNER

This Note improves the categorical foundation of ring theory given in [o]. Let

$$\mathfrak{U} = \{ \mathfrak{U}_i : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{C} \mid i \in I \}$$

be a set of parallel functors (\mathfrak{B} small). Recall the following construction :



Write $V_B f := fB$ for $B \in |\mathfrak{B}|$, $f \in [\mathfrak{B}, \mathcal{C}]$ and let $I_{\mathfrak{U}}$ be the usual inclusion. Call

$$C\mathfrak{U} := \{ V_B \circ I_{\mathfrak{U}} \mid B \in |\mathfrak{B}| \}$$

the centralizer of \mathfrak{U} and $CC\mathfrak{U}$ the bicentralizer of \mathfrak{U} . Moreover define the functor E (evaluation of \mathfrak{U}) by

$$E\beta\mathfrak{U} = \mathfrak{U}\beta, \quad \mathfrak{U} \in \mathfrak{U}, \quad \beta \in \mathfrak{B}.$$

Then $\mathfrak{U} = V_{\mathfrak{U}} \circ I_{C\mathfrak{U}} \circ E$ holds for every $\mathfrak{U} \in \mathfrak{U}$.

Studying the following questions :

- (1) Characterize E to be full (and faithful).
- (2) Under what conditions is E at least dense in a topological sense ?
- (3) When does E present a quotient situation ?

one gets the basic frame for a structure theory of categories (see [o]).

Considering the set-valued case $\mathcal{C} = \mathfrak{S}_{n\Delta}$ the Yoneda isomorphism

$$[[\cdot, \cdot], I_{\mathfrak{U}} \cdot] \cong I_{C\mathfrak{U}} \circ E$$

is repeatedly used. Moreover we need the functors :

$$R := [\cdot, I_{\mathbb{U}} \cdot] : [\mathcal{B}, \mathcal{E}_{\text{nd}}]^{op} \longrightarrow [\mathbb{U}, \mathcal{E}_{\text{nd}}] ,$$

$$L := [\cdot, I_{C\mathbb{U}} \circ E \cdot]^{op} : [\mathbb{U}, \mathcal{E}_{\text{nd}}] \longrightarrow [\mathcal{B}, \mathcal{E}_{\text{nd}}]^{op} .$$

Clearly $L \xrightarrow{\varepsilon} R$ is an adjoint pair and the $\mathbb{U} \in \mathbb{U}$ are fixpoints under $L \circ R$ (i. e. $\varepsilon \mathbb{U}$ is an isomorphism).

Ad 1.

THEOREM 1. For

$$\mathbb{U} = \{ \mathbb{U}_i : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}_{\text{nd}} \mid i \in I \}$$

the following conditions are equivalent:

- (i) \mathbb{U} is balanced (i. e. E is full and faithful).
- (ii) Every Hom-functor H^B is a fixpoint under $L \circ R$.
- (iii) Every natural transformation $[H^B, I_{\mathbb{U}} \cdot] \rightarrow [H^{B'}, I_{\mathbb{U}} \cdot]$ has always a unique extension $[H^B, \cdot] \rightarrow [H^{B'}, \cdot]$.
- (iv) \mathbb{U} is codense (in the sense of Gabriel-Ulmer) at the Hom-functors H^B ($B \in |\mathcal{B}|$).

COROLLARY 1. If \mathbb{U} contains all Hom-functors H^B , then \mathbb{U} is balanced.

Let us emphasize that the additive case works completely analogous.

THEOREM 2 (Generalized Morita-Theorem). For a set

$$\mathbb{U} = \{ \mathbb{U}_i : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}_{\text{nd}} \mid i \in I \}$$

the following conditions are equivalent:

- (i) \mathbb{U} is a set of generators in $[\mathcal{B}, \mathcal{E}_{\text{nd}}]$.
- (ii) \mathbb{U} is balanced and $C\mathbb{U}$ consists of retracts of the Hom-functors $H^{\mathbb{U}} : \mathbb{U} \rightarrow \mathcal{E}_{\text{nd}}$.

In the additive case, (ii) is replaced by

- (ii') \mathbb{U} is balanced and $C\mathbb{U}$ consists of retracts of finite coproducts of Hom-functors $H^{\mathbb{U}} : \mathbb{U} \rightarrow \mathcal{A}\mathcal{B}$.

Ad 2.

An arbitrary category \mathcal{D} can be topologized in the following way. Let α be a regular cardinal and M a subclass of $|\mathcal{D}|$. Then each $[X, Y]$ becomes a topological space by defining base-neighbourhoods:

$$\langle f : X \rightarrow Y; x_j \in \mathcal{D}, j \in J \rangle := \{ g \mid g \circ x_j = f \circ x_j, \text{ dom } x_j \in M, |J| < \alpha \} .$$

So the category operations become continuous and \mathcal{D} can be considered as a topological category.

Applying this to $\mathcal{D} = [\mathcal{U}, \mathcal{E}_{\text{nd}}]$, resp. $\mathcal{M}_{\text{ad}} \mathcal{U}$, we shall take for M the *Hom*-functors $H^{\mathcal{U}}$ ($\mathcal{U} \in \mathcal{U}$).

THEOREM 3 (Generalized Bourbaki-density Theorem). *Let now*

$$\mathcal{U} = \{ \mathcal{U}_i : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A} \mid i \in I \}$$

be a set of (additive) semisimple (i. e. every subfunctor is a coretract) functors. Then E is dense relative to the finite topology in $\mathcal{M}_{\text{ad}} \mathcal{U}$ (i. e. $E[B, B']$ is always dense in $[EB, EB']$, $M = \{ H^{\mathcal{U}} \mid \mathcal{U} \in \mathcal{U} \}$, $\alpha = \mathcal{N}_0$).

Omitting question (3) above, we indicate the following

APPLICATIONS. The generalized Morita Theorem implies:

(a) Every small category \mathcal{B} (with $[X, Y] \neq \emptyset$), resp. additive category \mathcal{B} , has a full embedding into a category of H -sets over a semigroup H , resp. into a category of R -modules over a ring R . Hint: $\coprod_{B \in |\mathcal{B}|} H^B$ is a generator.

(b) Call an (additive) category \mathcal{B} simple iff $\text{Hom} : \mathcal{B}^{\text{op}} \otimes \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ is simple, i. e. has no proper non trivial subfunctors. Then every non trivial (additive) subfunctor of every H^B is a generator (Rieffel's argument 1965, see [o]). This implies e. g. the structure of simple additive categories being just the full subcategories of finitely generated projective modules over a simple ring. The first Artin-Wedderburn Theorem is the special case characterizing full subcategories of finite dimensional vector spaces as simple categories having a minimal (additive) subfunctor of a certain H^B etc... [o].

The generalized Bourbaki-density Theorem implies e. g.

(c) the structure of primitive (i. e. there is a faithful simple functor $\mathcal{U} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$) and semiprimitive (i. e. $\text{rad } \mathcal{B} = 0$) additive categories \mathcal{B} , resp. Artin-categories \mathcal{B} .

So these applications contain as a very special case the whole classical structure theory of not necessarily commutative (but associative) rings.

o. K. BAUMGARTNER, Structure of additive categories, *Cahiers Topo. et Géo. dif.* XVI-2 (1975).

PROPRIETES DU PREMIER ORDRE ET CATEGORIES

par Georges BLANC

Lorsque les concepts de transformations naturelles, foncteurs puis catégories se sont dégagés pour les mathématiciens, les langages du premier ordre existaient déjà pour représenter les propriétés mathématiques des notions jusqu'alors rencontrées. Les catégoriciens ont dû avoir recours à des artifices pour traduire leurs concepts dans ce langage, comme l'assimilation d'objets à des flèches ou le remplacement de la composition par un prédicat ternaire. Ces artifices, s'ils ne présentent pas d'inconvénients pour l'algèbre des catégories, deviennent inutilisables lorsqu'on envisage un aspect purement formel du concept comme dans la théorie de Catégorie des catégories [1] ou dans la théorie de Topos [2]. Il faut en effet dès lors avoir une notion de formule mieux adaptée. Nécessité que l'on ressent, par exemple, pour l'extension par définition de théorie, interprétabilité dans d'autres théories, construction de méta-catégories ou méta-foncteurs par des formules...

De telles théories formelles utilisent un langage dans lequel notamment une formule n'exprime pas une propriété d'individus (notion ensembliste de laquelle relève le langage classique du premier ordre) mais une propriété d'un graphe orienté fini. Cette nécessité apparaît dès que l'on se propose d'étudier les propriétés du premier ordre relativement à l'équivalence naturelle de catégories [3].

Considérons la théorie élémentaire de catégorie, écrite dans le langage classique à deux types de variables (objets et flèches), de prédicats

$$D(f, A, B) \text{ (lire } A \xrightarrow{f} B \text{)} \text{ et } \Gamma(f, g, b) \text{ (lire } f \circ g = b \text{)}.$$

Soit G un graphe orienté construit sur les objets X_1, \dots, X_m et les flèches x_1, \dots, x_n et $\phi(X_1, \dots, X_m, x_1, \dots, x_n)$ une formule de ce langage.

DEFINITION. On dit que ϕ est G -transportable (notion sémantique) si, pour tout foncteur d'équivalence $F: C \rightarrow C'$ et toute interprétation $\varphi: G \rightarrow C$ des variables (homomorphisme de graphes) est satisfaite la condition:

$$\langle C, \varphi \rangle \models \phi \text{ ssi } \langle C', F \circ \varphi \rangle \models \phi.$$

DEFINITION. On dit que ϕ est G -catégorique (notion syntaxique) si:

i) chaque quantificateur de flèches est introduit avec des noms de source et but (exemple : $(\forall x: A \rightarrow B)$).

ii) ϕ n'utilise pas de formules atomiques d'égalité d'objets.

iii) ϕ est « cohérente » dans l'utilisation de formules atomiques

$$\Gamma(x, y, z), \quad x = y,$$

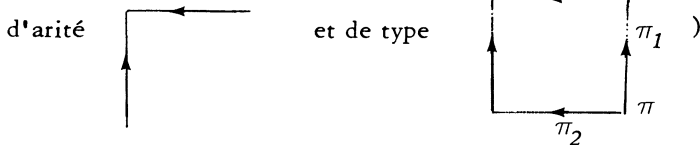
compte tenu des noms donnés aux sources et buts correspondants, et n'utilise pas de prédicat $D(x, A, B)$ ailleurs que dans les quantifications.

Cette définition de formule « bien écrite » correspond exactement à toutes les propriétés du premier ordre intéressant les catégoriciens. On a alors les propositions :

PROPOSITION. ϕ est G -transportable ssi elle est synonyme d'une formule G -catégorique.

COROLLAIRE. Un énoncé (formule close) est préservé par équivalence naturelle de catégories ssi il est synonyme d'un énoncé n'utilisant pas le prédicat d'égalité d'objets.

Ces remarques conduisent à introduire plus généralement un véritable *Langage fonctionnel de graphes* pour suppléer les langages du premier ordre dans les théories de catégories, c'est-à-dire un langage dans lequel on ne peut se contenter d'une suite de symboles fonctionnels d'arité des suites finies d'individus, mais où on a des suites de graphes fonctionnels, d'arité des graphes finis. (Par exemple, la suite fonctionnelle du produit fibré $\langle \pi; \pi_1, \pi_2 \rangle$,



Arité et type fixent alors les règles d'utilisation des symboles dans l'écriture des termes.

La difficulté dans la construction d'un tel langage fonctionnel de graphes provient de l'utilisation dans arité et type de termes construits à l'aide de symboles précédemment introduits (par exemple la théorie de catégorie

cartésienne fermée). Disposant d'une définition constructive d'un tel langage \mathcal{L} , on peut alors envisager les notions de \mathcal{L} -graphes, graphes finis construits sur des variables libres et des termes « cohérents » du langage, puis la notion de G -formules, pour chaque \mathcal{L} -graphe G , construites d'une façon classique, à l'aide de connecteurs logiques, de quantificateurs d'objets et de quantificateurs de flèches relativisés à des termes objets de formules atomiques « cohérentes », à l'exclusion du prédicat d'égalité d'objets.

DEFINITIONS. - Si G désigne un \mathcal{L} -graphe, $\mathcal{G}(G)$ désigne le graphe des termes de \mathcal{L} construits sur G .

- Si H désigne un \mathcal{L} -graphe, on appelle \mathcal{L} -homomorphisme de H vers G un homomorphisme de graphes $b: H \rightarrow \mathcal{G}(G)$ respectant la structure fonctionnelle des termes.

- \mathbf{L} désigne la catégorie des \mathcal{L} -homomorphismes et \mathcal{G} le foncteur d'extension $\mathbf{L} \rightarrow \text{Graphes}$.

Une réalisation d'un tel langage se présente en particulier comme la donnée $\langle E; R, \psi \rangle$:

i) d'un graphe E ,

ii) d'un foncteur $R: \mathbf{L} \rightarrow \text{Ens}^*$,

iii) d'une transformation naturelle $\psi: R \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{G}(), E)$,

$R(G)$ correspondant pour chaque \mathcal{L} -graphe G à la partie de $\text{Hom}(G, E)$ des réalisations « cohérentes » de G dans E , et $\psi_G(\theta): \mathcal{G}(G) \rightarrow E$ correspondant au calcul des termes construits sur G suivant la réalisation θ .

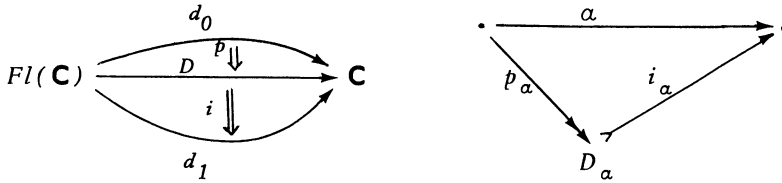
Les langages fonctionnels de graphes, bien que plus sophistiqués que les langages classiques du premier ordre à base d'individus (variables libres), semblent non seulement mieux adaptés, mais même indispensables, pour l'étude des théories formelles dont le concept primitif est un graphe orienté, telles en priorité les théories de catégories.

1. F. W. LAWVERE, The category of categories as a foundation of Mathematics, *Proc. Conf. on Categorical Algebra, La Jolla*, Springer (1966).
2. J. C. CODE, Categories of sets and models of set theory, *Aarhus preprint series* 52 (1970-71).
3. G. BLANC, Equivalence naturelle et formules logiques, *Archiv für Math. Logik* (à paraître).

COCOMPLETION DES CATEGORIES V-ALGÈBRIQUES

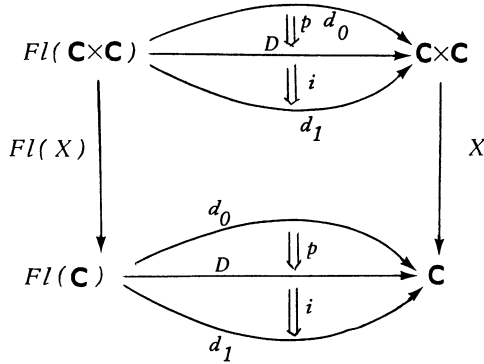
par Francis BORCEUX

Une catégorie \mathbf{C} est dite admettre des décompositions mono-épi-fonctorielles s'il existe un foncteur D et des transformations naturelles p et i tels que :



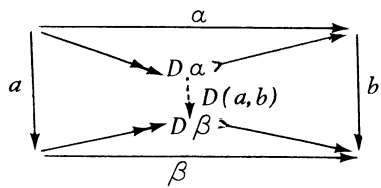
pour toute flèche $\alpha \in \mathbf{C}$, $i_\alpha \circ p_\alpha$ soit une décomposition de α en mono-épi (où $Fl(\mathbf{C}) =$ flèches de \mathbf{C}).

Si \mathbf{C} admet de telles décompositions, il en est évidemment de même de $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$; si \mathbf{C} a des produits finis, on peut considérer le diagramme :



Les décompositions sont dites préservées par le produit cartésien si ce diagramme est commutatif.

Le caractère fonctoriel des décompositions signifie que, si l'on a un carré commutatif où les deux flèches horizontales sont décomposées, cela engendre une factorisation entre les décompositions :



Si l'on travaille par rapport à une catégorie monoïdale fermée \mathbf{V} avec limites à gauche finies, $Fl(\mathbf{C})$ est une \mathbf{V} -catégorie et il convient de demander que D, p et i soient enrichis dans \mathbf{V} . Néanmoins si \mathbf{V} est cartésienne fermée, l'existence dans \mathbf{V} de décompositions mono-épi préservées par le produit cartésien implique que celles-ci sont nécessairement enrichies dans \mathbf{V} .

Indiquons quelques exemples de catégories admettant des décompositions mono-épi fonctorielles préservées par le produit cartésien :

1° les topos (la décomposition est l'image, qui coïncide avec la co-image);

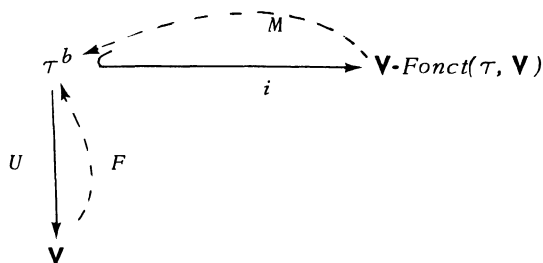
2° les catégories abéliennes (à nouveau on prend l'image comme décomposition);

3° \mathbf{Cat} (on peut prendre comme décomposition soit l'image du foncteur, soit sa coimage, cette dernière étant son dominion au sens de Isbell - cf. le théorème du zig-zag);

4° si $\mathbf{D} \xrightarrow{U} \mathbf{C}$ est un foncteur à structures initiales et si \mathbf{C} a les décompositions voulues, il en est de même de \mathbf{D} (si $\alpha \in \mathbf{D}$, on met sur la décomposition de $U\alpha$ la structure initiale induite par le but de α);

5° si \mathbf{V} est monoïdale fermée symétrique et si τ est une théorie commutative (au sens de Lawvere) enrichie dans \mathbf{V} , la catégorie τ^b des algèbres a les décompositions voulues enrichies dans τ^b dès que \mathbf{V} a les décompositions voulues enrichies dans \mathbf{V} .

Considérons maintenant une catégorie monoïdale fermée symétrique \mathbf{V} complète et une théorie τ au sens de Lawvere enrichie dans \mathbf{V} . Considérons la catégorie algébrique et le foncteur d'oubli associés, et l'inclusion dans la catégorie de tous les \mathbf{V} -foncteurs de τ vers \mathbf{V} :



On sait que τ^b est \mathbf{V} -complète et on connaît des conditions pour que U ait un \mathbf{V} -adjoint à gauche (cf. par exemple l'exposé de J. Gray à ce même Colloque ou celui de F. Borceux à Oberwolfach, 1975). On a en outre le résultat suivant :

THEOREME. *Si :*

1° U admet un \mathbf{V} -adjoint à gauche,

2° \mathbf{V} est « co-well-powered »,

3° \mathbf{V} a des décompositions mono-épi \mathbf{V} -fonctorielles préservées par le produit cartésien,

alors: i a un \mathbf{V} -adjoint à gauche et donc τ^b est \mathbf{V} -cocomplète.

PRODITOPOS

par Dominique BOURN

Soit Cat la 2-catégorie des catégories associée à un univers \mathcal{U} . Soient $\mathbf{1}$ la catégorie ayant un seul objet et $\mathbf{2}$ la catégorie ayant deux objets 0 et 1 et un unique morphisme de 0 vers 1 . On notera enfin $\lceil 1 \rceil$ le foncteur de $\mathbf{1}$ vers $\mathbf{2}$ définissant 1 . On remarque alors que $\lceil 1 \rceil$ est trivialement un monomorphisme et une cofibration (on utilisera ce mot ici dans le sens exclusif de cofibration normale scindée avec scindage donné), c'est-à-dire un cocrible. Par conséquent si ϕ est un foncteur d'une catégorie \mathbf{C} de Cat vers $\mathbf{2}$, on fait apparaître un cocrible i_ϕ de but \mathbf{C} en prenant le produit fibré de ϕ et de $\lceil 1 \rceil$. Réciproquement si i est un cocrible de but \mathbf{C} , on peut construire un foncteur ϕ_i de \mathbf{C} vers $\mathbf{2}$ tel que l'on retrouve i en prenant le produit fibré de ϕ_i et de $\lceil 1 \rceil$. D'où :

PROPOSITION 1. *La catégorie $\mathbf{2}$ classifie les cocribles de Cat au moyen de $\lceil 1 \rceil$.*

On peut approfondir l'analogie avec les topos de la façon suivante : soit \mathbf{D} une 2-catégorie à limites projectives finies, A et B deux objets de \mathbf{D} .

DEFINITION 1. On appellera *liaison cartésienne de A vers B* la donnée d'un couple de 1-morphismes $\langle f, g \rangle$ de même source et de buts respectivement A et B tel que f soit une cofibration et que la factorisation de $\langle f, g \rangle$ à travers $A \times B$ soit un monomorphisme et un morphisme cartésien de f vers la projection p_A de $A \times B$ vers A .

Il est clair que, si $\langle F, G \rangle$ est une liaison cartésienne de \mathbf{A} vers \mathbf{B} dans Cat , si A_1 est un objet de \mathbf{A} , la fibre de F au-dessus de A_1 s'identifie au moyen de G à une sous-catégorie \mathbf{B}_1 de \mathbf{B} et qu'une flèche b de A_1 vers A_2 détermine une inclusion de \mathbf{B}_1 dans \mathbf{B}_2 . Ainsi la donnée de $\langle F, G \rangle$ détermine-t-elle l'existence d'un foncteur de la catégorie \mathbf{A} vers la catégorie (en fait il s'agit d'un ordre) $\mathbf{P}_{Cart}(\mathbf{B})$ dont les objets sont les sous-catégories de \mathbf{B} et les morphismes les inclusions entre telles sous-catégories. On peut alors construire un foncteur $H(\mathbf{B})$ de $\mathbf{P}_{Cart}(\mathbf{B})$

vers Cat en posant $H(\mathbf{B})[\mathbf{B}_1] = \mathbf{B}_1$. Soient $q_{Cart}(\mathbf{B})$ et $\epsilon_{Cart}(\mathbf{B})$ la cofibration et la catégorie fibrée associées. La propriété universelle de la catégorie $\epsilon_{Cart}(\mathbf{B})$ détermine alors un foncteur $q'_{Cart}(\mathbf{B})$ de $\epsilon_{Cart}(\mathbf{B})$ vers \mathbf{B} . On vérifie aisément que $\langle q_{Cart}(\mathbf{B}), q'_{Cart}(\mathbf{B}) \rangle$ est une liaison cartésienne de $\mathbf{P}_{Cart}(\mathbf{B})$ vers \mathbf{B} .

DEFINITION 2. On appellera *2-liaison cartésienne entre deux liaisons cartésiennes* $\langle f, g \rangle$ et $\langle f', g' \rangle$ (de A vers B) la donnée d'un morphisme cartésien k de f vers f' tel que $g' \cdot k = g$.

D'où une catégorie (en fait un ordre) $\mathcal{L}(A, B)$ des liaisons cartésiennes de A vers B . On dira que $\langle f_1, g_1 \rangle$ est équivalente à $\langle f_2, g_2 \rangle$ lorsqu'il existera un isomorphisme γ tel que

$$g_2 \cdot \gamma = g_1 \quad \text{et} \quad f_2 \cdot \gamma = f_1.$$

Soit $L(A, B)$ l'ordre quotient.

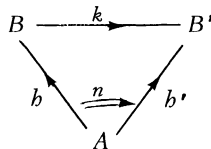
PROPOSITION 2. La liaison cartésienne $\langle q_{Cart}(\mathbf{B}), q'_{Cart}(\mathbf{B}) \rangle$ détermine un isomorphisme de $Hom_{Cat}(\mathbf{A}, \mathbf{P}_{Cart}(\mathbf{B}))$ sur $L(\mathbf{A}, \mathbf{B})$. (Autrement dit elle classe les liaisons cartésiennes de but \mathbf{B} .)

On en déduit :

DEFINITION 3. On appellera *proditopos* une 2-catégorie \mathbf{D} à limites projectives finies, représentable et telle que, pour tout objet B , il existe une liaison cartésienne universelle de but B (i.e. qui classe, au sens précédent, les liaisons cartésiennes de but B).

EXEMPLES. 1^o Cat .

2^o $Cat^{\mathbf{K}}$ pour toute 2-catégorie \mathbf{K} de \mathcal{U} : si F est un 2-foncteur de \mathbf{K} vers Cat , on construit $P_{Cart} F$ en prenant pour $P_{Cart} F(A)$ l'ordre sur les sous-2-foncteurs du 2-foncteur F_A de $A//\mathbf{K}$ vers Cat , où $A//\mathbf{K}$ a pour objets les flèches de source A et pour 1-morphismes les diagrammes



etc..., et où $F_A(b) = F(\beta(b))$.

3^o $Cat(\mathbf{E})$, lorsque \mathbf{E} est un topos, où $P_{Cart}F(c)$ est «l'ordre sur les sous-catégories» de la catégorie interne c .

Propriétés des prodtopos.

Tout cocrible qui est un épimorphisme est un isomorphisme. Toute liaison cartésienne qui est une relation d'équivalence est effective (une telle relation dans Cat est plus forte que la connexité).

Si on appelle *tamis cartésiens* les liaisons cartésiennes $\langle f, g \rangle$ telles que f soit de plus un monomorphisme, on peut classifier les tamis cartésiens (construction $\tilde{()}$ des topos).

Si \mathbf{D}_{dis} désigne la sous-catégorie de \mathbf{D} formée des objets discrets de \mathbf{D} , on peut construire un coadjoint à l'inclusion de \mathbf{D}_{dis} dans \mathbf{D}_1 (sous-catégorie de \mathbf{D} formée des seuls 1-morphismes), ce qui entraîne que \mathbf{D}_{dis} est un topos. On peut même alors définir un 2-foncteur de comparaison entre les prodtopos \mathbf{D} et $Cat(\mathbf{D}_{dis})$. Pour tous objets A et B , on peut construire $P_{Cart}(A)^B$. Si de plus \mathbf{D} admet des limites inductives finies, on peut construire un adjoint à l'inclusion de \mathbf{D}_{dis} dans \mathbf{D}_1 .

On trouvera les preuves de la plupart de ces résultats dans [2].

En fait, dans Cat on peut associer à toute catégorie C une catégorie $P(C)$ possédant des propriétés plus fortes que $P_{Cart}(C)$ mais qui ont été incorrectement décrites dans [1-b]. La catégorie $P(C)$ classifie les couples $\langle f, g \rangle$ de même source, de buts respectivement A et C , tels que f soit une cofibration et que la restriction de ce span aux unités de A soit une liaison cartésienne.

Plusieurs tentatives ([3,4,5] par exemple) ont été faites pour adopter vis à vis de Cat ou des 2-catégories un point de vue analogue à celui des topos. Celle-ci paraît plus intrinsèque puisqu'elle ne fait pas intervenir, au contraire des précédentes, la donnée de deux ou plusieurs univers.

1. D. BOURN, a) *CRAS* t. 279 (1974), p. 731; b) *CRAS* t. 279 (1974), p. 911.
2. D. BOURN, *Publications de l'U.E.R. de Math. de Lille 1*, n° 40.
3. R. GUITART, *Cahiers Topo. et Géom. diff.* XV-2 (1974).
4. J. PENON, *CRAS* t. 278 (1974), p. 475.
5. R. STREET, *2-topos*, Exposé au Colloque du Sussex, Juillet 1974.

FONCTEUR PLEINEMENT FIDÈLE DENSE CLASSANT LES ALGÈBRES

par Yves DIERS

On définit une notion d'algèbre généralisant à la fois la notion d'algèbre pour une monade et la notion de faisceau d'une petite catégorie munie d'une classe de limites inductives. On utilise la notion d'adjonction partielle. Les algèbres d'un type donné sont classées par un foncteur pleinement fidèle dense. On caractérise les catégories d'algèbres à valeur dans les ensembles à l'aide des limites inductives *partiellement absolues*.

On considère un foncteur pleinement fidèle dense $J: \mathbf{A}_0 \rightarrow \mathbf{A}$. Une *J-théorie algébrique* est un couple (\mathbf{T}, t) formé d'une catégorie \mathbf{T} ayant mêmes objets que \mathbf{A}_0 et d'un foncteur $t: \mathbf{A}_0^\circ \rightarrow \mathbf{T}$ qui induit l'identité sur les objets et qui est tel que $t^\circ: \mathbf{A}_0 \rightarrow \mathbf{T}^\circ$ admette un J -adjoint à droite. La catégorie $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ des \mathbf{T} -algèbres est définie par le produit fibré :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{A}^{\mathbf{T}} & \xrightarrow{k_{\mathbf{T}}} & [\mathbf{T}, \mathbf{Ens}] \\
 U_{\mathbf{T}} \downarrow & & \downarrow t_* \\
 \mathbf{A} & \xrightarrow{J'} & [\mathbf{A}_0^\circ, \mathbf{Ens}]
 \end{array}$$

où J' est le foncteur associé à J . Une \mathbf{T} -algèbre (resp. \mathbf{T} -coalgèbre) à valeur dans une catégorie \mathbf{X} est un foncteur $F: \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{X}$ (resp. $F: \mathbf{T}^\circ \rightarrow \mathbf{X}$) tel que $F^\circ t^\circ$ (resp. $F t^\circ$) admette un J -adjoint à droite.

On montre que le foncteur $U_{\mathbf{T}}: \mathbf{A}^{\mathbf{T}} \rightarrow \mathbf{A}$ a un J -adjoint à gauche et qu'il existe un foncteur pleinement fidèle dense $J_{\mathbf{T}}: \mathbf{T}^\circ \rightarrow \mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ qui classe les \mathbf{T} -coalgèbres (et les \mathbf{T} -algèbres) à valeur dans une catégorie, c'est-à-dire tel qu'un foncteur $F: \mathbf{T}^\circ \rightarrow \mathbf{X}$ est une \mathbf{T} -coalgèbre si et seulement si F a un $J_{\mathbf{T}}$ -adjoint à droite. On en déduit qu'un foncteur $U: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ a un $J_{\mathbf{T}}$ -adjoint à gauche ssi il est de la forme $U = \text{Hom}_{\mathbf{X}}(F, -)$, où F est une \mathbf{T} -coalgèbre à valeur dans \mathbf{X} , qu'un foncteur $G: \mathbf{A}^{\mathbf{T}} \rightarrow \mathbf{X}$ a un adjoint à droite ssi il est une extension de Kan pour $J_{\mathbf{T}}$ d'une \mathbf{T} -coalgèbre à valeur dans \mathbf{X} , qu'un foncteur J -algébrique $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}: \mathbf{A}^{\mathbf{T}} \rightarrow \mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ est une extension de Kan par

$J_{\mathbf{T}}$, et que, si \mathbf{A} est à puissances, la catégorie $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ est équivalente à la catégorie des \mathbf{T} -algèbres à valeur dans \mathbf{Ens} .

On caractérise les catégories de \mathbf{T} -algèbres de la façon suivante : Une catégorie (\mathbf{X}, U) au-dessus de \mathbf{A} est équivalente à une catégorie au-dessus de \mathbf{A} de la forme $(\mathbf{A}^{\mathbf{T}}, U_{\mathbf{T}})$ si et seulement si le foncteur U a un J -adjoint à gauche, reflète les isomorphismes et relève les limites inductives J -absolues.

On donne finalement un théorème d'adjonction entre la J -sémantique et la J -structure.

**COMPARAISON DES REELS D'UN TOPOS
STRUCTURES LISSES SUR UN TOPOS ELEMENTAIRE**

par Michael P. FOURMAN

Cette Note (*), comme l'exposé dont elle est le résumé, est plutôt une collection de définitions que de résultats. Son but est de démontrer la puissance du « langage interne » pour exprimer les propriétés locales d'un topos, et de recommander l'étude de la mathématique « intuitioniste » afin de rechercher ces propriétés.

1. Propriétés locales.

Nous supposons connues la notion d'une interprétation d'un langage d'ordre supérieur dans un topos \mathbf{E} et la relation de satisfaction associée.

1.1. DEFINITION. On pose $\Delta \Vdash \phi$ ssi toute interprétation du langage de la formule ϕ dans le topos \mathbf{E} qui satisfait chaque formule $\psi \in \Delta$ satisfait ϕ .

Pour des raisons typographiques nous écrivons $\mathbf{E} \Vdash \phi$ dans le cas où Δ est vide. L'utilité de cette notion provient de l'existence d'un système formel, formellement intuitioniste tel que

$$\Delta \vdash \phi \text{ ssi pour tout } \mathbf{E}, \Delta \Vdash_{\mathbf{E}} \phi.$$

1.2. DEFINITION. Une propriété P est locale ssi il existe une formule ϕ telle que la propriété P appartienne à un topos \mathbf{E} ssi $\mathbf{E} \Vdash \phi$.

Cette terminologie est justifiée par le lemme suivant :

1.3. LEMME. Soit X et Y des espaces topologiques, $f: X \rightarrow Y$ un homéomorphisme local surjectif; alors

$$\text{Top}(X) \Vdash \phi \text{ ssi } \text{Top}(Y) \Vdash \phi.$$

La syntaxe de notre langage se précisera implicitement dans la suite. Pour les détails sur un système formel, voir [1,2,3,4] (en ce qui nous concerne ici, tous ces systèmes sont équivalents).

(*) Résumé d'un exposé fait au Colloque T.A.C. à Amiens en Juillet 1975. L'auteur tient à remercier sincèrement M. le Prof. C. Ehresmann et M^{me} A. Bastiani de l'avoir invité à assister à ce Colloque, lui permettant ainsi de bénéficier de plusieurs entretiens d'intérêt mutuel.

2. Les Réels.

Nous rappelons deux constructions des réels et des entiers.

