

# CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES

RENÉ GUITART

## **Monades involutives complémentées**

*Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques*, tome 16, n° 1 (1975), p. 17-101

[http://www.numdam.org/item?id=CTGDC\\_1975\\_\\_16\\_1\\_17\\_0](http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1975__16_1_17_0)

© Andrée C. Ehresmann et les auteurs, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## MONADES INVOLUTIVES COMPLEMENTEES

par René GUITART

C'est *le but essentiel* de cet article que de définir un système algébrique minimal et simple dont la présence sur une catégorie  $C$  a priori arbitraire permette le développement correct d'une théorie des relations entre objets de  $C$ . Le travail était commencé dans [1], dont le présent article est la suite annoncée, et l'on en conserve les notations. Un problème ici est de choisir les bons concepts entre les différents constituants algébriques de la théorie des catégories de relations dégagés dans [1]. Rappelons que parmi ceux-ci figuraient les notions suivantes:  $\epsilon$ -catégories ([1], § IV); algèbres de Boole; treillis complets, applications croissantes adjointes ([1] § I), chaînes dualisantes ([35] p.60); monades  $\tilde{\Pi}$ , et dualité de Stone; catégories à involution (cf. [5]).

Le principal outil utilisé est la notion de construction standard contravariante (c.s.c.), une telle construction consistant en un foncteur  $F: C^* \rightarrow C$  « auto-adjoint » + une « bonne » décomposition

$$x \xrightarrow{i_x} F(x) \xrightarrow{\psi_x} F^2(x)$$

du morphisme d'adjonction.

Différents auteurs se sont intéressés à la situation où un foncteur  $F: C^* \rightarrow C$  admet son dual  $F^*$  pour adjoint. A. Kock [40], principalement afin de définir les algèbres « commutatives » d'une monade, s'est intéressé à la monade  $A^{(A^{(-)})}$  dite de « double dualisation » (« double négation » dans [42]) dans une catégorie monoïdale fermée. (Dans [1], où était soulignée l'importance du point de vue de la théorie des relations des foncteurs « auto-adjoints », nous désignons par  $\tilde{\Pi}$  une telle monade.) En vue d'une présentation naturelle de la localisation, J. Lambek et B. Rattray (voir [41]) se sont aussi intéressés aux foncteurs  $Hom_C(A, \cdot): C^* \rightarrow \mathfrak{M}^0$  (où  $\mathfrak{M}^0$  est la catégorie des applications entre ensembles éléments d'un univers  $\mathcal{U}$  donné) et à la monade associée sur  $C$  que nous notons  $\tilde{\Pi}$  dans [1].

On sait que la monade  $2^{(2^{(-)})}$  sur  $\mathfrak{M}^0$  (voir I.4 et [1]) admet pour algèbres les algèbres de Boole atomiques complètes; c'est là une manière d'exprimer la *dualité de Stone*.

Par ailleurs la catégorie des relations entre ensembles est auto-duale grâce à la *symétrie cartésienne*.

Les rapports qu'entretiennent la dualité de Stone et la symétrie cartésienne sont élucidés (et généralisés au cas d'une catégorie  $C$  arbitraire) par notre premier résultat (Théorème I.1) où l'on voit que les notions de c.s.c. et de monade involutive (i.e. monade + une involution sur sa catégorie de Kleisli) sont équivalentes.

On examine ensuite quelles données sont nécessaires sur une catégorie à involution  $K$  pour qu'elle soit catégorie de Kleisli d'une m.i. sur une catégorie  $C$ , laquelle sera alors une sous-catégorie pleine de la catégorie des coalgèbres d'une comonade sur  $K$ . On indique aussi (I.2) comment le calcul des relations s'insère dans celui plus simple des hyper-relations (i.e. relations de  $\overline{\Pi}$ ).

C'est en tentant de reproduire dans le cadre d'une m.i. les morphismes « intersection », « complémentation », « saturation par induction », et l'ordre entre relations que l'on est amené (§ II.1) à introduire la notion de complémentation sur une monade involutive, et à parler de *monade involutive complétementée* (m.i.c.). On montre en II.2 que sur toute catégorie  $C$  la donnée d'une m.i.c. équivaut à la donnée d'une  $C$ -chaîne dualisante (autrement dit le théorème I.1 de [1], étendu ici sous la forme II.2.3 p. 58, est caractéristique d'une m.i.c.). On retrouve ainsi le calcul des applications adjointes; pour la question de l'ordre on remarque (Appendice II,6) que dans le cas ensembliste l'existence de l'ordre canonique entre relations est une *propriété* de la monade des parties, et non pas une donnée supplémentaire à ajouter éventuellement à cette monade involutive.

*Le résultat principal* de cet article est donc le théorème II.3.1 sur les principales présentations d'une m.i.c., qui enrichit le théorème I.1. Toutefois on notera aussi les résultats de I.3 et II.2, ainsi que le

fait qu'en appendice on donne des contre-exemples et des équations supplémentaires sur une m.i.c. qui montrent que la m.i.  $U_{\Omega}$  canonique sur un topos élémentaire n'est pas « libre ».

Dans la troisième partie on dégage, grâce au corollaire I.1.6 de I.1, la notion d'objet cantorien (p.76), et on donne deux classes d'exemples importants : d'une part les m.i.  $U_{\mathcal{O}}$  sur  $\mathfrak{M}^{\circ}$  associées aux monoïdes abéliens complets  $\mathcal{O}$  (ou gerbiers complets au sens de [44]), et d'autre part les m.i.  $U_{\Omega_j}$  sur un topos élémentaire  $H'$  associées aux topologies de Grothendieck  $j$  sur  $H'$ .

On termine (appendice III) par l'exemple des criblages dans la catégorie  $\mathcal{F}^{\circ}$  des catégories et foncteurs (catégorie généralement notée  $\mathcal{Cat}$ ).

Les résultats, sauf ceux des § I.3, III.1, III.3 et ceux des appendices II et III, ont été annoncés en [2].

On ne développe pas ici d'application directe de la théorie ; néanmoins nous avons indiqué dans deux exposés [43] et dans les notes [2, i et j] la possibilité de recherches dans la direction de la « traduction équationnelle ». Il nous semble que les travaux récents sur les modèles « non-standard » de diverses théories du 1<sup>er</sup> ordre dans les topos élémentaires pourraient être repris dans le contexte strictement équationnel des monades involutives.

## SOMMAIRE

### I. MONADES INVOLUTIVES.

|   |    |
|---|----|
| I.1. Construction standard contravariante et monade involutive. | 5  |
| I.2. Les relations et le calcul des hyper-relations .           | 21 |
| I.3. La monade associée sur les $U$ -fonctions .                | 35 |
| I.4. Premiers exemples .  | 41 |
| Appendice I: Contre-exemples naturels.                          | 46 |

### II. ADJONCTION D'UN COMPLEMENT A UNE MONADE INVOLUTIVE.

|   |    |
|---|----|
| II.1. Complément d'une monade involutive .  | 51 |
| II.2. Les catégories $\mathcal{J}_\alpha(\mathbf{U})$ et $\mathcal{J}_\alpha^*(\mathbf{U})$ . | 56 |
| II.3. Définitions d'une monade involutive complétée .   | 60 |
| Appendice II: Equations ou données supplémentaires .  | 62 |

### III. CONSTRUCTIONS DE MONADES INVOLUTIVES.

|  |    |
|--|----|
| III.1. Les catégories $MI(C)$ .                                    | 69 |
| III.2. Les monades $U_{\mathcal{O}}$ dans $\mathfrak{M}^{\circ}$ . | 72 |
| III.3. Monades involutives dans un topos élémentaire.              | 78 |
| Appendice III: Les monades $U_{\mathcal{O}}$ et les criblages.     | 80 |

|             |    |
|-------------|----|
| REFERENCES. | 83 |
|-------------|----|

I. MONADES INVOLUTIVES.

I.1. Construction standard contravariante et monade involutive.

Dans [1], rejetant a priori le point de vue consistant à voir les relations comme morphismes d'une catégorie à involution particulière (0.2.4), on a mis l'accent sur la monade  $\bar{\Pi}$  et sur le morphisme  $\psi_e$  (voir dans [1] le § IV, et ici le paragraphe I.3). Ceci a conduit à la notion de construction standard contravariante (introduite dans [2, f]). La relative complexité des axiomes d'une c.s.c. peut surprendre si l'on oublie que c'est le « cas ensembliste » qui a servi de support à leur élaboration. Le théorème principal I.1.1 démontré ici a été annoncé, pour la partie directe, dans [2, f], et, pour la réciproque, dans [2, g]. Ce théorème permet de constater que la donnée de  $\bar{\Pi}$  et  $\psi$  (i.e. de  $(F, i, \psi)$ ) vérifiant les « bons » axiomes sur une catégorie  $C$  quelconque est équivalente à la donnée d'une monade involutive  $\bar{P}$  (non complémentée pour l'instant (cf. § II)) sur  $C$ . On englobe donc ainsi le point de vue des catégories à involution initialement négligé, sans toutefois récupérer encore un ordre sur  $Kl(\bar{P})$ .

Si  $C$  est une catégorie, on appelle triple, ou construction standard, ou monade, sur  $C$  la donnée d'un triplet  $(T, \eta, \mu)$ , où  $T$  est un foncteur de  $C$  vers  $C$ ,

$$\eta = (\eta_e)_{e \in C_0} \text{ et } \mu = (\mu_e)_{e \in C_0}$$

deux familles de morphismes de  $C$  telles que  $\alpha(\eta_e) = e$  et  $\beta(\eta_e) = T(e)$  et que  $\alpha(\mu_e) = T^2(e)$  et  $\beta(\mu_e) = T(e)$ , ces données devant de plus satisfaire aux axiomes

- T1.  $(\forall f \in C) (T(f) \cdot \eta_{\alpha(f)} = \eta_{\beta(f)} \cdot f)$  ( $\eta: 1_C \rightarrow T$  est naturelle).
- T2.  $(\forall f \in C) (T(f) \cdot \mu_{\alpha(f)} = \mu_{\beta(f)} \cdot T^2(f))$  ( $\mu: T^2 \rightarrow T$  est naturelle).
- T3.  $(\forall e \in C_0) (\mu_e \cdot \eta_{T(e)} = T(e))$  (unitarité à gauche).
- T4.  $(\forall e \in C_0) (\mu_e \cdot T(\eta_e) = T(e))$  (unitarité à droite).
- T5.  $(\forall e \in C_0) (\mu_e \cdot \mu_{T(e)} = \mu_e \cdot T(\mu_e))$  (associativité).

Si  $\bar{T}=(T, \eta, \mu)$  est une monade sur  $C$ , on note  $Kl(\bar{T})^{\circ}$  la catégorie de Kleisli de  $\bar{T}$ , dont les objets sont ceux de  $C$  et où un morphisme  $\bar{\phi}$  de  $e$  vers  $e'$  est un couple  $(\phi, e')$ , où  $\phi$  est un morphisme dans  $C$  de  $e$  vers  $T(e')$ . La composition, notée « $\circ$ », est définie par

$$\bar{\psi} \circ \bar{\phi} = \overline{\mu_{\beta(\psi)} \cdot T(\psi) \cdot \phi}.$$

On conviendra désormais de noter encore  $\alpha$  et  $\beta$  les applications source et but dans  $Kl(\bar{T})^{\circ}$ . De plus, si  $r$  est un morphisme dans  $C$  de  $e$  vers  $T(e')$ , on note comme ci-dessus  $\bar{r}$  le morphisme de  $Kl(\bar{T})^{\circ}$  de source  $e$  et but  $e'$  défini par  $r$ . Inversement, si  $\rho$  est un morphisme dans  $Kl(\bar{T})^{\circ}$  de  $e$  vers  $e'$ , l'unique  $r$  de  $C$  tel que  $\bar{r}=\rho$  est noté  $\underline{\rho}$ . Dans certains cas  $\bar{r}$  sera noté  $a(r)$  et  $\underline{\rho}$  sera noté  $a'(\rho)$ . Ces conventions sont utilisées dans les démonstrations de cet article.

La catégorie de Kleisli  $Kl(\bar{T})^{\circ}$  de  $\bar{T}$  est isomorphe à la catégorie  $K\bar{T}$  dont les objets sont ceux de  $C$ , où un morphisme de  $x$  vers  $y$  est un triplet  $\bar{\Phi}=(y, \Phi, x)$ , où  $\Phi$  est un morphisme dans  $C$  de  $T(x)$  vers  $T(y)$  tel que  $\mu_y \cdot T(\Phi)=\Phi \cdot \mu_x$ , la composition dans  $K\bar{T}$  étant définie par

$$(y', \Phi', x') \cdot (y, \Phi, x) = (y', \Phi' \cdot \Phi, x) \text{ si et seulement si } x' = y.$$

Un isomorphisme  $J$  de  $Kl(\bar{T})^{\circ}$  sur  $K\bar{T}$  est défini par

$$J(\bar{R}) = (y, \mu_y \cdot T(R), x),$$

pour  $\bar{R}$  morphisme de  $Kl(\bar{T})$  de  $x$  vers  $y$ ; l'isomorphisme inverse  $J^{-1}$  est défini par

$$J^{-1}((y, \Phi, x)) = \overline{\Phi \cdot \eta_x}.$$

Enfin, rappelons que l'application qui à  $\bar{R}$  associe  $\mu_y \cdot T(R)$  détermine un foncteur de  $Kl(\bar{T})^{\circ}$  vers  $C$ , noté  $O_{\bar{T}}$  et que ce foncteur admet pour adjoint à gauche le foncteur  $L_{\bar{T}}$  qui à tout  $f$  associe  $\overline{\eta_{\beta(f)} \cdot f}$ . Si nécessaire (voir plus loin au § II) on pose

$$o_{\bar{T}} = O_{\bar{T}} \circ J^{-1} \text{ et } l_{\bar{T}} = J \circ L_{\bar{T}},$$

si bien que

$$o_{\bar{T}}(y, \Phi, x) = \bar{\Phi} \quad \text{et} \quad l_{\bar{T}}(f) = (\beta(f), T(f), \alpha(f)).$$

DEFINITION 1.1.1. On appelle *involution* sur une catégorie  $K$  la donnée d'un foncteur  $I$  de  $K$  vers  $K^*$  tel que

1°  $I^2 = Id_K$ .

2°  $(\forall a \in K_0) (I(a) = a)$ .

DEFINITION 1.1.2. On appelle *monade involutive* sur une catégorie  $C$  la donnée d'un couple  $(\bar{T}, I)$ , où  $\bar{T}$  est une monade sur  $C$  et  $I$  une involution sur la catégorie  $Kl(\bar{T})$ .

Rappelons la définition donnée en [2, f] (particulièrement en relation avec la notion d'idempotent dans un triple):

DEFINITION 1.1.3. On appelle *construction standard contravariante* (c.s.c.) sur une catégorie  $C$  la donnée d'un triplet  $(F, i, \psi)$ , où  $F$  est un foncteur de  $C$  vers  $C^*$ ,

$$i = (i_e)_{e \in C_0} \quad \text{et} \quad \psi = (\psi_e)_{e \in C_0}$$

deux familles de morphismes de  $C$  telles que  $\alpha(i_e) = e$  et  $\beta(i_e) = F(e)$  et que  $\alpha(\psi_e) = F(e)$  et  $\beta(\psi_e) = F^2(e)$ , ces données devant de plus satisfaire aux axiomes :

C1.  $(\forall f \in C) (F^2(f) \cdot \psi_{\alpha(f)} \cdot i_{\alpha(f)} = \psi_{\beta(f)} \cdot i_{\alpha(f)} \cdot f)$ .