2.1. THEOREME (Hatcher, Osius, Folklore) [5,6].

$$1 \xrightarrow{0} \mathbb{N} \xrightarrow{s} \mathbb{N}$$

est un objet des entiers naturels dans le sens de Lawvere ssi les formules suivantes (axiomes de Peano) sont satisfaites :

$$\begin{aligned} \forall x: \mathbb{N} \quad 0 = s(x), \\ \forall x, y: \mathbb{N} \quad (s(x) = s(y) \rightarrow x = y), \\ \forall X: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \quad (0 \in X \wedge \forall x: \mathbb{N} \quad (x \in X \rightarrow s(x) \in X) \rightarrow \forall x: \mathbb{N} \quad x \in X). \end{aligned}$$

2.2. LEMME. Dans un topos de Grothendieck :

$$\begin{aligned} \llbracket \exists x: \mathbb{N} \phi \rrbracket &= \bigvee_{n \in \omega} \llbracket \phi [n/x] \rrbracket, \\ \llbracket \forall x: \mathbb{N} \phi \rrbracket &= \bigwedge_{n \in \omega} \llbracket \phi [n/x] \rrbracket. \end{aligned}$$

2.3. THEOREME. Soit ϕ une formule du langage de l'arithmétique, \mathbf{E} un topos de Grothendieck; $\mathbf{E} \Vdash \phi$ ssi ϕ est vraie.

(Que ϕ soit vraie veut dire que $\text{Ens} \Vdash \phi$.)

2.4. DEFINITIONS. Nous rappelons les constructions suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &= \mathbb{N} \times \mathbb{N} / \approx, \quad \text{où } \langle m, n \rangle \approx \langle m', n' \rangle \text{ ssi } m + n' = m' + n. \\ \mathbb{Q} &= \mathbb{Z} \times \mathbb{N} / \approx, \quad \text{où } \langle a, m \rangle \approx \langle b, n \rangle \text{ ssi } a \cdot s(n) = b \cdot s(m). \\ \mathbb{C} &= \{ f: \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \mid \forall n: \mathbb{N} \quad \forall m \geq n \quad |f(n) - f(m)| \leq 1/n \}. \\ \mathbb{R} &= \mathbb{C} / \approx, \quad \text{où } f \approx g \text{ ssi } \forall n: \mathbb{N} \quad |f(n) - g(n)| \leq 2/n. \end{aligned}$$

Une paire $(U, L): \mathcal{P}(Q) \times \mathcal{P}(Q)$ est une coupure de Dedekind ssi :

$$\begin{aligned} \forall q \quad q \in L \wedge q \in U, \\ \forall q \quad (q \in L \leftrightarrow \exists r \in L \quad r > q), \\ \forall q \quad (q \in U \leftrightarrow \exists r \in U \quad r < q), \\ \exists q, r \quad (q \in L \wedge r \in U), \\ \forall q, r \quad (q < r \rightarrow q \in L \vee r \in U). \end{aligned}$$

$$\mathbb{R} = \{ (U, L) \mid (U, L) \text{ est une coupure de Dedekind} \}.$$

On appelle \mathbf{R} l'objet des réels de Cauchy et \mathbb{R} l'objet des réels de Dedekind.

On laisse au lecteur le soin de définir les inclusions

$$\mathbb{N} \supset \longrightarrow \mathbb{Z} \supset \longrightarrow \mathbb{Q} \supset \longrightarrow \mathbf{R} \supset \longrightarrow \mathcal{R},$$

les opérations arithmétiques et la relation d'ordre. Afin d'éviter des confusions, nous notons par \mathbf{R} les vrais réels (dans Ens).

2.5. THEOREME (Folklore). Dans un topos $\text{Top}(X)$ des faisceaux sur un espace topologique X , les objets \mathbb{N} , \mathbb{Z} et \mathbb{Q} sont les faisceaux triviaux de fibres \mathbb{N} , \mathbb{Z} et \mathbb{Q} , et \mathcal{R} est le faisceau des (germes de) fonctions réelles continues sur X .

2.6. DEFINITION. La relation d'écartement sur \mathcal{R} est donnée par :

$$r \neq s \iff \exists q \in \mathbb{Q} \mid |r-s| > q.$$

2.7. LEMME. Les énoncés suivants sont démontrables :

$$\forall q, r: \mathbb{Q} (q = r \vee \neg q = r).$$

$$\forall r, s: \mathcal{R} (\neg r \neq s \rightarrow r = s).$$

$$\forall a: \mathcal{R} \neg \forall r: \mathbf{R} (a \neq r).$$

$$\forall f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R} \text{ continue } \forall r, s: \mathcal{R} (f(r) \neq f(s) \rightarrow r \neq s).$$

3. Interne vs Externe, \mathbf{R} vs \mathcal{R} .

La comparaison des réels nous donne des propriétés locales intéressantes.

3.1. LEMME. $\text{Top}(X) \Vdash \forall r, s: \mathbf{R} (r = s \vee \neg r = s)$ ssi X satisfait :

(*) pour tout ouvert W et toute famille dénombrable d'ouverts $U_n \subset W$ fermés relativement à W , l'intersection $\bigcap U_n$ est ouverte.

3.2. LEMME.

$$\text{Top}(X) \Vdash \forall r, s: \mathbf{R} (r = s \vee \neg r = s)$$

ssi \mathbf{R} est le faisceau des fonctions réelles localement constantes sur X .

3.3. THEOREME. \mathbf{R} est le faisceau trivial de fibre \mathbf{R} dans $\text{Top}(X)$ ssi X satisfait la condition (*).

3.4. LEMME. Tout espace localement connexe satisfait la condition (*). Si X satisfait (*) et si sa topologie admet une base dénombrable, X est localement connexe.

3.5. LEMME. Si X et tout ouvert de X sont de dimension 0 dans le sens de Lebesgue (tout recouvrement ouvert admet un raffinement ouvert disjoint), on a, dans $\text{Top}(X)$, $\mathbf{R} = \mathfrak{R}$.

3.6. DEFINITION. Une fonction $g: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$ est une fonction standard ssi :

1° Elle est continue :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \bar{x}, \bar{y} (\bigwedge_i |x_i - y_i| < \delta \rightarrow \bigwedge_j |g(\bar{x})_j - g(\bar{y})_j| < \varepsilon)$$

et

2° l'image d'un réel de Cauchy est de Cauchy :

$$\forall \bar{x} : \mathbf{R}^n \quad g(\bar{x}) \in \mathbf{R}^m .$$

Soit $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ une fonction continue. On peut lui associer un morphisme $f^*: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$ dans $\text{Top}(X)$ en posant

$$f^*(a) = f \circ a \text{ pour toute section } a: \dot{U} \rightarrow \mathbf{R}^n \text{ de } \mathfrak{R}^n .$$

3.7. LEMME. Si X satisfait (*), un morphisme $g: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$ est standard ssi il est localement de la forme f^* .

3.8. THEOREME. Soit ϕ une formule de l'analyse où tout quantificateur est restreint à \mathbf{N} , \mathbf{Q} , \mathbf{R} ou aux fonctions standards. Si X satisfait (*):

$$\text{Top}(X) \Vdash \phi \text{ ssi } \phi \text{ est vraie.}$$

3.9. DEFINITION. Soit n un entier; nous écrivons $\dim \leq n$ au lieu de la formule :

$$\exists x_1, \dots, x_n : \mathfrak{R} \quad \forall r : \mathfrak{R} \quad \exists f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R} \\ (f \text{ est standard } \wedge r = f(x_1, \dots, x_n)).$$

3.10. LEMME. Si X est localement de dimension 0 dans le sens de Lebesgue, $\text{Top}(X) \Vdash \dim \leq 0$.

3.11. LEMME. $\text{Top}(\mathbf{R}^{n+1}) \Vdash \dim \leq n+1 \wedge \neg \dim \leq n$.

3.12. COROLLAIRE. Si X est une variété euclidienne de dimension $n+1$:

$$\text{Top}(X) \Vdash \dim \leq n+1 \wedge \neg \dim \leq n .$$

3.13. EXEMPLE. Soit X le sous-espace $\{ \langle x, y \rangle \mid x \cdot y = 0 \}$ de \mathbf{R}^2 . Dans $\text{Top}(X)$ on a

$$\llbracket \dim \leq 0 \rrbracket = \phi, \quad \llbracket \dim \leq 1 \rrbracket = X \setminus \{ \langle 0, 0 \rangle \}, \\ \llbracket \dim \leq 2 \rrbracket = X.$$



3.14. THEOREME. Soit X un espace normal, V un sous-espace fermé,

$$\llbracket \dim \leq n \rrbracket_X \cap V \leq \llbracket \dim \leq n \rrbracket_V.$$

Il est évident aussi, que, si U est un ouvert de X ,

$$\llbracket \dim \leq n \rrbracket_X \cap U = \llbracket \dim \leq n \rrbracket_U.$$

4. Structures lisses.

4.1. DEFINITION. Une structure lisse (de dimension n) sur un topos \mathbf{E} est un sous-objet S de \mathcal{R}^n tel que

$$\mathbf{E} \models \exists r: S \quad \forall s: \mathcal{R}^n \quad (s \in S \leftrightarrow r \approx s),$$

où $r \approx s$ est la formule

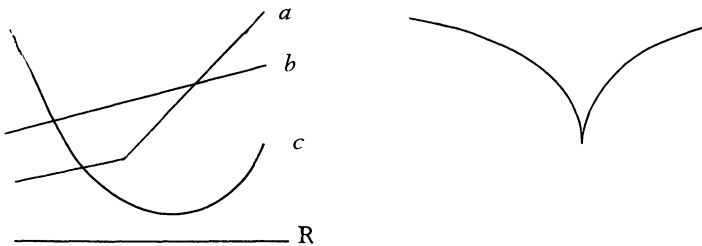
$$\exists f, g \text{ standards } C^\infty \quad (f(r) = s \wedge g(s) = r).$$

4.2. REMARQUES. 1^o Grâce au théorème 3.8 on voit que, si X satisfait (*), on a $\text{Top}(X) \models g \text{ standard } C^\infty$ ssi g est localement de la forme f^* où f est C^∞ .

2^o La définition 4.1 correspond à la notion de variété différentielle. On peut généraliser d'autres notions (par exemple celle de variété analytique) en utilisant d'autres formes d'équivalence $r \approx s$.

4.3. EXEMPLES. 1^o Si X est une variété différentielle, le faisceau de coordonnées locales nous donne une structure lisse sur $\text{Top}(X)$.

2^o Puisque $r \approx s$ est une relation d'équivalence, on peut associer à chaque section globale a de \mathcal{R} dans $\text{Top}(X)$ une structure lisse. Si X est la droite \mathbb{R} , a et b nous donnent des structures lisses différentes sur $\text{Top}(\mathbb{R})$ mais les topos lisses associés sont équivalents. Ils correspondent à \mathbb{R} avec sa structure différentielle habituelle. La section c nous donne un topos lisse non équivalent qui correspond à la structure lisse induite du papier.



4.4. DEFINITION. Si S est une structure lisse de dimension n , l'objet des réels lisses $L \subseteq \mathcal{R}$ est défini par

$$L = \{ a: \mathcal{R} \mid \exists f \text{ standard } C^\infty : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R} \exists r: S \ a = f(r) \}.$$

Les réels lisses forment une algèbre sur les réels de Cauchy. On peut construire l'espace $[L, L]$ des transformations linéaires :

$$[L, L] = \{ f: L^L \mid \forall a, b: L, r: \mathbf{R} \ f(a+r \cdot b) = f(a) + r \cdot f(b) \}$$

qui est un espace vectoriel sur L :

$$(\alpha \cdot f)(a) = \alpha \cdot (f(a)) \quad \text{pour tout } a, \alpha: L.$$

4.5. DEFINITION. L'objet des tangentes se définit comme le sous-espace vectoriel $\text{Tan} \subseteq [L, L]$ composé des dérivations :

$$\text{Tan} = \{ f: [L, L] \mid \forall a, b: L \ f(a \cdot b) = a \cdot f(b) + b \cdot f(a) \}.$$

Il est évident que, si X est une variété différentielle, l'objet Tan construit dans $\text{Top}(X)$ (muni de la structure lisse donnée par le faisceau de coordonnées locales) n'est autre que le fibré tangent classique.

4.6. THEOREME. Si

$$\forall r, s: \mathbf{R} \ (r = s \vee \neg r = s)$$

et si $f: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$ est standard C^∞ , on a pour tout $a: L^n$ et $t: \text{Tan}$:

$$t(f(a)) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_a t(a_i).$$

DEMONSTRATION (Esquisse). Afin de simplifier les notations supposons que $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$. La décidabilité de \mathbf{R} entraîne la validité interne du développement de Taylor pour une fonction standard C^∞ . Donc on peut écrire

$$f(a) = f(r) + f'(r) \cdot (a-r) + (a-r)^2 \cdot R(a, r),$$

où R est standard C^∞ . Supposons que r soit Cauchy. On a pour $a: L$:

$$t(f(a)) = f'(r) \cdot t(a) + (a-r) \cdot Q(a, r).$$

Donc, à l'aide de 2.7 on voit que

$$t(f(a)) \neq f'(a) \cdot t(a) \rightarrow a \neq r.$$

Puisque r est un réel de Cauchy quelconque

$$t(f(a)) \neq f'(a) \cdot t(a) \rightarrow \forall r: \mathbf{R} \quad a \neq r,$$

ce qui est absurde. Donc $t(f(a)) = f'(a) \cdot t(a)$.

4.7. COROLLAIRE. $\exists f_1, \dots, f_n: \mathbf{Tan}^* (t \neq 0 \rightarrow \bigvee f_i(t) \neq 0)$.
 (\mathbf{Tan}^* est le dual de \mathbf{Tan} , $t \neq 0 \leftrightarrow \exists a: \mathbf{L} \quad t(a) \neq 0$).

DEMONSTRATION. Soit $t(a) \neq 0$; on peut écrire a sous la forme

$$f(e_1, \dots, e_n), \quad \text{où } f \text{ est standard } C^\infty \text{ et } (e_1, \dots, e_n) \in \mathbf{S};$$

donc

$$\sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{e_1, \dots, e_n} t(e_i) \neq 0.$$

D'où $\bigvee t(e_i) \neq 0$. Considérer e_i comme élément de \mathbf{Tan}^* pour obtenir le résultat.

Le théorème 4.6 et son corollaire ont été inclus afin de fournir un exemple d'une démonstration faite dans la logique interne, démonstration qui se fait d'habitude fibre par fibre de façon externe. Le corollaire exprime que $\dim(\mathbf{Tan}) \leq n$ (on ne peut espérer démontrer une égalité sans conditions supplémentaires sur la notion de structure lisse). Nous ne parlons ici que d'une seule notion intuitionniste de dimension d'un espace vectoriel. Il en existe, cependant, plusieurs (classiquement équivalentes) dont l'étude n'a guère été abordée jusqu'ici.

1. COSTE M., Logique d'ordre supérieur dans les topos élémentaires, *Séminaire Bénabou* (1974).
2. BOILEAU A., *Types vs Topos*, U. de M., Montréal, 1975 (polycopié).
3. FOURMAN M., *The logic of topoi and sheaves*, Oxford, 1974 (polycopié).
4. FOURMAN M., *The logic of topoi* (à paraître).
5. HATCHER W., *The foundations of mathematics*, Saunders, Philadelphia, 1968.
6. OSIUS G., *Logical and set theoretical tools in elementary topoi*, Bremen, 1974 (polycopié).

REMARKS ON \mathcal{O} -ALGEBRAIC THEORIES

by John W. GRAY

Introduction.

At the Conference on Category Theory in Amiens in 1973, various 2-algebraic theories were described, and some of their properties and uses were mentioned (see [3]). Here, we wish to place this study in the context of \mathcal{O} -algebraic theories, where \mathcal{O} is a suitable closed category. The general results of categorical universal algebra continue to hold in this case. There are interesting applications when $\mathcal{O} = \mathcal{C}at$, k -spaces, pointed k -spaces, and suitably complete partially ordered sets.

1. Definitions.

\mathcal{O} will denote a symmetric monoidal closed category which is complete and cocomplete. I denotes the unit object of \mathcal{O} , and for any set n , $n \cdot I$ denotes the n -fold coproduct of I with itself. Let K be a set, called *the set of sorts*, to be regarded as a discrete category. A K -type in \mathcal{O} is a functor $\underline{n} : K \rightarrow \mathcal{O}$ such that for all $k \in K$, $\underline{n}(k) = n_k \cdot I$, where n_k is a finite set which is different from \emptyset for only finitely many $k \in K$. The full \mathcal{O} -subcategory of the \mathcal{O} -functor category $[K, \mathcal{O}]$ determined by the K -types in \mathcal{O} is denoted by $\mathbf{K}\mathcal{O}$ and is called *the category of K -types in \mathcal{O}* . A K -sorted \mathcal{O} -algebraic theory is a \mathcal{O} -functor $A : \mathbf{K}\mathcal{O} \rightarrow \mathbf{A}$ which is a bijection on objects and preserves coproducts. The full \mathcal{O} -subcategory of $[\mathbf{A}^{op}, \mathcal{O}]$ determined by the product-preserving \mathcal{O} -functors is denoted by \mathbf{A}^b and is called *the category of models of \mathbf{A} in \mathcal{O}* . One can of course consider models in any \mathcal{O} -category having finite products. There is an underlying \mathcal{O} -functor:

$$U_A : \mathbf{A}^b \rightarrow \mathcal{O}^K \quad \text{given by} \quad [U_A(M)](k) = M(\underline{k}),$$

where $\underline{k} \in \mathbf{K}\mathcal{O}$ is the K -type with $\underline{k}(j) = \mathcal{J}_k^j \cdot I$.

If $A : \mathbf{K}\mathcal{O} \rightarrow \mathbf{A}$ and $B : \mathbf{K}\mathcal{O} \rightarrow \mathbf{B}$ are K -sorted \mathcal{O} -algebraic theories, then a theory morphism from A to B is a \mathcal{O} -functor

$$\phi : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \quad \text{such that} \quad \phi A = B.$$

It induces a \mathcal{O} -functor $\phi^b: \mathbf{B}^b \rightarrow \mathbf{A}^b$ over \mathcal{O}^K . Finally, if $\mathcal{T}h_{K, \mathcal{O}}$ denotes the category of K -sorted \mathcal{O} -algebraic theories, then there is a functor

$$Gr: \mathcal{T}h_{K, \mathcal{O}} \rightarrow \mathcal{O}^{K \times} | \mathbf{K}\mathcal{O} |$$

assigning to a theory $A: \mathbf{K}\mathcal{O} \rightarrow \mathbf{A}$ the graded object

$$\{ \mathbf{A}(\underline{k}, \underline{n}) \mid k \in K, \underline{n} \in \mathbf{K}\mathcal{O} \}.$$

2. Results.

The following results hold if \mathcal{O} is cartesian closed in addition to the hypotheses stated in 1. More generally, they hold if for all $V \in \mathcal{O}$, the \mathcal{O} -functor $V \times \cdot$ preserves all colimits entering into the constructions.

2.1. $U_A: \mathbf{A}^b \rightarrow \mathcal{O}^K$ has a left \mathcal{O} -adjoint F_A and is \mathcal{O} -monadic. F_A is constructed as follows: Let

$$X = \{ X_k \mid k \in K \} \in \mathcal{O}^K$$

and for any K -type \underline{n} , let

$$X^{\underline{n}} = \prod_{k \in K} (X_k)^{n_k}.$$

This extends in an obvious way to a \mathcal{O} -functor $X^{(\cdot)}: \mathbf{K}\mathcal{O}^{op} \rightarrow \mathcal{O}$. Then $F_A X$ is the \mathcal{O} -functor whose value at \underline{m} is the following coequalizer:

$$\prod_{\underline{p}, \underline{q}} \mathbf{A}(\underline{m}, \underline{p}) \times \mathbf{K}\mathcal{O}(\underline{p}, \underline{q}) \times X^{\underline{q}} \rightrightarrows \prod_{\underline{n}} \mathbf{A}(\underline{m}, \underline{n}) \times X^{\underline{n}} \rightarrow F_A X(\underline{m}).$$

The two maps are given by the action of $\mathbf{K}\mathcal{O}$ on \mathbf{A} via composition and the action of $\mathbf{K}\mathcal{O}$ on $X^{(\cdot)}$ via its \mathcal{O} -functor structure. In the cartesian closed case this is a coend formula and says that $F_A X$ is the left Kan extension of $X^{(\cdot)}$ along A^{op} . The result follows from the fact that Kan extensions of finite product-preserving \mathcal{O} -functors preserve finite products. In the non-cartesian closed case, define $F_A X(\underline{k})$ by the coequalizer formula for $k \in K$ and, for general $\underline{m} \in \mathbf{K}\mathcal{O}$, set

$$F_A X(\underline{m}) = \prod_{k \in K} [F_A X(\underline{k})^{m_k}].$$

One shows by explicit calculations that this gives the left \mathcal{O} -adjoint and

that the monad comparison functor is an equivalence.

2.2. The same result holds for any \mathcal{U} -algebraic functor $\phi^b: \mathbf{B}^b \rightarrow \mathbf{A}^b$.

2.3. Structure and Semantics works as usual.

2.4. $Gr: \mathcal{H}_{K, \mathcal{U}} \rightarrow \mathcal{U}^{K \times |\mathbf{K}\mathcal{U}|}$ has a left adjoint Fr and is monadic. If

$$X = \{ X_{k, \underline{n}} \mid k \in K, \underline{n} \in |\mathbf{K}\mathcal{U}| \},$$

then FrX is called the free \mathcal{U} -theory generated by X . The main step in the construction of FrX is the following observation. If $R: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ is an endofunctor which preserves sequential colimits and if $(R: \mathcal{C})$ denotes the category of R -algebras, i. e. maps $R(C) \rightarrow C$ and commutative squares, then a left adjoint to the forgetful functor $(R: \mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$ can be constructed by the iteration process of Scott described in [4]. This is applied to the endofunctor on $\mathcal{U}^{|\mathbf{K}\mathcal{U}| \times |\mathbf{K}\mathcal{U}|}$ given by

$$R(G)(\underline{m}, \underline{n}) = \left[\prod_{k \in K} G(\underline{k}, \underline{n})^{m_k} \right] + \prod_{\underline{p}} G(\underline{m}, \underline{p}) \times G(\underline{p}, \underline{n})$$

with special conditions when $\underline{m} = 0, \underline{k}$ or \underline{n} . FrX is then a suitable quotient of the left adjoint of this R . It follows from the monadic part that \mathcal{U} -theories can be given by presentations.

3. Change of closed categories.

Let $\phi: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}'$ be a strong (i. e., preserving I and \otimes up to isomorphisms) cocontinuous closed functor between cartesian closed categories, where \mathcal{U}' has « \mathcal{U}' -disjoint» coproducts. Let $\phi_*: \mathcal{U}\text{-Cat} \rightarrow \mathcal{U}'\text{-Cat}$ denote the corresponding induced closed functor. Then

- i) $\phi_*(\mathbf{K}\mathcal{U}) = \mathbf{K}\mathcal{U}'$,
- ii) ϕ_* induces $\phi_*: \mathcal{H}_{K, \mathcal{U}} \rightarrow \mathcal{H}_{K, \mathcal{U}'}$,
- iii) there are induced \mathcal{U}' -functors so that the diagram

$$\begin{array}{ccc}
 \phi_*(\mathbf{A}^b) & \xrightarrow{\psi_2} & (\phi_*\mathbf{A})^b \\
 \uparrow \phi_*(F_A) & \downarrow \phi_*(U_A) & \uparrow F_{\phi_*\mathbf{A}} \\
 \phi_*(\mathcal{U}^K) & \xrightarrow{\psi_1} & (\mathcal{U}')^K \\
 & & \downarrow U_{\phi_*\mathbf{A}}
 \end{array}$$

commutes with the U 's. If

$$\theta : F_{\phi_* A} \psi_1 \longrightarrow \psi_2 \phi_*(F_A)$$

denotes the induced natural transformation, then one has the following

THEOREM. θ is an isomorphism.

EXAMPLE. If $\mathcal{U} = k$ -spaces or $\mathcal{C}at$, $\mathcal{U}' = \mathcal{S}e\mathcal{t}s$ and ϕ is the underlying set functor $|-|$, then $|F_A(X)| = F_{|A|}(|X|)$.

Note: for k -spaces, the free k -space algebra generated by a k -space is in general not a topological model of the theory.

4. Constructions.

There are a number of interesting possibilities for forming theories.

i) As usual there is a \otimes -product; if \mathbf{A} is K -sorted and \mathbf{B} is L -sorted, then $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ is $K \times L$ -sorted and $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^b = \mathbf{A}^b(\mathbf{B}^b) =$ models of \mathbf{A} in \mathbf{B}^b .

ii) If \mathcal{C} is any small \mathcal{U} -category, then \mathcal{C} determines an $|\text{ob } \mathcal{C}|$ -sorted \mathcal{U} -theory $\hat{\mathcal{C}}$ such that $(\mathbf{A} \otimes \hat{\mathcal{C}})^b = [\mathcal{C}, \mathbf{A}^b]$.

iii) Given a presented 2-theory

$$\begin{array}{ccc} Fr Y & \xrightarrow{d_0} & Fr X \xrightarrow{p} \mathbf{A} \\ & \xrightarrow{d_1} & \end{array}$$

one can replace \mathbf{A} by the «best category with $p' : Fr X \rightarrow \mathbf{A}'$ having a natural transformation $t : p' d_0 \rightarrow p' d_1$ ». One imposes suitable commutativity conditions on the components of this natural transformation derived from the simplicial kernel of the presentation to arrive at a new theory (depending on the presentation), $\bar{W}\mathbf{A}$, called the *theory of lax models of \mathbf{A}* . In particular, the objects of $[\bar{W}(\mathbf{A} \otimes \hat{\mathcal{C}})]^b$ are lax homomorphisms of models of \mathbf{A} (cf. [2]).

1. BARR M., Coequalizers and free triples, *Math. Z.* 116 (1970), p. 307-322.
2. BOARDMANN J.M. and VOGT R.M., Homotopy invariant algebraic structures on topological spaces, *Lecture Notes in Math.* 347, Springer (1973).
3. GRAY J.W., Résumés Colloque d'Amiens 1973, *Cahiers Topo. et Geo. diff.* XIV-2 (1973).
4. SCOTT D., The lattice of flow diagrams. Symposium on semantics of algorithmic languages, *Lecture Notes in Math.* 118, Springer (1971), p. 311-366.

UN CONTEXTE ADAPTE AUX RELATIONS CONTINUES

par René GUITART

La théorie des relations continues telle qu'elle est développée dans [1], n° II, peut être réécrite dans le contexte des topos élémentaires, voire des catégories avec appartenance ([1], n° IV), ou plus généralement encore dans le contexte des *monades involutives complétées* (m. i. c.) détaillé en [2]. Nous voudrions ici indiquer brièvement comment ceci est possible (voir aussi [3] pour d'autres informations à ce propos).

1. Soit $\mathcal{K} = [(K^0, I), (S, \epsilon), \equiv]$ une catégorie relationnelle ([2], p. 35) et N une négation sur (K^0, I) au sens faible de [2] p. 60; la sous-catégorie $\text{fonc}(\mathcal{K})$ de K^0 constituée des \mathcal{K} -fonctions ([2] définition I.3.2) se trouve équipée d'une m. i. c. ([2] p. 53), notée

$$((F, i, \psi), \nu) \cong ((P, i, V), I, N) = \mathbf{U}.$$

(On remarquera que toute m. i. c. telle que pour tout objet e le morphisme i_e soit le noyau de $i_{P(e)}$ et de $P(i_e)$ est ainsi associée à une catégorie relationnelle).

On définit dans $\text{fon}(\mathcal{K})$ les morphismes π_e et Λ_e en posant:

$$P(\nu_e) = F(i_{F(e)}) \cdot F^2(\nu_e) \cdot \psi_{F(e)},$$

$$\Lambda_e = \nu_e \cdot V_e \cdot P(\nu_e) \quad \text{et} \quad \pi_e = \nu_{F(e)} \cdot \psi_e \cdot \nu_e.$$

Alors, si $f, g: e' \rightrightarrows F(e)$ sont dans $\text{fon}(\mathcal{K})$, on définit:

$$f\alpha_1 g \iff (\exists h: e' \rightarrow F^2(e)) (\Lambda_e \cdot h = f \quad \text{et} \quad V_e \cdot h = g)$$

et

$$f\alpha_2 g \iff (\exists h: e' \rightarrow F^2(e')) (F(i_{e'}) \cdot h = i_e, \quad \text{et} \quad V_{e'} \cdot h = F(f) \cdot \pi_e \cdot g).$$

Dans le cas de la m. i. c. canonique $\mathbf{U}_2 = ((2^{(-)}, i, \psi), \mathbf{C})$ sur Ens ces deux relations sont identiques à « $f \leq g$ ».

2. Si $\alpha = \alpha_1$ ou α_2 , on appelle α -fermeture de Moore sur e la donnée d'un morphisme $\mu: F(e) \rightarrow F(e)$ tel que $m^2 = m$, que $F(e)\alpha\mu$ et que μ préserve α .

Pour toute α -fermeture de Moore μ sur $e \in \text{fon}(\mathcal{K})_0$ on pose

$$\mathbf{U}^\mu \doteq \Lambda_{F(e)} \cdot P(\pi_e \cdot \mu) \cdot \Lambda_{F(e)} \cdot P(F(\pi_e \cdot \mu) \cdot t_{F(e)}).$$

Dans le cas de \mathbf{U}_2 sur *Ens* on retrouve ainsi la fermeture, notée $U^d(\mu)$ dans [1] p. 18, qui permettait d'étudier la catégorie des relations semi-continues inférieurement (s. c. i.) comme une catégorie de Kleisli.

Dans le cas général on définira une relation (i. e. un morphisme de K) s. c. i. de (e', μ') vers (e, μ) comme étant un morphisme $R: e' \rightarrow F(e)$ de $\text{fon}(K)$ continu de μ' vers \mathbf{U}^μ , c'est-à-dire vérifiant

$$\mu' \cdot F(R) \cdot \mathbf{U}^\mu = F(R) \cdot \mathbf{U}^\mu.$$

Ce procédé vaut par exemple si \mathbf{U} est une m. i. c. sur *Ens* associée à un sup-monoïde abélien \mathcal{O} (voir [2]). Ainsi si

$$\mathcal{O} = ([0, 1], \leq, \cdot),$$

on obtient la théorie des relations floues s. c. i. entre fermetures floues.

1. R. GUITART, Foncteurs sous-objets, et relations continues, *Cahiers Topo. et Géo. Diff.* XIII-1 (1972), p. 57-100.
2. Monades involutives complémentées, *Cahiers Topo. et Géo. Diff.* XVI-1 (1975), p. 17-102.
3. *Involutive monads and Topologies*, Lecture at Oberwolfach in 1975.

ON SERRE CLASSES OF NILPOTENT GROUPS

by Peter HILTON

1. Introduction.

The theory of Serre classes of nilpotent groups was developed in [HR], with a view to its applications to the homotopy theory of nilpotent spaces. In this talk we will simply indicate how we may obtain results in the theory of nilpotent groups by introducing the idea of Serre classes. It would be interesting to try to cast the definitions adopted in a more universal context and thus to use category-theoretical methods to obtain appropriate generalizations.

In Section 2 we recall from [HR] the appropriate fundamental definitions and results; in Section 3 we obtain new, specialized results on nilpotent groups.

2. Serre classes of nilpotent groups.

Let C be a non-empty family of nilpotent groups. Then C is said to satisfy *Axiom S* if, given any central extension of nilpotent groups

$$N \twoheadrightarrow G \longrightarrow Q,$$

then $N, Q \in C \iff G \in C$.

We write A for an abelian group (nilpotent group of class ≤ 1). Then C satisfies *Axiom I* if

$$A \in C \implies A \text{ is finitely-generated;}$$

and C satisfies *Axiom II* if

$$A \in C \implies \bigoplus A \in C, \text{ the direct sum being taken over an arbitrary indexing set.}$$

DEFINITION 2.1. The family C is a *Serre class* if it satisfies (SI) or (SII).

EXAMPLES OF SERRE CLASSES.

- (i) All nilpotent groups.
- (ii) Singleton groups.
- (iii) Finitely-generated nilpotent groups.
- (iv) Finite nilpotent groups.

(v) Torsion nilpotent groups.

(vi) Finite nilpotent P -groups, where P is a set of primes.

(vii) Torsion nilpotent P -groups.

PROPOSITION 2.1. $G \in C \iff G_{ab} \in C$. (Proposition 5.2 of [HMR].)

PROPOSITION 2.2. Let

$$G' \triangleright \longrightarrow G \longrightarrow G''$$

be a short exact sequence of nilpotent groups. Then

$$G', G'' \in C \iff G \in C. \quad (\text{Theorem 5.7 of [HMR].})$$

COROLLARY 2.3. Let $G \in C$ and $H \subseteq G$. Then $H \in C$.

PROOF. We know from Proposition 2.2 that a normal subgroup of a member of C belongs to C . But every subgroup H of a nilpotent group G is subnormal, that is, we may find a normal series

$$(2.1) \quad H \triangleleft N_1 \triangleleft N_2 \triangleleft \dots \triangleleft N_r \triangleleft G.$$

Thus the Corollary follows by iterated application of Proposition 2.2.

DEFINITION 2.2 ([HR]). We say that a homomorphism $\phi: K \rightarrow G$ of nilpotent groups is C -injective if $\ker \phi \in C$. We say that an embedding $H \subseteq G$ of nilpotent groups is C -surjective if it admits a normal series (2.1) with

$$N_1/H, N_2/N_1, \dots, G/N_r \text{ in } C.$$

More generally, $\phi: K \rightarrow G$ is C -surjective if the embedding $\phi K \subseteq G$ is C -surjective. Finally, ϕ is C -bijective if it is C -injective and C -surjective.