C2.  $(\forall f \in C) (F^2(f) \cdot \psi_{\alpha(f)} = \psi_{\beta(f)} \cdot F(i_{\beta(f)}) \cdot F^2(f) \cdot \psi_{\alpha(f)})$ .

C3.  $(\forall e \in C_0) (F(\psi_e \cdot i_e) \cdot \psi_{F(e)} \cdot i_{F(e)} = F(e))$ .

C4.  $(\forall e \in C_0) (F(\psi_e) \cdot \psi_{F(e)} = \psi_e \cdot F(\psi_e \cdot i_e) \cdot \psi_{F(e)})$ .

THEOREME 1.1.1. Pour toute catégorie  $C$  l'ensemble des monades involutives sur  $C$  est en bijection avec l'ensemble des constructions standards contravariantes sur  $C$ .

Le théorème va résulter des propositions 2, 3 et 4 qui suivent :

PROPOSITION 1.1.2. Soit  $U = (F, i, \psi)$  une c.s.c. sur  $C$ . Pour tout  $e \in C_0$ , posons

$$t_e = \psi_e \cdot i_e, \quad V_e = F(t_e) \cdot \psi_{F(e)},$$

et pour tout  $f \in C$ ,

$$P(f) = F(i_{\beta(f)}) \cdot F^2(f) \cdot \psi_{\alpha(f)}.$$

Alors les triplets

$$(F^2, t, F \cdot t_F) = \overline{\Pi} \text{ et } (P, i, V) = \overline{P}$$

sont des monades sur  $C$ , et  $\psi$  détermine une transformation naturelle de  $P$  vers  $F^2$ , définissant  $\overline{P}$  comme sous-monade de  $\overline{\Pi}$ . La catégorie de Kleisli  $Kl(\overline{P})^0$  de  $\overline{P}$  (resp.  $Kl(\overline{\Pi})$  de  $\overline{\Pi}$ ) est alors appelée catégorie des  $U$ -relations (resp. catégorie des  $U$ -hyper-relations). L'application  $I$  de  $Kl(\overline{P})$  dans elle-même qui à un morphisme  $\overline{r}$  de  $e$  vers  $e'$  associe  $I(\overline{r}) = \overline{F(r)} \cdot \overline{t_{\beta(\overline{r})}}$  définit une involution sur  $Kl(\overline{P})^0$ , de sorte que  $(\overline{P}, I)$  est une monade involutive sur  $C$ .

PROPOSITION I.1.3. Soit  $\overline{P} = (P, i, V)$  une monade sur  $C$  et  $I$  une involution sur  $Kl(\overline{P})^0$ . Pour tout  $e \in C_0$  on note  $\overline{P(e)}$  le morphisme de  $Kl(\overline{P})^0$  de  $P(e)$  vers  $P^2(e)$  déterminé par l'identité sur  $P(e)$ , et on pose

$$t_e = \overline{I(\overline{P(e)})} \text{ et } \psi_e = V_{P(e)} \cdot P(t_e).$$

De plus pour tout  $f \in C$  on pose

$$F(f) = V_{\alpha(f)} \cdot P(\overline{I(i_{\beta(f)} \cdot f)}).$$

Alors le triplet  $U = (F, i, \psi)$  est une c.s.c. sur  $C$ .

DEMONSTRATION DE I.1.2. Dans toute la démonstration  $f$  désigne un morphisme de  $C$  de source  $x$  et de but  $y$ ,  $g$  un morphisme de  $C$  de source  $y$  et but  $z$ ,  $r$  et  $v$  deux morphismes de  $C$ , le premier de  $x$  vers  $F(y)$  et le second de  $y$  vers  $F(z)$ ; enfin  $e$  est un objet arbitraire de  $C$ . On remarquera d'abord que, avec les notations et axiomes de la définition I.1.3, on a

$$C5. F(\psi_x) \cdot F^3(f) = F(\psi_x) \cdot F^3(f) \cdot F^2(i_y) \cdot F(\psi_y).$$

$$C6. F(i_e) \cdot \psi_e = F(e).$$

$$C7. F(\psi_e) \cdot t_{F(e)} = \psi_e.$$

$$C8. F(t_{F(e)}) \cdot F^2(\psi_e) = F(\psi_e).$$

En effet :

- en appliquant le foncteur contravariant  $F$  aux deux membres de C2,

on obtient C5 .

- D'après C3 on a

$$\psi_e = \psi_e \cdot F(t_e) \cdot \psi_{F(e)} \cdot i_{F(e)}.$$

et donc, d'après C4 , on obtient C7 .

- En appliquant  $F$  aux deux membres de C7 , il vient C8 .

- D'après C7 on a

$$F(i_e) \cdot \psi_e = F(i_e) \cdot F(\psi_e) \cdot t_{F(e)},$$

soit  $F(i_e) \cdot \psi_e = F(t_e) \cdot t_{F(e)}$ , et C6 d'après C3 .

On peut aussi remarquer que C3 se déduit de C1, C2, C4, C6 et C7 .

a ) Pour prouver I.1.2 commençons donc par montrer que  $\bar{\Pi}$  est une monade :

Il est clair que  $F^2 : C \rightarrow C$  est un foncteur et que  $t : Id_C \rightarrow F^2$  est une transformation naturelle (C1) .

L'axiome C1 pour  $t_{F(e)}$  s'écrit

$$F^2(t_{F(e)}) \cdot t_{F(e)} = t_{F^3(e)} \cdot t_{F(e)}$$

soit, en appliquant  $F$  aux deux membres,

$$F(t_{F(e)}) \cdot F^3(t_{F(e)}) = F(t_{F(e)}) \cdot F(t_{F^3(e)}),$$

ce qui est T5 pour  $\bar{\Pi}$  .

Pour T2 il faut  $F(t_{F(y)}) \cdot F^4(f) = F^2(f) \cdot F(t_{F(x)})$  ou

$$F(F^3(f) \cdot t_{F(y)}) = F^2(f) \cdot F(t_{F(x)})$$

et pour cela il suffit que

$$F^3(f) \cdot t_{F(y)} = t_{F(x)} \cdot F(f),$$

ce qui est la naturalité de  $t$  pour  $F(f)$  .

Enfin T3 et T4 pour  $\bar{\Pi}$  s'écrivent

$$F(t_{F(e)}) \cdot t_{F^2(e)} = F^2(e) \text{ et } F(t_{F(e)}) \cdot F^2(t_e) = F^2(e).$$

La première résulte de C3 au point  $F(e)$  et la seconde résulte de l'application de  $F$  aux deux membres de C3 au point  $e$  .

b1) Montrons maintenant que  $P$  est un foncteur :

Que  $P$  soit compatible avec les identités s'écrit exactement sous la forme de C6 .

Que  $P$  soit compatible avec la composition s'écrit :

$$F(i_z) \cdot F^2(g) \cdot F^2(f) \cdot \psi_x = F(i_z) \cdot F^2(g) \cdot \psi_y \cdot F(i_y) \cdot F^2(f) \cdot \psi_x$$

et pour cela il suffit d'avoir C2 .

b2) La naturalité de  $i$ , soit  $P(f) \cdot i_x = i_y \cdot f$ , s'écrit

$$F(i_y) \cdot F^2(f) \cdot \psi_x \cdot i_x = i_y \cdot f,$$

ou, d'après C1 ,

$$F(i_y) \cdot \psi_y \cdot i_y \cdot f = i_y \cdot f,$$

ce qui est vrai d'après C6 .

b3)  $V$  est unitaire :  $V_e \cdot i_{P(e)} = P(e)$  s'écrit

$$F(t_e) \cdot \psi_{F(e)} \cdot i_{F(e)} = F(e), \text{ c'est-à-dire C3.}$$

Pour  $V_e \cdot P(i_e) = P(e)$  il vient

$$(F(t_e) \cdot \psi_{F(e)}) \cdot (F(i_{F(e)}) \cdot F^2(i_e) \cdot \psi_e) = F(e),$$

$$\text{soit } F(t_e) \cdot (\psi_{F(e)} \cdot F(i_{F(e)}) \cdot F^2(i_e) \cdot \psi_e) = F(e)$$

ou, avec C2 pour  $i_e$  :

$$F(t_e) \cdot F^2(i_e) \cdot \psi_e = F(e),$$

$$F(i_e) \cdot F(\psi_e) \cdot F^2(i_e) \cdot \psi_e = F(e),$$

$$F(i_e) \cdot F(F(i_e) \cdot \psi_e) \cdot \psi_e = F(e)$$

et cela est vrai d'après C6 .

b4)  $V$  est naturelle : soit à vérifier que  $P(f) \cdot V_x = V_y \cdot P^2(f)$ .

Or on a

$$P^2(f) = F(i_{F(y)}) \cdot F^3(i_y) \cdot F^4(f) \cdot F^2(\psi_x) \cdot \psi_{F(x)}.$$

On a donc à montrer  $A = B$  avec

$$A = F(i_y) \cdot F^2(f) \cdot \psi_x \cdot F(t_x) \cdot \psi_{F(x)},$$

$$B = F(t_y) \cdot \psi_{F(y)} \cdot F(i_{F(y)}) \cdot F^3(i_y) \cdot F^4(f) \cdot F^2(\psi_x) \cdot \psi_{F(x)}.$$

D'après C4, on a

$$A = F(i_y). F^2(f). F(\psi_x). \psi_{F(x)}$$

et alors on obtient, avec C8 :

$$\begin{aligned} A &= F(i_y). F^2(f). F(t_{F(x)}). F^2(\psi_x). \psi_{F(x)} \\ &= F(i_y). F(t_{F(x)}). F(f). F^2(\psi_x). \psi_{F(x)} \\ &= F(i_y). F(F^3(f). t_{F(y)}). F^2(\psi_x). \psi_{F(x)}, \end{aligned}$$

d'après C1 pour  $F(f)$ . On développe alors

$$\begin{aligned} A &= F(i_y). F(t_{F(y)}). F^4(f). F^2(\psi_x). \psi_{F(x)} \\ &= F(i_y). F(t_{F(y)}). F^2(F^2(f). \psi_x). \psi_{F(x)}. \end{aligned}$$

En appliquant C2 pour  $f$  il vient

$$\begin{aligned} A &= F(i_y). F(t_{F(y)}). F^2(\psi_y). F(i_y). F^2(f). \psi_x). \psi_{F(x)} \\ &= F(i_y). F(t_{F(y)}). F^2(\psi_y). F^3(i_y). F^4(f). F^2(\psi_x). \psi_{F(x)} \end{aligned}$$

et, en appliquant C8 :

$$\begin{aligned} A &= F(i_y). F(\psi_y). F^3(i_y). F^4(f). F^2(\psi_x). \psi_{F(x)} \\ &= F(t_y). F^2(F(i_y). F^2(f). \psi_x). \psi_{F(x)}. \end{aligned}$$

En tenant compte de C2 pour  $F(i_y). F^2(f). \psi_x$  il vient

$$A = F(t_y). \psi_{F(y)}. F(i_{F(y)}). F^2(F(i_y). F^2(f). \psi_x). \psi_{F(x)})$$

et, en développant, l'expression  $B$  cherchée.

b5)  $V$  est associative; soit  $V_e . P(V_e) = V_e . V_{P(e)}$  : on a

$$\begin{aligned} V_e . P(V_e) &= (F(t_e). \psi_{F(e)}). (F(i_{F(e)}). F^3(t_e). F^2(\psi_{F(e)}). \psi_{F^2(e)}) \\ &= F(t_e). (\psi_{F(e)} . F(i_{F(e)}). F^2(F(t_e). \psi_{F(e)}). \psi_{F^2(e)}), \end{aligned}$$

et donc, d'après C2 pour  $F(t_e). \psi_{F(e)}$ ,

$$\begin{aligned} V_e . P(V_e) &= F(t_e). F^2(F(t_e). \psi_{F(e)}). \psi_{F^2(e)} \\ &= F(t_e). F^3(t_e). F^2(\psi_{F(e)}). \psi_{F^2(e)} \\ &= F(F^2(t_e). t_e). F^2(\psi_{F(e)}). \psi_{F^2(e)} \\ &= F(t_{F^2(e)}. t_e). F^2(\psi_{F(e)}). \psi_{F^2(e)} \quad \text{d'après C1 pour } t_e, \end{aligned}$$

$$V_e \cdot P(V_e) = F(t_e) \cdot F(t_{F^2(e)}) \cdot F^2(\psi_{F(e)}) \cdot \psi_{F^2(e)}$$

et donc, d'après C8 puis C4 en  $F(e)$ , on a

$$\begin{aligned} V_e \cdot P(V_e) &= F(t_e) \cdot F(\psi_{F(e)}) \cdot \psi_{F^2(e)} \\ &= F(t_e) \cdot \psi_{F(e)} \cdot F(t_{F(e)}) \cdot \psi_{F^2(e)} = V_e \cdot V_{P(e)}. \end{aligned}$$

c) On va voir que  $\psi$  détermine  $\bar{P}$  comme sous-monade de  $\bar{\Pi}$ : Rappelons que si  $\bar{T} = (T, \eta, \mu)$  et  $\bar{T}' = (T', \eta', \mu')$  sont deux monades sur  $C$ , un morphisme de  $\bar{T}$  vers  $\bar{T}'$  est un triplet  $(\bar{T}', m, \bar{T}) = \bar{m}$ , où  $m$  est une transformation naturelle de  $T$  vers  $T'$  telle que pour tout  $e \in C_0$  on ait

$$\eta'_e = m_e \cdot \eta_e \quad \text{et} \quad m_e \cdot \mu_e = \mu'_e \cdot T'(m_e) \cdot m_{T(e)}.$$

Ceci dit on voit que  $\psi$  est naturelle de  $P$  vers  $F^2$  car  $F^2(f) \cdot \psi_x = \psi_y \cdot P(f)$  est exactement C2.  $\psi$  est un morphisme de monades: en effet, par définition de  $t$  on a  $t_e = \psi_e \cdot i_e$ , et d'autre part

$$\psi_e \cdot V_e = F(t_{F(e)}) \cdot F^2(\psi_e) \cdot \psi_{F(e)}$$

se vérifie en appliquant C4 au premier membre et C8 au second.