PROPOSITION 2.4. If $H \subseteq G$ is C -surjective and

$$H \triangleleft M_1 \triangleleft M_2 \triangleleft \dots \triangleleft M_s \triangleleft G$$

is any normal series, then

$$M_1/H, M_2/M_1, \dots, G/M_s \in C.$$

(Theorem 1.4 of [HR].)

In this talk, we will be very largely concerned with the C -surjections. However, we point out that, aided by Proposition 2.4, we proved in [HR] a complete 5-lemma in nilpotent C -theory; we will exploit a special

aspect of the 5-lemma in Section 3. We also showed in [HR] that we may introduce the equivalence relation of C -isomorphisms for nilpotent groups by declaring $G_1 \stackrel{C}{\sim} G_2$ if there is a nilpotent group K and C -bijections

$$\phi_i : K \rightarrow G_i, \quad i = 1, 2.$$

Thus C -isomorphism generalizes commensurability between torsion-free nilpotent groups.

We also point out that we may always choose (2.1), for a given H subgroup of G , so that $N_r = \overline{H}$, the normal closure of H in G ; indeed we may choose a normal series (2.1) of minimum length with $N_r = \overline{H}$ and we then call r the *depth* of H in G . Many arguments may be carried out by induction on depth (see [HR]).

3. On C -surjections.

We assume throughout this section that we are concerned with a Serre class C and a homomorphism $\phi : K \rightarrow G$; moreover, either C satisfies (SII) or C satisfies (SI) and K, G are finitely-generated.

THEOREM 3.1 (Corollary 3.2 of [HR]).

$$\phi : K \rightarrow G \text{ } C\text{-surjective} \iff \phi_{ab} : K_{ab} \rightarrow G_{ab} \text{ } C\text{-surjective.}$$

PROOF. We write Γ^i for the terms of the lower central series of a group. There is then a canonical surjection

$$\otimes^i G_{ab} \longrightarrow \Gamma^i G / \Gamma^{i+1} G,$$

leading to a commutative diagram

$$(3.1) \quad \begin{array}{ccc} \otimes^i K_{ab} & \longrightarrow & \Gamma^i K / \Gamma^{i+1} K \\ \otimes \phi_{ab} \downarrow & & \downarrow \phi_{i+1}^i \\ \otimes^i G_{ab} & \longrightarrow & \Gamma^i G / \Gamma^{i+1} G. \end{array}$$

If we assume ϕ_{ab} C -surjective, our assumption on C and ϕ guarantees that $\otimes \phi_{ab}$ is C -surjective. It then follows readily from (3.1) that ϕ_{i+1}^i is C -surjective. The diagram (3.2) then enables us to prove, by induction on $(j-i)$ and by aid of the 5-lemma in nilpotent C -theory, that ϕ_j^i is C -surjective, $j > i$.

$$\begin{array}{ccccc}
 \Gamma^{i+1}K / \Gamma^j K & \xrightarrow{\quad} & \Gamma^i K / \Gamma^j K & \longrightarrow & \Gamma^i K / \Gamma^{i+1} K \\
 \downarrow \phi_j^{i+1} & & \downarrow \phi_j^i & & \downarrow \phi_{i+1}^i \\
 \Gamma^{i+1}G / \Gamma^j G & \xrightarrow{\quad} & \Gamma^i G / \Gamma^j G & \longrightarrow & \Gamma^i G / \Gamma^{i+1} G
 \end{array}$$

(j > i+1)

Now K, G are nilpotent. Thus if we fix i and take j sufficiently large, we may infer that $\phi^i: \Gamma^i K \rightarrow \Gamma^i G$ is C -surjective. By taking $i=1$ we infer that ϕ is itself C -surjective.

Since the opposite implication is trivial, the theorem is proved.

In the category of nilpotent groups the cokernel object of $\phi: K \rightarrow G$ is $G/\phi K$. Theorem 3.1 enables us to prove

THEOREM 3.2. *Under the assumption on C and ϕ ,*

$$\phi \text{ } C\text{-surjective} \iff \text{coker } \phi \in C.$$

PROOF. Since abelianization is left adjoint to the embedding functor, it follows that $(\text{coker } \phi)_{ab} = \text{coker } \phi_{ab}$. Thus

$$\begin{aligned}
 \phi \text{ } C\text{-surjective} &\iff \phi_{ab} \text{ } C\text{-surjective (Theorem 3.1)} \\
 &\iff \text{coker } \phi_{ab} \in C \\
 &\iff (\text{coker } \phi)_{ab} \in C \\
 &\iff \text{coker } \phi \in C \text{ (Proposition 2.1)}.
 \end{aligned}$$

COROLLARY 3.3. *Let $H \subseteq G$ and let*

$$H \triangleleft N_1 \triangleleft \dots \triangleleft N_r \triangleleft G$$

be a normal series from H to G with $N_r = \bar{H}$. Then if $G/N_r \in C$ it follows that $N_1/H, N_2/N_1, \dots, N_r/N_{r-1} \in C$.

Now let C_P be the Serre class of finite nilpotent P -groups and let $H \subseteq G$ be the embedding of H in the finitely-generated nilpotent group G .

PROPOSITION 3.4. $H \subseteq G$ is C_P -surjective $\iff [G:H]$ is a P -number. †

PROOF. Plainly, for $N \triangleleft G$,

† Note that we have the more general result, for any homomorphism $\phi: K \rightarrow G$ of nilpotent groups, that ϕ is C_P -surjective, where C_P is the class of nilpotent P -groups, if and only if ϕ is P' -surjective [HMR], where P' is the complement of P .

$$\begin{aligned}
 N \subseteq G \text{ is } C_P \text{ surjective} &\iff G/N \in C_P \\
 &\iff [G:N] \text{ is a } P\text{-number.}
 \end{aligned}$$

Now let (2.1) be a normal series for $H \subseteq G$. Then

$$\begin{aligned}
 H \subseteq G \text{ is } C_P \text{-surjective} &\iff H \subseteq N_1, N_1 \subseteq N_2, \dots, N_r \subseteq G \text{ } C_P \text{-surjective} \\
 &\iff [N_1:H], [N_2:N_1], \dots, [G, N_r] \text{ are } P\text{-numbers} \\
 &\iff [G:H] \text{ is a } P\text{-number.}
 \end{aligned}$$

COROLLARY 3.5. Let G be a finitely-generated nilpotent group and H a subgroup of G . Let P be a family of primes. Then

$$[G, H] \text{ is a } P\text{-number} \iff [G: \bar{H}] \text{ is a } P\text{-number,}$$

where \bar{H} is the normal closure of H in G .

REMARKS. (i) It is plain (take $G = S_3$, the symmetric group on the three symbols 1, 2, 3, and $H = (12)$) that the conclusion of Corollary 3.5 does not hold for solvable groups.

(ii) Theorem 3.2 does not justify us in replacing our definition of a C -surjection by the (simpler) requirement that $\text{coker } \phi \in C$. For if we take a Serre class C satisfying (SI) we do not necessarily have the conclusion of Theorem 3.2 - we must take K, G finitely-generated. As a counterexample, let F be the free group on countably many generators x_1, x_2, \dots and let F_0 be the subgroup generated by x_2, \dots . Let C be the class of finitely generated nilpotent groups, let $G = F / \Gamma^3 F$, $K = F_0 / \Gamma^3 F_0$ and $\phi: K \rightarrow G$ be induced by the inclusion $F_0 \subset F$. It is plain that ϕ_{ab} is C -surjective. It is also plain that ϕ is C -surjective if and only if

$$\Gamma^2 F_0 / \Gamma^3 F_0 \rightarrow \Gamma^2 F / \Gamma^3 F$$

is C -surjective (since ϕ_{ab} is, in fact, C -bijective). However $\Gamma^2 F / \Gamma^3 F$ contains the free generators $[x_1, x_j]$, $j = 2, 3, \dots$, which are not in the image of $\Gamma^2 F_0 / \Gamma^3 F_0$, so that, finally, ϕ is not C -surjective.

[HR] Peter HILTON and Joseph ROITBERG, *Generalized C-theory and torsion phenomena in nilpotent spaces* (to appear).

[HMR] Peter HILTON, Guido MISLIN and Joseph ROITBERG, *Localization of nilpotent groups and spaces*, *Notas de Matem.*, North Holland Math. Studies 15 (1975).

L'HOMOTOPIE DES CATEGORIES

par Georges HOFF

Dans le cadre de la théorie générale de l'homotopie, on peut développer l'aspect de l'homotopie des petites catégories. Cette étude, qui n'est pas inintéressante en elle-même, est aussi utile par ailleurs, en particulier par l'outil qu'elle peut donner à la topologie algébrique.

Nous noterons \mathcal{N} la catégorie dont les objets sont les entiers naturels et dont les morphismes, autres que les identités, sont définis de la manière suivante : si m et n sont deux entiers distincts, on a un et un seul morphisme de m vers n si m est pair et si $n = m - 1$ ou $n = m + 1$ et aucun sinon. Cette catégorie sera l'objet intervalle unité de \mathcal{Cat} .

Un foncteur T de source \mathcal{N} sera dit *fini en m_0* si m_0 est un entier tel que

$$T(m) = T(m_0) \quad \text{pour tout } m \geq m_0 \quad \text{et} \quad T(f) = 1_{T(m_0)}$$

pour tout morphisme f dont la source et le but sont supérieurs ou égaux à m_0 . On notera $[\mathcal{N}, \mathbf{C}]_F$ la catégorie dont les objets sont les foncteurs finis de \mathcal{N} vers \mathbf{C} et dont les morphismes sont les transformations naturelles entre tels foncteurs. On a des foncteurs α et $\omega : [\mathcal{N}, \mathbf{C}]_F \rightarrow \mathbf{C}$ définis par :

$$\begin{aligned} \alpha(T) &= T(0), & \alpha(\eta) &= \eta(0), \\ \omega(T) &= T(m_0), & \omega(\eta) &= \eta(\text{sup}(m_0, m'_0)), \end{aligned}$$

où T est un foncteur fini en m_0 et où η est une transformation naturelle dont la source (resp. le but) est un foncteur fini en m_0 (resp. en m'_0). Un foncteur de source \mathcal{N}^n sera dit *fini* s'il existe un entier m_0 tel que tous les foncteurs obtenus en fixant $n - 1$ coordonnées soient finis en un $m \leq m_0$.

Dans toute théorie de l'homotopie (ne citons que Quillen, Heller, Gabriel-Zisman) on rencontre la notion de fibration qui est intimement liée à celle d'homotopie. Il existe, dans \mathcal{Cat} , des notions de catégories fibrées (Grothendieck). Dans un de nos articles [1], nous avons étudié ce type de fibrations du point de vue de l'homotopie. Les définitions précédentes vont nous permettre d'introduire un nouveau type, plus faible, de fibrations, analogue catégorique des « fibrations de Serre » topologiques.

Un foncteur $\phi: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ est appelé *fibration* si, pour tout entier n , étant donnés des foncteurs finis

$$F: \mathfrak{N}^{n+1} \rightarrow \mathbf{B} \quad \text{et} \quad F': \mathfrak{N}^n \rightarrow \mathbf{A}$$

tels que

$$F(t_1, \dots, t_n, 0) = \phi F'(t_1, \dots, t_n),$$

il existe un foncteur fini $F'': \mathfrak{N}^{n+1} \rightarrow \mathbf{A}$ tel que

$$F''(t_1, \dots, t_n, 0) = F'(t_1, \dots, t_n) \quad \text{et} \quad \phi F'' = F.$$

THEOREME. *Tout isomorphisme de $\mathcal{C}at$ est une fibration, le foncteur $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{1}$ est une fibration pour toute catégorie \mathbf{C} (i. e. toute catégorie est fibrante au sens de Quillen). Les fibrations sont stables par composition et changement de base.*

Par exemple, les bifibrations au sens de Grothendieck que nous avons considérées dans [1] sont des fibrations. D'autres nombreux exemples vont nous être donnés par l'étude des catégories de chemins et des catégories de lacets qui serviront par ailleurs à définir l'homotopie.

Si C et C' sont deux objets d'une catégorie \mathbf{C} , un chemin dans \mathbf{C} de C à C' est un foncteur fini

$$F: \mathfrak{N} \rightarrow \mathbf{C} \quad \text{tel que} \quad \alpha(F) = C \quad \text{et} \quad \omega(F) = C'.$$

On a alors les notions bien connues de composante connexe et de connexité d'une catégorie.

La catégorie des chemins de \mathbf{C} est la catégorie $Ch(\mathbf{C})$ dont les objets sont ceux de $[\mathfrak{N}, \mathbf{C}]_F$ et dont les morphismes entre deux chemins T_1 et T_2 sont les morphismes, dans $[\mathfrak{N}, \mathbf{C}]_F$, entre chemins \hat{T}_1 et \hat{T}_2 tels que

$$\hat{T}_i(\mathfrak{N}) = T_i(\mathfrak{N}), \quad \alpha(\hat{T}_i) = \alpha(T_i), \quad \omega(\hat{T}_i) = \omega(T_i), \quad i = 1, 2.$$

Comme plus haut on a des foncteurs α et $\omega: Ch(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{C}$. La catégorie des lacets de \mathbf{C} d'origine C est la sous-catégorie $\Omega(\mathbf{C}, C)$ de $Ch(\mathbf{C})$ dont les objets (resp. les morphismes) sont les objets T (resp. les morphismes η) de $Ch(\mathbf{C})$ tels que

$$\alpha(T) = \omega(T) = C \quad (\text{resp. } \alpha(\eta) = \omega(\eta) = 1_C).$$

On a alors des foncteurs

$$Cb: \mathcal{C}at \rightarrow \mathcal{C}at \quad \text{et} \quad \Omega: \mathcal{C}at_P \rightarrow \mathcal{C}at$$

qui commutent avec les produits.

Posons-nous maintenant le problème de définir une homotopie entre foncteurs. Quand on considère le foncteur «réalisation géométrique» ou «classifiant» $B: \mathcal{C}at \rightarrow \mathcal{T}op$ défini par Segal et qui a d'intéressantes applications en Topologie algébrique (travaux de Segal, Quillen, Anderson, ...), on voit que les transformations naturelles entre foncteurs donnent des homotopies entre applications continues. On a alors la notion d'*homotopie forte* qui est la fermeture symétrique et transitive de la relation :

$$F \simeq G \quad \text{ssi il existe une transformation naturelle } \gamma: F \rightarrow G.$$

Cette homotopie est celle étudiée dans [2] et [1]. D'autre part, on a une notion d'*homotopie faible* telle que deux foncteurs F et G soient homotopes ssi BF et BG sont deux applications homotopes. Celle-ci est utilisée dans les travaux récents de Dana Latch [3, 4]. Nous considérerons ici une notion intermédiaire en utilisant ce que nous avons défini ci-dessus. Deux foncteurs $T, T': \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ sont dits *homotopes*, et on note $T \simeq T'$, s'il existe un foncteur $H: \mathbf{A} \rightarrow Cb(\mathbf{B})$ tel que $\alpha H = T$ et $\omega H = T'$.

THEOREME. Si $T \simeq T': \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ et $U \simeq U': \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}$, on a $UT \simeq U'T': \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C}$.
Si $T' \simeq U': \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}'$ et $T'' \simeq U'': \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}''$, on a

$$(T', T'') \simeq (U', U''): \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}' \times \mathbf{B}''.$$

Si $T' \simeq U': \mathbf{A}' \rightarrow \mathbf{B}$ et $T'' \simeq U'': \mathbf{A}'' \rightarrow \mathbf{B}$, on a

$$\langle T', T'' \rangle \simeq \langle U', U'' \rangle: \mathbf{A}' \amalg \mathbf{A}'' \rightarrow \mathbf{B}.$$

On en déduit la notion d'*équivalence d'homotopie* ($\phi: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ tel qu'il existe un $\psi: \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}$ vérifiant $\phi\psi \simeq 1_{\mathbf{B}}$ et $\psi\phi \simeq 1_{\mathbf{A}}$) ainsi que celles de type d'homotopie ou de catégorie contractile. Par exemple un foncteur admettant un adjoint, à droite ou à gauche, est une équivalence d'homotopie, de même que tout isomorphisme de $\mathcal{C}at$.

THEOREME. Si F est un foncteur quelconque, il existe une fibration ϕ et une équivalence d'homotopie Γ telles que $F = \phi\Gamma$.

Avec tous ces ingrédients, on est à même de développer la théorie de l'homotopie des catégories : constructions des groupes d'homotopie, existence de suites exactes d'homotopie, etc..., comme en Topologie algébrique. On trouvera ceci traité dans [5] où l'on obtient, entre autres choses, des résultats de M. Evrard [6]. Outre l'approfondissement de cette étude, on peut envisager d'autres aspects intéressants abordés aussi dans [5].

Tout comme, en Topologie, on a été amené à généraliser les groupes topologiques dans la théorie des H-espaces dont les espaces de lacets sont des exemples, on peut définir une structure sur une catégorie, généralisant celle de (petite) catégorie multiplicative de Bénabou (ou catégorie monoïdale) et dont les catégories de lacets sont des exemples.

Une *H-catégorie* est la donnée d'un triplet (\mathbf{H}, M, E) , où \mathbf{H} est une catégorie, $M: \mathbf{H} \times \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ un bifoncteur et E un objet de \mathbf{H} tel que

$$M(E, -) \simeq 1_{\mathbf{H}} \quad \text{et} \quad M(-, E) \simeq 1_{\mathbf{H}}.$$

Si (\mathbf{H}, M, E) est une H-catégorie, alors $\pi_1(\mathbf{H}, E)$ est un groupe abélien et les lois de composition dans les $\pi_i(\mathbf{H}, E)$, $i \in \mathbf{N}$, sont induites par M . On peut envisager le développement de l'étude des H-catégories dans deux directions : d'une part, on peut transposer dans \mathcal{Cat} les diverses études faites sur les H-espaces ; d'autre part, on peut regarder comment se comporte la généralisation de ce que l'on a pour les catégories multiplicatives.

Il faut aussi signaler les rapports existant entre l'homotopie de \mathcal{Cat} et celle de \mathcal{Top} qui fournissent des outils à la Topologie algébrique via le foncteur B dont nous parlons ci-dessus. Si ϕ est une fibration, $B\phi$ est une fibration au sens de Serre. Si T et T' sont deux foncteurs homotopes, alors BT et BT' sont deux applications continues homotopes. L'homotopie d'une catégorie \mathbf{C} et celle de l'espace topologique $B\mathbf{C}$ sont isomorphes.

Si l'on se place au point de vue de l'algèbre homotopique (Quillen, Heller, ...), on remarque que les théorèmes énoncés ici nous permettent de rejoindre le cadre de l'homotopie des catégories en général avec les notions de catégories homotopiques (avec fibrations, homotopie + axiomes) et de foncteurs homotopiques (tel B).

2^e COLLOQUE SUR L'ALGÈBRE DES CATEGORIES (AMIENS 1975)

1. G. HOFF, *Catégories fibrées et homotopie*, *C. R. A. S. Paris* 278 (1974), p. 223.
2. Ming-Jung LEE, *Homotopy for functors*, *Proc. A. M. S.* 36 (1972), p. 571.
3. D. LATCH, *The uniqueness of homology for $\mathcal{C}at$* , à paraître.
4. D. LATCH, *A (weak) homotopy inverse for the functor nerve*, à paraître.
5. G. HOFF, *Introduction à l'homotopie dans $\mathcal{C}at$* , *Esquisses Math.* 23, Paris (1975).
6. M. EVRARD, *Homotopie d'un espace topologique relativement à un recouvrement*, *C. R. A. S. Paris* 276 (1973), p. 909.

**LES THEOREMES DE CHEVALLEY - TARSKI
ET REMARQUES SUR L'ALGÈBRE CONSTRUCTIVE**

par André JOYAL

Soit k un corps algébriquement clos. Un théorème de Tarski sur l'élimination des quantificateurs dans la théorie des corps algébriquement clos nous permet de conclure que, si $S \subset k^n$ est un ensemble algébriquement constructible, c'est-à-dire une combinaison booléenne finie d'hypersurfaces, alors la projection $p(S) \subset k^{n-1}$ est algébriquement constructible.

Un théorème de Chevalley nous dit aussi que, si

$$S \subset \text{Spec } A = \{ p \mid p \text{ idéal premier de } A \}$$

est constructible, c'est-à-dire est une combinaison booléenne finie d'ensembles de la forme

$$Z(f) = \{ p \mid f \in p \} \quad \text{pour } f \in A,$$

alors son image $\phi^a(S)$ est aussi constructible, où ϕ^a est l'application continue

$$\text{Spec } A \xrightarrow{\phi^a} \text{Spec } A'$$

associée (Bourbaki, Algèbre commutative) à un homomorphisme de présentation finie : $A' \rightarrow A$.

Nous comparons ces deux théorèmes en montrant qu'ils permettent d'obtenir une description très explicite de l'algèbre polyadique associée à la théorie des corps algébriquement clos contenant les constantes (les éléments) d'un anneau A donné d'avance ainsi que leurs relations algébriques.

Comme conséquence nous obtenons que cette théorie est non contradictoire si l'anneau A n'est pas nul.

Il faut ajouter que ce dernier résultat est bien connu mais que sa démonstration traditionnelle suppose l'axiome du choix. On peut cependant en donner une démonstration constructive si l'on dispose d'une construction de la clôture algébrique des corps premiers ainsi que d'une version constructive du «Nullstellensatz». Nous proposons une démonstration différente qui possède l'avantage d'avoir le «Nullstellensatz» comme conséquence (con-

structive) et aussi de pouvoir se généraliser à d'autres situations.

Les applications que nous avons en vue sont dans le domaine de la Géométrie algébrique relative à un topos \mathcal{E} ou à un univers arithmétique arbitraire \mathcal{U} . Comme dans ce cadre on ne dispose plus de l'axiome du choix ni même du tiers exclus, il est *faux* qu'un corps quelconque K dans ces univers peut se plonger dans un corps algébriquement clos \hat{K} . Ceci constitue au premier abord une obstruction à l'usage des méthodes courantes d'Algèbre et de Géométrie qui utilisent le fait qu'un polynôme à coefficients dans K se décompose en facteurs linéaires dans une extension de K . Ajoutons que même le théorème si utile d'Algèbre qui affirme que tout polynôme possède une décomposition en facteurs irréductibles est en général faux. Cependant le fait que l'on dispose d'un théorème de consistance de la théorie des corps algébriquement clos contenant un corps K (d'un univers \mathcal{U}) nous permet de construire explicitement un univers $\mathcal{U}[\hat{K}]$, extension *conservative* de \mathcal{U} et dans lequel le corps K est canoniquement plongé dans une extension algébriquement close \hat{K} . De plus l'univers $\mathcal{U}[\hat{K}]$ est une solution universelle au problème précédent. Il faut préciser que dans le cas des univers arithmétiques les morphismes d'univers sont des morphismes logiques, alors que dans le cas des topos ce sont les morphismes géométriques. Ainsi, si l'on veut démontrer une proposition dans \mathcal{U} concernant un corps K , on peut faire la démonstration dans $\mathcal{U}[\hat{K}]$ à la condition que cette proposition soit formulée dans un langage préservé par les morphismes d'univers. Ainsi, on peut démontrer le théorème de Gauss qui affirme que, si K est un corps réel fermé, alors $K[i]$ est algébriquement clos, car on peut copier dans $\mathcal{U}[\hat{K}]$ la démonstration de Lagrange (Bourbaki) qui utilise le passage à une extension algébriquement close \hat{K} . Cette méthode est tout à fait dans l'esprit de Hilbert quand celui-ci suggérait une compréhension approfondie de l'*introduction* et l'*élimination* des objets idéaux dans les raisonnements mathématiques.

Reste à donner une description accélérée de la méthode. Il faut reformuler entièrement la notion de Spectre, car on ne peut utiliser l'axiome du choix pour démontrer qu'il y a suffisamment d'idéaux premiers. Pour nous,

le spectre de A sera un treillis distributif engendré par des éléments $Z(f)$ (les zéros de $f \in A$).

DEFINITION. Une notion de zéros pour A (anneau commutatif et unitaire) est une fonction $A \xrightarrow{z} D$ à valeur dans un treillis distributif satisfaisant aux conditions suivantes :

- 1° $z(1) = 0, \quad z(0) = 1.$
- 2° $z(fg) = z(f) \vee z(g).$
- 3° $z(f+g) \geq z(f) \wedge z(g).$

DEFINITION. Le spectre premier de A est la notion universelle de zéros solution du problème universel évident $\triangleright A \xrightarrow{Z} D(A).$

DEFINITION. Le spectre booléen de A est obtenu par composition :

$$A \longrightarrow D(A) \longrightarrow B(A)$$

où $B(A)$ est le treillis booléen universellement engendré par $D(A).$

THEOREME (Chevalley). Soit $A' \xrightarrow{\phi} A$ un homomorphisme de présentation finie ; alors l'homomorphisme booléen correspondant $B(A') \xrightarrow{\bar{\phi}} B(A)$ admet un adjoint à gauche $B(A) \xrightarrow{\exists \phi} B(A').$ On a donc

$$\exists \phi(x) \leq x' \iff x \leq \bar{\phi}(x').$$

De plus, si $A' \xrightarrow{b} C$ est un homomorphisme arbitraire, le carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{\phi} & A \\ b \downarrow & & \downarrow f \\ C & \xrightarrow{\psi} & C \otimes_{A'} A \end{array}$$

donne un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} B(A') & \xrightarrow{\exists \phi} & B(A) \\ \bar{b} \downarrow & & \downarrow \bar{f} \\ B(C) & \xrightarrow{\exists \psi} & B(C \otimes_{A'} A) \end{array}$$

COROLLAIRE. $B(A)$ est l'algèbre de Boole des énoncés de la théorie des corps algébriquement clos contenant les constantes de A et leurs relations algébriques.

COROLLAIRE. La théorie des corps algébriquement clos contenant un corps K donné d'avance est consistante (et complète).

**QUELQUES OBSERVATIONS SUR LES DEMONSTRATIONS PAR
RECURRENCE TRANSFINIE EN ALGÈBRE CATEGORIQUE**

par G. Max KELLY

Considérons six théorèmes connus :

1 a) La démonstration par Gabriel-Ulmer [4] que, si on se donne un ensemble Σ de flèches dans une catégorie localement présentable \mathcal{A} , alors la sous-catégorie pleine \mathcal{A}_Σ , formée des objets A tels que $\mathcal{A}(\sigma, A)$ soit un isomorphisme pour tout $\sigma \in \Sigma$, est réflexive.

1 b) La démonstration par Freyd-Kelly [3] du même résultat sous des hypothèses beaucoup plus légères sur \mathcal{A} . (On peut mentionner aussi plusieurs résultats antérieurs sur la réflexivité, parmi les préfaisceaux, des réalisations d'une esquisse ; il est bien connu qu'il s'agit là d'un cas particulier du problème 1.)

2 a) La démonstration par Schubert [5] que la catégorie \mathcal{A}^T des algèbres pour une monade T sur \mathcal{A} est cocomplète, lorsque \mathcal{A} est cocomplète et que T a un rang.

2 b) La démonstration par Barr [1] de la même complétude de \mathcal{A}^T sous des conditions beaucoup moins restrictives sur T , mais un peu plus restrictives sur \mathcal{A} .

3 a) La démonstration par Dubuc [2] qu'il existe une monade libre sur \mathcal{A} engendrée par un endofoncteur R de \mathcal{A} , pourvu que \mathcal{A} soit cocomplète et que R ait un rang.

3 b) La démonstration par Barr [1] de la même chose sous des conditions comme celles de 2 b).

Les trois démonstrations 1 a, 2 a, 3 a sont directes : on y construit l'objet représentant cherché comme le terme d'indice α dans une suite transfinie d'objets et de flèches, où α est un cardinal régulier tel que le foncteur en question préserve les colimites α -filtrantes. Par contre, les résultats plus forts 1 b, 2 b, 3 b se démontrent indirectement à partir des critères de représentabilité de P. Freyd. Ici, on ne construit plus une seule suite transfinie, car à chaque étape il y a des choix à faire ; mais on choisit tou-

jours parmi un ensemble *petit* de possibilités. On obtient un « ensemble petit à solution » quand on termine chaque suite à l'indice α ; c'est parce que, dans ces cas, le foncteur en question préserve certaines colimites α -filtrantes, à savoir celles où les génératrices du cône-limite appartiennent à une classe donnée \mathfrak{M} de monomorphismes.

Pourtant, on n'a aperçu jusqu'à maintenant qu'une parenté entre ces six démonstrations, sans y trouver de principe commun : en fait, on trouve des remarques explicites de la sorte dans les introductions de [1] et de [3]. Les observations que je veux faire aujourd'hui sont au nombre de deux : d'abord, que les problèmes 1, 2, 3 peuvent être vus comme des cas particuliers d'un seul ; et ensuite, que les démonstrations des types a et b admettent une généralisation commune.

Tout d'abord, c'est Harvey Wolff au Texas qui a démontré, dans un article à paraître, que le problème 1 peut se voir comme cas particulier du problème 3. En effet, il considère un foncteur $U: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ admettant un adjoint à gauche, et une sous-catégorie pleine réflexive \mathcal{D} de \mathcal{C} . Si on note $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ l'image réciproque de \mathcal{D} suivant U , il démontre que \mathcal{B} n'est autre que la catégories des « algèbres » pour un endofoncteur pointé R de \mathcal{A} (voir ci-dessous les définitions). Il s'ensuit que \mathcal{B} est réflexive dans \mathcal{A} si et seulement si R engendre (il faut préciser « point par point ») une monade libre. Or on voit facilement que la catégorie \mathcal{A}_Σ de 1 est précisément une telle catégorie \mathcal{B} image réciproque.

Donc, il ne s'agit plus que des problèmes 2 et 3. Pour 3, on peut toujours commencer par se donner un endofoncteur *pointé* R sur \mathcal{A} , c'est-à-dire un endofoncteur R muni d'une transformation naturelle $\eta: I \rightarrow R$. (Si on n'a qu'un endofoncteur S tout court, on forme très facilement l'endofoncteur pointé libre engendré par S ; c'est $I + S$.) Une R -algèbre est alors un objet A de \mathcal{A} muni d'une « action » $a: RA \rightarrow A$ satisfaisant à l'unique axiome (« axiome d'unité ») : le composé

$$A \xrightarrow{\eta A} RA \xrightarrow{a} A$$

est l'identité. Si le foncteur d'oubli $U: R\text{-Alg} \rightarrow \mathcal{A}$ admet un adjoint à gau-

che, il est monadique et la monade T qu'on obtient sur \mathcal{A} est en fait la monade libre engendrée par R . La condition que U admette un adjoint à gauche est, sauf dans le cas où \mathcal{A} est complète, strictement plus forte que la condition qu'il existe une monade libre T engendrée par R ; elle s'exprime en disant que T existe *point-par-point*.

Le théorème commun est le suivant. A vrai dire, il y a deux cas, suivant que R est seulement un endofoncteur pointé (R, η) , ou une monade (R, η, μ) : dans le second cas, les R -algèbres doivent satisfaire aussi à «l'axiome d'associativité»; mais les démonstrations ne diffèrent guère.

THEOREME. *On considère la catégorie-comma $(R, 1)$ dont un objet est un triplet formé de deux objets X, Y de \mathcal{A} et d'une flèche $v: RX \rightarrow Y$, et dont un morphisme est un couple*

$$(f: X \rightarrow X', \quad g: Y \rightarrow Y')$$

de flèches qui rendent commutatif le diagramme évident. On y plonge la catégorie des R -algèbres, en identifiant l'algèbre $(A, a: RA \rightarrow A)$ au triplet (A, A, a) . C'est un plongement pleinement fidèle. Alors, si \mathcal{A} et R satisfont aux conditions () ci-dessous, $R\text{-Alg}$ est une sous-catégorie réflexive de $(R, 1)$.*

Avant de donner les conditions (*), revenons aux problèmes 2 et 3. Pour 3, on prend pour R seulement un endofoncteur pointé. Le foncteur d'oubli $(R, 1) \rightarrow \mathcal{A}$, qui envoie (X, Y, v) dans X , a évidemment un adjoint à gauche, qui envoie X dans $(X, RX, 1: RX \rightarrow RX)$. Donc, si $R\text{-Alg}$ est réflexive dans $(R, 1)$, le foncteur d'oubli $U: R\text{-Alg} \rightarrow \mathcal{A}$ admet, lui aussi, un adjoint à gauche: ce qui veut dire que R engendre, point-par-point, une monade libre.

Pour 2, on prend pour R une monade. On voit trivialement que $(R, 1)$ est cocomplète si \mathcal{A} l'est; donc, si $R\text{-Alg}$ est réflexive dans $(R, 1)$, elle aussi est cocomplète.

Pour donner les conditions (*), il faut savoir ce qu'est un système de factorisation $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ (non nécessairement propre!) dans une catégorie — cela est expliqué par exemple dans [3]. Or, pour éviter des conditions

inutiles de complétude à gauche, il faut étendre légèrement cette notion. Dorénavant, un *système de factorisation* ne sera plus donné pour les flèches, mais pour les *cônes projectifs à bases discrètes* : on se donne une classe \mathcal{E} de flèches et une classe \mathcal{M} de cônes projectifs (à petites bases discrètes) et on exige que tout cône projectif (à petite base discrète) se factorise de façon naturelle en une flèche de \mathcal{E} suivie par un cône de \mathcal{M} . Les conditions (*) sont maintenant (et il est très probable qu'on puisse beaucoup les affaiblir) :

(*) (i) \mathcal{A} est *cocomplète*;

(ii) \mathcal{A} est munie d'un système de factorisation $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ pour les cônes tel que :

(ii)' pour tout objet A , l'ensemble des flèches de \mathcal{E} d'origine A est un ensemble petit (après identification des flèches isomorphes) ;

(ii)" il existe un cardinal régulier α tel que R préserve les colimites de certains diagrammes α -filtrants D dans \mathcal{A} : à savoir, on exige ceci s'il existe un petit ensemble $\gamma^\rho : D \rightarrow B^\rho$ ($\rho \in P$) de cônes inductifs de base D tels que, pour tout indice i , le cône projectif

$$(\gamma_i^\rho : D_i \rightarrow B^\rho)_{\rho \in P}$$

soit dans \mathcal{M} .