Enfin  $\psi$  est un monomorphisme, car on a C6.

d) Il reste à démontrer que  $I$  est une involution sur  $Kl(\bar{P})^\circ$ :

d1)  $I$  préserve les identités: on a

$$I(\bar{i}_e) = \overline{F(i_e) \cdot \psi_e \cdot i_e},$$

soit, d'après C6,  $I(\bar{i}_e) = \bar{i}_e$ .

d2)  $I$  est un foncteur contravariant:

Rappelons que l'on note « $\cdot$ » la composition dans  $C$  et « $\circ$ » la composition dans  $Kl(\bar{P})^\circ$ . On a donc à comparer

$$I(\bar{r}) \circ I(\bar{v}) = a [V_e \cdot P(I(\bar{r})) \cdot I(\bar{v})] = A$$

$$\text{et} \quad I(\bar{v} \circ \bar{r}) = a [F(\bar{v} \circ \bar{r}) \cdot \psi_z \cdot i_z] = B.$$

En développant grâce aux définitions de  $P$ ,  $I$  et « $\circ$ », on obtient les expressions

$$A = F(t_x) \cdot \psi_{F(x)} \cdot F(i_{F(x)}) \cdot F^3(r) \cdot F^2(\psi_y) \cdot F^2(i_y) \cdot \psi_y \cdot F(v) \cdot \psi_z \cdot i_z,$$

$$B = F(\tau) \cdot F(\psi_y) \cdot F^3(v) \cdot F^2(t_z) \cdot \psi_z \cdot i_z.$$

On a alors

$$A = F(t_x) \cdot (F(\psi_{F(x)}) \cdot F(i_{F(x)})) \cdot F^2(F(\tau) \cdot \psi_y \cdot i_y) \cdot \psi_y) \cdot F(v) \cdot \psi_z \cdot i_z,$$

soit, grâce à C2,

$$\begin{aligned} A &= F(t_x) \cdot F^2(F(\tau) \cdot \psi_y \cdot i_y) \cdot \psi_y \cdot F(v) \cdot \psi_z \cdot i_z \\ &= F(t_x) \cdot F^3(\tau) \cdot F^2(\psi_y) \cdot F^2(i_y) \cdot \psi_y \cdot F(v) \cdot \psi_z \cdot i_z. \end{aligned}$$

Mais

$$F(t_x) \cdot F^3(\tau) = F(F^2(\tau) \cdot t_x) = F(t_{F(y)} \cdot \tau) = F(\tau) \cdot F(t_{F(y)}),$$

et donc

$$\begin{aligned} A &= F(\tau) \cdot F(t_{F(y)}) \cdot F^2(t_y) \cdot \psi_y \cdot F(v) \cdot \psi_z \cdot i_z \\ &= F(\tau) \cdot F(F(t_y) \cdot t_{F(y)}) \cdot \psi_y \cdot F(v) \cdot \psi_z \cdot i_z \end{aligned}$$

et, d'après C3 en  $y$ ,

$$A = F(\tau) \cdot \psi_y \cdot F(v) \cdot t_z.$$

Par ailleurs on a  $F^2(t_z) \cdot t_z = t_{F^2(z)} \cdot t_z$  d'après C1 pour  $t_z$ , et

$$F^3(v) \cdot t_{F^2(z)} = t_{F(y)} \cdot F(v) \text{ d'après C1 pour } F(v).$$

On en déduit

$$B = F(\tau) \cdot F(\psi_y) \cdot t_{F(y)} \cdot F(v) \cdot t_z$$

et enfin, avec C7, la conclusion  $A = B$ .

d3) Enfin  $I^2 = Id_{Kl(\bar{P})} \circ :$

On a

$$I(\bar{r}) = \overline{F(r) \cdot t_y} = a [F(r) \cdot t_y]$$

et puis

$$I(I(\bar{r})) = a [F(I(\bar{r})) \cdot t_x] \quad I^2(\bar{r}) = a [F(F(r) \cdot t_y) \cdot t_x].$$

On veut vérifier  $I^2(\bar{r}) = \bar{r}$ , soit

$$r = F(F(r) \cdot t_y) \cdot t_x \quad \text{ou} \quad r = F(t_y) \cdot F^2(r) \cdot t_x$$

soit, avec C1 pour  $r$ , à montrer  $r = F(t_y) \cdot t_{F(y)} \cdot r$ , ce qui résulte de C3.

Ceci achève la preuve de la proposition I.1.2.

DEMONSTRATION DE I.1.3.

a) Tout d'abord l'application  $F$  de l'énoncé I.1.3 définit bien un foncteur de  $C$  vers  $C^*$ , puisque cette application n'est autre que

$$O_{\bar{P}}^* \circ I \circ L_{\bar{P}}.$$

b) Pour tout  $f \in C$  on a  $\overline{F(f)} = I(\overline{t_y \cdot f})$ :

En effet,  $\overline{t_y \cdot f} = \overline{t_y} \circ (i_y, f)$ , d'où

$$\begin{aligned} I(\overline{t_y \cdot f}) &= I(\overline{i_y \cdot f}) \circ I(\overline{t_y}) \\ &= I(\overline{i_y \cdot f}) \circ \overline{P(y)}, \end{aligned}$$

soit

$$I(\overline{t_y \cdot f}) = V_x \cdot P(aI(\overline{i_y \cdot f})). P(y)$$

d'après la définition de la loi « $\circ$ ».

Et cette dernière expression est la définition de  $F(f)$ .

c) Pour tout  $\overline{r} \in Kl(\bar{P})$  on a  $I(\overline{r}) = \overline{F(r) \cdot t_y}$ .

En effet, d'après b) on a  $\overline{F(r)} = I(\overline{t_{F(y)} \cdot r})$ , et il nous faut donc montrer que

$$I(\overline{r}) = a [ a' [ I(\overline{t_{F(y)} \cdot r}) ] \cdot t_y ]$$

ou encore

$$I(\overline{r}) = I(\overline{t_{F(y)} \cdot r}) \circ (i_{F^2(y)} \cdot t_y)$$

ou, en appliquant  $I$  aux deux membres,

$$\overline{r} = I(\overline{i_{F^2(y)} \cdot t_y}) \circ (\overline{t_{F(y)} \cdot r})$$

ou

$$r = a' [ I(\overline{i_{F^2(y)} \cdot t_y}) \circ \overline{t_{F(y)}} ] \cdot r.$$

Pour cela il suffit que

$$\overline{P(y)} = I(\overline{i_{F^2(y)} \cdot t_y}) \circ \overline{t_{F(y)}}$$

soit, en appliquant  $I$  aux deux membres,

$$\begin{aligned} \overline{t_y} &= I(\overline{t_{F(y)}}) \circ (i_{F^2(y)} \cdot t_y) \\ &= \overline{P(y)} \circ (i_{F^2(y)} \cdot t_y), \end{aligned}$$

$$t_y = V_{P(y)} \cdot i_{F^2(y)} \cdot t_y,$$

ce qui découle de T3 pour  $\bar{P}$  en  $P(y)$ .

d) Pour tout  $e$  on a  $t_e = \psi_e \cdot i_e$  :

Il s'agit de voir que  $t_e = V_{P(e)} \cdot P(t_e) \cdot i_e$  soit, d'après T1 pour  $\bar{P}$  en  $t_e$ ,  $t_e = V_{P(e)} \cdot i_{P^2(e)} \cdot t_e$ , ce qui résulte de T3 pour  $\bar{P}$  en  $P(e)$ .

e) L'axiome C3 est satisfait :

En appliquant  $c$  à  $r = t_e$  on obtient  $I(\overline{t_e}) = \overline{F(t_e) \cdot t_{F(e)}}$ . Or par définition  $I(\overline{t_e}) = \overline{P(e)} = \overline{F(e)}$ . On a donc  $F(e) = F(t_e) \cdot t_{F(e)}$ , ce qui, compte tenu de  $d$ , donne C3.

f) L'axiome C1 est satisfait :

D'après  $b$  on a  $\overline{F(f)} = I(\overline{t_y \cdot f})$ , et donc en appliquant  $I$  il vient

$$I(\overline{F(f)}) = \overline{t_y \cdot f}.$$

Mais, pour  $r = F(f)$  la propriété  $c$  nous donne

$$I(\overline{F(f)}) = \overline{F^2(f) \cdot t_x},$$

si bien que  $F^2(f) \cdot t_x = t_y \cdot f$ , soit C1.

g) Soit  $b$  un morphisme de  $C$  de source  $F(y)$  et but  $F(x)$ .

Alors

$$F(b) \cdot \psi_x = V_{P(y)} \cdot P(I(\overline{b})).$$

Pour prouver ce point posons  $a' [I(\overline{i_{F(x)} \cdot b})] = k$ . Alors

$$F(b) = V_{P(y)} \cdot P(k) \text{ et}$$

$$\begin{aligned} F(b) \cdot \psi_x &= V_{P(y)} \cdot P(k) \cdot V_{P(x)} \cdot P(t_x) \\ &= V_{P(y)} \cdot V_{P^2(y)} \cdot P^2(k) \cdot P(t_x) \end{aligned}$$

d'après T2 ; et alors, d'après T5,

$$\begin{aligned} F(b) \cdot \psi_x &= V_{P(y)} \cdot P(V_{P(y)}) \cdot P^2(k) \cdot P(t_x) \\ &= V_{P(y)} \cdot P(V_{P(y)}) \cdot P(k) \cdot t_x. \end{aligned}$$

Or  $V_{P(y)} \cdot P(k) \cdot t_x = a' [\overline{k \circ \overline{t_x}}]$  et

$$\overline{k \circ \overline{t_x}} = I(\overline{i_{F(x)} \cdot b}) \circ \overline{t_x},$$

$$\begin{aligned}\bar{k} \circ \bar{t}_x &= I(\overline{i_{F(x)} \cdot b}) \circ I(\overline{P(x)}) \\ &= I(\overline{P(x)} \circ \overline{i_{F(x)} \cdot b}).\end{aligned}$$

Et enfin

$$\overline{P(x)} \circ \overline{(i_{F(x)} \cdot b)} = \overline{V_x \cdot i_{F(x)} \cdot b} = \bar{b},$$

et la formule annoncée.

$$\text{h) On a } I(\bar{\psi}_e) = \bar{\psi}_e.$$

En effet,  $\psi_e = V_{P(e)} \cdot P(t_e)$ , soit en utilisant «  $\circ$  »,  $\bar{\psi}_e = \bar{t}_e \circ \overline{P(e)}$ , de sorte que

$$I(\bar{\psi}_e) = I(\bar{t}_e \circ \overline{P(e)}) = I(\overline{P(e)}) \circ I(\bar{t}_e) = \bar{t}_e \circ \overline{P(e)}.$$

$$\text{i) Pour tout } e \text{ on a } F(t_e) \cdot \psi_{F(e)} = V_e.$$

On doit prouver, en remplaçant  $\psi_{F(e)}$  par sa définition, que

$$F(t_e) \cdot V_{F^2(e)} \cdot P(t_{F(e)}) = V_e$$

ou, en remplaçant  $F(t_e)$  par sa définition à son tour,

$$\begin{aligned}V_e &= V_e \cdot P(a' [I(\overline{i_{F^2(e)} \cdot t_e})]) \cdot V_{F^2(e)} \cdot P(t_{F(e)}) \\ &= V_e \cdot V_{F(e)} \cdot P^2(a' [I(\overline{i_{F^2(e)} \cdot t_e})]) \cdot P(t_{F(e)}) \\ &= V_e \cdot P(V_e) \cdot P^2(a' [I(\overline{i_{F^2(e)} \cdot t_e})]) \cdot P(t_{F(e)}) \\ &= V_e \cdot P(V_e \cdot P(a' [I(\overline{i_{F^2(e)} \cdot t_e})])) \cdot t_{F(e)} \\ &= V_e \cdot P(a' [I(\overline{i_{F^2(e)} \cdot t_e} \circ \bar{t}_{F(e)})]),\end{aligned}$$

et on poursuit comme en c.

j) L'axiome C4 est vérifié :

En effet, pour tout  $e$ , on a

$$\begin{aligned}\psi_e \cdot F(t_e) \cdot \psi_{F(e)} &= \psi_e \cdot V_e \quad (\text{d'après i}), \\ \psi_e \cdot F(t_e) \cdot \psi_{F(e)} &= (V_{F(e)} \cdot P(t_e)) \cdot V_e \\ &= V_{F(e)} \cdot V_{F^2(e)} \cdot P^2(t_e) \\ &= V_{F(e)} \cdot P(V_{F(e)}) \cdot P^2(t_e) \\ &= V_{F(e)} \cdot P(V_{F(e)} \cdot P(t_e))\end{aligned}$$

$$\psi_e \cdot F(t_e) \cdot \psi_{F(e)} = V_{F(e)} \cdot P(\psi_e);$$

d'après h on peut écrire encore

$$\psi_e \cdot F(t_e) \cdot \psi_{F(e)} = V_{F(e)} \cdot P(a [ I(\overline{\psi_e}) ] ),$$

et puis, si dans g on prend  $b = \psi_e$ , on tombe sur l'égalité C4 désirée.

k) L'axiome C2 est vérifié :

En écrivant g pour  $b = F(f)$  on a  $F^2(f) \cdot \psi_x = V_{F(y)} \cdot P(I(\overline{F(f)}))$ ;  
 mais c pour  $r = F(f)$  donne  $I(\overline{F(f)}) = \overline{F^2(f) \cdot t_x}$  et on a

$$F^2(f) \cdot t_x = t_y \cdot f \text{ (voir f),}$$

si bien que

$$\begin{aligned} F^2(f) \cdot \psi_x &= V_{F(y)} \cdot P(t_y \cdot f) \\ &= V_{F(y)} \cdot P(t_y) \cdot P(f) \end{aligned}$$

ou

$$F^2(f) \cdot \psi_x = \psi_y \cdot P(f),$$

et la conclusion d'après le calcul de  $P(f)$  qui suit :

1) Pour tout  $f \in C$  on a

$$P(f) = F(i_y) \cdot F^2(f) \cdot \psi_x :$$

D'après c on peut écrire :

$$\begin{aligned} a' [ I(\overline{\psi_x \cdot F(f) \cdot i_y}) ] &= F(\psi_x \cdot F(f) \cdot i_y) \cdot t_{F(x)} \\ &= F(i_y) \cdot F^2(f) \cdot F(\psi_x) \cdot t_{F(x)}. \end{aligned}$$

Mais  $F(\psi_x) \cdot t_{F(x)} = \psi_x$ , d'après c pour  $\psi_x$  et d'après h, d'où

$$a' [ I(\overline{\psi_x \cdot F(f) \cdot i_y}) ] = F(i_y) \cdot F^2(f) \cdot \psi_x.$$

Il nous suffit de prouver que

$$\psi_x \cdot F(f) \cdot i_y = \underline{I(\overline{P(f)})}.$$

Pour cela on note d'abord que

$$\begin{aligned} F(f) \cdot i_y &= V_x \cdot P(I(\overline{i_y \cdot f})) \cdot i_y \\ &= V_x \cdot i_{P(x)} \cdot \underline{I(\overline{i_y \cdot f})}, \\ F(f) \cdot i_y &= \underline{I(\overline{i_y \cdot f})}. \end{aligned}$$

On sait aussi que  $i_y \cdot f = P(f) \cdot i_x$ , de sorte que

$$\begin{aligned} a [\psi_x \cdot F(f) \cdot i_y] &= (V_{F(x)} \cdot P(t_x)) \cdot a' [I(\overline{P(f)} \cdot i_x)] \\ &= \overline{i_x} \circ I(\overline{P(f)} \cdot i_x) \\ &= I(\overline{P(x)}) \circ I(\overline{P(f)} \cdot i_x) \\ &= I(\overline{P(f)} \cdot i_x \circ \overline{P(x)}). \end{aligned}$$

Il reste à montrer

$$\overline{P(f)} = \overline{P(f) \cdot i_x} \circ \overline{P(x)}$$

ou

$$\begin{aligned} P(f) &= V_y \cdot P(P(f) \cdot i_x) \\ &= V_y \cdot P(i_y \cdot f) \\ &= V_y \cdot P(i_y) \cdot P(f), \end{aligned}$$

ce qui résulte de T4.

Ainsi s'achève la preuve de la proposition I.1.3. Pour terminer la démonstration du théorème I.1.1, il reste seulement à prouver la proposition suivante :

**PROPOSITION I.1.4.** *Les correspondances établies par les propositions I.1.2 et I.1.3 sont inverses l'une de l'autre.*

**DEMONSTRATION.** a) Soit  $U = (F, i, \psi)$  une c.s.c. sur  $C$ ; soit  $(\overline{P}, I)$  la monade involutive associée à  $U$  par la proposition I.1.2, et soit  $(\hat{F}, \hat{i}, \hat{\psi})$  la c.s.c. associée à  $(\overline{P}, I)$  par I.1.3.

a1) Il est clair que  $\hat{i} = i$ .

a2) On a  $\hat{\psi} = \psi$ , car  $\hat{\psi}_e = V_{F(e)} \cdot P(t_e)$ , de sorte que

$$\hat{\psi}_e = (F(t_{F(e)}) \cdot \psi_{F^2(e)}) \cdot (F(i_{F^2(e)}) \cdot F^2(t_e) \cdot \psi_e),$$

et donc, avec C2 pour  $t_e$  :

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_e &= F(t_{F(e)}) \cdot F^2(t_e) \cdot \psi_e \\ &= F(F(t_e) \cdot t_{F(e)}) \cdot \psi_e \end{aligned}$$

et le résultat à l'aide de C3 en  $e$ .

a3)  $\hat{F} = F$ : Dans la démonstration de la proposition I.1.3 (en b) on a établi  $\hat{F}(f) = I(\overline{t_y \cdot f})$ . Or  $I(\overline{t_y \cdot f}) = F(t_y \cdot f) \cdot t_{F(y)}$ , par définition.

Donc  $\hat{F}(f) = F(f) \cdot F(t_y) \cdot t_{F(y)}$  et on conclut avec C3.

b) Soit  $(\bar{P}, I)$  une monade involutive sur  $C^*$ , soit  $U = (F, i, \psi)$  la c.s.c. associée par la proposition I.1.3, et soit  $(\hat{P}, \hat{I})$  la monade involutive associée par I.1.2. On pose donc  $\bar{P} = (P, i, V)$  et  $\hat{P} = (\hat{P}, \hat{i}, \hat{V})$ .

b1) Evidemment  $\hat{i} = i$ .

b2)  $\hat{V} = V$ : On a  $\hat{V}_e = F(t_e) \cdot \psi_{F(e)}$ , et cela vaut bien  $V_e$ , comme on l'a montré au paragraphe i de la démonstration de I.1.3.

b3)  $\hat{P} = P$ : Ceci a été montré en 1 dans la démonstration de I.1.3.

b4) Enfin  $\hat{I} = I$ : Cela résulte encore de la preuve de I.1.3 (voir en c).

La démonstration du théorème I.1.1 est ainsi achevée.

Désormais on fera l'abus de langage consistant à confondre c.s.c. et monade involutive; si  $(F, i, \psi)$  est une c.s.c. désignée par  $U$ , on désignera aussi par  $U$  la monade involutive associée par le théorème I.1.1.

En pratique on utilise souvent le critère suivant pour montrer que l'on est en présence d'une monade involutive :

PROPOSITION I.1.5. Soit  $q: C \rightarrow E'$  un foncteur fidèle,  $(F, i, \psi)$  une monade involutive sur  $E'$  et  $\bar{F}: C \rightarrow C^*$  un foncteur. Supposons donnés pour tout objet  $c$  de  $C$  un morphisme  $\bar{i}_c: c \rightarrow \bar{F}(c)$ , un morphisme  $\bar{\psi}_c: \bar{F}(c) \rightarrow \bar{F}^2(c)$  et un monomorphisme  $j_c: q(\bar{F}(c)) \rightarrow F(q(c))$  dans  $E'$ , ceci de sorte que pour tout objet  $c$  de  $C$  on ait

$$j_c \cdot q(\bar{i}_c) = i_{q(c)} \quad \text{et} \quad j_{\bar{F}(c)} \cdot q(\bar{\psi}_c) = F(j_c) \cdot \psi_{q(c)} \cdot j_c$$

et que, pour tout  $f: c \rightarrow c'$  dans  $C$ , on ait

$$j_{c'} \cdot q(\bar{F}(f)) = F(q(f)) \cdot j_c.$$

Alors  $(\bar{F}, \bar{i}, \bar{\psi})$  est une monade involutive sur  $C$ .

La vérification des axiomes C1 à C4 ne pose pas de problème.

Supposons maintenant donné un quadruplet  $(q, \bar{F}, (F, i, \psi), j) = \delta$ , où  $q: C \rightarrow E'$  est un foncteur fidèle,  $(F, i, \psi)$  une monade involutive sur  $E'$ ,  $\bar{F}: C \rightarrow C^*$  un foncteur, et  $j$  une transformation naturelle de

$q \cdot \bar{F}^*$  vers  $F \cdot q^*$  telle que  $j_c$ , pour tout  $c \in C_0$ , soit un monomorphisme. Appelons alors  $\delta$ -séparé un objet  $c$  de  $C$  tel que  $i_{q(c)} : q(c) \rightarrow F(q(c))$  se factorise par  $j_c$  :

$$i_{q(c)} = j_c \cdot i'_c \text{ avec } i'_c : q(c) \rightarrow q(\bar{F}(c)),$$

et tel qu'il existe un  $\bar{i}_c : c \rightarrow \bar{F}(c)$  (alors unique) tel que  $q(\bar{i}_c) = i'_c$ . Appelons  $\delta$ -quasi-compact un objet  $c$  de  $C$  tel que  $F(j_c) \cdot \psi_{q(c)} \cdot j_c$  se factorise par  $j_{F(c)}$  :

$$F(j_c) \cdot \psi_{q(c)} \cdot j_c = j_{F(c)} \cdot \psi'_c$$

avec  $\psi'_c : q(\bar{F}(c)) \rightarrow q(\bar{F}^2(c))$ , et tel qu'il existe un  $\bar{\psi}_c : \bar{F}(c) \rightarrow \bar{F}^2(c)$  (alors unique) tel que  $q(\bar{\psi}_c) = \psi'_c$ . Un objet  $\delta$ -séparé et  $\delta$ -quasi-compact sera dit  $\delta$ -compact, et un objet  $c$  sera appelé  $\delta$ -objet s'il est  $\delta$ -compact et si, pour tout entier  $n > 1$ , l'objet  $\bar{F}^n(c)$  est  $\delta$ -compact. De I.1.5 il résulte que, si on désigne par  $C_\delta$  la sous-catégorie pleine de  $C$  ayant pour objets les  $\delta$ -objets, le triplet  $(\bar{F}, \bar{i}, \bar{\psi})$  détermine une monade involutive sur  $C_\delta$ .

La possibilité de présenter une monade involutive sous la forme  $(F, i, \psi)$  est un avantage pour la recherche de monades involutives sur une catégorie donnée. Outre la proposition précédente on notera dans ce sens la proposition I.1.6 ci-après. La preuve résulte des axiomes C1 à C4 d'une c.s.c. et d'une lecture adéquate du paragraphe IV, 1 de [1] (où l'on avait introduit les catégories avec appartenance).

Soit  $C$  une catégorie à produits finis et  $a$  un objet de  $C$  tel que pour tout  $c \in C_0$  il existe une  $c \times$ -structure colibre sur  $a$ , notée  $a^c$  ou  $\exp_a(c)$ . Alors (cf. [1] § IV) le foncteur  $\exp_a(-) : C^* \rightarrow C$  admet  $\exp_a(-)^*$  pour adjoint; on désigne par  $t_c : c \rightarrow \exp_a(\exp_a(c))$  le projecteur canonique.

Soit pour tout  $c$ ,  $i_c : c \rightarrow a^c$  et  $\psi_c : a^c \rightarrow a^{(a^c)}$  deux morphismes de  $C$  tels que

$$(A) \quad \psi_c \cdot i_c = t_c.$$

Pour tout  $c$  on note  $ev_c : a^c \times c \rightarrow a$  le  $c \times$ -coprojecteur de but  $a$  et on désigne par  $k_c : a^c \times a^c \rightarrow a$  le morphisme composé  $ev_c \cdot (\psi_c \times a^c)$ .

PROPOSITION I.1.6. *Le triplet  $(\exp_a(-), i, \psi)$  est une monade involutive sur  $C$  si et seulement si :*

(B) *Pour tout  $f: e \rightarrow e'$  de  $C$  on a*

$$k_{e'} \cdot (a^e \times a^f) = k_{e'} \cdot [(a^{(a^f, i_{e'})} \cdot \psi_e) \times a^{e'}]$$

et

(C) *Pour tout  $c \in C_0$  on a*

$$k_{a^c} \cdot (a^{(a^c)} \times \psi_c) = k_{a^c} \cdot (a^{(a^c)} \times a^c) \cdot (\psi_{a^c} \times a^c).$$

## I.2. Les relations et le calcul des hyper-relations.

On suppose dans ce paragraphe que  $U = (F, i, \psi)$  est une monade involutive sur une catégorie  $C$ . Il lui est associé sur  $C$  au moins deux monades, à savoir  $\bar{P}$  et  $\bar{\Pi}$  avec les notations de la proposition I.1.2. Un élément de  $Kl(\bar{P})$  sera appelé une *U-relation* et un élément de  $Kl(\bar{\Pi})$  sera appelé une *U-hyper-relation*. On omettra l'indication de  $U$  si le contexte ne permet pas d'ambiguïté.

On montre ici comment le calcul des relations s'insère dans celui des hyper-relations, ces dernières pouvant d'ailleurs être vues comme des «relations sur les relations» (Théorème I.2.1), mais leur calcul restant aussi simple que le calcul dans  $C$  (proposition I.2.2). On introduit ensuite à la vue des propositions I.2.3 et I.2.4 la notion de *U-relation fonctionnelle* ou *U-fonction*, et la proposition I.2.5 établit le rapport entre cette notion et celle de *U-factorisation* dans  $C$ .

En plus des notations déjà introduites (en particulier p. 6) on convient ce qui suit :

- Si  $\sigma$  est un morphisme de  $C$  de source  $e$  et but  $F^2(e')$  l'hyper-relation associée de  $e$  vers  $e'$  est notée  $\bar{\sigma}$ , et si  $\Sigma$  est une hyper-relation de  $e$  vers  $e'$  l'unique  $\sigma$  tel que  $\bar{\sigma} = \Sigma$  est notée  $\underline{\Sigma}$ . On écrira aussi parfois  $A(\sigma)$  pour  $\bar{\sigma}$  et  $A'(\Sigma)$  pour  $\underline{\Sigma}$ .

- La composition dans  $Kl(\bar{P})^0$  est toujours notée « $\circ$ », tandis que la composition dans la catégorie des hyper-relations est notée « $\bullet$ »,

si bien que cette catégorie est désignée par  $Kl(\overline{\Pi})^\bullet$ .

- On désigne par  $R$  (resp.  $S$ ) un morphisme de  $C$  de source  $x$  et de but  $F(y)$  (resp. de source  $y$  et de but  $F(z)$ ), et par  $\rho$  (resp.  $\sigma$ ) un morphisme de  $C$  de source  $x$  et de but  $F^2(y)$  (resp. de source  $y$  et de but  $F^2(z)$ ). Avec ces conventions on a donc

$$\overline{S} \circ \overline{R} = F(t_z) \cdot F^2(S) \cdot \psi_y \cdot R$$

et

$$\overline{\overline{\sigma}} \circ \overline{\overline{\rho}} = F(t_{F(z)}) \cdot F^2(\sigma) \cdot \rho.$$

- Pour  $\overline{R} \in Kl(\overline{P})$  on pose (avec  $y = \beta(\overline{R})$ ):

$$\phi(\overline{R}) = \overline{\psi_y \cdot R},$$

et pour  $\overline{\overline{\rho}} \in Kl(\overline{\Pi})$  on pose (si  $y = \beta(\overline{\overline{\rho}})$  et  $x = \alpha(\overline{\overline{\rho}})$ ):

$$\lambda(\overline{\overline{\rho}}) = \overline{F(t_{F(y)}) \cdot F^2(\rho) \cdot i_{F(x)}}.$$

• On définit aussi  $Q, l$  et  $\mu$  par :

$$Q(\overline{R}) = \overline{F(\psi_y) \cdot F^2(R) \cdot i_{F(x)}}, \quad l_x = \overline{i_x}, \quad \mu_x = \overline{F(i_{F(x)}) \cdot i_{F^2(x)}}.$$

On rappelle que, si  $G: Y' \rightarrow X'$  est un foncteur ayant un adjoint  $F: X' \rightarrow Y'$ , l'adjonction étant déterminée par les transformations naturelles

$$\eta: 1_{X'} \rightarrow GF \quad \text{et} \quad \varepsilon: FG \rightarrow 1_{Y'}$$

alors  $(GF, \eta, G(\varepsilon_F))$  est une monade sur  $X'$  et  $(FG, \varepsilon, F(\eta_G))$  est une comonade sur  $Y'$ ; on les appellera brièvement les monade et comonade induites par l'adjonction.

THEOREME 1.2.1. L'application  $\overline{R} \rightarrow \phi(\overline{R})$  détermine un foncteur (noté  $\phi$ ) de  $Kl(\overline{P})^\circ$  vers  $Kl(\overline{\Pi})^\bullet$ , et  $\overline{\overline{\rho}} \rightarrow \lambda(\overline{\overline{\rho}})$  détermine un foncteur (noté  $\lambda$ ) qui admet  $\phi$  pour adjoint, ceci de sorte que la monade induite sur  $Kl(\overline{P})^\circ$  soit  $(Q, l, \mu) = \overline{Q}$  et que  $Kl(\overline{Q})^\square$  soit isomorphe à  $Kl(\overline{\Pi})^\bullet$ .

DEMONSTRATION. a)  $\phi$  est évidemment compatible avec les identités, et on vérifie bien que  $\phi(\overline{S}) \bullet \phi(\overline{R}) = \phi(\overline{S \circ R})$ , soit

$$F(t_{F(z)}) \cdot F^2(\psi_z \cdot S) \cdot \psi_y \cdot R = \psi_z \cdot F(t_z) \cdot F^2(S) \cdot \psi_y \cdot R.$$

En effet le premier membre devient

$$F(t_{F(z)}) \cdot F^2(\psi_z) \cdot F^2(S) \cdot \psi_y \cdot R = F(\psi_z) \cdot F^2(S) \cdot \psi_y \cdot R$$

(d'après C8) ou encore  $F(\psi_z) \cdot \psi_{F(z)} \cdot P(S) \cdot R$ , et le second membre vaut  $\psi_z \cdot F(t_z) \cdot \psi_{F(z)} \cdot P(S) \cdot R$ ; l'égalité annoncée découle de C4.

b) Montrons que  $\overline{i_{F(x)}}$  est un  $\phi$ -coprojecteur en  $x$ , c'est-à-dire que, pour tout  $\overline{\nu}$  de  $y$  vers  $x$  dans  $Kl(\overline{\Pi})$ , il existe un unique  $\overline{\rho}$  de  $y$  vers  $F(x)$  dans  $Kl(\overline{P})$  tel que

$$\overline{\nu} = \overline{t_{F(x)}} \bullet \phi(\overline{\rho}).$$

Pour cela on montre que nécessairement  $\overline{\rho} = \nu$ ; il suffit d'avoir

$$F(t_{F(x)}) \cdot F^2(i_{F(x)}) \cdot \psi_{F(x)} = F^2(x)$$

ou

$$F(i_{F(x)}) \cdot F(\psi_{F(x)}) \cdot F^2(i_{F(x)}) \cdot \psi_{F(x)} = F^2(x),$$

$$F(i_{F(x)}) \cdot F(F(i_{F(x)})) \cdot \psi_{F(x)} \cdot \psi_{F(x)} = F^2(x),$$

ce qui résulte de C6.