On retrouve les théorèmes de type a (construction explicite) en prenant pour \mathcal{E} les isomorphismes (de sorte que (ii)' soit vide) et pour \mathcal{M} tous les cônes (de sorte que (ii)" exige que R préserve toute colimite α -filtrante). On retrouve les théorèmes de type b en prenant pour \mathcal{M} (on peut parler non de cônes mais de flèches, car les théorèmes classiques de type b supposent tous que \mathcal{A} soit complète) une classe convenable de monomorphismes.

Pour terminer, je remarquerai que je me suis rendu compte du théorème général en travaillant avec mon étudiant Robert Blackwell ; une certaine analyse, dont il avait besoin pour démontrer les résultats de sa thèse que je viens d'exposer à Oberwolfach et à Paris, m'a donné la clé nécessaire.

Bibliographie.

1. M. BARR, Coequalizers and free triples, *Math. Zeit.* 116 (1970), 307-322.
2. E. J. DUBUC, Free Monoids, *Jour. Algebra* 29-2 (1974), 208-228.
3. P. J. FREYD and G. M. KELLY, Categories of continuous functors I, *Jour. Pure and Appl. Algebra* 2 (1972), 169-191.
4. P. GABRIEL und F. ULMER, Lokal Praesentierbare Kategorien, *Lecture Notes in Math.* 221, Springer (1971).
5. H. SCHUBERT, *Categories* (English translation), Springer 1970.

**SUR UNE DEFINITION DES GROUPES DE DIVISEURS COMME
SOLUTION D'UN PROBLEME D'APPLICATION UNIVERSELLE**

par Heinrich KLEISL

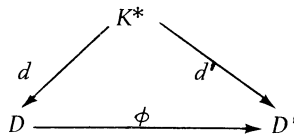
En Arithmétique, on connaît essentiellement deux méthodes distinctes pour introduire les groupes de diviseurs d'une certaine classe d'anneaux. On peut les introduire d'une manière constructive (voir [1], n° 1), ou on peut employer la méthode axiomatique (voir [2], Kap. III, n° 3). Nous proposons une troisième méthode, de nature catégorielle, à savoir l'introduction du groupe des diviseurs comme solution d'un problème d'application universelle.

Etant donné un corps commutatif K , on définit deux catégories $K\text{-Div}$ et $K\text{-Ann}$, ainsi qu'un foncteur $V: K\text{-Div} \rightarrow K\text{-Ann}$ comme suit :

- Les objets de la catégorie $K\text{-Div}$ sont des applications $d: K^* \rightarrow D$ du groupe multiplicatif K^* du corps K dans un groupe commutatif réticulé D qui satisfait aux propriétés :

- i) $d(xy) = dx + dy$ quels que soient x et y dans K^* ,
- ii) $d(x-y) \geq \inf(dx, dy)$ pour tout couple $x \neq y$ d'éléments de K^* ,
- iii) si $a \in D$ est majoré par un élément dx , alors $a = \inf_{a \leq dx} dx$,
- iv) si la famille $(dx_i)_{i \in I}$ est non-vidée et minorée dans $\text{Im } d$, alors $\inf_{i \in I} dx_i$ existe.

- Les flèches de la catégorie $K\text{-Div}$ sont des triangles commutatifs



où d et d' sont des objets de $K\text{-Div}$, et où ϕ est une application monotone sous-linéaire satisfaisant la propriété additionnelle :

v) si la famille $(dx_i)_{i \in I}$ est non-vidée et minorée dans $\text{Im } d$, alors

$$\phi(\inf_{i \in I} dx_i) = \inf_{i \in I} \phi dx_i.$$

- Les objets de la catégorie $K\text{-Ann}$ sont les sous-anneaux de K , et les flèches sont les injections canoniques entre sous-anneaux.

- La fonction objet du foncteur V est définie en posant

$$V(d) = \{ x \in K; x = 0 \text{ ou } dx > 0 \};$$

à toute flèche $\phi: d \rightarrow d'$, le foncteur V fait correspondre l'injection canonique de $V(d)$ dans $V(d')$.

THEOREME 1. *Le foncteur $V: K\text{-Div} \rightarrow K\text{-Ann}$ admet un adjoint à gauche F .*

COROLLAIRE. *Pour tout anneau intègre A de corps de fractions K , l'objet $F(A)$ est initial parmi les objets $d: K^* \rightarrow D$ de $K\text{-Div}$ satisfaisant à la propriété:*

vi) $da > 0$ pour tout élément non nul $a \in A$.

En d'autres termes, l'application $F(A): K^* \rightarrow D$ est bien la solution d'un problème d'application universelle. Nous allons l'appeler *théorie de diviseurs* de A . Il reste à montrer qu'il s'agit bien du groupe de diviseurs habituel, au moins dans le cas où A est un anneau de Krull.

Soit A un anneau intègre de corps de fractions K . Dans son « Algèbre commutative », Bourbaki définit un monoïde ordonné $D(A)$ d'idéaux fractionnaires divisoriels et une application $div: K^* \rightarrow D(A)$ qui fait correspondre à tout élément $x \in K^*$ l'idéal fractionnaire Ax (voir [1], n° 1).

THEOREME 2. *Si l'anneau A est complètement intégralement clos, l'application $div: K^* \rightarrow D(A)$ est une théorie de diviseurs de A .*

1. N. BOURBAKI, *Algèbre commutative*, chap. 7, Hermann, Paris, 1965.

2. S. L. BOREWICZ und I. R. ŠAFAREVIČ, *Zahlentheorie*, Birkhäuser-Verlag, Basel, 1966.

ON ALGEBRAIC THEORIES OF POWER SERIES

by Anders KOCK

We formulate some concepts of classical algebra in terms of some specific algebraic theories in the sense of Lawvere. The question is then naturally posed: what are the models (or «algebras») for these algebraic theories. We do not have a complete answer to that. Among the good models are the «formal varieties» considered by M. Lazard [4].

I have benefited much from some discussions with Michael Barr.

1. The theories.

We consider algebraic theories \mathbf{T} in the sense of Lawvere [2]; so \mathbf{T} is a category whose objects are the natural numbers $0, 1, 2, \dots$, and where n is given as an n -fold product of 1 . A morphism f of algebraic theories is a functor with $f(n) = n$ which preserves the specified product diagrams.

The most important algebraic theory is that of commutative rings or of commutative k -algebras for a fixed commutative base ring k . The n -ary operations in it, $n \rightarrow 1$, are polynomials in n commuting variables (and with coefficients from k); composition of maps is substitution of polynomials into polynomials. We denote this theory \mathbf{T} . So \mathbf{T} may be called the algebraic theory of *polynomials*, since \mathbf{T} consists of polynomials. (This specific algebraic theory was considered by M. Lazard in 1955 [3], before algebraic theories were invented; he gave it the name «*analyseur classique*».)

For the given commutative ground ring k , we shall now be interested in the algebraic theory $\hat{\mathbf{T}}_0$ consisting of formal power series (over k) without constant term. Let \mathbf{T}_0 denote the subtheory of \mathbf{T} consisting of polynomials without constant term. It has an inverse system of quotients

$$\mathbf{T}_0 \cdots \rightarrow \mathbf{T}_{0,n+1} \rightarrow \mathbf{T}_{0,n} \rightarrow \cdots \rightarrow \mathbf{T}_{0,1},$$

where $\mathbf{T}_{0,n}$ is the algebraic theory consisting in polynomials of degree $\leq n$ (when substituting, one discards terms of degree $> n$ in the resulting polynomial). We let $\hat{\mathbf{T}}_0$ denote the inverse limit of the $\mathbf{T}_{0,n}$'s in the category of algebraic theories

$$\hat{\mathbf{T}}_0(p, q) = \varprojlim_n \mathbf{T}_{0,n}(p, q)$$

for any $p, q \in \mathbf{N}$. In particular, each *hom* set in $\hat{\mathbf{T}}_0$ carries a topology, qua inverse limit of discrete spaces. We evidently have

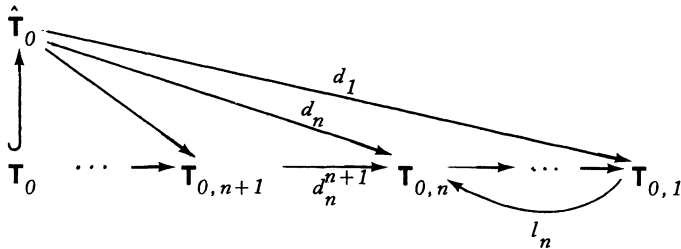
$$\hat{\mathbf{T}}_0(p, 1) = k^+ \llbracket X_1, \dots, X_p \rrbracket,$$

the ring of formal power series in p variables and without constant term. (It is a ring without unit.) The topology on it is then, in fact, the usual adic topology.

There are faithful morphisms of algebraic theories $\mathbf{T}_0 \rightarrow \hat{\mathbf{T}}_0$ as well as

$$l_n : \mathbf{T}_{0,1} \rightarrow \mathbf{T}_{0,n}, \quad l : \mathbf{T}_{0,1} \rightarrow \mathbf{T}_0 \quad \text{and} \quad l : \mathbf{T}_0 \rightarrow \hat{\mathbf{T}}_0.$$

The l 's are splittings for the d 's which end in 1; $\mathbf{T}_{0,1}$ is the algebraic theory of k -modules. To fix notation, we have the following commutative diagram of algebraic theories



The functor $d_1 : \hat{\mathbf{T}}_0 \rightarrow \mathbf{T}_{0,1}$ takes out the linear part (d_1 stands for «differential» or «Jacobian matrix»). The other d 's are «jet-functors». All the d 's are full.

The category $\hat{\mathbf{T}}_0$ is equivalent to the category of formal varieties considered by Lazard [4]. The statement that composition in $\hat{\mathbf{T}}_0$ is continuous can be improved, see «Composition Lemma» 7.1 in [4]. Using that, one proves ([4] Theorem 8.1, or [1] Ch. III, n° 4, Prop. 5):

INVERSE FUNCTION THEOREM. *The functor d_1 reflects isomorphisms.*

Therefore, also, all the functors $\mathbf{T}_{0,n} \rightarrow \mathbf{T}_{0,m}$ composed out of the d 's reflect isomorphisms. But the functors $\mathbf{T}_0 \rightarrow \mathbf{T}_{0,n}$ do not.

2. The N -adic topology on models.

With the notion of algebraic theory comes the notion of models for it. If \mathbf{S} is an algebraic theory, \mathbf{S}^b denotes its category of models. If $f : \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S}'$ is a morphism of algebraic theories, we denote by $f^b : \mathbf{S}'^b \rightarrow \mathbf{S}^b$ the algebraic

functor induced by it (it commutes with the underlying set functors). According to Lawvere [2], f^b has a left adjoint, denoted $f^\#$.

Now let $A \in \hat{\mathbf{T}}_0^b$. We have a diagram of front adjunctions

$$\begin{array}{c}
 A \\
 \begin{array}{ccc}
 \nearrow \eta_{n+1} & & \searrow \eta_n \\
 \dots \rightarrow d_{n+1}^b d_{n+1}^\# A & \longrightarrow & d_n^b d_n^\# A \rightarrow \dots
 \end{array}
 \end{array}$$

where the horizontal map displayed is a disguised version of the front adjunction for the adjointness

$$(d_n^{n+1})^\# \dashv (d_n^{n+1})^b .$$

All objects and maps here are in $\hat{\mathbf{T}}_0^b$. Since $\mathbf{T}_0 \subseteq \hat{\mathbf{T}}_0$, each $\hat{\mathbf{T}}_0$ -model has the structure of a \mathbf{T}_0 -model, which is just a commutative k -algebra without unit, and, in particular, they are k -modules and the maps are k -linear. Let $N_n(A) \subseteq A$ denote the kernel of η_n . The $N_n(A)$'s form a decreasing sequence of k -submodules (in fact ideals) in A . (It is easy to see that A^{n+1} is included in $N_n(A)$, but we do not in general have equality; see second example below). With these submodules, A becomes a filtered k -module; the induced linear topology on A we call the N -adic topology.

For any map $f: A \rightarrow B$ in $\hat{\mathbf{T}}_0^b$, we have, essentially by naturality of the front adjunctions, that

$$f(N_q(A)) \subseteq N_q(B) \quad \text{for every } q .$$

From this it is easy to conclude that :

PROPOSITION 1. Any map in $\hat{\mathbf{T}}_0^b$ is continuous with respect to the N -adic topology.

We now give some examples. The free $\hat{\mathbf{T}}_0$ -model in p generators is denoted $F(p)$:

$$F(p) = \hat{\mathbf{T}}_0(p, 1) = k^+ \llbracket X_1, \dots, X_p \rrbracket ,$$

and the N -adic topology is the usual adic topology, so that $F(p)$ is complete and separated. If furthermore the base ring k is artinian, $F(p)$ is linearly compact. This follows from Exercices 15 and 16 in [1], Ch. III, n^o 2.

As a second example, consider the ring G of power series in infinitely many variables (but with only finitely many terms of each degree, and no constant term). It is a \hat{T}_0 -model, complete and separated in the N -adic topology, but it is not an adic ring: G^2 is not open.

Third, consider the ring B without unit with generators x_1, x_2, \dots , and with relations

$$x_1^2 = 0, \quad x_2^2 = x_1, \quad x_3^2 = x_2, \quad \dots ;$$

since each element is nilpotent, B is canonically a \hat{T}_0 -model. Its N -adic topology is chaotic (coarsest possible), $N_q(B) = B^q = B$, and, in particular, is not separated.

We finally consider a class of good \hat{T}_0 -models which have a geometric significance, namely images of maps $\alpha : F(p) \rightarrow F(q)$ in \hat{T}_0 . By standard universal algebra, the set theoretic image C of α carries a unique \hat{T}_0 -model structure such that α factors through C by \hat{T}_0^b -homomorphisms. Assume now that k is a field (may be k artinian is enough). Then

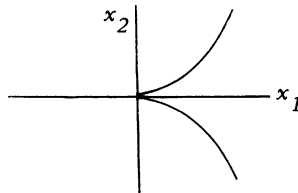
PROPOSITION 2. C is linearly compact in the N -adic topology (hence also separated and complete), and the subspace topology on $C \subset F(q)$ and the quotient topology $F(p) \rightarrow C$ both agree with the N -adic.

This hinges on the fact that the factorization of α through C has continuous factors, by Proposition 1, in the N -adic topology, which is therefore linearly compact. A bijective continuous map between linearly compact spaces is a homeomorphism.

EXAMPLE. $\alpha : F(2) \rightarrow F(1)$ given by:

$$\alpha(X_1) = X^2, \quad \alpha(X_2) = X^3 .$$

Geometrically (turning arrows around), this is that embedding of the line (represented by $F(1)$) into the plane (represented by $F(2)$) which looks like



(the cusp $x_1^3 = x_2^2$). Its non-smoothness is reflected in the

PROPOSITION 3. *The image C of this α is not a free $\hat{\mathbf{T}}_0$ -model.*

REMARK. It might be interesting, for $k = \mathbf{R}$, to investigate the subtheory $\check{\mathbf{T}}_0 \subseteq \hat{\mathbf{T}}_0$ of convergent power series, which in turn is contained in the algebraic theory \underline{C}^∞ whose n -ary operations are germs at $\underline{Q} \in \mathbf{R}^n$ of C^∞ -functions which take \underline{Q} to 0.

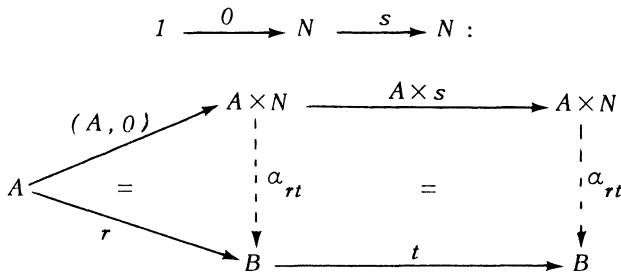
1. N. BOURBAKI, *Algèbre commutative*, Paris, Hermann, 1961.
2. F. W. LAWVERE, *Functorial Semantics of algebraic Theories*, Dissertation, Columbia Univ., New-York, 1963.
3. M. LAZARD, Lois de groupes et analyseurs, *Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. Paris*, 72 (1955), 299 - 400.
4. M. LAZARD, Commutative formal Groups, *Lecture Notes in Math.* 443, Springer (1975).

**PRIMITIVE RECURSIVE ALGEBRAIC THEORIES
WITH APPLICATIONS TO PROGRAM SCHEMES**

by W. KÜHNEL, J. MESEGUER, M. PFENDER and I. SOLS

The arrows of an algebraic theory (Lawvere) can be viewed as calculation trees which constitute program schemes without loops, cf. Eilenberg, Wright. Approaches to program schemes with loops in the framework of categorical algebra were given by Goguen-Thatcher and by Elgot. We give here a conservative extension of Lawvere's functorial semantics by means of the schema of primitive recursion which corresponds to DO-loops in programming.

DEFINITION. A primitive recursive category **C** is a category with finite products and a «natural number object»



for any r, t there is a unique filling in, α_{rt} .

For **C** with finite products, this is equivalent to the *schema of primitive recursion*:

For any $g: A \rightarrow B, h: A \times N \times B \rightarrow B$ there is a unique $f: A \times N \rightarrow B$ with
 $f(a, 0) = g(a), \quad f(a, sn) = h(a, n, f(a, n))$,

cf. Freyd.

A primitive recursive 1-sorted theory is an $\bar{I} = I \dot{\cup} \{N\}$ -sorted algebraic theory with NNO

$$\mathbf{N} = I \xrightarrow{0} N \xrightarrow{s} N$$

in the above sense. These form a category $PRTh_I$ with full embedding into the comma category $\mathbf{N} \downarrow Th_{\bar{I}}$ and forgetful functor

$$PRTh_I \hookrightarrow \mathbf{N} \downarrow Th_{\bar{T}} \longrightarrow \mathbf{N} \downarrow Graph_{\bar{T}^*}$$

into the category of directed graphs with node set \bar{T}^* and a «prototype»

$$1 \xrightarrow{0} N \xrightarrow{s} N$$

of a NNO.

THEOREM. $PRTh_I \longrightarrow \mathbf{N} \downarrow Th_{\bar{T}}$ has a reflector R . The forgetful functor $PRTh_I \longrightarrow \mathbf{N} \downarrow Graph_{\bar{T}^*}$ is (as well as the inclusion) monadic (tripleable) and creates quotients of kernel pairs and filtered colimits.

Left adjoint RF , where

$$F^{-1} V : \mathbf{N} \downarrow Th_{\bar{T}} \longrightarrow \mathbf{N} \downarrow Graph_{\bar{T}^*} .$$

COROLLARY. Each (Σ, G) , with

$$\Sigma \in \mathbf{N} \downarrow Graph_{\bar{T}^*} , \quad G \rightrightarrows RF\Sigma \text{ «equations»}$$

presents a theory $T \in PRTh_I$, namely $T = RF\Sigma / \bar{G}$, \bar{G} being the kernel pair on $RF\Sigma$ generated by G .

DEFINITION. $M : T \rightarrow \mathbf{B}$ is a model of $T \in PRTh_I$ in a pr-category \mathbf{B} if it preserves canonical products and the NNO. Natural transformations make the models into a category $Mod(T, \mathbf{B})$ with forgetful functor

$$U : Mod(T, \mathbf{B}) \longrightarrow \mathbf{B}^I, \quad M \mapsto [Mi]_{i \in I} .$$

THEOREM (primitive recursive algebras are algebras). Let T be a primitive recursive theory generated by arrows of the form

$$A \rightarrow i, i \in I \quad \text{and} \quad 1 \xrightarrow{0} N, \quad N \xrightarrow{s} N ,$$

$\mathbf{B} = Set$ or \mathbf{B} cartesian closed, complete, cocomplete, well-powered with regular epis closed under composition. Then the forgetful functor

$$U : Mod(T, \mathbf{B}) \longrightarrow \mathbf{B}^I$$

is monadic and creates quotients of kernel pairs and filtered colimits.

$T \in PRTh_I$ can be viewed as an \bar{T} -sorted programming language (e.g.

$$\bar{T} = \{ \text{real, boolean} \} \cup \{ \text{integer} \} ,$$

$M : T \rightarrow \mathbf{B}$ as a machine loaded with a compiler for T .

DEFINITION. A *syntactical translation* $F: T \rightarrow T'$ from $T \in PRTb_I$ into $T' \in PRTb_J$ is a product and NNO-preserving functor. For models

$$M: T \rightarrow \text{Set}, \quad M': T' \rightarrow \text{Set},$$

a family

$$f = [f_i: Mi \rightarrow M'Fi]_{i \in I}$$

makes F into a *semantical translation* $(F, f): M \rightarrow M'$. (F, f) is *correct* if it defines a functor transformation

$$f: M \rightarrow M'F \quad (f_{uv} := f_u \times f_v, \quad f_N = id_N).$$

This means: executing a program by M and then translating the result via f is the same as translating the input via f and then executing the F -translated program by M' .

THEOREM. *Correctness of a semantic translation (F, f) reduces to correctness for the arrows of Σ , (Σ, G) being a presentation for T .*

ARBIB M. and GIVE'ON Y., Algebra Automata I, *Inf. and Control* 12 (1968), 331-345.

BENABOU J., Structures algébriques dans les catégories, *Cahiers Topo. et Géo. dif.* 10 (1968), 1-126.

EHRIG H., KUHNEL W. and PFENDER M., Diagram characterization of recursion, *Lecture Notes Comp. Sc.* 25, 137-143.

EILENBERG S. and WRIGHT J., Automata in general algebras, *Inf. and Control* 11 (1967), 52-70.

ELGOT C. C., Monadic computation and iterative algebraic theories, *IBM res. report* RC 4564 (1973).

FREYD P., Aspects of topoi, *Bull. Austr. Math. Soc.* 7 (1972), 1-76.

GOGUEN J. and THATCHER J. W., Initial algebra Semantics, *IEEE Conf.*, Report SWAT 15 (1974), 63-77.

LINTON F. E. J., Some aspects of equational categories, *Proc. Conf. Cat. alg., La Jolla*, Springer (1966), 84-94.

MEYER A. and RICHTIE D., Computational complexity and program structure, *IBM res. report* RC 18 (1967).

ESQUISSABILITE ET TRIPLABILITE

par Christian LAIR

On raisonne dans un « Bon Modèle de la Théorie des Ensembles » avec Axiome des univers [T.H.E.N.] .

On désigne par \mathcal{U}_1 et \mathcal{U}_2 deux univers (i. e. deux ensembles d'ensembles qui sont deux modèles de la Théorie des Ensembles) tels que

$$\mathcal{U}_1 \in \mathcal{U}_2 \text{ et } \mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2 .$$

Nous notons \mathfrak{M}_1 (resp. \mathfrak{M}_2) la catégorie pleine d'applications entre éléments de \mathcal{U}_1 (resp. \mathcal{U}_2) et par \mathcal{F}_1 (resp. \mathcal{F}_2) la catégorie pleine de foncteurs dont les applications sous-jacentes sont des morphismes de \mathfrak{M}_1 (resp. de \mathfrak{M}_2).

Les éléments de \mathcal{U}_2 pourront être appelés « classes ». On pourra dire que les objets de \mathcal{F}_1 sont des catégories « petites ». Enfin, on pourra lire

$$\mathfrak{M}_1 = \text{Ens}_1, \quad \mathfrak{M}_2 = \text{Ens}_2, \quad \mathcal{F}_1 = \text{Cat}_1, \quad \mathcal{F}_2 = \text{Cat}_2$$

1. Types et esquisses de structures algébriques.

Si \mathcal{J} est un ensemble de catégories qui sont des objets de \mathcal{F}_2 (resp. \mathcal{F}_1), on appelle *type \mathcal{J} -projectif* tout couple $\tau = (H, L)$ tel que :

- H est une catégorie à \mathcal{J} -limites projectives, objet de \mathcal{F}_2 (resp. \mathcal{F}_1);
- L est un choix de \mathcal{J} -limites projectives dans H .

Une *réalisation* d'un tel type \mathcal{J} -projectif $\tau = (H, L)$ vers un autre $\tau' = (H', L')$ est un triplet (τ', F, τ) tel que :

- $F: H \rightarrow H'$ est un foncteur;
- F « respecte » les choix L et L' de \mathcal{J} -limites projectives.

Nous désignons par $\mathfrak{R}_{2,\mathcal{J}}$ (resp. $\mathfrak{R}_{1,\mathcal{J}}$) la catégorie dont les objets sont ces types \mathcal{J} -projectifs et les morphismes ces réalisations.

Par exemple, si $\mathcal{J} = \mathbf{N}$ (où l'on identifie tout entier n à la catégorie discrète qu'il définit) à une théorie au sens de Lawvere est associé (en dualisant) un type \mathcal{J} -projectif. De même, à des théories aux sens de Linton et Bénabou, on peut associer, en choisissant \mathcal{J} convenablement, des types \mathcal{J} -projectifs.

On sait que de telles théories décrivent des structures algébriques d'un certain genre (où les lois de composition sont «partout définies»). Il apparaît donc, plus généralement, que les types décrivent des structures algébriques, où les lois de composition peuvent n'être que partiellement définies [E.T.S.A.].

Par exemple, si l'on munit la duale de la catégorie simpliciale d'un choix (évident) de produits fibrés, on obtient un type qui décrit les structures de catégories. C'est dire que toute réalisation de ce type dans \mathfrak{M}_1 , muni de son choix de produits fibrés «canoniques», s'identifie à une catégorie objet de \mathcal{F}_1 et inversement.

Cependant, il n'est pas commode de décrire une structure algébrique au moyen de toutes les relations qu'elle est susceptible de vérifier (par exemple, pour ce qui concerne l'associativité, d'écrire que tous les composés possibles de n arguments sont égaux pour tout entier n). C'est pourquoi (et dans la pratique on ne procède jamais autrement) on préfère décrire une structure algébrique par un minimum de relations, c'est-à-dire par un système générateur de son type, autrement dit encore par une esquisse (ou un graphe multiplicatif muni de cônes) [E.T.S.A. et C.O.S.S.].

- Formellement une *esquisse* \mathcal{J} -projective est un couple (S, C) tel que
- S est un graphe multiplicatif (i. e. un diagramme) dont l'ensemble sous-jacent appartient à \mathcal{U}_2 (resp. \mathcal{U}_1).
 - C est un ensemble de \mathcal{J} -cônes projectifs de S .

Bien entendu, tout type \mathcal{J} -projectif s'identifie à une esquisse \mathcal{J} -projective.

De même, on peut généraliser la notion de réalisation d'un type \mathcal{J} -projectif vers un autre :

Si $\sigma = (S, C)$ et $\sigma' = (S', C')$ sont des esquisses \mathcal{J} -projectives, une réalisation de σ vers σ' est un triplet (σ', G, σ) tel que :

- $G: S \rightarrow S'$ est un foncteur,
- $G(C) \subset C'$ (autrement dit G envoie un cône distingué par C dans un cône distingué par C').

En particulier, les réalisations d'une esquisse σ vers un type τ s'appellent des τ -structures algébriques d'espèce σ et ce sont les objets d'une catégorie dont les morphismes sont les transformations naturelles entre les

foncteurs sous-jacents et que l'on note $R(\tau, \sigma)$ [E.G.C.E., C.O.S.S.] .

Ainsi, si \mathcal{J} est un ensemble d'objets de \mathcal{F}_1 , il existe un ensemble \mathcal{J} d'objets de \mathcal{F}_2 , une structure de type \mathcal{J} -projectif $\bar{\tau} = (\mathcal{M}_1, L)$, une esquisse \mathcal{J} -projective $\sigma_1 = (S_1, C_1)$ (où S_1 n'a que quatre objets) et une esquisse \mathcal{J} -projective $\sigma_2 = (S_2, C_2)$ tels que

- $R(\bar{\tau}, \sigma_1)$ est isomorphe à \mathcal{F}_1 ,
- $R(\bar{\tau}, \sigma_2)$ est isomorphe à $\mathcal{R}_{1, \mathcal{J}}$.

En général, les propriétés d'une catégorie de réalisations d'une esquisse \mathcal{J} -projective $\sigma = (S, C)$ dans un type \mathcal{J} -projectif $\tau = (H, L)$ peuvent être étudiées en fonction de la « forme » de l'esquisse σ considérée et des propriétés de H [F.O.S.A., D.S.A.E., ...]. Pour ce faire, on utilise des raisonnements « points par points », la catégorie $R(\tau, \sigma)$ étant une catégorie pleine de transformations naturelles. Afin de faciliter ces raisonnements points par points on introduit une catégorie de réalisations « vagues » de σ vers H .

Une réalisation *vague* de σ vers H est un triplet (H, F, σ) tel que:

- $F: S \rightarrow H$ est un foncteur,
- $F(C)$ est un ensemble de \mathcal{J} -limites projectives de H (non nécessairement choisies par L).

Ces réalisations vagues, que l'on appelle également des *H-structures d'espèce σ* , sont les objets d'une catégorie pleine $R(H, \sigma)$ de transformations naturelles. Bien entendu $R(\tau, \sigma)$ s'identifie toujours à une sous-catégorie pleine de $R(H, \sigma)$.

On dit que σ est *régulière relativement à τ* si, et seulement si, l'injection canonique $R(\tau, \sigma) \hookrightarrow R(H, \sigma)$ définit une équivalence.

Il en est toujours ainsi lorsque $\tau = (\mathcal{M}_1, L)$ et lorsque σ est l'esquisse d'une structure algébrique usuelle. Autrement dit, si les catégories $R(\tau, \sigma)$ décrivent les structures algébriques à *isomorphismes près*, celles de la forme $R(H, \sigma)$ décrivent les catégories de structures algébriques à *équivalences près* lorsque σ est régulière relativement à τ .

Ceci justifie, a posteriori, l'introduction des structures algébriques vagues, qui pourraient sembler ne constituer qu'un artifice technique.

2. Triplabilité des foncteurs algébriques.

Si τ est un type \mathcal{J} -projectif et si $\phi = (\sigma', F, \sigma)$ est une réalisation, elle détermine des foncteurs algébriques $R(\tau, \phi)$ (resp. $R(H, \phi)$) de $R(\tau, \sigma')$ (resp. $R(H, \sigma')$) vers $R(\tau, \sigma)$ (resp. $R(H, \sigma)$) (foncteur « composition à droite par ϕ »).

Ainsi, reprenant l'exemple et les notations qui précèdent, il existe une réalisation $\psi: \sigma_1 \rightarrow \sigma_2$ telle que $R(\bar{\tau}, \psi)$ soit le foncteur d'oubli canonique $\mathcal{R}_{1, \mathcal{J}} \rightarrow \mathcal{F}_1$.

On peut étudier les propriétés d'un tel foncteur algébrique $R(\tau, \phi)$ en fonction de la forme de la réalisation ϕ et des propriétés de τ . Notamment, on établit une condition suffisante d'existence d'un adjoint au foncteur $R(\tilde{\tau}, \phi)$, lorsque $\tilde{\tau}$ est un type \mathcal{J} -projectif sur \mathfrak{M}_1 :

THEOREME 1 (Théorème du faisceau associé). *Si $\mathcal{J} \in \mathcal{U}_1$ est un ensemble d'objets de \mathcal{F}_1 , si $\tilde{\tau} = (\mathfrak{M}_1, L)$ est une structure de type \mathcal{J} -projectif, si $\sigma = (S, C)$ et $\sigma' = (S', C')$ sont deux esquisses \mathcal{J} -projectives telles que: $S \in \mathcal{U}_1$ et $S' \in \mathcal{U}_1$, si $\phi: \sigma \rightarrow \sigma'$ est une réalisation, alors le foncteur*

$$R(\mathfrak{M}_1, \phi): R(\mathfrak{M}_1, \sigma') \longrightarrow R(\mathfrak{M}_1, \sigma)$$

admet un adjoint à gauche. Si de plus σ' est régulière relativement à $\tilde{\tau}$ le foncteur

$$R(\tilde{\tau}, \phi): R(\tilde{\tau}, \sigma') \longrightarrow R(\tilde{\tau}, \sigma)$$

admet un adjoint à gauche.

Si \mathcal{J} est un ensemble d'objets de \mathcal{F}_1 et si $\mathcal{J} \in \mathcal{U}_1$, on montre que la réalisation $\psi: \sigma_1 \rightarrow \sigma_2$ vérifie toutes les hypothèses du théorème 1. Il en résulte que le foncteur d'oubli $\mathcal{R}_{1, \mathcal{J}} \rightarrow \mathcal{F}_1$ admet un adjoint. On retrouve ainsi un des résultats obtenus (par construction explicite) en [E.T.S.A. et C.O.S.L.] .

Remarquons que l'on peut généraliser le théorème 1 en remplaçant \mathfrak{M}_1 par une catégorie H (objet de \mathcal{F}_2) possédant suffisamment de limites inductives, toutes les limites \mathcal{J} -projectives et où les limites inductives filtrantes commutent avec les \mathcal{J} -limites projectives.

Sous les hypothèses du théorème 1, on sait alors donner une condi-

tion suffisante pour que le foncteur $R(\tilde{\tau}, \phi)$ soit triplable [E.T.F.A.] .
 Supposons, pour ce faire, que F est injectif. Nous dirons que ϕ présente σ' comme esquisse de Kleisli sur σ si, et seulement si :

- tout cône de C' a sa base dans S ,
- tout objet de S' qui n'est pas objet de S est sommet d'un cône de C' .