Par suite  $\phi$  admet un coadjoint  $\lambda$  défini par

$$\underline{\lambda(\overline{\rho})} = \underline{(\overline{\rho} \bullet \overline{i_{F(x)}})} \sim.$$

c'est-à-dire

$$\underline{\lambda(\overline{\rho})} = F(t_{F(y)}) \cdot F^2(\rho) \cdot i_{F(x)}.$$

c) Le triple induit par cette adjonction  $\phi \dashv \lambda$  est donc de la forme  $(Q, l, \mu)$  avec

$$Q(\overline{R}) = \lambda(\phi(\overline{R})) = \lambda(\overline{\psi_y \cdot R}),$$

soit

$$\begin{aligned} \underline{Q(\overline{R})} &= F(t_{F(y)}) \cdot F^2(\psi_y \cdot R) \cdot i_{F(x)} \\ &= F(t_{F(y)}) \cdot F^2(\psi_y) \cdot F^2(R) \cdot i_{F(x)} \end{aligned}$$

et la forme indiquée dans l'énoncé grâce à C8.

Il est clair que  $l_x = \overline{t_x}$ ; quant à  $\mu_x$  on a :

$$\begin{aligned} \underline{\mu_x} &= \underline{\lambda(\overline{i_{F(x)}})} = F(t_{F(x)}) \cdot F^2(i_{F(x)}) \cdot i_{F^2(x)} \\ &= F(i_{F(x)}) \cdot F(\psi_{F(x)}) \cdot F^2(i_{F(x)}) \cdot i_{F^2(x)}, \end{aligned}$$

$$\underline{\mu}_x = F(i_{F(x)}) \cdot F(F(i_{F(x)})) \cdot \psi_{F(x)} \cdot i_{F^2(x)}$$

et, d'après C6,

$$\underline{\mu}_x = F(i_{F(x)}) \cdot i_{F^2(x)}$$

d) Il reste à comparer  $Kl(\bar{Q})^\square$  et  $Kl(\bar{\Pi})^\bullet$ .

Il n'y a évidemment que les lois de composition à examiner. On notera  $\hat{R}$  l'élément de  $Kl(\bar{Q})$  de source  $x$  et but  $y$  déterminé par l'élément  $R$  de  $Kl(\bar{P})$  de source  $x$  et but  $F(y)$  (car  $Q(x) = F(x)$ ). La composition dans  $Kl(\bar{Q})$  est notée donc « $\square$ ».

On a

$$\begin{aligned} \hat{S} \square \hat{R} &= \mu_z \circ Q(\bar{S}) \circ \bar{R} = \mu_z \circ (Q(\bar{S}) \circ \bar{R}) \\ &= \mu_z \circ a(V_{F^2(z)} \cdot P(\underline{Q}(\bar{S}))) \cdot R, \end{aligned}$$

ou encore  $\hat{S} \square \hat{R} = \hat{E}$  avec

$$E = V_{F(z)} \cdot P(\underline{\mu}_z) \cdot V_{F^2(z)} \cdot P(\underline{Q}(\bar{S})) \cdot R.$$

Alors, avec  $V_{F(z)} = F(t_{F(z)}) \cdot \psi_{F^2(z)}$ ,

$$V_{F^2(z)} = F(t_{F^2(z)}) \cdot \psi_{F^3(z)} \quad \text{et} \quad P(\underline{\mu}_z) = F(i_{F^2(z)}) \cdot F^2(\underline{\mu}_z) \cdot \psi_{F^2(z)}$$

il vient

$$\begin{aligned} E &= F(t_{F(z)}) \cdot \psi_{F^2(z)} \cdot F(i_{F^2(z)}) \cdot F^2(\underline{\mu}_z) \cdot \psi_{F^2(z)} \cdot F(t_{F^2(z)}) \\ &\quad \cdot \psi_{F^3(z)} \cdot P(\underline{Q}(\bar{S})) \cdot R, \end{aligned}$$

ce qui devient, grâce à C4 et C2,

$$\begin{aligned} E &= F(t_{F(z)}) \cdot \psi_{F^2(z)} \cdot F(i_{F^2(z)}) \cdot F^2(\underline{\mu}_z) \cdot F(\psi_{F^2(z)}) \cdot F^2(\underline{Q}(\bar{S})) \\ &\quad \cdot \psi_{F(y)} \cdot R. \end{aligned}$$

En remplaçant  $\underline{Q}(\bar{S})$  et  $\underline{\mu}_z$  par leurs valeurs,  $E$  se transforme en :

$$\begin{aligned} E &= F(t_{F(z)}) \cdot \psi_{F^2(z)} \cdot F(i_{F^2(z)}) \cdot F^2(\underline{\mu}_z) \cdot F(\psi_{F^2(z)}) \cdot F^3(\psi_{F(z)}) \\ &\quad \cdot F^4(S) \cdot F^2(i_{F(y)}) \cdot \psi_{F(y)} \cdot R \end{aligned}$$

$$= [F(t_{F(z)}) \cdot \psi_{F^2(z)} \cdot F(i_{F^2(z)}) \cdot F^3(i_{F(z)}) \cdot F^2(i_{F^2(z)})].$$

$$[ F(\psi_{F^2(z)}) . F^3(\psi_{F(z)}) . F^4(S) . F^2(i_{F(y)}) . \psi_{F(y)} . R ] .$$

Or  $\psi_{F(y)} = F(\psi_{F(y)}) . t_{F^2(y)}$  d'après C7, et donc

$$F^2(i_{F(y)}) . \psi_{F(y)} = F^2(i_{F(y)}) . F(\psi_{F(y)}) . t_{F^2(y)} ;$$

ceci joint à C5 pour  $f = F(S) . \psi_{F(z)}$  nous donne pour la seconde expression entre crochets dans l'écriture de  $E$  la valeur

$$\begin{aligned} & F(\psi_{F^2(z)}) . F^3(F(S) . \psi_{F(z)}) . F^2(i_{F(y)}) . F(\psi_{F^2(y)}) . t_{F^2(y)} . R \\ &= F(\psi_{F^2(z)}) . F^3(F(S) . \psi_{F(z)}) . t_{F^2(y)} . R \\ &= F(\psi_{F^2(z)}) . F^3(\psi_{F(z)}) . F^4(S) . t_{F^2(y)} . R \\ &= F(\psi_{F^2(z)}) . F^3(\psi_{F(z)}) . t_{F^4(z)} . F^2(S) . R . \end{aligned}$$

Pour montrer que  $\hat{S} \square \hat{R} = \bar{S} \bullet \bar{R} = F(t_{F(z)}) . F^2(S) . R$  il suffit donc de montrer que

$$\begin{aligned} F(t_{F(z)}) &= F(t_{F(z)}) . \psi_{F^2(z)} . F(i_{F^2(z)}) . F^3(i_{F(z)}) . F^2(i_{F^2(z)}) . \\ & \quad . F(\psi_{F^2(z)}) . F^3(\psi_{F(z)}) . t_{F^4(z)} \end{aligned}$$

Or on a C1 pour  $F(\psi_{F(z)})$  et C7 pour  $F^2(e)$ , de sorte que l'on doit établir

$$\begin{aligned} F(t_{F(z)}) &= F(t_{F(z)}) . \psi_{F^2(z)} . F(i_{F^2(z)}) . F^3(i_{F(z)}) . F^2(i_{F^2(z)}) . \\ & \quad . [ \psi_{F^2(z)} . F(\psi_{F(z)}) ] . \end{aligned}$$

En désignant par  $E'$  le second membre, on obtient

$$E' = F(t_{F(z)}) . [ F^2(F(i_{F(z)}) . i_{F^2(z)}) . \psi_{F^2(z)} ] . F(\psi_{F(z)}) ,$$

ceci grâce à C2, et puis

$$E' = F(i_{F(z)}) . F(\psi_{F(z)}) . F^3(i_{F(z)}) . F^2(i_{F^2(z)}) . \psi_{F^2(z)} . F(\psi_{F(z)}) ;$$

en usant de C7 pour  $F^2(z)$  puis mettant  $F$  en facteur il vient

$$\begin{aligned} E' &= F(i_{F(z)}) . F [ \psi_{F^2(z)} . F(i_{F^2(z)}) . F^2(i_{F(z)}) . \psi_{F(z)} ] . t_{F^3(z)} . \\ & \quad . F(\psi_{F(z)}) \end{aligned}$$

ou encore, avec C2,

$$\begin{aligned}
 E' &= F(i_{F(z)}) \cdot F(F^2(i_{F(z)}) \cdot \psi_{F(z)}) \cdot t_{F^3(z)} \cdot F(\psi_{F(z)}) \\
 &= F(i_{F(z)}) \cdot F(\psi_{F(z)}) \cdot (F^3(i_{F(z)}) \cdot t_{F^3(z)}) \cdot F(\psi_{F(z)}) \\
 &= F(t_{F(z)}) \cdot (t_{F^2(z)} \cdot F(i_{F(z)})) \cdot F(\psi_{F(z)}) \\
 &= F(t_{F(z)}) \cdot t_{F^2(z)} \cdot F(t_{F(z)}),
 \end{aligned}$$

et la conclusion puisque l'on a T3 pour  $\bar{\Pi}$ .

Désignons par  $C_P$  la catégorie constituée des triplets  $(y, f, x) = \underset{\curvearrowright}{f}$ , où  $x$  et  $y$  sont des objets de  $C$  et où  $f$  est un morphisme quelconque de  $C$  de source  $F(x)$  et de but  $F(y)$  (de sorte que  $K_{\bar{P}} \subset C_P$ ), la composition étant déduite de celle de  $C$  par

$$(y', f', x') \cdot (y, f, x) = (y', f' \cdot f, x) \text{ si et seulement si } x' = y.$$

Alors on a l'analogie de la proposition IV.5 de [1] (et on aurait pu partir de là pour prouver notre théorème I.2.1 ci-dessus):

PROPOSITION I.2.2. *La catégorie  $Kl(\bar{\Pi})^\bullet$  est isomorphe à  $C_P^*$ .*

(On pourra comparer la preuve ci-après avec celle de la proposition IV.5 dans [1].)

PREUVE. Si  $\bar{R}$  est un morphisme de  $Kl(\bar{\Pi})^\bullet$  de source  $x$  et but  $y$ ,  $\bar{R}$  désigne le morphisme de  $Kl(\bar{P})^\circ$  de source  $x$  et but  $F(y)$  déterminé par  $R$ , et  $I(\bar{R})$  est un morphisme de  $C$  de source  $F(y)$  et but  $F(x)$  que l'on notera  $D(\bar{R})$ . (Avec les notations de [1] on aurait  $D(\bar{R}) = R^d$ ). Il est clair que  $D$  détermine une bijection entre  $Kl(\bar{\Pi})^\bullet$  et  $C_P^*$ ; montrons que  $D$  définit bien un foncteur contravariant: soit  $\bar{S}$  un morphisme de  $Kl(\bar{\Pi})^\bullet$  de  $y$  vers  $z$ . On a

$$\begin{aligned}
 I(\bar{R}) &= F(R) \cdot t_{F(y)} \quad \text{et} \quad I(\bar{S}) = F(S) \cdot t_{F(z)}, \\
 \bar{S} \circ \bar{R} &= A [ F(t_{F(z)}) \cdot F^2(S) \cdot R ]
 \end{aligned}$$

et

$$D(\bar{S} \circ \bar{R}) = F(F(t_{F(z)}) \cdot F^2(S) \cdot R) \cdot t_{F(z)}.$$

Le fait que  $D$  soit compatible avec les applications source et but résulte

de C3. Pour la composition on doit prouver :

$$\begin{aligned} F(R) \cdot t_{F(y)} \cdot F(S) \cdot t_{F(z)} &= F(R) \cdot F^3(S) \cdot F^2(t_{F(z)}) \cdot t_{F(z)} \\ &= F(R) \cdot F^2(F(S) \cdot t_{F(z)}) \cdot t_{F(z)}, \end{aligned}$$

ce qui résulte de la naturalité de  $t$  (axiome C1).

REMARQUE : Si l'on désire reconstruire  $C$  à partir de  $Kl(\bar{P})^0$  et de  $\bar{Q}$  donnée sur cette catégorie, la dernière proposition jointe au théorème I.2.1 entraîne

$$Kl(\bar{Q})^{\square * \simeq} C_p.$$

Ceci conduit à étudier la catégorie des algèbres de  $\bar{Q}$ , notée  $Alg(\bar{Q})^{\square}$ , et à chercher si

$$Alg(\bar{Q})^{\square * \simeq} C. \quad (1).$$

Rappelons que, si  $\mathbf{T} = (T, \eta, \mu)$  est un triple sur une catégorie  $C$ , une  $\mathbf{T}$ -algèbre est un couple  $(e, \theta)$  où  $\theta : T(e) \rightarrow e \in C$  vérifie

$$\theta \cdot \eta_e = e \quad \text{et} \quad \theta \cdot T(\theta) = \theta \cdot \mu_e;$$

un morphisme de  $(e, \theta)$  vers  $(e', \theta')$  est défini par un  $f : e \rightarrow e' \in C$  tel que  $\theta' \cdot T(f) = f \cdot \theta$ . On ne peut espérer avoir (1) toujours, comme on le voit en considérant, sur une catégorie  $C$  possédant un élément final  $1$ , la monade involutive  $(F, i, \psi)$ , où  $F$  est le foncteur constant sur  $1$ , où  $i_e$  est, pour tout  $e$ , l'unique morphisme de  $e$  vers  $1$ , et où  $\psi_e = 1$ . Sur cet exemple on voit qu'on ne peut pas en général reconstruire  $C$  à partir de  $Kl(\bar{P})^0$  et de certaines données sur  $Kl(\bar{P})^0$ . On notera cependant :

PROPOSITION I.2.3. Dans le « cas ensembliste » c'est-à-dire dans le cas où  $(\bar{P}, 1) = U$  est la monade « des parties » usuelle sur la catégorie  $\mathfrak{M}^0$  des applications entre ensembles (\*) on a

$$Alg(\bar{Q})^{\square * \simeq} \mathfrak{M}^0.$$

La vérification de ce résultat consiste surtout à montrer que pour tout ensemble  $E$  il existe une unique  $\bar{Q}$ -algèbre de la forme  $(E, \theta)$  à savoir celle où  $\theta = \bar{s}_E$ , en notant  $s_E$  l'application de  $\mathfrak{P}(E)$  dans lui-même

(\*) Voir en I.4.

qui à  $A \subset E$  associe  $A$  si  $A$  est un singleton (i.e. de la forme  $\{\alpha\}$  pour un  $\alpha \in E$ ) et associe  $\emptyset$  sinon.

Si nous revenons au cas général, et si nous posons, pour tout  $e \in C_0$ ,

$$s_e = F(i_e) \cdot i_{F(e)},$$

de sorte que  $\underline{\mu}_e = s_{F(e)}$ , nous avons :

PROPOSITION I.2.4. Avec les notations précédemment introduites, et pour tout  $e \in C_0$ , le morphisme  $\bar{s}_e$  définit une  $\bar{Q}$ -algèbre  $(e, \bar{s}_e)$ .

La preuve est du même type que celle du théorème I.2.1 ; indiquons seulement que pour aboutir on peut simplement commencer par montrer que

$$F(t_e) \cdot F^2(s_e) \cdot \psi_{F(e)} = F(i_e).$$

En fait, les calculs de ce genre seront facilités par l'explicitation I.2.5 suivante de la monade  $\bar{Q}$  : De l'adjonction de  $L_{\bar{P}}$  à gauche de  $\sigma_{\bar{P}}$ , on déduit sur  $Kl(\bar{P})^0$  une comonade  $(S, \varepsilon, m) = \bar{S}$ , où, pour tout  $R : x \rightarrow F(y)$ , on a

$$S(\bar{R}) = \overline{i_{F(y)} \cdot V_y \cdot P(R)}$$

et, pour tout  $e \in C_0$ ,

$$\varepsilon_e = \overline{Id_{P(e)}} \quad \text{et} \quad m_e = \overline{i_{F^2(e)} \cdot i_{F(e)}}.$$

Puisque  $I$  est une involution, il est clair que  $(I \circ S \circ I, I \varepsilon, I m)$  est une monade sur  $Kl(\bar{P})^0$ .

PROPOSITION I.2.5. Les deux monades  $(I \circ S \circ I, I \varepsilon, I m)$  et  $(Q, l, \mu)$  sont égales.

Vérifions que  $Q = I \circ S \circ I$  : pour  $R : x \rightarrow F(y)$  on a

$$\underline{I(\bar{R})} = F(R) \cdot t_y, \quad \underline{S(I(\bar{R}))} = i_{P(x)} \cdot V_x \cdot P(F(R) \cdot t_y).$$

Or  $P(F(R) \cdot t_y) = F(i_{F(x)}) \cdot F^2(F(R) \cdot t_y) \cdot \psi_y$  et  $V_x = F(t_x) \cdot \psi_{F(x)}$

de sorte que

$$\begin{aligned} \underline{S(I(\bar{R}))} &= i_{F(x)} \cdot F(t_x) \cdot \psi_{F(x)} \cdot F(i_{F(x)}) \cdot F^3(R) \cdot F^2(t_y) \cdot \psi_y \\ &= i_{F(x)} \cdot F(t_x) \cdot F^3(R) \cdot F^2(t_y) \cdot \psi_y. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} (I \circ S \circ I)(\bar{R}) &= F(\psi_y) \cdot F^3(t_y) \cdot F^4(R) \cdot F^2(t_x) \cdot F(i_{F(x)}) \cdot t_{F(x)} \\ &= F(\psi_x) \cdot F^2(F(t_y) \cdot F^2(R) \cdot t_x) \cdot i_{F(x)} \end{aligned}$$

et donc, d'après la naturalité de  $t$  et C3,

$$(I \circ S \circ I)(\bar{R}) = F(\psi_x) \cdot F^2(R) \cdot i_{F(x)} = \underline{Q(R)}.$$

*Notion de U-fonction.*

Les propositions I.2.3 et I.2.4 conduisent à introduire la définition suivante :

DEFINITION. Si  $R$  est un morphisme de  $C$  de  $x$  vers  $F(y)$  on dira que la  $U$ -relation  $R$  est une  $U$ -relation fonctionnelle ou  $U$ -fonction, si l'on a

$$fon_o(\bar{R}) : \quad \bar{s}_x \circ Q(I(\bar{R})) = I(\bar{R}) \circ \bar{s}_y,$$

ou bien, ce qui est équivalent grâce à I.2.5, si

$$fon'_o(\bar{R}) : \quad S(\bar{R}) \circ \equiv_x = \equiv_y \circ \bar{R},$$

avec  $\equiv_x = I(\bar{s}_x) = \overline{i_{F(x)} \cdot i_x}$ .

Remplaçant  $Q, I, \bar{s}_x, \bar{s}_y$  et «  $\circ$  » par leurs définitions on peut montrer que cette condition équivaut à

$$fon_o(R) : \quad F(R) \cdot i_{F(y)} = F(R) \cdot \psi_y \cdot F(i_y) \cdot i_{F(y)}$$

ou encore à

$$fon'_o(R) : \quad i_{F(y)} \cdot R = P(i_y) \cdot R.$$

Pour ce dernier point le lecteur vérifiera que pour tout  $R : x \rightarrow F(y)$  on a

$$S(\bar{R}) \circ \equiv_x = \overline{i_{F(y)} \cdot R} \quad \text{et} \quad \equiv_y \circ \bar{R} = P(i_y) \cdot R.$$

Les  $U$ -fonctions (qui seront appelées simplement fonctions s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le  $U$ ) déterminent une sous-catégorie de  $Kl(\bar{P})^o$  désignée par  $fon_o(U)^o$ , et le foncteur canonique  $L_{\bar{P}}$  de  $C$  vers  $Kl(\bar{P})^o$  est en fait à valeurs dans  $fon_o(U)$ , mais n'est en général ni injectif ni surjectif. Pour ceci on voit par exemple que, si  $F(x)$  est final, toute

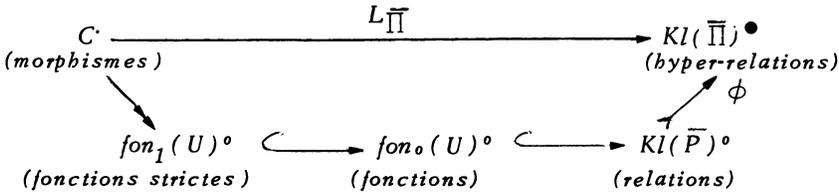
$U$ -relation de source  $x$  est une  $U$ -fonction; alors si on est dans le cas où  $U = U_1$  (indiqué avant la proposition I.2.3) toute  $U_1$ -relation est une  $U_1$ -fonction; si de plus  $C = \mathfrak{M}^0$  la  $U_1$ -relation  $\bar{i}_X$  de  $X$  vers  $\emptyset$  déterminée par  $i_X : X \rightarrow F(\emptyset) = 1$  est  $U_1$ -fonctionnelle, mais il n'existe pas de morphisme  $f : X \rightarrow \emptyset$  tel que  $i_\emptyset \cdot f = i_X$ , sauf si  $X = \emptyset$ .

On aura donc soin en général de ne pas confondre la condition  $\text{fon}_0(R)$  avec la condition  $\text{fon}_1(R)$  de la définition suivante :

DEFINITION. Si  $R$  est un morphisme de  $C$  de  $x$  vers  $F(y)$  on dira que la  $U$ -relation  $\bar{R}$  est une  $U$ -relation fonctionnelle stricte, ou  $U$ -fonction stricte, si l'on a

$$\text{fon}_1(R) : \quad (\exists f : x \rightarrow y \in C) (R = i_y \cdot f).$$

On désigne par  $\text{fon}_1(U)^\circ$  la sous-catégorie de  $Kl(\bar{P})^\circ$  ayant pour éléments les  $U$ -fonctions strictes. On a pour  $L\bar{\Pi}$  la décomposition



Le composé  $C \xrightarrow{L\bar{P}} \text{fon}_1(U)^\circ \hookrightarrow \text{fon}_0(U)^\circ$  sera noté  $\lambda_U$ .

PROPOSITION I.2.6. Le foncteur  $\lambda_U$  est un isomorphisme si et seulement si pour tout  $e \in C_0$  le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 e & \xrightarrow{i_e} & P(e) & \xrightarrow{i_{P(e)}} & P^2(e) \\
 & & & \xrightarrow{P(i_e)} & 
 \end{array}$$

est un noyau dans  $C$ . (Ceci est vrai en particulier si  $F : C^* \rightarrow C$  est triplable).

Pour terminer nous allons voir (proposition I.2.7) que  $\text{fon}_0(\bar{R})$  est un affaiblissement d'une sorte d'interprétation « interne » relative à  $U$  de la propriété de factorisation (de  $R$  à travers  $i_Y$ ) invoquée par  $\text{fon}_1(R)$ .

*Notions de U-factorisation, de U-monomorphisme.*

Considérons trois ensembles  $A, B$  et  $B'$  et deux applications  $f: B \rightarrow B'$  et  $g: A \rightarrow B'$  éléments d'une catégorie pleine d'applications  $\mathfrak{M}^0$ ; la formule d'ordre 1

$$\langle (\exists b: B \rightarrow A \in \mathfrak{M}) (f = g \circ b) \rangle$$

qui signifie que  $f$  se factorise à travers  $g$  dans  $\mathfrak{M}$ , équivaut à :

$$(1) \quad (\forall b \in B) (\exists a \in A) (f(b) = g(a))$$

ce qui à son tour se transforme en

$$(2) \quad (\forall b \in B) (\forall b' \in B') [f(b) = b' \iff \exists a \in A (g(a) = b' \text{ et } f(b) = g(a))]$$

soit

$$(3) \quad \forall b' \in B' [ \{ b \mid f(b) = b' \} = \{ b \mid f(b) \in \{ g(a) \mid g(a) = b' \} \} ] .$$

Cette dernière forme, en utilisant la monade involutive «des parties» usuelle sur  $\mathfrak{M}^0$  notée  $(\star \circ \mathfrak{P}, \gamma, \psi)$  (voir le §I.4) peut se mettre sous forme d'un énoncé d'ordre 0 où interviennent comme seuls symboles fonctionnels  $\star \circ \mathfrak{P}, \mathfrak{P}, \gamma$  et « $\circ$ », à savoir

$$(4) \quad (\star \circ \mathfrak{P})(f) \circ \gamma_{B'} = (\star \circ \mathfrak{P})(f) \circ \mathfrak{P}(g) \circ (\star \circ \mathfrak{P})(g) \circ \gamma_{B'}$$

ou, ce qui est équivalent,

$$(5) \quad \mathfrak{P}(f) \circ \gamma_B = \mathfrak{P}(g) \circ (\star \circ \mathfrak{P})(g) \circ \mathfrak{P}(f) \circ \gamma_B .$$

Ceci était déjà remarqué en 1972 par A. WIWEGER dans [3]. De même si  $f: A \rightarrow B$  et  $g: A \rightarrow B'$  sont deux applications de source commune, la formule

$$\langle (\exists b: B' \rightarrow B \in \mathfrak{M}) (f = b \circ g) \rangle$$

peut être traduite par

$$(6) \quad \mathfrak{P}(f) \circ \gamma_A = \mathfrak{P}(f) \circ (\star \circ \mathfrak{P})(g) \circ \mathfrak{P}(g) \circ \gamma_A .$$

Par analogie avec le cas ensembliste on posera en général la

DEFINITION. Soit  $C$  une catégorie et  $U = (F, i, \psi)$  une monade involutive sur  $C$ .

i) Si  $f: y \rightarrow z$  et  $g: x \rightarrow z$  dans  $C'$ , on dit que  $f$  se *U-factorise à droite à travers*  $g$  si on a

$$U\text{-}fac_d(f, g): \quad i_z \cdot f = P(g) \cdot F(g) \cdot i_z \cdot g.$$

ii) Si  $f: y \rightarrow z$  et  $g: y \rightarrow x$  dans  $C'$ , on dit que  $f$  se *U-factorise à gauche à travers*  $g$  si on a

$$U\text{-}fac_g(f, g): \quad i_z \cdot f = P(f) \cdot F(g) \cdot i_x \cdot g.$$

REMARQUE. Pour que ces notions de factorisation soient « bonnes » il faudrait au moins que pour tout  $f \in C$  on ait  $U\text{-}fac_d(f, f)$  et  $U\text{-}fac_g(f, f)$ . On verra plus loin (§ II, équations ou données supplémentaires) que ceci équivaut à l'axiome de *quasi-inversion*  $Q(f)$ , qui n'est pas toujours satisfait. Si l'on suppose  $Q(f)$  pour tout  $f \in C$ , on vérifie que la factorisation entraîne la *U-factorisation*, et que la *U-factorisation* est une relation transitive.

Toujours par analogie avec le cas ensembliste on introduit la:

DEFINITION. Soit  $C'$  une catégorie et  $U = (F, i, \psi)$  une monade involutive sur  $C'$ .

i) Si  $m: y \rightarrow z$  dans  $C'$ , on dit que  $m$  est un *U-monomorphisme* si

$$U\text{-}mono(m): \quad F(m) \cdot P(m) = Id_{P(y)}.$$

ii) Si  $\pi: y \rightarrow z$  dans  $C'$ , on dit que  $\pi$  est un *U-épimorphisme* si

$$U\text{-}épi(\pi): \quad P(\pi) \cdot F(\pi) = Id_{P(z)}.$$

On note que  $U\text{-}mono(m)$  équivaut à  $U\text{-}fac(Id_y, m)$ ; on voit aussi que le composé de deux *U-monomorphismes* (resp. de deux *U-épimorphismes*) est encore un *U-monomorphisme* (resp. un *U-épimorphisme*).

PROPOSITION 1.2.7. Soit  $U = (F, i, \psi)$  une monade involutive sur  $C'$ ,  $R: x \rightarrow F(y) \in C$ .

1° Si  $R$  se *U-factorise à droite à travers*  $i_y$ , alors  $\bar{R}$  est une *U-fonction*.

2° Toute *U-fonction*  $\bar{R}: x \rightarrow y$  se *U-factorise à droite à travers*  $i_y$  si et seulement si  $i_y$ , pour tout  $y \in C'_0$ , est un *U-monomorphisme*, c'est-à-dire si et seulement si pour tout  $y \in C'_0$  on a

$$U\text{-mono}(i_y): \quad i_y = F(i_y) \cdot i_{F(y)} \cdot i_y.$$

3° Cette condition  $U\text{-mono}(i_y)$  peut ne pas être satisfaite dans une monade involutive.

PREUVE. 1° Si  $R$  se  $U$ -factorise à travers  $i_y$  on a donc

$$i_{F(y)} \cdot R = P(i_y) \cdot F(i_y) \cdot i_{F(y)} \cdot R \quad (1)$$

et en composant à gauche avec  $P(i_y) \cdot V_y$ ,

$$P(i_y) \cdot R = P(i_y) \cdot F(i_y) \cdot i_{F(y)} \cdot R$$

soit, d'après (1),

$$P(i_y) \cdot R = i_{F(y)} \cdot R. \quad (2)$$

2° Supposons maintenant que, pour tout  $R$ , (2) entraîne (1); pour  $R = i_y$ , (2) s'écrit  $i_{P(y)} \cdot i_y = P(i_y) \cdot i_y$ , ce qui est satisfait par naturalité de  $i$ ; donc l'implication (2)  $\implies$  (1) étant supposée vraie, on doit avoir (1) pour  $i_y$ , soit

$$i_{P(y)} \cdot i_y = P(i_y) \cdot F(i_y) \cdot i_{F(y)} \cdot i_y$$

et, en composant avec  $V_y$ , on obtient la formule annoncée. Inversement si cette formule est satisfaite, on l'écrit sous la forme

$$F(i_y) \cdot P(i_y) = F(y) \quad (3)$$

de sorte que, si l'on a (2), on peut, dans les deux membres de (1), remplacer  $i_{F(y)} \cdot R$  par  $P(i_y) \cdot R$ , et il reste à vérifier

$$P(i_y) \cdot R = P(i_y) \cdot F(i_y) \cdot P(i_y) \cdot R,$$

ce qui découle de (3).

3° On se convainc du résultat, comme plus loin du résultat analogue pour l'axiome de quasi-inversion, en regardant des monades involutives particulières sur des groupes.