Plus précisément, nous dirons que ϕ définit σ' comme esquisse de Kleisli sur σ si, et seulement si :

- ϕ présente σ' comme esquisse de Kleisli sur σ ,
- σ' est régulière relativement à $\tilde{\tau}$ et il existe un foncteur

$$j: R(\mathbb{M}_1, \sigma') \longrightarrow R(\tilde{\tau}, \sigma')$$

inverse à gauche de l'injection canonique et inverse à droite à l'équivalence près,

- si

$$R_\phi(\mathbb{M}_1, \sigma') = R(\mathbb{M}_1, \phi)^{-1} [R(\tau, \sigma)] ,$$

si j_ϕ est la restriction de j à $R_\phi(\mathbb{M}_1, \sigma')$ et si $R_\phi(\mathbb{M}_1, \phi)$ est la restriction de $R(\mathbb{M}_1, \phi)$ à $R_\phi(\mathbb{M}_1, \sigma')$, alors le diagramme ci-dessous commute :

$$\begin{array}{ccc}
 R_\phi(\mathbb{M}_1, \sigma') & \xrightarrow{j_\phi} & R(\tilde{\tau}, \sigma') \\
 & \searrow & \swarrow \\
 R_\phi(\mathbb{M}_1, \phi) & & R(\tilde{\tau}, \phi) \\
 & \searrow & \swarrow \\
 & R(\tilde{\tau}, \sigma) &
 \end{array}$$

(Signalons, sans autre commentaire, que ces terminologies n'ont pas été choisies au hasard.)

Nous pouvons alors énoncer :

THEOREME 2. *Avec les notations et les hypothèses du théorème 1, si F est injectif et si ϕ présente σ' comme esquisse de Kleisli sur σ , alors les foncteurs $R(\mathbb{M}_1, \phi)$ et $R(\tilde{\tau}, \phi)$ sont triplables à l'équivalence près. Si ϕ définit σ' comme esquisse de Kleisli sur σ , alors $R(\tilde{\tau}, \phi)$ est triplable (à isomorphismes près).*

Notons que l'on peut généraliser ce théorème en remplaçant \mathbb{M}_1 par

une catégorie H , objet de \mathcal{F}_2 , qui vérifie des conditions analogues à celles que nous avons déjà mentionnées.

Si \mathcal{J} est un ensemble d'objets de \mathcal{F}_1 et si $\mathcal{J} \in \mathcal{U}_1$, on montre que la réalisation ψ introduite précédemment vérifie toutes les hypothèses du théorème 2. Il en résulte que le foncteur d'oubli $\mathcal{R}_{1,\mathcal{J}} \rightarrow \mathcal{F}_1$ est triplable (à isomorphismes près). C'est dire que les catégories (objets de \mathcal{F}_1) munies d'un choix de \mathcal{J} -limites projectives sont les algèbres d'un triple sur \mathcal{F}_1 (et qui n'est pas le « triple diagramme »).

On peut évidemment multiplier les exemples et les applications qui découlent du théorème 2 [E.T.F.A.] .

C.O.S.L. C. EHRESMANN, Constructions de structures libres, *Lecture Notes in Math.* 92, Springer (1969).

C.O.S.S. A. BASTIANI et C. EHRESMANN, Categories of sketched structures, *Cab. Topo. et Géo. diff.* XIII-2, Paris (1972).

D.S.A.E. C. LAIR, Dualités pour les structures algébriques esquissées, *Cab. Topo. et Géo. diff.* XV-4, Paris (1974).

E.G.C.E. C. LAIR, Etude générale de la catégorie des esquisses, *Esquisses Math.* 23, Paris (1975).

E.T.F.A. C. LAIR, Esquissabilité et triplabilité des foncteurs algébriques (à paraître).

E.T.S.A. C. EHRESMANN, Esquisses et types des structures algébriques, *Bull. Inst. Politeh. Iași* XIV (XVIII) 1-2 (1968).

F.O.S.A. C. LAIR, Foncteurs d'omission de structures algébriques, *Cab. Topo. et Géo. diff.* XII-2, Paris (1971).

T.H.E.N. A. BASTIANI, *Théorie des ensembles*, C. D. U., Paris 1970.

LES CATEGORIES DE MÖBIUS

par Pierre LEROUX

Le point de départ de ce travail est la recherche d'un théorème généralisant deux résultats qui sont évidemment de même nature :

1° Une série formelle $\sum_i a_i X^i$ est inversible

$\iff a_0$ est inversible dans l'anneau de base.

2° Une matrice triangulaire $(a_{ij})_{i \leq j}$ est inversible

\iff pour tout i , a_{ii} est inversible.

Les combinatoristes se sont inspirés de ce dernier résultat pour unifier plusieurs théorèmes d'inversion dont le plus célèbre est celui de Möbius (1832) :

$$b_n = \sum_{m|n} a_m \implies a_n = \sum_{m|n} b_m \mu\left(\frac{n}{m}\right),$$

où $\mu\left(\frac{n}{m}\right)$ désigne la fonction dite «de Möbius». (Voir par exemple G. C. Rota, On the foundations of combinatorial theory, I: theory of Möbius functions, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 2 (1964), 340-368, et la bibliographie qui s'y trouve.)

La généralisation cherchée se trouve évidemment au niveau des catégories considérées comme structures multiplicatives partiellement définies. Il faut alors introduire l'algèbre $A[[\mathcal{C}]]$ d'une catégorie \mathcal{C} dont les éléments sont les «séries» formelles $\alpha = \sum_{f \in \mathcal{C}} \alpha_f$ à coefficients α_f dans un anneau commutatif A . En plus d'une addition et d'une multiplication par des scalaires évidentes, une multiplication peut être définie dans $A[[\mathcal{C}]]$ par la formule :

$$(\sum \alpha_f f)(\sum \beta_{f'} f') = \sum \gamma_f f, \quad \text{où } \gamma_f = \sum_{f' f'' = f} \alpha_{f'} \beta_{f''},$$

la somme étant prise pour tous les couples (f', f'') pour lesquels $f' f'' = f$. Il faut donc supposer, ce que nous faisons sur le champ, que pour tout $f \in \mathcal{C}$ l'ensemble de ces couples est fini. Nous dirons que \mathcal{C} est à *décompositions finies*. On obtient dans ce cas une algèbre sur A dont l'élément neutre est

la série formelle

$$\delta = \sum \delta_f f \quad \text{où} \quad \delta_f = \begin{cases} 1, & \text{si } f \text{ est une unité} \\ 0, & \text{autrement} \end{cases}$$

et dont les éléments inversibles sont, pour certaines catégories, ceux que l'on pense.

THEOREME. Soit \mathcal{C} une catégorie à décompositions finies. Alors les énoncés suivants sont équivalents :

i) \mathcal{C} admet une demi-gradation, i. e. une fonction $d: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{N}$, appelée demi-degré, telle que

$$d(f) \geq d(f') + d(f'') \quad \text{si } f'f'' = f,$$

pour laquelle

$$d(f) = 0 \iff f \text{ est une unité.}$$

ii) Dans $A[[\mathcal{C}]]$, $\alpha = \sum \alpha_f f$ est inversible

$$\iff \text{pour toute unité } e \text{ de } \mathcal{C}, \alpha_e \text{ est inversible.}$$

iii) a) Les unités de \mathcal{C} sont indécomposables, i. e. si fg est une unité, alors f et g sont des unités.

b) $fg = f \implies g$ est une unité.

Il est intéressant de remarquer la nature assez différente de chacune de ces conditions; il est même surprenant que la condition *iii*, qui est purement algébrique, entraîne l'existence d'une demi-gradation. La démonstration de ce fait utilise le *lemme de König*: la limite projective d'une chaîne d'ensembles finis et non-vides est non-vide; on applique ce lemme à la chaîne des décompositions de f en couples, en triplets, en quadruplets, etc... Remarquons également que la condition *iii-b* peut être remplacée par l'une ou l'autre des conditions équivalentes (en présence de *iii-a*) suivantes, pour une catégorie à décompositions finies :

b') $gg = g \implies g$ est une unité.

b'') $b^n = b^m, n \neq m \implies b$ est une unité.

b''') $gf = f \implies g$ est une unité.

Nous appelons *catégories de Möbius* les catégories qui satisfont à

l'un ou l'autre des critères du théorème. Parmi celles-ci se trouvent les monoïdes libres et, plus généralement, les catégories libres, les monoïdes commutatifs libres, l'algèbre obtenue dans ce cas étant une algèbre de séries formelles au sens habituel, ainsi que les ensembles ordonnés localement finis, obtenant cette fois l'algèbre d'incidence associée qui est une algèbre de matrices triangulaires (cf. Rota, op. cit.). On peut également remarquer, en utilisant l'un ou l'autre critère, que la classe des catégories de Möbius est fermée pour les produits finis, les sous-catégories, l'exponentiation par une catégorie finie, les coproduits, les sommes fibrées sur un ensemble d'unités et, dans certains cas, la somme ordinale.

Dans une catégorie de Möbius, la série formelle

$$\zeta = \sum \zeta_f f, \quad \text{où } \zeta_f = 1 \text{ pour tout } f,$$

est inversible et nous appelons *fonction de Möbius de \mathcal{C}* la série formelle $\mu = \sum \mu_f f$ qui est l'inverse de ζ . Une conséquence immédiate est le résultat suivant :

THEOREME GENERAL D'INVERSION DE MÖBIUS. *Pour deux éléments $\alpha = \sum \alpha_f f$ et $\beta = \sum \beta_f f$ de l'algèbre d'une catégorie de Möbius \mathcal{C} ,*

$$\beta_f = \sum_{f' f'' = f} \alpha_{f'} \implies \alpha_f = \sum_{f' f'' = f} \beta_{f'} \mu_{f''}.$$

On trouvera plus de détails dans le mémoire de maîtrise de Mireille Content, étudiante à l'Université du Québec à Montréal.

COMMUTATIVE MONADS

by Harald LINDNER

In the following Note we consider generalizations of two theorems of Anders Kock [8, 9, 10] (cf. also Linton [15]). Roughly spoken, the first theorem says that commutative monads «are the same as» monoidal monads. The notion of monoidal monads is defined with respect to monoidal categories, whereas the notion of commutative monads was defined by A. Kock in the context of a symmetrical monoidal closed category. We will show that the notion of «commutative monads» can be extended to the monoidal case, such that the bijective correspondence between commutative and monoidal monads remains valid (in particular, no symmetry is necessary for the generalization). Similarly we provide an extension of the second theorem (cf. A. Kock [10] and F.E.J. Linton [15]) which claims the Eilenberg-Moore category of a commutative monad on a symmetrical monoidal closed category (satisfying some finite completeness assumptions) to be symmetrical monoidal closed. A particular example for the second theorem is the Kleisli category Ab_j (of free abelian groups) of the «abelian group monad» on the (symmetric monoidal closed) category of sets. The category Ab_j is monoidal, but not symmetric monoidal closed.

Our setting, which we changed compared to the preliminary version [13] of this Note (following a recommendation of R.H. Street and G.M. Kelly) is as follows: we consider a monoidal 2-category $(\mathcal{A}, I, \otimes, \alpha, \lambda, \rho)$. Of course, our prime example of $(\mathcal{A}, I, \otimes, \alpha, \lambda, \rho)$ will be the symmetric cartesian closed 2-category Cat . There are, however, further interesting examples of monoidal 2-categories, e.g. the strict monoidal 2-category of endo-2-functors of Cat . We have to consider the 2-category $Mon(\mathcal{A})$ of monoidal 0-, 1-, and 2-cells in \mathcal{A} . Its 0-cells, denoted by (C, η, μ, a, l, r) or even by C , if no confusion seems possible, consist of a 0-cell C of \mathcal{A} , two 1-cells

$$\eta: I \rightarrow C \quad \text{and} \quad \mu: C \otimes C \rightarrow C$$

and three 2-cells: a, l, r of \mathcal{A} (cf. (1)), subject to the usual coherence

conditions.

(1)

$$\begin{array}{ccc}
 & I \otimes C & \\
 \eta \otimes C \swarrow & & \downarrow \lambda_C \\
 C \otimes C & \xrightarrow{l} & C \\
 \mu \searrow & & \\
 & & C
 \end{array}$$

The 1- and 2-cells of $Mon(\mathcal{U})$ are defined in the obvious way. We also need the construction of the 2-category $Mnd(\mathcal{B})$ of monoids in a given 2-category \mathcal{B} (cf. Street [17]). By using this notations, we can consider the 2-category $Mnd(Mon(\mathcal{U}))$, whose 0-cells are the monoidal monads (in \mathcal{U}).

We proceed in sketching the definition of commutative monads in \mathcal{U} . Let $\mathbf{T} = (\tau, e, m)$ be a monad on $C = Ens$. For any set X , τX is the set of X -ary operations of the algebraic theory \mathcal{J} of the monad \mathbf{T} . \mathcal{J} is said to be commutative (cf. Linton [15]) iff for any algebra A of \mathcal{J} and for all sets X, Y the diagram (2) commutes.

(2)

$$\begin{array}{ccccc}
 & (A^Y)^X & \xrightarrow{(A_y)^X} & A^X & \\
 \cong \nearrow & & & & \searrow A_x \\
 A^{X \amalg Y} & & & & A^I \\
 \cong \searrow & & & & \nearrow A_y \\
 & (A^X)^Y & \xrightarrow{(A_x)^Y} & A^Y &
 \end{array}$$

(3)

$$\begin{array}{ccc}
 C \otimes C & \xrightarrow{\mu} & C \\
 \tau \otimes \tau \downarrow & \nearrow p_1 & \nearrow p_2 \\
 C \otimes C & \xrightarrow{\mu} & C \\
 & \mu &
 \end{array}$$

The two compositions in (2) can both be obtained by applying the algebra A to two $X \amalg Y$ -ary operations. Hence there are two canonical morphisms from $\tau X \amalg \tau Y$ to $\tau(X \amalg Y)$. These morphisms are natural with respect to X and Y , hence they are the components of two natural transformations p_1 and p_2 (diagram 3). The monad \mathbf{T} is said to be commutative iff $p_1 = p_2$

(cf. Kock [8]). p_1 and p_2 can be obtained as follows: corresponding to the « strength »

$$\tau_{X,Y}: C[X, Y] \rightarrow C[\tau X, \tau Y] \text{ of } \tau: C \rightarrow C$$

(recall that we still assume $C = \text{Ens}!$) there are the « tensorial strengths »

$$t_{X,Y}: (\tau X) \amalg Y \rightarrow \tau(X \amalg Y) \quad \text{and} \quad t'_{X,Y}: X \amalg \tau Y \rightarrow \tau(X \amalg Y),$$

both natural with respect to X and Y . Therefore they are the components of two natural transformations t and t' (cf. diagrams 4 and 5).

(4)

= p_1

(5)

= p_2

Considering an arbitrary monoidal 0-cell (C, η, μ, a, l, r) which is not symmetric monoidal closed, a 1-cell $\tau: C \rightarrow C$ has in general no strength. Therefore we define a 2-category $Bim(\mathfrak{A})$ (of « bimodules » in \mathfrak{A}), which has the same 0-cells as $Mon(\mathfrak{A})$. The 1-cells of $Bim(\mathfrak{A})$ are, roughly spoken, 1-cells of $Mon(\mathfrak{A})$ together with t and t' satisfying additional compatibility relations. The commutativity condition $p_1 = p_2$ (diagrams 4 and 5) together with some further minor conditions, defines a non-full 2-subcategory $CMB(\mathfrak{A})$ of $Mnd(Bim(\mathfrak{A}))$, 2-isomorphic to $Mnd(Mon(\mathfrak{A}))$ (details can be found in [13]):

THEOREM 1. *The 2-categories $CMB(\mathfrak{A})$ (of commutative monads in \mathfrak{A}) and $Mnd(Mon(\mathfrak{A}))$ (of monoidal monads in \mathfrak{A}) are 2-isomorphic.*

THEOREM 2. Assume :

(i) (τ, t, t', e, m) is a commutative monad on $(C, \eta, \mu, a, l, \tau)$.

(ii) (τ, e, m) is generated by an adjunction

$$\phi \frac{d}{e} \Big| \psi : D \rightarrow C .$$

(iii) ψ is faithful (equivalently: d is an epimorphism).

(iv) D has (some) finite pointwise colimits.

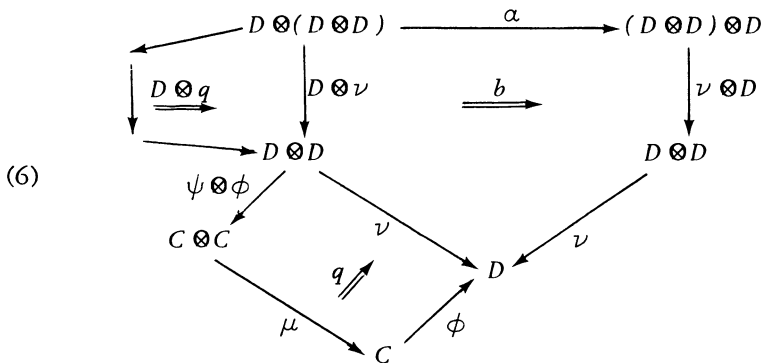
(v) ν preserves (some) finite pointwise colimits with respect to the second variable.

Then

$$\phi \frac{d}{e} \Big| \psi : D \rightarrow C$$

is induced by a monoidal adjunction (i. e. an adjunction in $\text{Mon}(\mathfrak{A})$).

We have to omit the proof, but we will consider a few details in order to comment on conditions (iv) and (v): According to theorem 2, there is a 0-cell $(D, \varepsilon, \nu, b, k, o)$. The 1-cell $\nu : D \otimes D \rightarrow D$ is defined by requiring q to be a colimit (common coequalizer) of two pairs of 2-cells (cf. diagram 6) (in the case of abelian groups this is equivalent to the bilinearity of the tensor product).



Condition (iv) implies the existence of q , and it ensures that the composition of q with any 1-cell with codomain $D \otimes D$ is a colimit. Condition (v) implies that $D \otimes q$ followed by ν is a colimit. Hence we can define b by requiring the composition of the three 2-cells in diagram (6) to be a certain 2-cell.

In general, the three 2-cells b, k, o are not isomorphisms even if a, l, r are assumed to be isomorphisms. There is, however, a corresponding version of theorem 2, where conditions (iii) and (v) are changed as follows:

(iii') ψ lifts homomorphisms uniquely.

(v') ν preserves (some) finite colimits with respect to both variables.

Condition (iii') is always satisfied if the adjunction

$$\phi \begin{array}{c} \xrightarrow{d} \\ \xrightarrow{e} \end{array} \Big| \psi : D \rightarrow C$$

is an Eilenberg-Moore adjunction. It reads as follows: Let $\theta, \xi : A \rightarrow D$ be two 1-cells. If $x : \psi\theta \rightarrow \psi\xi$ is a 2-cell such that diagram (7) is commutative, then there is a unique 2-cell $y : \theta \rightarrow \xi$ such that $x = \psi y$.

$$(7) \quad \begin{array}{ccc} \psi\phi\psi\theta & \xrightarrow{\psi\phi x} & \psi\phi\psi\xi \\ \psi d\theta \downarrow & & \downarrow \psi d\xi \\ \psi\theta & \xrightarrow{x} & \psi\xi \end{array}$$

Furthermore, we remark that the construction described in theorem 2 is 2-functorial, if the adjunctions are assumed to be Eilenberg-Moore adjunctions.

Every Kleisli adjunction and every Eilenberg-Moore adjunction generating a commutative monad on Ens is an example for theorem 2.

Finally we mention the following conjecture, posed as a question by Kock: Every finitary algebraic theory \mathcal{T} (cf. Lawvere [12]) induces an «internal algebraic theory in the topos Ens » in the sense of Johnstone and Wraith (cf. [7]), i. e. a monoid (M, e, m) in the (non-symmetric!) biclosed monoidal category \mathbf{V} of all functors from the category of finite sets to the category of sets. We suppose that \mathcal{T} is commutative iff the monad on \mathbf{V} generated by (M, e, m) (cf. [14]) is commutative in the sense defined above.

1. BASTIANI A. and EHRESMANN C., Categories of sketched structures, *Cahiers Topo. et Géo. diff.* XIII-2 (1972), 105-214.
2. BENABOU J., Introduction to bicategories, *Springer Lecture Notes in Math.* 47 (1967), 1-77.

3. DAY B., On closed categories of functors, *Springer Lecture Notes in Math.* 137 (1970), 1-38.
4. DAY B., On closed categories of functors II, *Abstracts of the Sydney category theory seminar* 1972, 32-34,
5. GRAY J.W., Formal category theory, *Springer Lecture Notes in Math.* 391 (1974).
6. HAU F. vom, LINDNER H. und SCHUBERT H., *Geschlossene Kategorien I*, mimeographed, Universität Düsseldorf 1974.
7. JOHNSTONE P.T. and WRAITH G.C., *Algebraic theories and recursion in elementary topos theory*, mimeographed, University of Liverpool 1972.
8. KOCK A., Monads on symmetric monoidal categories, *Arch. Math.* 21 (1970), 1-10.
9. KOCK A., Strong functors and monoidal monads, *Arch. Math.* 23 (1972), 113-120.
10. KOCK A., Closed categories generated by commutative monads, *J. Austr. Math. Soc.* 12 (1971), 405-424.
11. KOCK A., Monads for which structures are adjoint to units, *Aarhus Univ. Math. Preprint Series* 35 (1972).
12. LAWVERE F.W., *Functorial semantics of algebraic theories*, thesis, Columbia University, 1963.
13. LINDNER H., *On commutative monads*, mimeographed, Univ. Düsseldorf, 1974.
14. LINDNER H., Monads generated by monoids, *Manuscripta Math.* 15 (1975), 139-152.
15. LINTON F.E.J., Autonomous equational categories, *J. Math. Mech.* 15 (1966), 637-642.
16. PUMPLUN D., Eine Bemerkung über Monaden und adjungierte Funktoren, *Math. Ann.* 185 (1970), 329-337.
17. STREET R., The formal theory of monads, *J. Pure and Applied Algebra* 2 (1972), 149-168.

**NATURAL FACTORIZATIONS AND THE KAN EXTENSIONS OF
COHOMOLOGY THEORIES**

by John L. MACDONALD

A *cohomology theory* consists of a sequence

$$b = \{ b^n : J_0 \rightarrow Ab \}$$

of contravariant functors from an «admissible» category J_0 of topological spaces to the category Ab of abelian groups together with a sequence

$$\sigma = \{ \sigma^n \mid \sigma^n : b^n \rightarrow b^{n+1} \Sigma \}$$

of natural transformations where Σ is the suspension functor subject to certain axioms, namely the homotopy, suspension and exactness axioms. Examples of such theories are known to include ordinary cohomology theory, stable cohomotopy theory and real and complex K -theory. The details may be found in the monograph by Peter Hilton on *General Cohomology Theory and K-theory*, Cambridge University Press, 1971.

We continue here the investigation, begun by Deleanu and Hilton, into the question of when the Kan extension of a cohomology theory is again a cohomology theory.

Furthermore we work in abstract categories \mathcal{P} and \mathcal{C} instead of the categories J_0 and Ab , respectively, in order to analyze better the conditions which are essential in the constructions. The notion of natural factorizations is introduced in order to describe an abstract or archetypal cohomology axiom of which the three preceding axioms may be regarded as examples. It is then shown that for each abstract axiom there is a corresponding initiality condition sufficient to ensure that the Kan extension of a functor satisfying the axiom again satisfies an axiom of similar type.

More explicitly we let $b : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{C}$ be a contravariant functor and let $F : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ be any covariant functor. A *natural F -factorization* of b is just a natural transformation

$$\sigma : b \rightarrow \bar{b}F \text{ for some } \bar{b} : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{C}.$$

The functor b satisfies the *cohomology axiom of type (F, σ)* if σ is an

equivalence. If

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{P} & \xrightarrow{K} & \mathcal{T} \\
 F \downarrow & & \downarrow G \\
 \mathcal{Q} & \xrightarrow{L} & \mathcal{U}
 \end{array}$$

is a commutative diagram of categories and functors and if $b: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{C}$ satisfies an axiom of type (F, σ) , then it can be shown that the Kan extension $b_1: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{C}$ of b along K satisfies the cohomology axiom of type (G, σ_1) provided that the functor

$$M_X: (X \downarrow K) \rightarrow (G X \downarrow L), \text{ defined by } M_X(f: X \rightarrow K Y) = G f,$$

is initial for each $X \in |\mathcal{T}|$.

It can be shown how each of the three cohomology axioms fits into such a setting and how in each case the corresponding initiality condition can be interpreted explicitly in terms of the category \mathcal{U} . This results in specific conditions sufficient to ensure that the Kan extension along K of a cohomology theory $b: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{C}$ is again a cohomology theory. A number of examples were referred to in which these conditions hold.

LE FORCING POUR L'ETUDE DES FONDEMENTS

par Richard MIJOLE

Le but de ce travail est double. Tout d'abord, il comporte une formalisation, en termes d'Algèbre des catégories, des notions de langage et de formule, puis une formalisation d'une classe de fondements.

1. \mathcal{R} -catégories.

DEFINITION 1. On appelle \mathcal{R} -catégorie la donnée d'un couple (C', R) , où C' est une catégorie et R une relation binaire sur C' vérifiant les conditions suivantes :

(i) Si fRg , alors $\alpha(f) = \alpha(g)$ et $\beta(f) = \beta(g)$ (où α et β sont les applications source et but de C').

(ii) Si fRg , alors $f \cdot bRg \cdot b$ pour tout morphisme $b \in \alpha(f) \cdot C'$.

(iii) Si $j \cdot fRj \cdot g$ pour un certain $j \in C'$, alors fRg .

EXEMPLE. Sur Ens , on définit la relation \neq de la manière suivante : Soit f et g deux applications de E dans E' ; alors

$$f \neq g \quad \text{ssi} \quad f(x) \neq g(x) \quad \text{pour tout } x \in E.$$

Si (C', R) et (C'', R') sont deux \mathcal{R} -catégories, un \mathcal{R} -foncteur de (C', R) vers (C'', R') est la donnée d'un foncteur F de C' vers C'' tel que :

$$fRg \quad \text{entraîne} \quad F(f)R'F(g) \quad \text{pour tout } f, g \in C'.$$

Si F est un \mathcal{R} -foncteur de (C', R) vers (C'', R') , un quadruplet (\hat{e}, t, ϕ, F) sera appelé un \mathcal{R} -cône de base (ϕ, F) si l'on a les propriétés suivantes :

$e = \alpha(t(i)) \in C''_0$, t est une application de C'_0 (ensemble des objets de C') dans C''_0 et ϕ est une application de C' dans $\{=, R'\}$ tels que $F(x) \cdot t(i) \phi(x) t(j)$, pour toute flèche x de C' de source i et de but j .

DEFINITION 2. On dit que e est une \mathcal{R} -limite projective de (ϕ, F) s'il existe un \mathcal{R} -cône (\hat{e}, t, ϕ, F) tel que, pour tout autre \mathcal{R} -cône (\hat{s}, t', ϕ, F) , il existe un unique b dans C' tel que

$$t(i) \cdot b = t'(i) \quad \text{pour tout objet } i \text{ de } C'.$$

REMARQUE. Si ϕ est l'application constante sur $=$, on retrouve les limites projectives usuelles.

EXEMPLE. Prenons pour C' la catégorie ayant deux flèches a et a' de même source 1 et de même but 2 , pour R la relation vide et pour (C', R') la \mathcal{R} -catégorie (Ens, \neq) . Soit F un foncteur de C' dans Ens et ϕ l'application de C dans $\{=, \neq\}$ définie par :

$$\phi(a) = \ll = \gg \quad \text{et} \quad \phi(a') = \ll \neq \gg.$$

Alors la \mathcal{R} -limite projective de (ϕ, F) est le complémentaire dans $F(1)$ du noyau de $F(a)$ et $F(a')$.

DEFINITION 3. On appelle \mathcal{R} -esquisse un couple $\sigma = ((C', R), \mu)$, où :

(i) (C', R) est une \mathcal{R} -catégorie.

(ii) μ est une application associant à certains couples (ϕ, Φ) , où Φ est un \mathcal{R} -foncteur de (I', R_I) vers (C', R) , avec I fini, et ϕ une application de I dans $\{=, R\}$, un \mathcal{R} -cône de base (ϕ, Φ) noté $\mu(\phi, \Phi)$.

REMARQUE. Une \mathcal{R} -esquisse représente intuitivement une théorie du premier ordre.

Si $\sigma = ((C', R), \mu)$ et $\sigma' = ((C'', R'), \mu')$ sont deux \mathcal{R} -esquisses, un *homomorphisme de σ vers σ'* est la donnée d'un \mathcal{R} -foncteur F de (C', R) vers (C'', R') tel que :

si $\mu(\phi, \Phi)$ est défini, alors $\mu'(\phi, F.\Phi)$ est aussi défini, et l'on a : $F\mu(\phi, \Phi) = \mu'(\phi, F.\Phi)$.

On note $\mathcal{S}^{\mathcal{R}}$ la catégorie des homomorphismes entre \mathcal{R} -esquisses. $\mathcal{S}^{\mathcal{R}}$ admet pour sous-catégorie pleine la catégorie $\mathcal{F}^{\mathcal{R}}$ dont les objets sont les couples $((C', R), \mu)$, appelés \mathcal{R} -types, où :

(i) (C', R) est une \mathcal{R} -catégorie.

(ii) μ est une application associant à tout couple (ϕ, Φ) , où Φ est un \mathcal{R} -foncteur de (I', R_I) vers (C', R) , avec I fini, et ϕ une application de I dans $\{=, R\}$, une \mathcal{R} -limite projective de (ϕ, Φ) .

2. Formules.

A partir d'une \mathcal{R} -esquisse on redéfinit, de manière catégorique, les formules, pour montrer qu'une complétion est une déduction syntaxique.

Si σ est une \mathcal{R} -esquisse, on construit, par récurrence, une suite $(\sigma_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de \mathcal{R} -esquisses, auxquelles sont liées les formules $F = (r, R)$. Pour une construction plus explicite on se reportera à [3].

Soit $\hat{\sigma} = ((\hat{C}', \hat{R}), \hat{\mu})$ un \mathcal{R} -type. On appellera $\hat{\sigma}$ -réalisation de σ tout homomorphisme M de σ vers $\hat{\sigma}$.

Soit M une $\hat{\sigma}$ -réalisation de σ et $F = (r, R)$ une formule liée à σ_n ; on dira que M est un $\hat{\sigma}$ -modèle de F (on notera $M \models_{\hat{\sigma}} F$) s'il existe un prolongement M' de M à σ_n tel que :

- si $f r g$, alors $M'(f) = M'(g)$,
- si $f R g$, alors $M'(f) \hat{R} M'(g)$.

Si $\mathcal{F}_1^{\mathcal{R}}$ est une sous-catégorie de $\mathcal{F}^{\mathcal{R}}$, on dira que F est une $\mathcal{F}_1^{\mathcal{R}}$ -tautologie, et l'on notera $(\mathcal{F}_1^{\mathcal{R}})F$, si pour tout objet $\hat{\sigma}$ de $\mathcal{F}_1^{\mathcal{R}}$ et pour toute $\hat{\sigma}$ -réalisation M de σ , on a $M \models_{\hat{\sigma}} F$.

Soit $\sigma = ((C', R), \mu)$ une \mathcal{R} -esquisse et \mathbf{F} l'ensemble des formules construites à partir de σ . Si σ' est une autre \mathcal{R} -esquisse, et si P est un homomorphisme de σ vers σ' , il existe une application \hat{P} de \mathbf{F} dans l'ensemble \mathbf{F}' des formules construites à partir de σ' .

On appelle *logique* la donnée d'un ensemble de formules, appelées *axiomes*, et d'un ensemble de règles tels que, si \mathbf{F}_L désigne le plus petit sous-ensemble de \mathbf{F} contenant les axiomes et stable par les règles, et si P est un homomorphisme de σ vers σ' , on ait :

$$F \in \mathbf{F}_L \quad \text{ssi} \quad \hat{P}(F) \in \mathbf{F}'_L .$$

Si L est une logique, on écrira $(L)F$ pour traduire que F est démontrable au moyen de la logique L .

THEOREME 1. Il existe une logique L_0 telle que $(L_0)F$ ssi $(\mathcal{F}_1^{\mathcal{R}})F$ pour toute formule F .

DEFINITION 4. On appelle *couple complet* un couple $(\mathcal{F}_1^{\mathcal{R}}, L)$, où $\mathcal{F}_1^{\mathcal{R}}$ est une sous-catégorie et L une logique telles que :

$$(L)F \quad \text{ssi} \quad (\mathcal{F}_1^{\mathcal{R}})F \quad \text{pour toute formule } F .$$

Un couple complet correspond à la notion intuitive de fondement.

THEOREME 2. Soit $(\mathcal{F}_1^{\mathcal{R}}, L)$ un couple complet. Pour toute théorie K , il existe un \mathcal{R} -type $T_1(K)$ qui est un modèle de K , générique pour $\mathcal{F}_1^{\mathcal{R}}$.

Prenons pour $\mathcal{F}_1^{\mathcal{R}}$ la sous-catégorie de $\mathcal{F}^{\mathcal{R}}$ ayant pour objets les sous-catégories de Ens . On la note $\mathcal{F}_{Ens}^{\mathcal{R}}$.

THEOREME 3. Il existe une logique L_b telle que $(\mathcal{F}_{Ens}^{\mathcal{R}}, L_b)$ soit complet.

La relation avec le calcul des prédicats est la suivante. Reprenons les notations de [1] :

THEOREME 4. Pour toute théorie K , il existe un homomorphisme du \mathcal{R} -type $T_{Ens}(K)$ dans (Ens, \neq) , qui est un modèle K -générique.

1. P. J. COHEN, *Set theory and the continuum hypothesis*, Benjamin, New-York 1966.
2. C. EHRESMANN, *Bull. Inst. Politeh. Iași* 14 (1968), p. 18.
3. R. MIJOULE, *C.R.A.S. Paris* 279 (1974), p. 753.
4. R. MIJOULE, *C.R.A.S. Paris* 279 (1974), p. 795.

CATEGORIES OF PROMODULES

by Timothy PORTER

Recently there has been considerable interest in the applications of categories of pro-objects, particularly in algebraic topology and algebraic geometry (see for example [AM], [P1]). Some very recent work of Deleanu and Hilton [DH1, DH2] suggests that a slight generalisation of these categories may be of use in other settings as well. In this slightly enlarged version of a talk given at Amiens, 9th July 1975, one of the central problems of procategory theory is briefly described and two examples of solutions are given. These are not the only solutions for these particular cases but correspond to two possible choices of «useful» in the following statement of the problem:

Given some «useful» structure in C , find an extension of this structure to $pro(C)$ which is also «useful».

The definition of «useful» of course depends on the context; here we will consider two different contexts based on the same choice of the category C , namely $C = Mod\text{-}A$, the category of right unitary modules over an associative ring A with 1 .

1. Procategories - definition and elementary properties.

The simplest way to describe $pro(C)$ for a small category C is as $(Lex(C, Ens))^{op}$, that is the opposite of the category of left exact functors from C to Ens . This description although simple does not aid one much when making constructions; for this reason it is usual to consider a pro-object in C as a functor $M: I \rightarrow C$, where I is a small cofiltering category, and, if $M: I \rightarrow C$ and $N: J \rightarrow C$ are two pro-objects,

$$pro\ C(M, N) = \lim_J (\lim_I C(M(i), N(j))).$$

We will need the following facts about procategories; proofs can be found in [AM, D, G].

A. If C is abelian, so is $pro(C)$. If $C = Mod\text{-}A$, $pro(C)$ has enough projectives but it does not have enough injectives.

B. There is a procompletion functor, which is the Yoneda embedding thinly disguised $c: C \rightarrow \text{pro}(C)$ and, for instance if $C = \text{Mod-}A$, this has a right adjoint \varprojlim .

C. Given a map $f: M \rightarrow N$ in $\text{pro}(C)$, it can be replaced up to isomorphism (in $\text{Maps}(\text{pro}(C))$) by a level map (or pro-object in $\text{Maps}(C)$).

D. If $M: I \rightarrow \text{Mod-}A$ is a pro- A -module, then the natural map

$$\mu(M): c(\varprojlim M) \rightarrow M$$

is an isomorphism in $\text{pro}(\text{Mod-}A)$ if and only if M satisfies the two conditions:

(i) (M.L) Given i in I there is an $f(i) \geq i$ such that, for all $j \geq f(i)$,

$$\text{Im}(M(j) \rightarrow M(i)) \rightarrow \text{Im}(M(f(i)) \rightarrow M(i)).$$

(ii) (E.M) There is an i_0 in I such that given $j > i_0$ there is $k > j$ with

$$\text{Ker}(M(k) \rightarrow M(i_0)) \rightarrow \text{Ker}(M(k) \rightarrow M(j)).$$

We will say M is *stable* if $\mu(M)$ is an isomorphism.

2. Prohomotopical algebra.

Since $\text{pro}(\text{Mod-}A)$ has enough projectives one can do «global» homological algebra in this category, however for some purposes it is more convenient to use a different construction which is the extension of «homotopical algebra» from the category of positive chain complexes in $\text{Mod-}A$, which we will denote by $C(\text{Mod-}A)$, to $\text{pro} C(\text{Mod-}A)$. This is a particular case of the question:

To what extent can an abstract homotopy theory on C be extended to one on $\text{pro}(C)$?

The meaning to be attached to the phrase abstract homotopy theory is that of Quillen [Q] or Brown [B] but in a slightly weakened form. Briefly one singles out three classes of maps called weak equivalences, cofibrations and fibrations which mimic the properties of the maps with these names in the usual setting of homotopy theory, the category of CW-complexes. Thus for instance, the weak equivalences form a calculus of fractions and, in our case of $C = C(\text{Mod-}A)$, fibrations are epimorphisms and weak

equivalences are those chain maps which induce isomorphisms on homology (the cofibrations are somewhat more complicated).

If we define a map $f: M \rightarrow N$ in $pro(C)$ to be a basic weak equivalence if there is an \bar{f} obtained by using property C:

$$\bar{f}: \bar{M} \rightarrow \bar{N}: I \rightarrow Maps(C)$$

such that $\bar{f}(i)$ is a weak equivalence in the homotopy structure on C , similarly for basic fibrations, etc..., then on composing these basic special maps with isomorphisms one obtains an abstract homotopy theory which is weaker than Brown's [B] but still allows one to construct an associated cohomology theory with suspensions and loop-space structures (see [P2]).

In the non-modular case of $C = CW$, the resulting theory allows a detailed obstruction theory with Postnikov decompositions of maps and also mapping cylinders which give a partial uniqueness of Eilenberg-MacLane objects (see [P3]). In the case $C = C(Mod-A)$, one gets a canonical embedding of the corresponding homotopy categories of fractions

$$c: Ho C(Mod-A) \rightarrow Hopro(C(Mod-A))$$

which has a right adjoint $holim$ which is exact, ($Hopro(C(Mod-A))$ is abelian with exact sequence being given by the fibration-cofibration structure). Also if $M: I \rightarrow Mod-A$ is considered as a zero dimensional procomplex, then $holim \Sigma^n M$ has i^{th} cohomology equal to $lim^{(n-i)} M$, the $(n-i)^{th}$ derived functor of the limit functor evaluated at M (in fact this $holim$ construction is well known but not as an adjoint) (see [P4]).

3. Torsion theories.

Using property D above, it is easy to check that any pro-finite dimensional vector space is a direct limit of its stable subobjects; more generally one shows that the class

$$\mathcal{L} = \{ M \mid lim^{(i)} M = 0 \text{ for } i > 0 \}$$

is closed under direct limits and extensions, but not under subobjects.

If one uses the stable pro-objects as indicators of «niceness», it is natural to try to generate \mathcal{L} by direct limits and extensions from the class

of stable pro-objects, but again the lack of closure of \mathcal{L} under subobjects causes difficulties. With subobjects one could use torsion theory to study \mathcal{L} and the functors $\varprojlim^{(i)}$, so this suggests that we try to extend torsion theories from $Mod\text{-}A$ to $pro(Mod\text{-}A)$. Several extensions exist, but only one seems «useful»; we give one instance of it here.

One can define the simple torsion theory on $Mod\text{-}A$ by the torsion radical generated from the functor $s_0: Mod\text{-}A \rightarrow Mod\text{-}A$, where

$$s_0(M) = \sum \oplus \{ S \subseteq M \mid S \text{ is simple} \};$$

for $pro(Mod\text{-}A)$, we replace s_0 by

$$s(M) = \sum \oplus \{ S \subseteq M \mid S \text{ is simple and stable} \}$$

and obtain a torsion radical on $pro(Mod\text{-}A)$ which we will denote by \bar{s} . The torsion class

$$\mathcal{T}_{\bar{s}} = \{ M \mid \bar{s}(M) = M \}$$

satisfies $\mathcal{T}_{\bar{s}} \subseteq \mathcal{L}$ and so we have that any M can be written as an extension

$$0 \longrightarrow \bar{s}(M) \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M/\bar{s}(M) \longrightarrow 0$$

where

- (i) $s_0(\varprojlim M/\bar{s}(M)) = 0$,
- (ii) $\varprojlim^{(j)} p$ is an isomorphism for $j > 0$ and $\varprojlim^{(j)} \bar{s}(M) = 0$ for $j > 0$.

This takes a particularly nice form if A is a semi-artinian ring (i.e. when $\bar{s}_0(A) = A$); in this case $\varprojlim M/\bar{s}(M) = 0$ so $\varprojlim i$ is an isomorphism. It raises possibilities of «splitting» any M as an extension of a nice promodule by a «nasty» promodule and hence obtaining further invariants of M .

The torsion class $\mathcal{T}_{\bar{s}}$ is closed under subobjects and, for A semi-artinian, is a localising subcategory of $pro(Mod\text{-}A)$. Denoting the corresponding localisation functor by

$$L: pro(Mod\text{-}A) \rightarrow pro(Mod\text{-}A)$$

and the natural transformation by $\psi: I \rightarrow L$ one easily finds that

- (i) $L(M) = M$ if and only if $\varprojlim M = \varprojlim^{(1)} M = 0$.

(ii) For any M and $i > 1$, $\varprojlim^{(i)} \psi(M)$ is an isomorphism.

(iii) There is a natural isomorphism

$$\varprojlim \operatorname{Coker} \psi(M) \rightarrow \varprojlim^{(1)} M.$$

(For details see [P5, P6] .)

The functor L seems hard to construct explicitly. The two usual methods of construction used in module categories involve injective envelopes or internal *hom*-sets, neither of which can be used directly here.

One can extend other torsion theories in this way but they do not always seem to have as nice properties. The obvious next problem is to find extensions of torsion theoretic results to the procategory and some decomposition results have been so extended.

There does not seem to be as yet a general method of providing unusual extensions to structures on C . (The usual methods of Kan extension along c seem to be uninteresting and often fail to have the right structure.)

A particularly good example of this problem which occurs in both these cases is the question :

If Σ is a calculus of fractions on C , is there a calculus of fractions $\bar{\Sigma}$ on $\operatorname{pro}(C)$ which extends Σ ?

In the two cases, we have two separate answers which do not seem to be linked in any way, and no common approach is yet in sight.

References.

- AM. ARTIN - MAZUR, *Etale Homotopy*, *Lecture Notes in Math.* 100, Springer (1969).
- B. K. S. BROWN, *Abstract homotopy theory and generalised sheaf cohomology*, *Trans. A. M. S.* 186 (1973), 419 - 458.
- DH1. DELEANU - HILTON, *The categorical shape of a functor*, *Fund. Math.* (to appear).
- DH2. DELEANU - HILTON, *Borsuk shape and Grothendieck categories of pro-objects* (preprint).
- D. J. DUSKIN, *Pro-objects*, *Sém. Heidelberg - Strasbourg*, Exposé 6 (1966).
- G. A. GROTHENDIECK, *Techniques de descente.... Sém. Bourbaki*, Exposé 195 (1959 - 1960).
- P1. T. PORTER, *Stability results for topological spaces*, *Math. Z.* 140 (1974), 1 - 21.
- P2. T. PORTER, *Abstract homotopy theory in procategories*, preprint.
- P3. T. PORTER, *Coherent prohomotopy theory*, preprint.
- P4. T. PORTER, *Coherent prohomotopical Algebra*, preprint.
- P5. T. PORTER, *Stability of algebraic inverse systems, I*, preprint.
- P6. T. PORTER, *Stability of algebraic inverse systems, II*, *Jour. Pure Appl. Alg.* (to appear).
- Q. D. QUILLEN, *Homotopical Algebra*, *Lecture Notes in Math.* 43 (1967).

**BUILDING CATEGORIES IN WHICH A GODEMENT'S THEOREM
IS AVAILABLE**

by *Jean PRADINES*

At first glimpse it seems that Differential Geometry is a bad ground for using categorical methods, since the category *Dif* is very far from being complete or closed. Moreover it seems difficult to characterize the usual fundamental concepts of immersions, embeddings, submersions, «étale» morphisms by individual categorical properties.

However, instead of looking at individual properties of arrows, we note that *Dif* is endowed with certain subcategories having very strong global properties of stability, involving or not the forgetful functor toward *Ens*, the less commonplace being the so-called GODEMENT's theorem [3].

We shall show in future papers that many problems in Differential Geometry, especially in the study of quotients of differentiable groupoids [2], principal fibrations, globalization of local differentiable actions [1], may be reduced to repeated use of GODEMENT's theorem.

Now the point is that there exist GODEMENT's theorems in almost all the categories used in Algebra and Analysis. So an axiomatic treatment of the preceding problems not only clears them, but leads to much more general theorems.

This leads us to the following study of general methods for building categories in which a GODEMENT's theorem is valid.

1. Notations and definitions.

For a (small) category \mathcal{D} , let again \mathcal{D} denote the set of arrows of \mathcal{D} , $o\mathcal{D}$ the set of its unit arrows, $O\mathcal{D}$ the set of its objects, \mathcal{D}^* the subgroupoid of its invertible arrows, α and β the source and target projections, $\mathcal{M}(\mathcal{D})$ and $\mathcal{P}(\mathcal{D})$ the subcategories of monics and epics of \mathcal{D} (*).

For two subsets \mathcal{A} and \mathcal{B} of the set of arrows, let $[\mathcal{A}]$ denote the subcategory generated by \mathcal{A} and $\mathcal{B}\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}$, resp. $\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}$) the set of those arrows b of \mathcal{D} for which there exist arrows $f \in \mathcal{A}$ and $g \in \mathcal{B}$ with

(*) In the following α - or β - are used as prefixes meaning «on the source or target side», preferably to the too ambiguous left- or right-.

$$b = gf \text{ (resp. } bf = g, \text{ resp. } gb = f).$$

\mathcal{A} is said to be *strongly α -stable*, and we write $\alpha\text{-ST}(\mathcal{A})$, whenever $\mathcal{D}^{-1}\mathcal{A} \subset \mathcal{A}$.

\mathcal{B} is said to be *β -stable*, and we write $\beta\text{-st}(\mathcal{B})$, whenever

$$\mathcal{B}\mathcal{B}^{-1} \subset \mathcal{B}.$$

\mathcal{A} and \mathcal{B} are said to be *transversal*, and we write $T(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, if every pair

$$(f: B \rightarrow D) \in \mathcal{A}, \quad (g: C \rightarrow D) \in \mathcal{B}$$

can be completed into a pullback square by means of a pair

$$(u: A \rightarrow B) \in \mathcal{B}, \quad (v: A \rightarrow C) \in \mathcal{A}.$$

We write $T'(\mathcal{A} // \mathcal{B})$ if, for every pullback square

$$(u: A \rightarrow B, \quad v: A \rightarrow C; \quad f: B \rightarrow D, \quad g: C \rightarrow D),$$

the conditions $v \in \mathcal{A}$ and $u, g \in \mathcal{B}$ imply $f \in \mathcal{A}$.

When \mathcal{D} is equipped with given finite products, \mathcal{A} is said to be *stable by products*, or *\times -stable* if for every pair

$$(f: A \rightarrow B), \quad (f': A' \rightarrow B') \in \mathcal{A}$$

one has

$$(f \times f': A \times A' \rightarrow B \times B') \in \mathcal{A}.$$

Now let $p: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ be a faithful functor. We often write $|A|$ or $|f|$ for the p -image of an object A or an arrow f and we identify an arrow $f \in \mathcal{D}$ from A to B with the triple $(|f|, A, B)$. We denote by $\mathcal{I}(p)$ the subcategory of \mathcal{D} whose arrows are the *p -injections*, i. e. those arrows $(i: A \rightarrow B) \in \mathcal{D}$ such that, for every arrow $(w: Z \rightarrow B) \in \mathcal{D}$ and every arrow

$$(v: |Z| \rightarrow |A|) \in \mathcal{E} \quad \text{with} \quad |i|v = |w|,$$

one has $(v, Z, A) \in \mathcal{D}$. The *p -surjections* and $\mathcal{S}(p)$ are defined dually.

The axiom $T_p(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ will mean that for every pair

$$(f: B \rightarrow D) \in \mathcal{A}, \quad (g: C \rightarrow D) \in \mathcal{B}$$

and every pair

$$(u: a \rightarrow |B|) \in \mathcal{E}, \quad (v: a \rightarrow |C|) \in \mathcal{E}$$

such that $(u, v; |f|, |g|)$ is a pullback square in \mathcal{E} , a can be lifted onto an object A of \mathcal{D} such that

$$|A| = a, \quad (u, A, B) \in \mathcal{B}, \quad (v, A, C) \in \mathcal{A}.$$

2. Diptychs.

An elementary prediptych

$$\mathbf{E} = (\mathcal{E}; \mathcal{I}_{\mathbf{E}}, \mathcal{S}_{\mathbf{E}}) = (\mathcal{E}; \mathcal{I}, \mathcal{S})$$

is a category \mathcal{E} , called the *carrier of \mathbf{E}* , equipped with given finite products and with two subcategories $\mathcal{I}_{\mathbf{E}} = \mathcal{I}$, $\mathcal{S}_{\mathbf{E}} = \mathcal{S}$, these data being subject to the following axioms (I):

- (i) and (i') \mathcal{I} and \mathcal{S} are \times -stable;
- (ii) $\mathcal{I} \cap \mathcal{S} = \mathcal{E}^*$;
- (iii) $\mathcal{I} \subset \mathcal{M}(\mathcal{E})$;
- (iv) $\alpha\text{-ST}(\mathcal{I})$ (with (iii), this implies that every split monic is in \mathcal{I} ,

and that, for

$$(f: A \rightarrow B) \in \mathcal{I} \quad \text{and} \quad (g: A \rightarrow C) \in \mathcal{E},$$

one has $((f, g): A \rightarrow B \times C) \in \mathcal{I}$;

- (v) $T(\mathcal{I}, \mathcal{S})$ (with (iv), this implies $T(\mathcal{D}, \mathcal{S})$ and then $T(\mathcal{S}, \mathcal{S})$);

- (vi) $T'(\mathcal{I} // \mathcal{S})$;

(vii) a pullback square constructed by using $T(\mathcal{S}, \mathcal{S})$ (with all its sides in \mathcal{S}) is a pushout too (such a square will be said to be «divine»); this implies every arrow in \mathcal{S} is a coequalizer, so $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(\mathcal{E})$.

An elementary diptych is an elementary prediptych satisfying:

- (iv') $\beta\text{-st}(\mathcal{S})$ (this implies $T'(\mathcal{S} // \mathcal{S})$).

A morphism between two (pre)diptychs

$$\mathbf{E} = (\mathcal{E}, \mathcal{I}, \mathcal{S}) \quad \text{and} \quad \mathbf{E}' = (\mathcal{E}', \mathcal{I}', \mathcal{S}')$$

is defined by a functor $F: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ compatible with the given products and such that $F(\mathcal{I}) \subset \mathcal{I}'$, $F(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}'$.

Ens will denote the canonical diptych $(\text{Set}, \mathcal{M}(\text{Set}), \mathcal{P}(\text{Set}))$.

In the following, \mathbf{E} is a fixed diptych (which may be **Ens**).

An **E**-prediptych (or prediptych over **E**) $\mathbf{D} = (\mathcal{D}, p_{\mathbf{D}}; \mathcal{I}_{\mathbf{D}}, \mathcal{S}_{\mathbf{D}})$ is a category \mathcal{D} (the carrier of \mathbf{D}) equipped with given finite products, a functor $p = p_{\mathbf{D}}: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ (called the forgetful functor), and two subcategories $\mathcal{I}_{\mathbf{D}}, \mathcal{S}_{\mathbf{D}}$ of \mathcal{D} , subject to the following axioms (II):

- (i) p is compatible with the given products;
- (ii) $p(\mathcal{I}_{\mathbf{D}}) \subset \mathcal{I}_{\mathbf{E}}$; (ii') $p(\mathcal{S}_{\mathbf{D}}) \subset \mathcal{S}_{\mathbf{E}}$;
- (iii) p is faithful;
- (iv) the induced functor $p^*: \mathcal{D}^* \rightarrow \mathcal{E}^*$ is «well faithful», i. e. $f \mapsto (\alpha(f), |f|)$ defines a bijection from \mathcal{D}^* onto $O\mathcal{D} \times_O \mathcal{E}^*$;
- (v) (v') $\mathcal{I}_{\mathbf{D}}$ and $\mathcal{S}_{\mathbf{D}}$ are \times -stable;
- (vi) $o\mathcal{D} \subset \mathcal{I}_{\mathbf{D}}$; (vi') $\mathcal{D}^* \subset \mathcal{S}_{\mathbf{D}}$;
- (vii) $\mathcal{I}_{\mathbf{D}} \subset \mathcal{I}(p)$; (vii') $\mathcal{S}_{\mathbf{D}} \subset \mathcal{S}(p)$;
- (viii) $\alpha\text{-ST}(\mathcal{I}_{\mathbf{D}})$;
- (ix) $T_p(\mathcal{I}_{\mathbf{D}}, \mathcal{S}_{\mathbf{D}})$;
- (x) $T'(\mathcal{I}_{\mathbf{D}} // \mathcal{S}_{\mathbf{D}})$.

An **E**-diptych is an **E**-prediptych satisfying:

- (viii') $\beta\text{-st}(\mathcal{S}_{\mathbf{D}})$.

The axioms imply $(\mathcal{D}, \mathcal{I}_{\mathbf{D}}, \mathcal{S}_{\mathbf{D}})$ is itself a (pre)diptych and p defines a morphism of (pre)diptychs.

Note that the lifted square in the statement of (ix) is a pullback in \mathcal{D} .

3. Godement's axiom.

A Godement's square $(u, v; f, g)$ of \mathcal{D} will consist in a pair

$$(u: A \rightarrow B) \in \mathcal{S}_{\mathbf{D}}, \quad (v: A \rightarrow C) \in \mathcal{S}_{\mathbf{D}}$$

and a pair

$$(f: |B| \rightarrow d) \in \mathcal{E}, \quad (g: |C| \rightarrow d) \in \mathcal{E}$$

with $((u, v): A \rightarrow B \times C) \in \mathcal{I}_{\mathbf{D}}$ and $(|u|, |v|; f, g)$ divine in \mathcal{E} . Note that by axiom (I)(vii) for \mathcal{E} , f and g are uniquely (up to isomorphisms) determined by u and v .

A Godement's fork (or strict Godement's square) is the case when $f = g$.

A Godement's \mathbf{E} -(pre)diptych is an \mathbf{E} -(pre)diptych \mathbf{D} satisfying the following Godement's axiom

$\text{God}_p(\mathcal{A}_{\mathbf{D}}, \mathcal{S}_{\mathbf{D}})$: for every Godement's fork of \mathbf{D}

$$(p, q: A \rightrightarrows B, f: |B| \rightarrow d),$$

there is an object D of \mathcal{D} such that

$$|D| = d \text{ and } (f, B, D) \in \mathcal{S}_{\mathbf{D}}.$$

(This implies that D is unique and that the lifted square is divine in \mathcal{D} .)

It can be shown that, if \mathbf{D} is a diptych, the axiom for Godement's forks implies the analogous one for every (non strict) Godement's square.

Most categories used in Algebra, Topology or Analysis carry various Godement's diptychs. In the category of differentiable maps between (Hausdorff) manifolds, we can take for p the forgetful functor toward *Set*, for \mathcal{A} the (proper) embeddings, and for \mathcal{S} the surmersions [3].

If we take for \mathcal{S} the bundle projections, it can be shown that we get a Godement's prediptych, but *it is not known* whether it is a diptych.

The \mathbf{E} -prediptychs are the objects of a category $\text{Predip}_{\mathbf{E}}$ whose arrows are defined by a morphism between the underlying elementary prediptychs, commuting with the forgetful functors. We denote by $\text{Dip}_{\mathbf{E}}$, $\text{Pregodip}_{\mathbf{E}}$ and $\text{Godip}_{\mathbf{E}}$ the full subcategories generated by the \mathbf{E} -diptychs and by the Godement's \mathbf{E} -prediptychs or diptychs.

Now we state our main result :

THEOREM. *For every \mathbf{E} -diptych $\mathbf{D} = (\mathcal{D}, p; \mathcal{A}, \mathcal{S})$, there is a (unique up to unique isomorphisms) Godement's \mathbf{E} -diptych $\bar{\mathbf{D}} = (\bar{\mathcal{D}}, \bar{p}; \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mathcal{S}})$ and an isomorphism i of \mathcal{D} onto a full subcategory of $\bar{\mathcal{D}}$ (we identify \mathcal{D} and $i(\mathcal{D})$) such that $(i, \mathbf{D}, \bar{\mathbf{D}}) \in \text{Dip}_{\mathbf{E}}$ with the universal property:*

For every Godement's \mathbf{E} -diptych \mathbf{G} and $(f: \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{G}) \in \text{Dip}_{\mathbf{E}}$, there is a unique $(h: \bar{\mathbf{D}} \rightarrow \mathbf{G}) \in \text{Godip}_{\mathbf{E}}$ such that $f = hi$.

- Moreover, when \mathcal{D} is the carrier of a Godement's diptych greater than \mathbf{D} , one can take for i the identity functor of \mathcal{D} .

- The full inclusion functor of $\text{Godip}_{\mathbf{E}}$ into $\text{Dip}_{\mathbf{E}}$ is tripleable.

The theorem is proved by a rather long explicit construction which will be detailed elsewhere. It consists in adding new objects which are suitable equivalence classes of Godement's forks (they may be viewed as generalizing atlases for manifolds) and iterating the process.

In concrete situations, it may happen that the construction stops after a finite number of steps, but whether such is the case is sometimes a very difficult matter, and we know nothing about the universal Godement's diptych generated by the above-mentioned Godement's prediptych with the bundle projections.

1. R. S. PALAIS, A global formulation of the LIE theory of transformation groups, *Memoirs A. M. S.* 22 (1957).
2. J. PRADINES, Théorie de LIE pour les groupoïdes différentiables, *C.R.A.S. Paris* 263 (1966).
3. J. P. SERRE, *LIE algebras and LIE groups*, Harvard, 1964.

FAISCEAUX ET CONCEPTS

par Gonzalo E. REYES

Dans ce travail, en collaboration avec Michael Makkai, on exploite l'analogie :

Théorie des topos	\longleftrightarrow	Théorie des modèles,
Site	\longleftrightarrow	Théorie (possiblement infinitaire) du premier ordre
Site algébrique (i. e. dont les recouvrements sont des familles finies)	\longleftrightarrow	Théorie finitaire du premier ordre
Faisceau	\longleftrightarrow	Concept (exprimé par une formule)
Foncteur fibre du site	\longleftrightarrow	Modèle de la Théorie

La formulation mathématique de cette analogie emploie l'interprétation de formules (possiblement infinitaires) dans certaines catégories dont les topoi de Grothendieck, ce qui nous permet par exemple de parler de modèle d'une théorie dans un topos.

THEOREME. *A chaque petit site \mathcal{C} , on peut associer une théorie $T_{\mathcal{C}}$ telle que, pour tout topos \mathcal{E} , la catégorie $\text{Top}(\mathcal{E}, \text{Faisc}(\mathcal{C}))$ des morphismes géométriques soit équivalente à la catégorie des modèles de $T_{\mathcal{C}}$ dans \mathcal{E} .*

Le problème de l'existence des morphismes géométriques (dont les points) d'un topos se ramène ainsi à l'existence des modèles de certaines théories (appelées *cohérentes*).

Des formulations améliorées des théorèmes de plongements connus (Barr, Deligne, ...) ainsi que des résultats nouveaux sont obtenus d'une façon unifiée.

On obtient aussi un théorème de «complétude conceptuel» qui nous permet, dans plusieurs cas, de reconnaître l'équivalence de deux topos cohérents (i. e. définis par des sites algébriques) lorsqu'on connaît leurs catégories de points.

Un compte-rendu plus complet paraîtra prochainement dans le Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences. Le travail développé paraîtra sous forme de livre.

FUNCTORS OF MANY VARIABLES IN 2-CATEGORY THEORY

by Jean-Marie SIROT

NOTATIONS. The terminology used in this note is practically that used by Gray in [1]. Moreover, for

$$\alpha = \text{pseudo, copseudo, iso or 2}$$

and

$$x = \text{quasi, coquasi, iso or 2,}$$

we denote by $\alpha_x(A, B)$ the 2-category whose objects are the α -functors from a given 2-category A to another B and whose 1-cells (resp. 2-cells) are the x -natural transformations (resp. modifications) between them.

If A is a small 2-category, $\{ \alpha_x(A, B) \mid B \in 2\text{-CAT} \}$ is the object map of a 3-functor

$$\alpha_x A : 2\text{-CAT} \longrightarrow 2\text{-CAT}.$$

More generally, for

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \quad \text{and} \quad A = (A_1, \dots, A_m),$$

we define

$$\alpha_x^m A = \alpha_{x_1} A \alpha_{x_2} A \dots \alpha_{x_m} A : 2\text{-CAT} \rightarrow 2\text{-CAT},$$

the 3-functor obtained by strong composition of 3-functors of type $\alpha_x A$; in particular we have

$$\alpha_x^0 A = I_{2\text{-CAT}}, \quad \alpha_x^1 A = \alpha_x A$$

and, for $m > 2$, the following proposition gives an explicit description of the 2-category $\alpha_x^m A(B)$.

From now on the letter a denotes a variable running along the set of objects of A and i is a non-zero integer smaller than m .

PROPOSITION. 0° An object F of $\alpha_x^m A(B)$ (also called α -functor from A to B) is given by the following data:

a) A α_i -functor

$$F(a_1, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_m) : A_i \rightarrow B,$$

such that $F(a_1, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_m) a_i$ is independent of i and whose values are written

$$F(a_1, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_m) c_i = F(a_1, \dots, c_i, \dots, a_m)$$

for any cell c_i of A_i .

b) For $i < i'$ and for each 1-cell

$$(u_i, u_{i'}) : (a_i, a_{i'}) \rightarrow (a'_i, a'_{i'})$$

of $A_i \times A_{i'}$, a « commutation » 2-cell $F(a_1, \dots, u_i, \dots, u_{i'}, \dots, a_m)$ between the 1-cells

$$F(a_1, \dots, a'_i, \dots, u_{i'}, \dots, a_m) \cdot F(a_1, \dots, u_i, \dots, a_{i'}, \dots, a_m)$$

and

$$F(a_1, \dots, u_i, \dots, a'_{i'}, \dots, a_m) \cdot F(a_1, \dots, a_i, \dots, u_{i'}, \dots, a_m),$$

and whose direction is given by the prefix $x_{i'}$, the family of those 2-cells satisfying three types of compatibility relations.

1° A 1-cell $f: F \rightarrow F'$ in $\alpha_x^m A(B)$ (also called a x -natural transformation) is given by m families of x_i -natural transformations:

$$f(a_1, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_m) : F(a_1, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_m) \rightarrow F'(a_1, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_m),$$

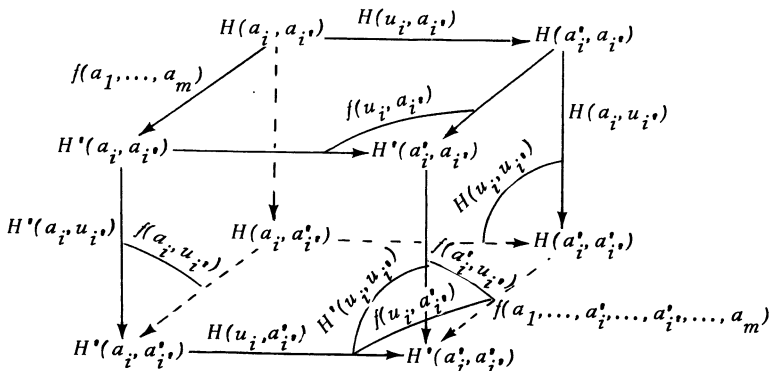
such that the 1-cell

$$f(a_1, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_m) a_i : F(a_1, \dots, a_m) \rightarrow F'(a_1, \dots, a_m)$$

is independent of i and such that, for each 1-cell

$$(u_i, u_{i'}) : (a_i, a_{i'}) \rightarrow (a'_i, a'_{i'}) \text{ of } A_i \times A_{i'},$$

the following cube commutes



where H (resp. H') is the $(\alpha_i, \alpha_{i'})$ -functor $F(a_1, \dots, \hat{a}_i, \dots, \hat{a}_{i'}, \dots, a_m)$, from $(A_i, A_{i'})$ to B (resp. $F'(\dots)$).

2° A 2-cell $\lambda: f \Rightarrow f'$ (also called a modification) is given by m families of modifications

$\lambda(a_1, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_m): f(a_1, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_m) \Rightarrow f'(a_1, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_m)$, such that the 2-cell $\lambda(a_1, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_m) a_i$ is independent of i .

DEFINITION. Let p be a permutation of $\underline{m} = \{1, 2, \dots, m\}$ and F an object of $\alpha_x^m A(B)$; an object \bar{F} of $\alpha_{xp}^m Ap(B)$ is called a conjugate of F by p (notation $F \xrightarrow{p} \bar{F}$) if

1° for each $i \in \underline{m}$, $\bar{F}(ap_1, \dots, \hat{a}_{p_i}, \dots, ap_m) = F(a_1, \dots, \hat{a}_{p_i}, \dots, a_m)$;

2° for each $i < i'$ and for each 1-cell $(s_i, s_{i'})$ of $Ap_i \times Ap_{i'}$, the «commutation» 2-cell $\bar{F}(ap_1, \dots, s_i, \dots, s_{i'}, \dots, ap_m)$ is

$F(a_1, \dots, s_i, \dots, s_{i'}, \dots, a_m)$, when $p_i < p_{i'}$,

$F(a_1, \dots, s_{i'}, \dots, s_i, \dots, a_m)$, when $p_i > p_{i'}$, and $xp_i \not\sim xp_{i'}$,

the inverse of $F(a_1, \dots, s_i, \dots, s_{i'}, \dots, a_m)$, when

$p_i > p_{i'}$ and $xp_i \sim xp_{i'}$,

where \sim denotes the equivalence relation on the set

$\{\text{quasi, coquasi, iso, 2}\}$

given by

$x \sim y$ iff $x = \text{coquasi} \iff y = \text{coquasi}$.

PROPOSITION. The correspondance \xrightarrow{p} is one to one, and it can be extended into a 2-functor

$W^p: U \longrightarrow \alpha_{xp}^m Ap(B)$,

where U is the full sub-2-category of $\alpha_x^m A(B)$ whose objects are the α -functors admitting a conjugate by p . Moreover W^p is 3-natural in B .

PROPOSITION. The operator «conjugation by the identical permutation» is an identity. If \bar{F} is a conjugate of F by p and $\bar{\bar{F}}$ a conjugate of \bar{F} by p' , then $\bar{\bar{F}}$ is a conjugate of F by pp' .