PROPOSITION 1.2.8. 1° Soit toujours une monade involutive  $U = (F, i, \psi)$  sur  $C$ ; on a

a) Pour tout  $e$  le morphisme  $i_e$  est un monomorphisme si et seulement si  $F$  est fidèle.

b) Si pour tout  $e$  le morphisme  $i_e$  est un monomorphisme, alors tout

*U*-monomorphisme est un monomorphisme.

2° Dans un topos élémentaire équipé de sa monade involutive canonique  $U_{\Omega}$  (voir en 1.4) les notions de monomorphisme et de  $U_{\Omega}$ -monomorphisme sont équivalentes.

PREUVE. 1° a) De  $i_y \cdot f = i_y \cdot g$  on tire

$$F(f) \cdot F(i_y) \cdot \psi_y = F(g) \cdot F(i_y) \cdot \psi_y$$

soit  $F(f) = F(g)$  et, si  $F$  est fidèle,  $f = g$ , de sorte que  $i_y$  est un monomorphisme.

Inversement, de  $F(f) = F(g)$  on déduit

$$F(f) \cdot F(i_y) \cdot t_y = F(g) \cdot F(i_y) \cdot t_y,$$

$$F(i_y \cdot f) \cdot t_y = F(i_y \cdot g) \cdot t_y,$$

$$F(t_y) \cdot F^2(i_y \cdot f) \cdot t_x = F(t_y) \cdot F^2(i_y \cdot g) \cdot t_x,$$

$$F(t_y) \cdot t_{F(y)} \cdot i_y \cdot f = F(t_y) \cdot t_{F(y)} \cdot i_y \cdot g,$$

d'où  $i_y \cdot f = i_y \cdot g$  et l'égalité cherchée, si  $i_y$  est un monomorphisme.

b) De  $m \cdot f = m \cdot g$  il sort

$$F(f) \cdot F(m) \cdot P(m) = F(g) \cdot F(m) \cdot P(m)$$

de sorte que, si  $F(m) \cdot P(m) = F(x)$  et si  $F$  est fidèle, on obtient :  $f = g$ .

2° Dans un topos élémentaire ou plus généralement dans une catégorie avec appartenance (voir [1]) on sait que pour tout  $e$  le morphisme  $i_e$  est un monomorphisme ([1] p.28) et aussi que, pour tout  $e$ ,  $i_e$  est un  $U_{\Omega}$ -monomorphisme (voir dans [1] la proposition IV,2 et la formule (1) p.33). D'après 1-b ci-dessus, il nous reste à prouver que, si  $m$  est un monomorphisme, on a  $F(m) \cdot P(m) = F(x)$ . Or  $m$  est un monomorphisme si et seulement si le quatuor  $(m, m, y, y)$  est un produit fibré, de sorte que notre affirmation est un cas particulier de l'affirmation suivante : dans un topos, tout quatuor cartésien est *U*-semi-cartésien au sens de la définition ci-après. Nous ne donnerons pas la preuve de ce dernier point, plusieurs auteurs l'ayant déjà mentionné ou publié (voir par exemple [4]).

DEFINITION. Soit  $C$  une catégorie et  $U=(F, i, \psi)$  une monade involutive sur  $C$ . Un quatuor  $(f, g, g', f')$  de morphismes de  $C$  (tels que  $f \cdot g' = g \cdot f'$ ) est dit *U-semi-cartésien* si

$$P(f') \cdot F(g') = F(g) \cdot P(f).$$

Dans  $\mathfrak{M}^0$  par exemple les quatuors *U-semi-cartésiens* sont exactement les quatuors semi-cartésiens (si  $U$  est la monade «des parties» usuelle), c'est-à-dire les quatuors  $(f, g, g', f')$  tels que, pour tout  $(f'', g'')$  qui vérifie:  $f \cdot g'' = g \cdot f''$ , il existe un morphisme  $h$  (non nécessairement unique) tel que  $f' \cdot h = f''$  et  $g' \cdot h = g''$ .

### 1.3. La monade associée sur les *U-fonctions*.

On dira qu'une monade involutive  $U$  est *très fidèle* si elle satisfait la condition de la proposition I.2.6. Nous allons examiner la propriété universelle de la catégorie  $fon_0(U)^0$  relativement à cette notion de monade involutive très fidèle (m.i.t.f.); pour cela on commence par introduire la définition suivante que l'on pourra rapprocher de la notion de catégorie avec appartenance ([1]) et comparer aux diverses notions de catégorie ordonnée à involution introduites dans la littérature (par exemple dans [5]).

DEFINITION I.3.1. On appelle *catégorie relationnelle* un triplet

$$[(K^0, I); (S, \epsilon); \equiv] = \mathfrak{K}$$

tel que :

a)  $K^0$  est une catégorie (dont la loi de composition est notée « $\circ$ ») et  $I$  est une involution sur  $K^0$  (Définition I.1.1.).

b)  $S$  est un foncteur de  $K^0$  vers  $K^0$ , et  $\epsilon$  est une transformation naturelle de  $S$  vers  $Id_{K^0}$ , c'est-à-dire que pour tout  $R: x \rightarrow y \in K$  on a

$$(0) \quad \epsilon_y \circ S(R) = R \circ \epsilon_x.$$

c)  $\equiv$  est la donnée pour tout  $x \in K^0$  d'un morphisme  $\equiv_x$  de  $x$  vers  $Sx$  tel que

- La donnée  $\equiv_S$  est naturelle de  $S$  vers  $S^2$ , c'est-à-dire que pour tout  $R: x \rightarrow y \in K$  on a

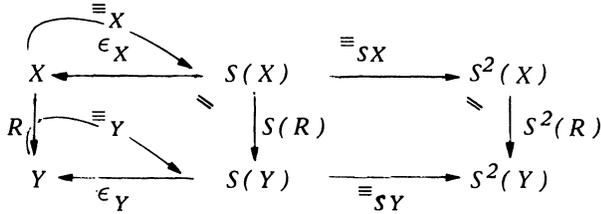
$$(1) \quad \equiv_{S(y)} \circ S(R) = S^2(R) \circ \equiv_{S(x)}.$$

- Pour tout  $x \in K^0$  on a

$$(2) \quad \epsilon_x \circ \equiv_x = x,$$

$$(3) \quad S(\epsilon_x) \circ \equiv_{S(x)} = S(x),$$

$$(4) \quad S(\equiv_x) \circ \equiv_x = \equiv_{S(x)} \circ \equiv_x.$$



PROPOSITION I.3.1. Pour toute catégorie relationnelle  $\mathcal{K}$  le triplet  $(S, \epsilon, \equiv_S) = \bar{S}$  est un cotriple et  $(x, \equiv_x)$  est, pour tout  $x \in K^0$ , une  $\bar{S}$ -coalgèbre.

La vérification est aisée.

PROPOSITION I.3.2. Si  $U = (F, i, \psi)$  est une monade involutive, alors  $[(Kl(\bar{P})^0, I); (S, \epsilon); \equiv]$  (où  $Kl(\bar{P})^0$  et  $I$  ont été définis en I.1, et où  $S, \epsilon$  et  $\equiv$  ont été définis en I.2) est une catégorie relationnelle au sens de la définition I.3.1, que l'on notera  $\mathcal{Rel}(U)$ .

Ceci résulte aisément des calculs développés en I.2; on peut aussi faire directement les vérifications.

DEFINITION I.3.2. Si  $\mathcal{K}$  est une catégorie relationnelle un morphisme  $R : x \rightarrow y \in K$  sera appelé  $\mathcal{K}$ -fonction si l'on a

$$\equiv_y \circ R = S(R) \circ \equiv_x.$$

Les  $\mathcal{K}$ -fonctions forment une sous-catégorie de  $K^0$  notée  $fon(\mathcal{K})$ .

D'après l'axiome (1) pour tout  $R \in K$  le morphisme  $S(R)$  est une  $\mathcal{K}$ -fonction. Par conséquent pour tout  $R \in fon(\mathcal{K})$  le morphisme  $S(I(R)) \in fon(\mathcal{K})$ ; ce morphisme sera noté  $G(R)$ . De même pour tout  $x \in K^0 = fon(\mathcal{K})$ , le morphisme  $S(I(\epsilon_x))$  noté  $\phi_x$  appartient à  $fon(\mathcal{K})$ .

Enfin l'axiome (4) nous dit que  $\equiv_x$  est une  $\mathcal{K}$ -fonction, que l'on notera  $j_x$ . On convient de désigner par les lettres minuscules ( $r, f, g, \text{etc...}$ ) les morphismes de  $K^0$  éléments de  $\text{fon}(\mathcal{K})$ .

THEOREME 1.3.3. *Pour toute catégorie relationnelle  $\mathcal{K}$  le triplet  $(G, j, \phi)$  est une monade involutive sur la catégorie  $\text{fon}(\mathcal{K})$ ; cette monade involutive sera désignée par  $FON(\mathcal{K})$ .*

De plus, pour toute catégorie relationnelle  $\mathcal{K}$  on a

$$\mathcal{K} \simeq \mathcal{R}el(FON(\mathcal{K})).$$

DEMONSTRATION. 1° On pose  $t_x = \phi_x \circ j_x$  et puis  $V_x = G(t_x) \circ \phi_{S(x)}$ . Alors on a

$$V_x = S(\epsilon_x). \quad \langle * \rangle$$

Pour prouver ceci calculons  $V_x$  :

$$\begin{aligned} t_x &= SI(\epsilon_x) \circ \equiv_x, \\ G(t_x) &= SI(SI(\epsilon_x) \circ \equiv_x) \\ &= SI(\equiv_x) \circ SISI(\epsilon_x), \end{aligned}$$

et donc

$$V_x = G(t_x) \circ \phi_{S(x)} = SI(\equiv_x) \circ SISI(\epsilon_x) \circ SI(\epsilon_{S(x)}).$$

Pour prouver notre affirmation, il suffit de montrer que

$$I(\equiv_x) \circ SISI(\epsilon_x) \circ I(\epsilon_{S(x)}) = \epsilon_x$$

ou, en appliquant l'involution  $I$  aux deux membres, que

$$\epsilon_{S(x)} \circ SI(\epsilon_x) \circ \equiv_x = I(\epsilon_x);$$

mais d'après (0) pour  $R = I(\epsilon_x)$  on doit seulement établir

$$I(\epsilon_x) \circ \epsilon_x \circ \equiv_x = I(\epsilon_x),$$

ce qui résulte de l'axiome (2).

2° On peut alors établir l'axiome C4 des monades involutives qui s'écrit ici (avec  $\langle * \rangle$ ):

$$\begin{aligned} SI(\epsilon_x) \circ S(\epsilon_x) &= SI(SI(\epsilon_x)) \circ SI(\epsilon_{S(x)}), \\ S(I(\epsilon_x) \circ \epsilon_x) &= SI(\epsilon_{S(x)} \circ SI(\epsilon_x)). \end{aligned}$$

Pour cela il suffit que

$$I(\epsilon_x) \circ \epsilon_x = \epsilon_{S(x)} \circ SI(\epsilon_x), \quad \langle ** \rangle$$

ce qui est justement (0) pour  $R = I(\epsilon_x)$ .

L'axiome C3 s'écrit

$$SI(\equiv_x) \circ SISI(\epsilon_x) \circ SI(\epsilon_{S(x)}) \circ \equiv_{S(x)} = S(x),$$

$$SI(\equiv_x) \circ SI(\epsilon_{S(x)} \circ SI(\epsilon_x)) \circ \equiv_{S(x)} = S(x)$$

et, d'après (0) pour  $I(\epsilon_x)$  ( $\langle ** \rangle$ ),

$$SI(\equiv_x) \circ SI(I(\epsilon_x) \circ \epsilon_x) \circ \equiv_{S(x)} = S(x),$$

$$SI(\equiv_x) \circ SI(\epsilon_x) \circ S(\epsilon_x) \circ \equiv_{S(x)} = S(x),$$

$$(SI(\epsilon_x \circ \equiv_x)) \circ (S(\epsilon_x) \circ \equiv_{S(x)}) = S(x),$$

ce qui résulte des axiomes (2) et (3).

3° Vérifions que l'on a l'axiome C2, soit pour  $R : x \rightarrow y \in \text{fon}(\mathcal{K})$ :

$$SISI(R) \circ SI(\epsilon_x) = SI(\epsilon_y) \circ SI(\equiv_y) \circ SISI(R) \circ SI(\epsilon_x).$$

Il suffit que

$$\epsilon_x \circ SI(R) = \epsilon_x \circ SI(R) \circ \equiv_y \circ \epsilon_y$$

et d'après l'axiome (0) pour  $I(R)$  il faut établir

$$I(R) \circ \epsilon_y = I(R) \circ \epsilon_y \circ \equiv_y \circ \epsilon_y,$$

ce qui résulte de l'axiome (2). On remarquera qu'on n'a pas utilisé le fait que  $R$  est une  $\mathcal{K}$ -fonction.

4° Enfin établissons l'axiome C1 :

On veut, pour tout  $R : x \rightarrow y \in \text{fon}(\mathcal{K})$ , l'égalité

$$SISI(R) \circ SI(\epsilon_x) \circ \equiv_x = SI(\epsilon_y) \circ \equiv_y \circ R,$$

soit

$$SI(\epsilon_x \circ SI(R)) \circ \equiv_x = SI(\epsilon_y) \circ \equiv_y \circ R$$

ou, avec (0) pour  $I(R)$ ,

$$SI(I(R) \circ \epsilon_y) \circ \equiv_x = SI(\epsilon_y) \circ \equiv_y \circ R,$$

$$SI(\epsilon_y) \circ S(R) \circ \equiv_x = SI(\epsilon_y) \circ \equiv_y \circ R.$$

Or cette dernière égalité équivaut à l'hypothèse que  $R$  est une  $\mathcal{K}$ -fonction : on a bien l'égalité si  $R$  est une  $\mathcal{K}$ -fonction, et inversement, en composant les deux membres de l'égalité avec  $SI(\equiv_y)$  à gauche, on tombe sur la définition d'une  $\mathcal{K}$ -fonction.