PROPOSITION. Let p and q be two permutations of the integers \underline{m} and \underline{n} respectively and let F be an object of

$$\alpha_x^m A \beta_y^n B(C) = (\alpha, \beta)_{(x,y)}^{m+n} (A, B)(C) ;$$

F admits a conjugate by $p+q$ iff F admits a conjugate by p and if each $F(a_1, \dots, a_m)$ admits a conjugate by q .

($p+q$ is the permutation of $m+n$ given by

$$(p+q)_i = p_i \text{ for } i \in \underline{m} \text{ and } (p+q)_{m+j} = m+q_j \text{ for } j \in \underline{n} .)$$

THEOREM (Existence of conjugates). An object F of $\alpha_x^m A(B)$ admits a conjugate by p iff, for all $i < i'$ such that $p_i > p_{i'}$, the 2-cells

$$F(a_1, \dots, u_{p_{i'}}, \dots, u_{p_i}, \dots, a_m)$$

are

invertible when $x p_i // x p_{i'}$ or $x p_{i'} = iso$,

identical when $x p_{i'} = 2$.

1. J.W. GRAY, Formal category theory, *Lecture Notes in Math.* 391, Springer (1974).
2. J. BENABOU, Introduction to bicategories, *Lecture Notes in Math.* 47, Springer (1967).
3. J.M. SIROT, Les fins cartésiennes, *Thèse 3^e cycle*, multigraphiée, Paris 1975. (Proofs of the above mentioned results are given in this paper, chapters 1 and 5.)

PROGRAMMING IN TOPOI

by Ignacio SOLS

We study in a topos with NNO the notion of denumerable chain complete ordered objects and the fixpoint theorem for continuous morphisms between them. Partial morphisms have this ordering and so we can draw the fixpoint semantics of computation in a topos. An application to «until-loops» and well-ordering is given as an example of fixpoint semantics.

An ordered object A in a topos E with NNO will be called *denumerable chain complete* (abbreviated in *complete object*) when a map

$$\text{sup}_A : \text{Ord}(N, A) \longrightarrow A$$

from the object of denumerable chains is given such that

$$\text{sup}_A \phi \leq a \iff \forall n \phi(n) \leq a.$$

An isotony $f: A \rightarrow B$ between complete objects is called *continuous* when $\text{sup}_B f\phi = f\text{sup}_A \phi$. Comp_E will be the category of complete objects A with lower bounds $0_A: 1 \rightarrow A$, and continuous morphisms.

(FIXPOINT) THEOREM 1. Let $f: A \rightarrow A$ be an endomorphism in Comp_E and $\text{min}_f = \text{sup}_A f^{(\cdot)}(0_A)$, where $f^{(\cdot)}(0_A): N \rightarrow A$ is the universal arrow. Then

$$f\text{min}_f = \text{min}_f \quad \text{and} \quad fa = a \implies \text{min}_f \leq a.$$

PROOF. $f' = f^{(\cdot)}(-): A \times N \rightarrow A$ is an action because both $f'(A \times +)$ and $f'(f' \times N)$ behave as the universal arrow (5.21 [1]) $(A \times N) \times N \rightarrow A$ induced by the pair

$$A \times N \xrightarrow{f'} A \xrightarrow{f} A.$$

Using the principle of induction in internal form

$$\theta(0) \wedge \forall n (\theta(n) \implies \theta(n+1)) \implies \forall m \theta(m)$$

it is easy to check that $a \leq b \implies f^n(a) \leq f^n(b)$. Using both facts and again an induction, we obtain that $f^{(\cdot)}(0_A)$ is a denumerable chain, as required. First,

$$f\text{min}_f = \text{sup}_A f f^{(\cdot)}(0_A) = \text{sup} f^{s(\cdot)}(0_A) = \text{min}_f,$$

because

$$\forall n f^n(0_A) \leq a \iff \forall n f^{s(-)}(0_A) \leq a .$$

Secondly

$$0 \leq a \implies \forall n f^n(0_A) \leq f^n(a)$$

and by induction $f(a) = a \implies f^n(a) = a$. Hence

$$f(a) = a \implies \min_f \leq a . \quad *$$

The product of two complete objects A, B with the product ordering

$$(a, b) \leq (a', b') \iff a \leq a' \wedge b \leq b'$$

is also complete, taking

$$\text{sup}_{A \times B}(\phi, \psi) = (\text{sup}_A \phi, \text{sup}_B \psi),$$

because

$$(\text{sup}_A \phi, \text{sup}_B \psi) \leq (a, b) \iff \forall n \phi(n) \leq a \wedge \psi(n) \leq b,$$

and it is a direct product since $(f, g): X \rightarrow A \times B$ is continuous for f, g continuous as follows from

$$\text{sup}_{A \times B}(f\phi, g\psi) = (f \text{sup}_A \phi, g \text{sup}_B \psi).$$

We recall that an object A of E is called a complete lattice when a map $\text{Sup}_A: \Omega^A \rightarrow A$ is given, such that

$$\text{Sup}_A \alpha \leq a \iff \alpha \subseteq \text{seg}(a)$$

and an isotony $f: A \rightarrow B$ is called additive if $f \text{Sup}_A = \text{Sup}_B \exists f$. Hence the product of two complete lattices is again a complete lattice with

$$\text{Sup}_{A \times B}: \Omega^{A \times B} \xrightarrow{(\exists pr_A, \exists pr_B)} \Omega^A \times \Omega^B \xrightarrow{\text{Sup}_A \times \text{Sup}_B} A \times B$$

because

$$(\text{Sup}_A \exists pr_1 \alpha, \text{Sup}_B \exists pr_2 \alpha) \leq (a, b) \iff$$

$$\exists y (a', y) \in \alpha \implies a' \leq a \wedge \exists x (x, b') \in \alpha \implies b' \leq b ,$$

and it is a direct product because $(f, g): X \rightarrow A \times B$ is additive for f, g additive since

$$(\text{Sup}_A \exists f, \text{Sup}_B \exists g) = (f, g) \text{Sup}_X .$$

Any complete lattice A in E is a complete object taking

$$\text{sup}_A: \text{Ord}(N, A) \xrightarrow{\text{im}} \Omega^A \xrightarrow{\text{Sup}_A} A$$

because

$$\text{im } \phi \subseteq \text{seg } a \iff \forall n \phi(n) \leq a$$

and any additive morphism $f: A \rightarrow B$ is continuous since

$$\text{Sup}_A \exists f \text{ im } \phi = \text{Sup}_A \text{ im } f \phi.$$

We recall that for any object A of E , Ω^A is a complete lattice with $\Omega \Omega^A \xrightarrow{\text{Sup}} \Omega^A$ defined by

$$a \in \text{Sup } \alpha \iff \exists A' a \in A' \wedge A' \in \alpha;$$

hence (changing α by $\text{im } \phi$) its map $\text{sup}: \text{Ord}(N, \Omega^A) \rightarrow \Omega^A$ is given by

$$a \in \text{sup } \phi \iff \exists n a \in \phi(n).$$

For a morphism $f: A \rightarrow B$, both

$$f^{-1}: \Omega^B \rightarrow \Omega^A \quad \text{and} \quad \exists f: \Omega^A \rightarrow \Omega^B$$

are additive since they are isotopies between complete Heyting lattices with right adjoint (proposition 2 [2]).

$$\vee^A: \Omega^A \times \Omega^A \rightarrow \Omega^A \quad \text{has} \quad \Delta: \Omega^A \rightarrow \Omega^A \times \Omega^A$$

as a right adjoint, and so it is also additive; $\wedge^A: \Omega^A \times \Omega^A \rightarrow \Omega^A$ is continuous:

$$a \in \text{sup } \wedge^A(\phi, \psi) \iff a \in \wedge^A \text{sup}(\phi, \psi)$$

because

$$\exists n' a \in \phi(n') \wedge a \in \psi(n') \iff \exists n a \in \phi(n) \wedge \exists m a \in \psi(m),$$

as follows from

$$\phi(n) \leq \phi(n+m) \wedge \psi(m) \leq \psi(n+m).$$

LEMMA 2. For the equalizer

$$\tilde{B} \xrightarrow{e} \Omega^B \quad \text{of} \quad \Omega^B \begin{array}{c} \xrightarrow{id} \\ \xrightarrow{\xi} \end{array} \Omega^B$$

where

$$\xi: B \times \Omega^B \xrightarrow{\{-\} \times \Omega^B} \Omega^B \times \Omega^B \xrightarrow{=} \Omega,$$

the exponentiation graph

$$\tilde{B}^A \xrightarrow{e^A} \Omega^{A \times B}$$

is the interpretation

$$\| \forall a \forall b \forall b' (a, b) \in R \wedge (a, b') \in R \Rightarrow b = b' \|.$$

PROOF. According to the characterizations of equalizers (5.8 [3]) and singleton (4.17 [3]) we have

$$\begin{aligned} \tilde{\chi} &= \| \alpha = \ulcorner \xi^{-1}(\alpha) \urcorner \| = \| \forall a a \in \alpha \Rightarrow \{a\} = \alpha \| = \\ &= \| \forall a \forall a' a \in \alpha \Rightarrow (a' = a \iff a' \in \alpha) \| = \\ &= \| \forall a \forall a' a \in \alpha \wedge a' \in \alpha \Rightarrow a' = a \| . \end{aligned}$$

Hence

$$\begin{aligned} \tilde{B}^A &= \| \forall a R a \in \tilde{B} \| = \\ &= \| \forall a \forall b \forall b' (a, b) \in R \wedge (a, b') \in R \Rightarrow b = b' \| . \quad * \end{aligned}$$

PROPOSITION 3. $\tilde{B}^A \in \text{Comp}_E$, i. e. the object of partial morphisms [4], is denumerable chain complete with lower bound $0_{\tilde{B}^A}$ in the ordering induced by $\Omega^{A \times B}$.

PROOF. For

$$\delta : \Omega^{A \times B} \xrightarrow{((pr_1, pr_2)^{-1}, (pr_1, pr_2)^{-1})} \Omega^{A \times B \times B} \times \Omega^{A \times B \times B} \xrightarrow{\wedge} \Omega^{A \times B \times B}$$

we have

$$(a, b, b') \in \delta R \iff (a, b) \in R \wedge (a, b') \in R .$$

We have the following sequence of theorems with free variable ϕ , of type $\text{Ord}(N, \tilde{B}^A)$:

$$\forall n \forall a \forall b \forall b' (a, b) \in \phi(n) \wedge (a, b') \in \phi(n) \Rightarrow b = b'$$

(by lemma 2),

$$\forall n \forall a \forall b \forall b' (a, b, b') \in \delta \phi(n) \Rightarrow (a, b, b') \in pr^{-1}(=_{\tilde{B}}),$$

where $pr : A \times B \times B \rightarrow B \times B$,

$$\text{sup } \delta \phi \subseteq pr^{-1}(=_{\tilde{B}}), \text{ i. e. } \delta \text{ sup } \phi \subseteq pr^{-1}(=_{\tilde{B}}),$$

$$\forall a \forall b \forall b' (a, b) \in \text{sup } \phi \wedge (a, b') \in \text{sup } \phi \Rightarrow b = b' .$$

Therefore $\text{sup } \phi \in \tilde{B}^A$. Furthermore $\text{false}_{A \times B} \in \tilde{B}^A$ by the lemma 2, and we can take $0_{\tilde{B}^A} = \text{false}_{A \times B}$. *

PROPOSITION 4. The composition of relations

$$\begin{array}{ccc} \circ : \Omega^{A \times B} \times \Omega^{B \times C} & \xrightarrow{(pr_1, pr_2)^{-1} \times (pr_2, pr_3)^{-1}} & \Omega^{A \times B \times C} \times \Omega^{A \times B \times C} \\ & & \downarrow \circ \\ & \xleftarrow{(pr_1, pr_3)} & \Omega^{A \times B \times C} \end{array}$$

restricts to a continuous map

$$\circ : \tilde{B}^A \times \tilde{C}^B \longrightarrow \tilde{B}^A.$$

For each $f : A \rightarrow B$, $\tilde{C}^B \xrightarrow{\tilde{C}^f} \tilde{C}^A$ is also continuous.

PROOF. $R \in \tilde{B}^A \wedge S \in \tilde{C}^B \implies S \circ R \in \tilde{C}^A$, because from

$$\begin{aligned} (a, c) \in S \circ R \wedge (a, c') \in S \circ R &\implies \\ \implies \exists b_1 \exists b_2 (a, b_1) \in R \wedge (b_1, c) \in S \wedge (a, b_2) \in R \wedge (b_2, c') \in S \end{aligned}$$

follows by lemma 2 that

$$R \in \tilde{B}^A \wedge S \in \tilde{C}^B \wedge (a, c) \in S \circ R \wedge (a, c') \in S \circ R \implies c = c'.$$

Thus the composition of relations, which is continuous as composition of continuous maps, restricts to a continuous composition of partial maps. Finally, \tilde{C}^f is continuous as restriction of

$$(f \times C)^{-1} : \Omega^{B \times C} \longrightarrow \Omega^{A \times C}. \quad \#$$

We can see a subobject $q \triangleright A$ as a partial morphism

$$\langle q \triangleright A ; q \xrightarrow{id} q \rangle : A \xrightarrow{\vec{q}} \tilde{q},$$

and so we obtain some «domain extension» morphism

$$Ext(q, A, B) : \tilde{B}^q \xrightarrow{(\vec{q}^{-1}, \tilde{B}^q)} \tilde{q}^A \times \tilde{B}^q \xrightarrow{\circ} \tilde{B}^A$$

which is continuous since q trivially is. Then for a predicate $p \triangleright A$ will also be continuous the morphism

$$(p \rightarrow \cdot | \cdot) : \tilde{\chi}^A \times \tilde{\chi}^A \xrightarrow{\tilde{\chi}^{inc} p \times \tilde{\chi}^{inc} \neg p} \tilde{\chi}^p \times \tilde{\chi}^{\neg p} \simeq \tilde{\chi}^{p \vee \neg p} \xrightarrow{Ext} \tilde{\chi}^A$$

which applies, intuitively, each pair of partial morphisms g_1, g_2 into the one defined on p as g_1 and on $\neg p$ as g_2 .

Now we have in a topos all the elements for the fixpoint semantics of computation introduced by Dana Scott in [5]. Given functional symbols

f_1, \dots, f_m and predicate symbols $p_1, \dots, p_{m'}$, a monadic program schema is an arrow $S: n \rightarrow n$, for some $n \in N$, in the free algebraic theory $F(\Sigma)$ generated by the following graph of operators Σ :

$$\begin{aligned} \Sigma_0 &= \{id\}, \quad \Sigma_1 = \{(- \circ f_1), \dots, (- \circ f_m)\}, \\ \Sigma_2 &= (p_1 \rightarrow \cdot | \cdot), \dots, (p_{m'} \rightarrow \cdot | \cdot). \end{aligned}$$

Given an interpretation $I = (A, f_i, p_j)$ in a topos E of the functional and predicate symbols, i. e. an object A of E , m partial morphisms $f_i: A \rightarrow \tilde{X}$ and m' predicates $p_j \dashv\vdash A$, a $F(\Sigma)$ -algebra $I: F(\Sigma) \rightarrow \text{Comp}_E$ is naturally defined by writing:

$$\begin{aligned} I(1) &:= \tilde{X}^A, \quad I(id) := 1_A \in \tilde{X}^A, \\ I((- \circ f_i)) &:= \tilde{X}^A \simeq \tilde{X}^A \times I \xrightarrow{id \times f_i} \tilde{X}^A \times \tilde{X}^A \xrightarrow{\circ} \tilde{X}^A, \\ I((p_j \rightarrow \cdot | \cdot)) &:= \tilde{X}^A \times \tilde{X}^A \xrightarrow{(p_j \rightarrow \cdot | \cdot)} \tilde{X}^A. \end{aligned}$$

A monadic program is then a pair (S, I) , for some $S: n \rightarrow n$ in E , $n \in N$, and its semantics is precisely the minimal fixpoint of the continuous map $I(S): (\tilde{X}^A)^n \rightarrow (\tilde{X}^A)^n$.

Now we will give an example to clarify how the fixpoint semantics works in a topos. Let us assume that in a topos there is an object A with two disjoint elements $a_1, a_2: 1 \rightarrow A$ and well-ordered, i. e. with a morphism (of course unique) $\mu: P^+N \rightarrow N$ such that

$$\mu(\alpha) \in \alpha \wedge \forall a (a \in \alpha \Rightarrow \mu(\alpha) \leq a),$$

where

$$P^+N = ||\exists a \ a \in \alpha|| \longrightarrow \Omega^A.$$

Then $1 \amalg 1$ has also a choice map, and provided that choice maps are preserved by logical morphisms, $1 \amalg 1$ has a choice map in E/Ω , and therefore (Diaconescu) $E/\Omega(1, \Omega) \simeq E(\Omega, \Omega)$ is a boolean algebra. So any topos with well-ordered NNO is boolean. Conversely, if a topos with NNO is boolean, it can be easily checked by induction that

$$\forall \alpha (n \in \alpha \Rightarrow \exists m \ m \in \alpha \wedge \forall m' (m' \in \alpha \Rightarrow m \leq m')),$$

and, therefore:

$$(\exists n \ n \in \alpha) \Rightarrow \exists! m (m \in \alpha \wedge \forall m' (m' \in \alpha \Rightarrow m \leq m')),$$

so the NNO is well-ordered. This result implies [7] for each pair

$$A \xrightarrow{p} \Omega, \quad A \xrightarrow{f} A$$

the existence of a unique partial morphism «*Until p do f*», i. e. a pair

$$\langle A' \xrightarrow{\quad} A; A' \rightarrow A \rangle : A \xrightarrow{\text{Until}(p, f)} A$$

with: $A' = \{ \exists n f^n(a) \in p \}$ and such that :

$$\text{Until}(p, f)(a) = a,$$

$$a \in A' \wedge a \notin p \implies \text{Until}(p, f)(a) = \text{Until}(p, f)(f(a)),$$

$$a \in A' \implies \text{Until}(p, f)(a) \in p.$$

It is just

$$A' \rightarrow A' \times A' \xrightarrow{\subseteq \times \mu(pf')} A \times N \xrightarrow{f} A,$$

where $\mu(pf')$ is

$$A \xrightarrow{\ulcorner pf' \urcorner} \Omega^N \xrightarrow{\mu} \Omega.$$

However, we can obtain directly $\text{Until}(p, f) : A \dashrightarrow A$ in a boolean topos as semantics of the program given by the schema

$$((p \rightarrow g_2 \mid id), g_1 \circ f)$$

(g_1, g_2 are variables) under the interpretation (A, f, p) . More explicitly, $\text{Until}(p, f)$ is the first projection

$$1 \xrightarrow{\text{min}} \tilde{\chi}^A \times \tilde{\chi}^A \xrightarrow{pr_1} \tilde{\chi}^A$$

of the minimal fixpoint of the continuous morphism $\tilde{\chi}^A \times \tilde{\chi}^A \rightarrow \tilde{\chi}^A \times \tilde{\chi}^A$ obtained from

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\chi}^A \times \tilde{\chi}^A & \xrightarrow{(pr_2, \ulcorner id \urcorner)} & \tilde{\chi}^A \times \tilde{\chi}^A \xrightarrow{(p \rightarrow \cdot \mid \cdot)} \tilde{\chi}^A \\ (g_1, g_2) \vdash & \xrightarrow{\hspace{10em}} & (p \rightarrow g_2 \mid id) \end{array}$$

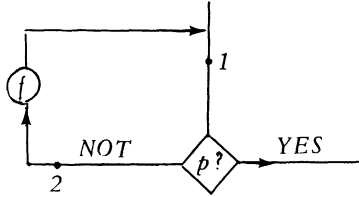
and

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\chi}^A \times \tilde{\chi}^A & \xrightarrow{(pr_1, \ulcorner f \urcorner)} & \tilde{\chi}^A \times \tilde{\chi}^A \xrightarrow{\circ} \tilde{\chi}^A \\ (g_1, g_2) \vdash & \xrightarrow{\hspace{10em}} & g_1 \circ f \end{array}$$

Intuitively speaking, it means that $\text{Until}(p, f)$ is the first component of the minimal pair (g_1, g_2) such that

$$g_1 = (p \rightarrow g_2 | id), \quad g_2 = g_1 \circ f,$$

as seems natural if we understand g_1, g_2 as the partial morphisms computed by the loop



when starting from controls 1, 2. Then, the well-ordering operator may be obtained by

$$\begin{array}{ccccccc} \mu : P^+N & \xrightarrow{(\underline{\quad}, 0)} & (\Omega^N \times N) & \xrightarrow{Until(ev, \Omega^N \times s)} & \Omega^N \times N & \xrightarrow{pr_2} & N \\ \alpha & \longmapsto & (\alpha, 0) & \longmapsto & (\alpha, \mu(\alpha)) & \longmapsto & \mu(\alpha). \end{array}$$

A formal proof of both facts, using the minimal fixpoint construction given in theorem 1, may be found in the author's thesis. Since we have obtained the μ -operator as semantics of a program, it appears now in any topos, but clearly it cannot satisfy the classical conditions of a μ -operator. So such a morphism is some kind of generalization of the well-ordering. A question remaining to be answered is to find conditions characterizing such a μ -operator in an arbitrary topos.

ACKNOWLEDGEMENTS. I am indebted to José Meseguer for the presentation of program schemas with algebraic theories. He will draw it in detail in a forthcoming paper.

1. FREYD P., Aspects of Topoi, *Bull. Austr. Math. Soc.* 7 (1972).
2. COSTE M.F., COSTE M. and PARENT J., Algèbres de Heyting dans les topos, *Séminaire Bénabou*, Paris (1975).
3. OSIUS G., Logical and set theoretical tools in elementary topoi, *Lecture Notes in Math.* 445 (1975).
4. KOCK A. and WRAITH G., Elementary topos, *Aarhus Lecture Notes* 30 (1971).
5. SCOTT D., The lattice of Flow-diagrams, *Lecture Notes in Math.* 182 (1971).
6. SOLS I., Aportaciones a la teoría de topos, al álgebra universal y a las matemáticas fuzzy, *Tesis doctoral Zaragoza* (1975).
7. EHRIG H., KUHNEL W. and PFENDER M., Diagram characterization of recursion, *Lecture Notes in Computer Sc.* 25, Springer (1975).

UNPLEASANT PROPERTIES OF THE REALS IN A TOPOS

by Lawrence STOUT

The Dedekind reals, here called \mathbf{R} , were defined by Tierney and studied for algebraic applications by Mulvey in his paper in Memoirs 148. \mathbf{R} is the subobject of $PQ \times PQ$ consisting of those pairs $(\underline{r}, \overline{r})$ such that \underline{r} is an open lower cut, \overline{r} is an open upper cut, every member of \underline{r} is smaller than every member of \overline{r} and

$$\forall n \in \mathbf{N} \exists q, q' \in Q (q \in \overline{r} \wedge q' \in \underline{r} \wedge q - q' < \frac{1}{n}).$$

The order relations $<$ and \leq are defined by

$$r < s \text{ iff } \exists q \in Q (q \in \overline{r} \wedge q \in \underline{s})$$

and

$$r \leq s \text{ iff } \underline{r} \subseteq \underline{s} \text{ and } \overline{s} \subseteq \overline{r}.$$

The interval topology on \mathbf{R} , here called $T_{\mathbf{R}}$, is the smallest topology containing

$$\{S \mid \exists r, s \in \mathbf{R} (r > s \wedge \forall t \in \mathbf{R} (t \in S \iff r < t < s))\}.$$

The norm $||$ is defined by

$$|\underline{s}| = \underline{s} \cup \overline{\underline{s}} \text{ and } |\overline{s}| = \overline{s} \cap \underline{\overline{s}}.$$

With these definitions \mathbf{R} has several nice properties, in particular: $(\mathbf{R}, T_{\mathbf{R}})$ is a complete topological group, a complete metric space second countable, and has Q dense. It also has several more unpleasant (in the sense of differing from classical mathematics) properties.

EXAMPLES. 1^o (\mathbf{R}, \leq) is not complete: In $Sb(R)$ take the subobject of all germs of functions with value less than or equal to $\chi_{[0, \infty]}$. This is bounded by the constant function 2 but fails to have a continuous least upper bound.

2^o $[0, 1]$ is not compact: This is essentially the same as Example 1.

3^o $[0, 1]$ need not equal $[0, \frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 1]$: In sheaves on the unit interval the function $f(x) = x$ is not globally in either piece on any interval containing $\frac{1}{2}$.

4° Trichotomy fails for (\mathbf{R}, \leq) : In sheaves on the unit interval

$$f(x) = x \quad \text{and} \quad g(x) = \frac{1}{2}$$

do not satisfy

$$f > g \vee f = g \vee f < g$$

on any interval containing $\frac{1}{2}$.

5° Simpleminded Hausdorff properties fail: The two reals in 4° satisfy $f \neq g$ but cannot be separated using open sets.

6° Not so simpleminded normality properties fail: In $Sb(\mathbf{R})$ let A be the sheaf of germs of nonpositive real valued functions and B be the sheaf of germs of functions \geq the absolute value function. Then both A and B are closed and $A \cap B = \emptyset$, but A and B cannot be separated by open sets since $| \cdot |$ and 0 cannot be separated.

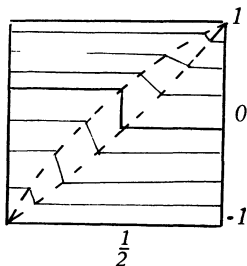
7° $(\mathbf{R}, T_{\mathbf{R}})$ fails to satisfy

$$\forall X \subseteq \mathbf{R} ((X \in T_{\mathbf{R}} \wedge X \text{ closed}) \Rightarrow X = \mathbf{R} \vee X = \emptyset) :$$

In $Sb(A)$ for A connected let X be the subsheaf which is \mathbf{R} on some open set U and empty elsewhere. This is clopen but does not satisfy

$$X = \mathbf{R} \vee X = \emptyset .$$

8° The intermediate value theorem may fail: In $Sb(\mathbf{R})$ we may obtain a continuous function from \mathbf{R} to \mathbf{R} by giving a continuous function f from $R \times R$ to R and taking a germ $x \mapsto f(x, g(x))$. The needed counterexample is the function described by the surface with the following contour map:



In no neighborhood of $\frac{1}{2}$ does the 0 level define a function.

The Hausdorff and normality difficulties may be circumvented by

making use of the apartness relations for points and closed sets.

DEFINITION. $r \# s \iff r > s \vee s > r$.

PROPOSITION. $r \# s$ is an apartness relation, i. e.

$$1^\circ r \# s \implies s \# r.$$

$$2^\circ \forall r, s \in \mathbf{R} (\bigwedge (r \# s) \iff r = s).$$

$$3^\circ \forall r, s, t \in \mathbf{R} (r \# s \implies (r \# t \vee s \# t)).$$

PROPOSITION. $(\mathbf{R}, T_{\mathbf{R}})$ satisfies the Hausdorff condition

$$\forall r, s \in \mathbf{R} (r \# s \implies \exists O, O' \in T_{\mathbf{R}} (r \in O \wedge s \in O' \wedge O \cap O' = \emptyset)).$$

COROLLARY. $(\mathbf{R}, T_{\mathbf{R}})$ satisfies:

$$\forall r, s \in \mathbf{R} (r \neq s \implies \bigwedge \bigwedge \exists O, O' \in T_{\mathbf{R}} (r \in O \wedge s \in O' \wedge O \cap O' = \emptyset)).$$

DEFINITION. $A \# B$ if and only if

$$\forall a \in A \exists n \in \mathbf{N} \forall b \in B (|a-b| > \frac{1}{n}) \wedge \forall b \in B \exists n \in \mathbf{N} \forall a \in A (|a-b| > \frac{1}{n}).$$

PROPOSITION. If A and B are closed and $A \# B$ then A and B can be separated using open subobjects of \mathbf{R} .

A definition of Hausdorff using convergence also works well:

PROPOSITION. For $(\mathbf{R}, T_{\mathbf{R}})$ filter convergence factors through $\tilde{\mathbf{R}}$, that is, no filter has more than one limit point.

These examples and the salvaged concepts demonstrate how the work of the intuitionist logicians can be used to gain intuition about what should and should not be true in a topos even though, for the real numbers, their proofs and some of the theorems are not valid because of the failure, in general topoi, of the spread theorem.

PRODUITS TENSORIELS TOPOLOGIQUES^(*)

* par Daniel TANRE

Les structures usuellement considérées sur les espaces fonctionnels n'ont pas en général les propriétés d'une exponentiation relativement au produit de topologies (cf. [6]). C'est ce qui conduit ici à modifier la notion de produit en celle de produit tensoriel. Cette idée apparaît d'ailleurs déjà dans [6]; cependant l'origine du présent travail se trouve surtout dans [5] et dans [1].

Dans [5], les auteurs étudient les applications séparément continues que nous généralisons en applications (σ', σ) -hypocontinues entre espaces topologiques. Nous sommes ainsi amenés à définir une « famille bornante » dans un espace topologique, notion qui doit permettre diverses extensions de propriétés définies dans les espaces vectoriels topologiques. Par exemple, une notion de borné intervient dans l'étude de la différentiabilité dans les modules topologiques [8].

Dans [1], la définition de produit σ -tensoriel est posée et les propriétés en sont étudiées lorsque les éléments de σ sont compacts.

Nous allons maintenant préciser les divers résultats obtenus.

Soit (E, T) et (E', T') deux espaces topologiques; soit σ un recouvrement de E . On note $C_\sigma(T', T)$ la topologie [6] de la σ -convergence sur l'ensemble $C(T', T)$ des applications continues de (E, T) vers (E', T') . On définit [1] sur l'ensemble $E' \times E$ une topologie, notée $T' \otimes_\sigma T$, appelée *topologie produit tensoriel*, qui coïncide avec celle définie dans [5] si σ est l'ensemble des singletons de E . Soit (E'', T'') un nouvel espace topologique; une application f de $E' \times E$ dans E'' est dite σ -hypocontinue si elle définit une application continue de $T' \otimes_\sigma T$ vers T'' .

La partie σ est dite *bornante pour* (E, T) si, pour tout (E', T') et tout (E'', T'') , les espaces $C(C_\sigma(T'', T), T')$ et $C(T'', T' \otimes_\sigma T)$ sont en bijection canonique. Si les éléments de σ sont les compacts de (E, T) , alors σ est bornante. Si on considère des applications bilinéaires et linéaires

(*) Ce résumé est extrait de l'article « Produits tensoriels topologiques », qui paraîtra dans le volume V de la revue « Mathematica Balkanica » (Belgrade).

res continues entre espaces vectoriels topologiques, σ est bornante ssi ses éléments sont bornés au sens usuel.

Sous les hypothèses des paragraphes précédents, soit f une application de $E' \times E$ dans E'' . Considérons les axiomes suivants (où $M(E'', E)$ désigne l'ensemble des applications de E dans E''):

H1: L'application de E' dans $M(E'', E)$ déduite de f est continue de T' vers $C_\sigma(T'', T)$;

H2: L'application de E dans $M(E'', E')$ déduite de f envoie E dans $C(T'', T')$ et transforme les éléments de σ en parties également continues [4] de $C(T'', T')$;

H3: f est continue de $T' \otimes_\sigma T$ vers T'' (σ -hypocontinuité).

Si σ est héréditaire et si f est séparément continue, on a

$$H1 \Rightarrow H2 \Rightarrow H3.$$

Si de plus σ est bornante, les trois axiomes sont équivalents, l'hypothèse héréditaire pouvant être affaiblie dans certains cas particuliers.

Pour terminer, nous définissons une partie bornée d'un espace topologique (E, T) de la façon suivante: soit H une partie de E et $\mathcal{P}(H)$ l'ensemble des parties de H ; on pose $\sigma(H) = \mathcal{P}(H) \cup \{ \{x\} \mid x \in E \}$; alors H est borné ssi $\sigma(H)$ est bornante. Cette notion est stable par hérédité, par réunion finie, par image par une application continue; de plus tout compact est borné. L'avantage de cette définition est d'être purement topologique et de ne faire intervenir aucune notion de cardinalité.

1. A. BASTIANI, *Topologie générale*, cours multigraphié, Amiens 1974.
2. N. BOURBAKI, *Espaces vectoriels topologiques*, Hermann, Paris.
3. A. GROTHENDIECK, *Espaces vectoriels topologiques*, Sao Paulo 1964.
4. J. E. KELLEY, *General Topology*, Van Nostrand, Amsterdam 1955.
5. KNIGHT-MORAM-PYM, The topologies of separate continuity, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* 68 (1970).
6. N. NOBLE, Ascoli theorems and the exponential map, *Trans. A.M.S.* 143 (1969).
7. D. TANRE, Produits tensoriels topologiques, *C.R.A.S Paris* 280 (1975).
8. X. C. VU, Différentiabilité dans les modules topologiques (à paraître).
9. F. FOLTZ, Produit tensoriel généralisé, *Cahiers Topo. Géo. diff.* X-3 (1968).

ON CATEGORIES OF COCONTINUOUS FUNCTORS. APPLICATIONS

by Friedrich ULMER

Let \mathbf{A} be a category and let $[-, \cdot] : \mathbf{A}^0 \times \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{Sets}$ be its hom-functor. Let Σ be a class of morphisms in \mathbf{A} and denote by \mathbf{A}_Σ the full subcategory of \mathbf{A} consisting of all objects X such that $[\sigma, X]$ is a bijection for every $\sigma \in \Sigma$. Freyd-Kelly [3], Gabriel-Ulmer [4], Ulmer [8] and others gave sufficient conditions on \mathbf{A} and Σ to guarantee that the inclusion $\mathbf{A}_\Sigma \subset \mathbf{A}$ has a left adjoint. With this they proved - among other things - that categories of continuous (or Σ -continuous) functors form reflective subcategories. However the dual problem for categories of cocontinuous or Σ -cocontinuous functors remained open (partial results were stated without proof in Freyd [2] p. 118-119, and Freyd-Kelly [3], p. 170). Likewise the related problem of describing the category $Adj(\mathbf{A}, \mathbf{C})$ of all adjoint functors between categories \mathbf{A} and \mathbf{C} remained open, except for the formal equivalence between $Adj(\mathbf{A}, \mathbf{C})$ and coalgebras in \mathbf{C} in case \mathbf{A} is a category of algebras (cf. Freyd [2], Pultr [6] and Isbell [5]).

The aim of this paper is to solve these problems for locally presentable categories and topological categories over them. We show that the category of adjoint functors between locally presentable categories is again locally presentable and so is the category of all Σ -cocontinuous covariant functors $\mathbf{U} \rightarrow \mathbf{C}$, provided \mathbf{C} is locally presentable, \mathbf{U} is small and the ranges of Σ form a set. For this we first describe a sufficiently general frame: Let $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ be categories, let $T : \mathbf{B} \times \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C}$ be a bifunctor and let Σ be a class of morphisms in \mathbf{B} . The examples to keep in mind are:

$$T = [-, \cdot], \quad T = \otimes$$

and other bifunctors with similar properties. Let $\mathbf{A}_{\Sigma, T}$ be the full subcategory of \mathbf{A} consisting of all objects X such that $T(\sigma, X)$ is an isomorphism for each $\sigma \in \Sigma$. Clearly $\mathbf{A}_{\Sigma, T}$ is closed in \mathbf{A} under colimits (resp. limits) provided

$$T(d\sigma, -) : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C} \quad \text{and} \quad T(r\sigma, -) : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C}$$

preserve colimits (resp. limits) for every $\sigma \in \Sigma$, where $d\sigma$ and $r\sigma$ denote

the domain and the range of σ . Our main results are :

I. THEOREM. Let \mathbf{A} and \mathbf{C} be locally presentable categories and let Σ be a set of morphisms in a category \mathbf{B} . Let $T : \mathbf{B} \times \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C}$ be a bifunctor. If for every $\sigma \in \Sigma$ the functors $T(d\sigma, -)$ and $T(r\sigma, -)$ preserve colimits (resp. limits and monomorphic α -filtered colimits), then $\mathbf{A}_{\Sigma, T}$ is again locally presentable, in particular the inclusion $\mathbf{A}_{\Sigma, T} \subset \mathbf{A}$ has a right adjoint (resp. left adjoint). An upper bound for the presentation rank $\pi(\mathbf{A}_{\Sigma, T})$ of $\mathbf{A}_{\Sigma, T}$ is given by

$$\sup_{\sigma \in \Sigma} \{ \pi(\mathbf{A}), |\Sigma|^+, \pi S(d\sigma, -), \pi S(r\sigma, -) \},$$

$$\text{resp. } \sup_{\sigma \in \Sigma} \{ \pi(\mathbf{A}), \pi T(d\sigma, -), \pi T(r\sigma, -) \},$$

where $|\Sigma|^+$ denotes the least regular cardinal $> |\Sigma|$ (*) and $S(d\sigma, -)$ and $S(r\sigma, -)$ denote the right adjoints of $T(d\sigma, -)$ and $T(r\sigma, -)$ (for π of a category see [4], 7.1; π of a functor F denotes the least regular cardinal α such that F preserves α -filtered colimits, see [4], 14.6).

II. THEOREM. Let \mathbf{A}, \mathbf{B} and \mathbf{C} be locally presentable categories, and let $T(-, -) : \mathbf{B} \times \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C}$ be a bifunctor which is cocontinuous in both variables. Let Σ be a class of morphisms in \mathbf{B} such that the ranges $\{r\sigma \mid \sigma \in \Sigma\}$ form a set. Then the inclusion $\mathbf{A}_{\Sigma, T} \subset \mathbf{A}$ has a right adjoint and $\mathbf{A}_{\Sigma, T}$ is locally presentable. Moreover $\pi(\mathbf{A}_{\Sigma, T})$ can be estimated by

$$T, \Sigma, \mathbf{A}, \mathbf{B} \text{ and } \mathbf{C}.$$

III. THEOREM. Let \mathbf{A} and \mathbf{C} be locally presentable categories. Let \mathbf{B} be a category and let Σ be a class of morphisms in \mathbf{B} . Let $T : \mathbf{B}^0 \times \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C}$ be a bifunctor such that for every $\sigma \in \Sigma$ the functors $T(d\sigma, -)$ and $T(r\sigma, -)$ preserve limits and monomorphic α -filtered colimits (α may depend on σ). Assume that for every $\sigma \in \Sigma$ there is a factorization

$$d\sigma \xrightarrow{\sigma_0} t_\sigma \xrightarrow{\sigma_1} r\sigma$$

such that $T(\sigma_0, X)$ is an isomorphism for every subobject X of any object

(*) If M is a set, then $|M|$ denotes the cardinality of M .

$A \in \mathbf{A}_{\Sigma, T}$ and such that $\{\sigma_1 \mid \sigma \in \Sigma\}$ is a set. Then, the inclusion of $\mathbf{A}_{\Sigma, T}$ into \mathbf{A} has a left adjoint. (However $\mathbf{A}_{\Sigma, T}$ need not be locally presentable, for a counter-example see [4], 8.15.)

REMARKS. a) It seems unlikely that Theorem II can be generalized to locally bounded categories in the sense of Freyd-Kelly [3]. In contrast, Theorem III can be easily generalized to that situation. In Theorem II the assumption that $T(\cdot, \cdot)$ is cocontinuous in the first variable can be weakened.

b) The assumption that $\{r\sigma \mid \sigma \in \Sigma\}$ is a set can obviously be replaced by the «weaker» assumption that the full subcategory generated by the objects $r\sigma$, $\sigma \in \Sigma$, is small.

Applications.

Let \mathbf{U} be a small category and let Σ be a class of morphisms in $[\mathbf{U}^0, \mathbf{Sets}]$. Recall that a functor $t: \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{C}$ is called Σ -cocontinuous (resp. Σ -continuous) iff for every $\sigma \in \Sigma$ and every $C \in \mathbf{C}$ the map

$$[\sigma, [t\cdot, C]] \quad (\text{resp. } [\sigma, [C, t\cdot]])$$

is bijective. If \mathbf{C} is cocomplete (resp. complete), then there is a tensor product bifunctor (resp. symbolic hom)

$$\otimes: [\mathbf{U}^0, \mathbf{Sets}] \times [\mathbf{U}, \mathbf{C}] \rightarrow \mathbf{C},$$

$$[-, -]: [\mathbf{U}^0, \mathbf{Sets}] \times [\mathbf{U}^0, \mathbf{C}] \rightarrow \mathbf{C}$$

defined by

$$[R \otimes t, C] \cong [R, [t\cdot, C]], \quad [C, [R, s\cdot]] \cong [R, [C, s\cdot]]$$

$$\text{for all } C \in \mathbf{C}, R \in [\mathbf{U}^0, \mathbf{Sets}], t \in [\mathbf{U}, \mathbf{C}] \text{ and } s \in [\mathbf{U}^0, \mathbf{C}],$$

see Gabriel-Ulmer [4], 8.1. Hence $t: \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{C}$ (resp. $s: \mathbf{U}^0 \rightarrow \mathbf{C}$) is Σ -cocontinuous (resp. Σ -continuous) iff $\sigma \otimes t$ (resp. $[\sigma, t]$) is an isomorphism for every $\sigma \in \Sigma$. The full subcategory of $[\mathbf{U}, \mathbf{C}]$ consisting of all Σ -cocontinuous functors is denoted with $Cc_{\Sigma}[\mathbf{U}, \mathbf{C}]$. Likewise $C_{\Sigma}[\mathbf{U}^0, \mathbf{C}]$ denotes the full subcategory of all Σ -continuous functors. Recall that a category \mathbf{X} is locally presentable iff there is a small category \mathbf{V} and a set Ω of morphisms in $[\mathbf{V}^0, \mathbf{Sets}]$ such that $\mathbf{X} \cong C_{\Omega}[\mathbf{V}^0, \mathbf{Sets}]$ (cf. Gabriel-Ulmer [4], 8-7).

IV. COROLLARY. Let \mathbf{U} be a small category and let Σ be a class of morphisms in $[\mathbf{U}^0, \mathbf{Sets}]$ such that $\{r\sigma \mid \sigma \in \Sigma\}$ is a set (for instance when Σ is induced by a class of colimits or cones in \mathbf{U}).

a) Then for any locally presentable category \mathbf{C} the category $C_{C\Sigma}[\mathbf{U}, \mathbf{C}]$ is again locally presentable and the inclusion

$$C_{C\Sigma}[\mathbf{U}, \mathbf{C}] \hookrightarrow [\mathbf{U}, \mathbf{C}]$$

has a right adjoint.

b) Let $\tilde{\mathbf{C}}$ be a topological category over a locally presentable category \mathbf{C} , i. e. there is a fibre small faithful functor $V: \tilde{\mathbf{C}} \rightarrow \mathbf{C}$ with a full and faithful left adjoint. Then the inclusion

$$C_{C\Sigma}[\mathbf{U}, \tilde{\mathbf{C}}] \hookrightarrow [\mathbf{U}, \tilde{\mathbf{C}}]$$

has a right adjoint. (This follows from a and Wischnewsky [9], 2.23.)

REMARK. The corresponding assertions for Σ -continuous functors have been stated and proved by Freyd-Kelly [3], Wischnewsky [9] and Gabriel-Ulmer [4], 8. We therefore don't repeat them.

V. COROLLARY. Let \mathbf{A} be a locally presentable category, or more generally, let $\mathbf{A} \cong C_{\Sigma}[\mathbf{U}^0, \mathbf{Sets}]$, where \mathbf{U} is small and Σ is a class of morphisms in $[\mathbf{U}^0, \mathbf{Sets}]$ such that $\{r\sigma \mid \sigma \in \Sigma\}$ is a set. Then for any locally presentable category \mathbf{C} the category $Adj(\mathbf{A}, \mathbf{C})$ of adjoint pairs $(T \dashv S)$ between \mathbf{A} and \mathbf{C} is again locally presentable.

In more detail let

$$L: [\mathbf{U}^0, \mathbf{Sets}] \rightarrow C_{\Sigma}[\mathbf{U}^0, \mathbf{Sets}]$$

be the left adjoint of the inclusion

$$C_{\Sigma}[\mathbf{U}^0, \mathbf{Sets}] \subset [\mathbf{U}^0, \mathbf{Sets}]$$

and let \mathbf{U}' be the full subcategory of $C_{\Sigma}[\mathbf{U}^0, \mathbf{Sets}]$ generated by the objects $L[-, U]$, $U \in \mathbf{U}$. Let $l: \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{U}'$ be the functor $U \rightsquigarrow L[-, U]$ and let Σ' be the image of Σ under the Kan extension

$$E_l: [\mathbf{U}^0, \mathbf{Sets}] \rightarrow [\mathbf{U}'^0, \mathbf{Sets}] \quad \text{of } l: \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{U}'.$$

a) Then, the functor

$$R : Adj(\mathbf{A}, \mathbf{C}) \rightarrow [\mathbf{U}', \mathbf{C}], \quad (T \dashv S) \rightsquigarrow T|_{\mathbf{U}'}$$

is full and faithful and its image consists of all Σ' -cocontinuous functors $\mathbf{U}' \rightarrow \mathbf{C}$. Thus by Corollary IV R has a right adjoint and $Adj(\mathbf{A}, \mathbf{C})$ is locally presentable. Moreover the representable functors $\mathbf{U}'^0 \rightarrow \mathbf{Sets}$ are Σ' -continuous.

b) Let $\tilde{\mathbf{C}}$ be a topological category over a locally presentable category \mathbf{C} . Then the functor

$$R : Adj(\mathbf{A}, \tilde{\mathbf{C}}) \rightarrow [\mathbf{U}', \tilde{\mathbf{C}}], \quad (T \dashv S) \rightsquigarrow T|_{\mathbf{U}'}$$

is full and faithful and its image consists of all Σ' -cocontinuous functors $\mathbf{U}' \rightarrow \tilde{\mathbf{C}}$. Thus by Corollary IV-b R has a right adjoint. Moreover the representable functors $\mathbf{U}'^0 \rightarrow \mathbf{Sets}$ are Σ' -continuous.

Whereas $Adj(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ is locally presentable if \mathbf{A} and \mathbf{B} are, there is no corresponding assertion for topoi or Grothendieck categories unless \mathbf{A} has additional properties. The following definition is motivated by this.

DEFINITION. (The notations are those of Schubert [7], 20.1.5.) A site $(\mathbf{U}, \mathcal{J})$, i.e. a small category \mathbf{U} together with a Grothendieck topology \mathcal{J} , is called *flat* if every covering sieve $R \in \mathcal{J}(U)$, $U \in \mathbf{U}$, admits a refinement $\bar{R} \subset R$, $\bar{R} \in \mathcal{J}(U)$, which is a filtered colimit of representable functors. A topos \mathbf{A} is called *flat* if there is a flat site $(\mathbf{U}, \mathcal{J})$ such that \mathbf{A} is equivalent to the category of \mathcal{J} -sheaves on \mathbf{U} with values in \mathbf{Sets} .

Flat additive sites (cf. Schubert [7], 20.3.10) and flat Grothendieck categories (= \mathbf{Ab} -topoi) are defined likewise.

VI. COROLLARY. a) Let \mathbf{A} and \mathbf{C} be topoi, \mathbf{A} flat. Then $Adj(\mathbf{A}, \mathbf{C})$ is a topos.

b) Let \mathbf{A} and \mathbf{C} be Grothendieck categories, \mathbf{A} flat. Then $Adj(\mathbf{A}, \mathbf{C})$ is a Grothendieck category.

REMARK. Corollary VI is a special case of the following addendum to Corollary IV which can be proved as Corollary VI: Let \mathbf{U} be a small category (resp. small additive category) and let Σ be a class of morphisms in

$$[\mathbf{U}^0, \mathbf{Sets}] \quad (\text{resp. } [\mathbf{U}^0; \mathbf{Ab Gr}]^+)$$

such that $\{r\sigma \mid \sigma \in \Sigma\}$ is a set and for every $\sigma \in \Sigma$ the functors $d\sigma$ and $r\sigma$ are filtered colimits of representable functors. Let \mathbf{C} be a topos (resp. a Grothendieck category). Then $C_{C\Sigma}[\mathbf{U}, \mathbf{C}]$ is a topos (resp. $C_{C\Sigma}[\mathbf{U}, \mathbf{C}]^+$ is a Grothendieck category). Note that $[\mathbf{U}, \mathbf{C}]^+$ denotes the category of additive functors $\mathbf{U} \rightarrow \mathbf{C}$.

VII. COROLLARY. The category of bicommutative (resp. commutative) Hopf algebras over a commutative ring R is locally presentable and its presentation rank is $\leq \aleph_1$.

This follows from IV-a and I if \mathbf{C} is the category of commutative R -algebras and \mathbf{U} the category of finitely generated free groups (resp. f. g. abelian groups) and Σ is given by finite coproducts. One can also show directly that in the category of all Hopf algebras over a commutative ring R the Hopf algebras whose underlying R -algebra is \aleph_1 -presentable form a «set» of dense \aleph_1 -presentable generators.

1. FREYD P., *Abelian categories*, Harper and Row, New-York, 1964.
2. FREYD P., Algebra valued functors in general categories and tensor products in particular, *Colloq. Math.* 14 (1966).
3. FREYD P. and KELLY G.M., Categories of continuous functors, *J. Pure and App. Algebra* 2 (1972).
4. GABRIEL P. and ULMER F., Lokal präsentierbare Kategorien, *Lecture Notes in Math.* 221, Springer (1971).
5. ISBELL J. R., General functorial Semantics I, *Amer. J. Math.* 94 (1972).
6. PULTR A., The right adjoints into the categories of relational systems. *Lecture Notes in Math.* 137, Springer (1970).
7. SCHUBERT H., *Categories*, Springer, 1972.
8. ULMER F., On the existence and exactness of the associated sheaf functor, *J. Pure and App. Algebra* 3 (1973).
9. WISCHNEWSKY M.B., Generalized universal algebra in initial structure categories, *Algebra-Berichte* 10, Univ. München (1973).

**CATEGORICAL METHODS IN THE THEORY OF
LINEAR REPRESENTATIONS OF AFFINE GROUPS**

by Manfred B. WISCHNEWSKY

Let k be a commutative ring with a unit. $k\text{-Alg}$ shall denote a small category of models of k -algebras. Recall that an affine k -monoid (k -group) is a monoid (group) in the functor category $[k\text{-Alg}, \text{Sets}]$ whose underlying functor is representable. Let M be a k -module. Then M induces an affine k -monoid $\mathcal{L}(M): k\text{-Alg} \rightarrow \text{Sets}$ by the following assignement :

$$\mathcal{L}(M)A = \text{End}_A(M \otimes_k A).$$

A linear representation of an affine k -monoid (resp. k -group) in a k -module M is a monoid morphism $\phi: G \rightarrow \mathcal{L}(M)$. The linear representations of a monoid G form in an obvious way a category which is isomorphic to the category of C -comodules where C is the representing object of the affine k -monoid G (cf. [1]). Recall that a C -comodule over a k -coalgebra $C = (C, \Delta, \varepsilon)$ is a pair (M, χ) consisting of a k -module and a k -linear mapping

$$\begin{aligned} \chi: M &\rightarrow M \otimes C \text{ such that} \\ M \otimes \Delta \cdot \chi &= \chi \otimes C \cdot \chi \quad \text{and} \quad M \otimes \varepsilon \cdot \chi = id_M. \end{aligned}$$

A k -linear mapping f between C -comodules (M, χ_M) and (N, χ_N) is a C -comodule homomorphism if $\chi_N f = f \otimes C \chi_M$.

In this paper I study the basic properties of the category of comodules over an arbitrary k -coalgebra. Categories of comodules were already studied by several authors where k is a field or where the coalgebra is finite or flat ([1], [2]). The main difficulty in studying general comodule categories lies in the fact that the functor $-\otimes C$ is no longer exact. This for instance implies that the homomorphism theorem is not valid or that the comodule structure of a submodule is no longer unique.

In the language of monoidal categories a k -coalgebra (C, Δ, ε) is just a comonoid in the monoidal category $(k\text{-Mod}, \otimes)$. A C -comodule (M, χ_M) is a right coaction of C on a k -module M and a C -comodule homomorphism is a morphism between coactions of C in $(k\text{-Mod}, \otimes)$. This formal description gives us at once some elementary results as the existence of a right ad-

joint of the underlying functor $U: \text{Comod-}C \rightarrow k\text{-Mod}$ or the creation of colimits by U . In the sequel I'll give another description of $\text{Comod-}C$ which allows us to apply the highly developed theory of monads. Let (C, Δ, ε) be a coalgebra. Then C induces a comonad on $k\text{-Mod}$ by the following assignments:

$$C := - \otimes C : k\text{-Mod} \longrightarrow k\text{-Mod},$$

$$\Delta := - \otimes \Delta : C \longrightarrow C^2, \quad \varepsilon := - \otimes \varepsilon : C \longrightarrow \text{Id}_{k\text{-Mod}}.$$

The corresponding Eilenberg-Moore category is clearly the category of C -comodules. Hence we obtain:

THEOREME 1. *The underlying functor $U: \text{Comod-}C \rightarrow k\text{-Mod}$ is comonadic. «The» right adjoint G is defined by $M \rightarrow (M \otimes C, M \otimes \Delta)$.*

Theorem 1 implies immediately that U creates colimits and isomorphisms. In particular $\text{Comod-}C$ is cocomplete and the colimits are formed in $k\text{-Mod}$. Furthermore $\text{Comod-}C$ is cowellpowered and has a cogenerator. Since $k\text{-Mod}$ is an additive category we get that $\text{Comod-}C$ is an additive category. The adjoint functors U and G are additive. Moreover G is exact and U is right exact. U is exact if and only if C is flat or if and only if G preserves injectives. If C is flat then $\text{Comod-}C$ is a Grothendieck-category and furthermore U preserves and reflects finite limits and colimits.

EXAMPLES. (1) If k is a regular ring in the sense of von Neumann, then every category of comodules is a Grothendieck-category.

(2) Let A be an abelian group which is not torsion free (e. g. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}). Then the abelian group $\mathbb{Z} \oplus A$ with

$$\Delta(r, t) = r \otimes 1 + 1 \otimes t + t \otimes 1 \quad \text{and} \quad \varepsilon(r, t) = r$$

is a coalgebra which is not flat.

THEOREME 2. *$\text{Comod-}C$ is a Grothendieck-category if and only if C is flat.*

Hence $\text{Comod-}C$ is in general only additive but not abelian. By applying the results of P. Freyd and Alderman $\text{Comod-}C$ can nicely be embedded into an abelian category.

THEOREM 3. *Let C be a coalgebra. Then*

(1) *There exists an abelian category $Ab(Comod-C)$ and a full and faithful functor $I: Comod-C \rightarrow Ab(Comod-C)$ such that every additive functor $F: Comod-C \rightarrow B$ into an abelian category B can be factored through an exact functor $F': Ab(Comod-C) \rightarrow B$.*

(2) *$Ab(Comod-C)$ the free abelian category over $Comod-C$ is an AB4 and an AB4* (but in general no AB5) category. I preserves products and coproducts. I preserves equalizers (coequalizers) if and only if the equalizers (coequalizers) in $Comod-C$ are sections (retractions).*

(3) *$Ab(Comod-C)$ has sufficiently many projectives and injectives.*

One can easily show that $Comod-C$ is coreflexive in $Ab(Comod-C)$ if and only if every object in $Comod-C$ or equivalently if every object in $U(Comod-C)$ is projective. $Comod-C$ is reflective in, resp. even isomorphic to, $Ab(Comod-C)$ if and only if every object in $Comod-C$ is injective, i. e. if $Comod-C$ is a spectral category.

THEOREM 4. *Let C be an arbitrary coalgebra. Then the C -comodules whose cardinality is less than, or equal to, $\max(\text{card } k, \aleph_0)$ generate the category $Comod-C$. In particular $Comod-C$ has a generator.*

By applying the special adjoint functor theorem we obtain that the category $Comod-C$ is complete. Since $Comod-C$ is comonadic over $k\text{-Mod}$ we can explicitly describe the limits in $Comod-C$ by using Linton's techniques. If C is flat we get for instance for the product of a family (M_i, χ_i) of C -comodules (using Sweedler's notation for the comultiplication

$$\Delta c_k = \sum_{(c_k)} c_{k(1)} \otimes c_{k(2)}):$$

$$\prod_{Comod-C} (M_i, \chi_i) \cong \left\{ \sum_{finite} (m_i^k) \otimes c_k \in (\prod M_i) \otimes C \mid \right.$$

$$\left. \sum_{finite} (\chi_i(m_i^k)) \otimes c_k = \sum_{finite} \sum_{(c_k)} (m_i^k \otimes c_{k(1)}) \otimes c_{k(2)} \right\}.$$

The kernels in $Comod-C$ are just the injective comodule homomorphisms. The description of the limits was even in the case of a field k as yet not known. The next problem is to find out whether there are free C -comodules or not. The answer is given in:

THEOREM 5. *The underlying functor $U: \text{Comod-}C \rightarrow \text{Sets}$ has a left adjoint if and only if C is finitely generated and projective (as k -module).*

If C is finitely generated and projective as a k -module and if X is an arbitrary set, then the free comodule generated by X is given (up to isomorphisms) by

$$FX \cong \bigoplus_X C^* \quad \text{where} \quad C^* := k\text{-Mod}(C, k)$$

carries the «canonical» comodule structure. Furthermore I discuss the possible Isbell-factorizations in $\text{Comod-}C$. The main result is given in:

THEOREM 6. *Let (E, M) be a proper factorization in the sense of Isbell in $\text{Comod-}C$. Then the following statements are equivalent:*

(i) *The underlying functor $U: \text{Comod-}C \rightarrow k\text{-Mod}$ preserves the factorization.*

(ii) *U is exact.*

(iii) *C is flat.*

Finally, I discuss properties of functors between categories of comodules and characterize those comodule categories which are isomorphic to module categories.

1. DEMAZURE M., GABRIEL P., *Groupes algébriques*, Tome I, North-Holland, Amsterdam 1970.
2. SAAVEDRA R., *Catégories Tannakiennes, Lecture Notes in Math.* 265, Springer (1972).
3. SWEEDLER, *Hopf algebras*, Benjamin, New York, 1969.
4. WISCHNEWSKY M. B., *On linear representations of affine groups I*, L. M. U. München (preprint).

PROGRAMME DES CONFÉRENCES

Lundi 7 Juillet (après-midi)

Ouverture du Colloque par M. PEREZ, Président de l'Université de Picardie.

A. BASTIANI, Multiple functors.

M. B. WISCHNEWSKY, Categorical methods in the theory of linear representations of affine groups.

M. KELLY, Quelques observations sur les démonstrations par induction transfinie en Algèbre Catégorique.

R. MIJOLE, Le forcing pour l'étude des fondements.

Mardi 8 Juillet

D. TANRE, Produits tensoriels en Topologie.

A. KOCK, Some problems in the context of algebraic theories.

J. W. GRAY, Remarks on \mathbf{V} -algebraic theories.

J. MEISEN, Rich idempotent triples.

R. GUITART, Un contexte adapté aux relations continues.

Y. DIERS, Foncteur pleinement fidèle dense classifiant les algèbres.

P. HILTON, La théorie des classes de Serre nilpotentes.

Mercredi 9 Juillet

L. STOUT, Applications of Topos Mathematics.

J. PRADINES, Constructions de catégories vérifiant le théorème de Godement.

H. LINDNER, Commutative monads.

T. PORTER, Category of Pro-modules.

F. BORCEUX, Cocomplétion des catégories \mathbf{V} -algébriques

G. REYES, Faisceaux et concepts.

C. LAIR, Esquissabilité et triplabilité.

Jedi 10 Juillet

J. DUSKIN, Cohomologie simpliciale dans les catégories exactes.

P. LEROUX, Catégories de Möbius.

R. DIACONESCU, Cohomologie non abélienne à la Giraud. Applications à l'a-

xiome du choix.

G. C. L. BRUMMER, Un petit calcul des foncteurs de structures.

H. KLEISLI, Une définition universelle des groupes de diviseurs.

A. JOYAL, Théorèmes de Chevalley-Tarski.

M. P. FOURMAN, Comparaison des réels externes et internes d'un topos.

Vendredi 11 Juillet

J.-M. SIROT, Multifoncteurs conjugués en théorie des 2-catégories.

I. SOLS, Well-ordering in the NNO of a boolean topos.

G. BLANC, Propriétés de premier ordre et équivalence de catégories.

R. LAVENDHOMME, Cohomologie à coefficients dans une 2-catégorie.

K. BAUMGARTNER, On the evaluation of functors ; applications.

F. ULMER, When is the category of Σ -cocontinuous functors locally presentable ?

J. MESEGUER, Primitive recursive theories and program schemes.

Samedi 12 Juillet (matin), au Centre «Les Fontaines» à Chantilly

J. RIGUET, Grundy's functions from a categorical point of view.

F. E. J. LINTON, Les choix de variance prédestinés.

Conférences complémentaires

Les conférences suivantes, bien que résumées ici, n'ont pu avoir lieu, faute de temps.

D. BOURN, Pro-ditopos.

G. HOFF, L'homotopie des catégories.

J. L. MAC DONALD, Natural factorizations and the Kan extensions of cohomology theories.

ADRESSES DES CONFÉRENCIERS

ABREVIATIONS UTILISÉES :

AMIENS = U. E. R. de Mathématiques,
33 rue Saint-Leu, 80039 AMIENS CEDEX.

PARIS 7 = U.E.R. de Mathématiques, Tours 45-55, Université Paris 7,
2 Place Jussieu, 75005 PARIS.

Andrée BASTIANI, AMIENS.

Karlheinz BAUMGARTNER, Abteilung für Mathematik, Ruhr Univ.,
BOCHUM, R.F.A.

Georges BLANC, Service de Math., Faculté Sciences,
33 rue Louis Pasteur, 84000 AVIGNON.

Francis BORCEUX, Inst. Math., Univ. Louvain,, 2 Chemin du Cyclotron,
1348 LOUVAIN LA NEUVE, BELGIQUE.

Dominique BOURN, U.E.R. Math., Univ. Lille I,
B.P. 36, 59650 VILLENEUVE D'ASCQ.

Guillaume G.L. BRUMMER, Dept. of Math., Univ. of Cape Town, Private Bag,
RONDEBOSCH 7700 C.P., AFRIQUE DU SUD.

Radu DIACONESCU, Dept. Math., Mc Gill Univ., P.O.B. 6070 Station A,
MONTREAL, PQ, CANADA.

Yves DIERS, U.E.R. Sciences, Centre Univ. de Valenciennes,
Le Mont-Houy, 59326 VALENCIENNES.

Jack DUSKIN, Dept. Math., State Univ. of New York at Buffalo,
4246 Ridge Lea Road, AMHERST, N.Y. 14226, U.S.A.

Charles EHRESMANN, AMIENS.

Michael FOURMAN, Math. Inst., Univ. of Oxford, 24-29 St Giles,
OXFORD OX1 3LB, G.-B.

John W. GRAY, Dept. of Math., Univ. of Illinois,
URBANA, Ill. 61801, U.S.A.

René GUITART, PARIS 7.

Peter HILTON, - Dept. Math., Case Western Univ., CLEVELAND, Ohio 44106, U.S.A.
- Battelle Research Institute, SEATTLE, U.S.A.
- Forschungsinstitut für Math., E.T.H., ZURICH, SUISSE.

Georges HOFF, Dépt. de Math., Univ. Paris 13, Place du 8 Mai 1945,
93000 SAINT DENIS.

2^e COLLOQUE SUR L'ALGÈBRE DES CATEGORIES (AMIENS 1975)

André JOYAL, Dépt. de Math., Univ. du Québec à Montréal, Case Post. 8888,
MONTREAL 101, P.Q., CANADA.

G. Max KELLY, Math. Dept., Univ. of Sydney,
SYDNEY, N.S.W. 2006, AUSTRALIE.

Heinrich KLEISLI, Institut de Math., Univ. de Fribourg,
Pérolles, 1700 FRIBOURG, SUISSE.

Anders KOCK, Matematisk Inst., Aarhus Univ.,
8000 AARHUS C., DANEMARK.

René LAVENDHOMME, Inst. Math., Univ. de Louvain, 2 Chemin du Cyclotron,
1348 LOUVAIN LA NEUVE, BELGIQUE.

Pierre LEROUX, Dept. Math., Univ. du Québec à Montréal, Case Post. 8888,
MONTREAL 101, P.Q., CANADA.

Harald LINDNER, Math. Inst. II, Univ. Düsseldorf, Moorenstr. 5,
D 4000 DUSSELDORF, R.F.A.

Fred E.J. LINTON, Math. Dept., Wesleyan Univ.,
MIDDLETOWN, Conn. 06457, U.S.A.

John MAC DONALD, Math. Dept., Univ. of British Columbia,
VANCOUVER B.C., CANADA.

Jeanne MEISEN, Math. Dept., Case Western Univ.,
CLEVELAND, Ohio 44106, U.S.A.

José MESEGUER, Dpto. de Electricidad y Electronica, Fac. Ciencias, Univ.
ZARAGOZA, ESPAGNE.

Richard MIJOULE, C.N.A.M. PARIS et AMIENS.

Michael PFENDER, Fachbereich Math., Tech. Univ. Berlin,
Str. des 17 Juni 135, 1 BERLIN 12.

Timothy PORTER, Math. Dept., Univ. College,
CORK, IRELANDE.

Jean PRADINES, U.E.R. Math., Univ. Paul Sabatier, 118 Route de Narbonne,
31077 TOULOUSE.

Gonzalo REYES, Dépt. Math., Univ. de Montréal, Case Post. 6128,
MONTREAL 101, P.Q., CANADA.

Jacques RIGUET, U.E.R. de Math., Logique et Informatique,
Univ. Paris 5, 12 rue Cujas, 75005 PARIS.

Jean-Marie SIROT, PARIS 7.

Ignacio SOLS, Catedra de Geometria, Fac. Ciencias, Univ.,
ZARAGOZA, ESPAGNE.

Lawrence STOUT, Math. Dept., Mc Gill Univ., POB 6970 Station A,
MONTREAL, P.Q., CANADA

2^e COLLOQUE SUR L'ALGEBRE DES CATEGORIES (AMIENS 1975)

Daniel TANRE, AMIENS.

Friedrich ULMER, Dépt. de Math., Univ. de Zürich, Freiestr. 36,
8032 ZÜRICH, SUISSE.

Manfred B. WISCHNEWSKY, Math. Dept., Univ. Munich, Theresenstr. 39,
8 MUNICH 2, R.F.A.

AUTRES PARTICIPANTS :

Julian COLE, Fachbereich Math., Tech. Univ. Berlin,
Str. des 17. Juni 135, 1 BERLIN 12.

Luis ESPANOL, Catedra de Geometria, Fac. de Ciencias, Univ.
ZARAGOZA, ESPAGNE.

Myles TIERNEY, Math. Dept., Rutgers Univ.,
NEW BRUNSWICK, N.J. 08903, U.S.A.

et

LES CHERCHEURS DE L'EQUIPE T.A.C.

TABLE DES MATIERES

Introduction, par Bastiani - Ehresmann	217
Résumés des Conférences :	
Baumgartner	219
Blanc	222
Borceux	225
Bourn	228
Diers	231
Fourman	233
Gray	240
Guitart	244
Hilton	246
Hoff	251
Joyal	256
Kelly	259
Kleisli	264
Kock	266
Kühnel - Meseguer - Pfender - Sols	271
Lair	274
Leroux	280
Lindner	283
Mac Donald	289
Mijoule	291
Porter	295
Pradines	301
Reyes	307
Sirot	308
Sols	312
Stout	320
Tanré	323
Ulmer	325
Wischnewsky	331
Programme des Conférences	335
Adresses des Conférenciers	337