5° Prouvons maintenant que  $\mathcal{K} \simeq \mathcal{Rel}(FON(\mathcal{K}))$ . On posera  $fon(\mathcal{K}) = C^0$  et on désignera par  $\bar{P} = (P, j, V)$  la monade associée à  $(G, j, \phi)$  sur  $fon(\mathcal{K}) = C^0$ , comme dans le paragraphe I.1, et donc par  $Kl(\bar{P})^0$  sa catégorie de Kleisli. On va montrer que l'on a un isomorphisme  $\mu : Kl(\bar{P})^0 \rightarrow K^0$ .

a) On commencera par remarquer que, si  $f : x \rightarrow y \in C$ , on a

$$\begin{aligned} P(f) &= SI(\equiv_y) \circ SISI(f) \circ SI(\epsilon_x) \\ &= SI(\epsilon_x \circ SI(f) \circ \equiv_y) \end{aligned}$$

et, avec l'axiome (0) pour  $I(f)$ ,

$$P(f) = SI(I(f) \circ \epsilon_y \circ \equiv_y)$$

d'où, avec l'axiome (2) en  $y$  et le fait que  $I^2 = Id_{K^0}$ ,  $P(f) = S(f)$ .

b) Si  $f : x \rightarrow G(y)$  et  $g : y \rightarrow G(z)$  sont des éléments de  $C^0$ , on a, pour la composition dans  $Kl(\bar{P})^0$  :

$$\begin{aligned} \overline{g \circ f} &= V_z \circ P(g) \circ f \\ &= S(\epsilon_z) \circ S(g) \circ f. \end{aligned}$$

c) On définit  $\mu$  par  $\mu(\overline{f}) = \epsilon_y \circ f$ , et on voit que

$$\mu(\overline{j_x}) = \epsilon_x \circ \equiv_x = x$$

et

$$\mu(\overline{g \circ f}) = \mu(\overline{g}) \circ \mu(\overline{f}),$$

c'est-à-dire, avec le calcul ci-dessus,

$$\epsilon_z \circ S(\epsilon_z) \circ S(g) \circ f = \epsilon_z \circ g \circ \epsilon_y \circ f,$$

ce qui résulte de la naturalité de  $\epsilon$  pour  $\epsilon_z \circ g$ . Ainsi  $\mu$  est bien un foncteur.

d) On définit alors  $b : K^0 \rightarrow Kl(\bar{P})^0$  inverse de  $\mu$  par

$$\underline{b}(R) = S(R) \circ \equiv_x, \text{ pour } R : x \rightarrow y \in K^0.$$

Il reste à vérifier que pour tout  $R \in \mathcal{K}$  le morphisme  $b(R)$  est une  $\mathcal{K}$ -fonction de  $x$  vers  $S(y)$ , ce qui est clair, puisque  $\equiv_x$  et  $S(R)$  sont des fonctions, et à vérifier que  $b$  est inverse de  $\mu$ , c'est-à-dire que :

$$-(\mu \circ b)(R) = R \text{ i.e. } \epsilon_y \circ S(R) \circ \equiv_x = R,$$

ce qui résulte de l'axiome (0) et de (2).

$$-(b \circ \mu)(\bar{f}) = \bar{f} \text{ i.e. } S(\epsilon_y \circ f) \circ \equiv_x = f,$$

c'est-à-dire

$$S(\epsilon_y) \circ S(f) \circ \equiv_x = f,$$

ce qui résulte du fait que  $f$  est une  $\mathcal{K}$ -fonction.

Pour conclure il reste à remarquer que, pour tout  $x \in K^0$  on a

$$\mu(\overline{Id_{S(x)}}) = \epsilon_x \quad \text{et} \quad \mu(\overline{\equiv_{S(x)} \circ \equiv_x}) = \equiv_x,$$

et que pour tout  $f: x \rightarrow S(y) \in \text{fon}(\mathcal{K})$  on a

$$S(\epsilon_y \circ f) = \epsilon_{S(y)} \circ (\equiv_{S(y)} \circ V_y \circ P(f)),$$

ce qui résulte de 5 a, de  $\langle * \rangle$ , et de l'axiome (2) en  $S(y)$ .

Considérons un univers  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{F}^0$  la catégorie des foncteurs entre catégories éléments de  $\mathcal{U}$ . Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie ayant pour objets les catégories relationnelles  $\mathcal{K} = [(K^0, I); (S, \epsilon); \equiv]$  telles que  $K \in \mathcal{U}$ , et soit  $B: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{F}^0$  un foncteur fidèle tel que pour tout  $\mathcal{K}$  on ait  $B(\mathcal{K}) = K^0$ . On suppose aussi que pour tout  $\mathcal{K}$  il existe un isomorphisme

$$m: \mathcal{Rel}(FON(\mathcal{K})) \rightarrow \mathcal{K} \text{ tel que } B(m) = \mu: Kl(P)^0 \rightarrow K^0.$$

On définit une catégorie  $MI_B$  ayant pour objets les monades involutives  $(C, U)$  telles que  $C \in \mathcal{U}$  en prenant

$$Hom_{MI_B}(U_1, U_2) = Hom_{\mathcal{C}}(\mathcal{Rel}(U_1), \mathcal{Rel}(U_2)),$$

la composition étant claire.

**COROLLAIRE 1.3.4.** Avec les notations ci-dessus  $\mathcal{C}$  s'identifie à la sous-catégorie pleine réflexive de  $MI_B$  ayant pour objets les monades involutives très fidèles.

Des exemples de catégories relationnelles peuvent être obtenus en relevant sur une catégorie  $Sp(H')^V$  ([1] p.7) une monade cartésien-

ne (cf. [6]) donnée sur  $H'$  (voir aussi I.4.3), ou bien, si  $d: \overline{T} \rightarrow \overline{P}$  est une loi distributive ([7]) sur  $H'$ , en relevant  $\overline{T}$  sur  $Kl(\overline{P})^0$  comme dans [8].

**I.4. Premiers exemples.**

On indique ici les exemples qui sont directement à l'origine du travail d'axiomatisation de I.1 à I.3, et quelques petits contre-exemples (I.4.4 et I.4.5) «fabriqués» pour prouver des indépendances d'axiomes.

**I.4.1. EXEMPLES ENSEMBLISTES.**

a) D'après [9], on appelle *catégorie de relations* un couple  $(H', r)$ , où  $H'$  est une catégorie à limites projectives finies et  $r$  une relation d'équivalence bicompatible élémentaire sur  $Sp'(H')^V$ , catégorie des angles-relations de  $H'$ , tel que, en notant  $H^r$  la catégorie quotient de  $Sp'(H')^V$  par  $r$ , le foncteur  $\Gamma^r: H' \rightarrow Sp'(H')^V \xrightarrow{r} H^r$  admette un adjoint à droite  $P^r: H^r \rightarrow H'$ .

PROPOSITION I.4.1.a. *La monade sur  $H'$  induite par l'adjonction  $\Gamma^r \dashv P^r$  est involutive si  $r$  est symétrique, c'est-à-dire commute avec la symétrie sur  $Sp'(H')^V$ .*

b) On sait qu'un topos élémentaire est une catégorie  $H'$  telle que, en désignant par  $Id$  la relation identique sur  $Sp'(H')^V$ , le couple  $(H', Id)$  soit une catégorie de relations (voir aussi III.3).

COROLLAIRE I.4.1.b. *Tout topos élémentaire  $H'$  est équipé suivant I.4.1.a d'une monade involutive canonique notée*

$$U_\Omega = (exp_\Omega(-), \{ \}, \psi) \text{ avec } \Omega = P^{Id} \Gamma^{Id}(1).$$

La construction de cette monade a été indiquée par LAWVERE et TIERNEY (voir [10]) en utilisant explicitement un ordre sur l'objet  $\Omega$ .

Dans le paragraphe IV de [1] (ou dans [2,e]) nous en avons amorcé une construction différente dans le contexte plus général des catégories avec *T-égalité* et *T-appartenance* (hypothèse (ii) et (iii) de [2,e]), en construisant le morphisme  $\psi$ ; la fonction  $P$  était alors notée  $\mathcal{P}$  et la monade involutive  $(2^{( )}, i, \psi)$ .

c) Il y a aussi une monade involutive naturelle sur un quasi-topos (notion introduite dans [11]).

Citons encore comme certainement étroitement liés avec notre problème les travaux de BENABOU sur les « topos formels » (inédits) et de LAMBEK sur les « dogmas » (voir [12]).

d) Si  $\mathcal{U}$  est un univers et  $\mathcal{M}^0$  la catégorie pleine d'applications associée, on sait que  $\mathcal{M}^0$  est un topos, et par conséquent il y existe une monade involutive canonique notée  $U_2 = (\mathbb{P}, I_{\mathcal{M}^0})$ , puisque dans ce cas  $\Omega$  est noté 2. La monade  $\bar{P}$  correspondante est  $\bar{\mathbb{P}} = (\mathbb{P}, \gamma, U)$  (voir [1] p.11), et la fonction  $2^{(-)}$  est le foncteur  $(\star \circ \mathbb{P})$ . L'involution  $I_{\mathcal{M}^0}$  correspond via l'isomorphisme  $J$  à l'involution  $d$  sur  $\mathcal{G}_a(\mathcal{M}^0)^\circ$  ([1] p.9) (notée  $\tilde{d}$  dans [2, e]).

CONVENTION. Dans la suite de ce texte on dira, comme on a commencé à le faire en I.2, que l'on est dans le « cas ensembliste » (resp. dans le cas d'un topos élémentaire) pour signifier que l'on est en présence de la monade involutive  $U_2$  (resp.  $U_\Omega$ ) définie ci-dessus.

On désignera par  $U'_2$  la monade involutive sur  $\mathcal{M}^0$  isomorphe à  $U_2$  et définie par la construction standard contravariante  $(\star \circ \mathbb{P}, \gamma', \psi')$  où, pour tout ensemble  $X$ , l'application  $\gamma'_X : X \rightarrow \mathbb{P}(X)$  associe  $X \setminus \{x\}$  à  $x$  et où  $\psi'_X : \mathbb{P}(X) \rightarrow \mathbb{P}^2(X)$  associe  $\{A' \subset X \mid \mathcal{C}_X A' \subset A\}$  à  $A$ . Cette monade involutive est le complément de  $U_2$  (cf. § II.1); on notera que sa multiplication n'est pas l'intersection.

#### I.4.2. LES $A$ -MATRICES.

On désigne par  $\mathcal{M}_{\mathcal{D}}^0$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{M}^0$  ayant pour objets les ensembles finis.

PROPOSITION I.4.2. *Pour tout semi-anneau commutatif unitaire fini  $A = (\underline{A}, +, \cdot)$  on construit sur  $\mathcal{M}_{\mathcal{D}}^0$  une monade involutive  $Ex_A = (\bar{T}_A, I_A)$  dont la catégorie des relations est la catégorie des  $A$ -matrices.*

En effet, on prend pour  $\bar{T}_A$  le triple sur  $\mathcal{M}_{\mathcal{D}}^0$  induit par l'adjonction usuelle entre  $\mathcal{M}_{\mathcal{D}}^0$  et la catégorie des  $A$ -modules finis; l'involution  $I_A$  correspond à la transposition des matrices finies à coefficients dans

$A$ , puisque  $Kl(\bar{T}_A)^0$  a pour morphismes ces matrices. Pour tout ensemble fini l'application  $\psi_X : A^X \rightarrow A^{(A^X)}$  est alors définie par

$$\psi_X(\phi)(\lambda) = \sum_{x \in X} \phi(x) \cdot \lambda(x).$$

On trouve dans [13] un opérateur ressemblant au  $\psi$  de notre exemple, et dans [14] une manière de faire le «calcul tensoriel» dans un cadre voisin.

Les ensembles finis étant stables par  $\mathfrak{F}$  on peut considérer la monade involutive  $U_{2\bar{\omega}}$  induite sur  $\mathfrak{M}^0_{\bar{\omega}}$  par la monade  $U_2$  sur  $\mathfrak{M}^0$ ; on trouve alors  $Ex_A$  pour  $A = (\{0, 1\}, sup, inf)$ .

Pour  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$  muni de sa structure de corps on obtient la monade involutive  $Ex_{\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}}$  dont la multiplication représente la «différence symétrique» d'ensembles; on ne sait pas encore s'il existe une monade involutive sur  $\mathfrak{M}^0$  qui induise  $Ex_{\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}}$  sur  $\mathfrak{M}^0_{\bar{\omega}}$ .

I.4.3. SUR LES CATEGORIES DE RELATIONS.

a) Soit  $\mathfrak{M}^0$  la catégorie des relations entre ensembles appartenant à un univers  $\mathcal{U}$ , et, pour  $A \in \mathcal{U}$ , considérons le foncteur  $A \times (-) : \mathfrak{M}^0 \rightarrow \mathfrak{M}^{0*}$  qui à  $R$  associe  $A \times d(R)$ ; on sait qu'il est son propre adjoint. (Voir [1] p.21 pour ce point et pour les notations.) Pour tout ensemble  $X$  notons  $i_X : X \rightarrow A \times X$  la relation qui à tout  $x \in X$  associe  $A \times \{x\}$ , et  $\psi_X : A \times X \rightarrow A \times A \times X$  celle qui à  $(a, x)$  associe  $\{(a, a, x)\}$ .

PROPOSITION I.4.3. Sur  $\mathfrak{M}^0$  le triplet  $(A \times (-), i, \psi)$  ci-dessus défini est une monade involutive. De plus une  $\bar{P}$ -algèbre est la donnée d'une application  $\lambda : X \rightarrow A$  et une  $\bar{\Pi}$ -algèbre en  $X$  est un couple  $(X, (B, \gamma))$  d'un ensemble  $B$  et d'une bijection  $\gamma : B \times A \rightarrow X$ .

La preuve est omise; on indique seulement que les morphismes entre deux  $\bar{P}$ -algèbres  $\lambda : X \rightarrow A$  et  $\lambda' : X' \rightarrow A$  sont les relations  $\rho : X \rightarrow X'$  telles que  $\lambda' \circ \rho = \lambda$ , et on remarquera qu'on obtient là une définition «équationnelle» au sein de  $\mathfrak{M}^r$  des «fonctions» que l'on pourra comparer avec la notion de  $U$ -fonction.

Pour les  $\bar{\Pi}$ -algèbres précisons juste que, si  $\theta$  est la relation de  $A \times A \times X$  vers  $X$  déterminant l'algèbre  $(X, (B, \gamma))$ , on définit l'appli-

cation  $\pi$  de  $X$  vers  $A$  par

$$a' = \pi(x) \iff \theta(a, a', x) \neq \emptyset$$

et alors on obtient  $B = \pi^{-1}(a_0)$  pour un  $a_0 \in A$ .

Les  $\bar{\Pi}$ -algèbres sont appelées systèmes de coordonnées relationnelles planaires dans [13].

b) En réalité, si  $H'$  est une catégorie à limites projectives finies, sur  $Sp(H')^V$ , on définit pour tout  $a \in H'_0$  une monade involutive  $(a \times (\cdot), i, \psi)$ . Les algèbres en  $x$  pour la monade  $\bar{\Pi}$  associée sont les couples  $(x, (b, \gamma))$ , où  $b \in H'_0$  et où  $\gamma: a \times b \rightarrow x$  est un isomorphisme. Ce phénomène est lié à la monade  $X \rightarrow X^2$  sur  $H'$  étudiée dans [15].

Ceci est valable en particulier si  $C'$  est la catégorie simpliciale  $\Delta$  dont les objets sont les entiers et les morphismes les applications croissantes entre ces entiers. Dans ce cas  $Sp'(\Delta)^V$  est la catégorie bi-simpliciale  $B^0$  dont les entiers  $[n] = (\{0, 1, \dots, n-1\}, \leq)$  sont les objets et où  $Hom_B(m, n)$  est le sous-ensemble de  $\mathfrak{P}([m] \times [n])$  constitué des  $\phi \subset [m] \times [n]$  qui sont des relations croissantes de  $m$  vers  $n$ , c'est-à-dire vérifiant

$$\forall i, j < m, (i \leq j \implies \forall i' \in \phi(i) \forall j' \in \phi(j) (i' \leq j')).$$

La composition dans  $B^0$  est la composition des relations.

1.4.4. SUR UN GROUPE.

PROPOSITION 1.4.4. La donnée d'une monade involutive sur un groupe  $G$ , considéré comme une catégorie à un objet, équivaut à la donnée d'un couple  $(a, b)$ , où  $a \in G$  et où  $b \in Aut(G)$  tel que, en posant

$$b = b(a).a,$$

on ait

$$\forall x \in G, b^2(x) = b.x.b^{-1}.$$

Si l'on part de  $(a, b)$ , on obtient  $(F, i, \psi)$  par

$$i_e = a \text{ et } \psi_e = b(a)$$

et

$$\forall x \in G, F(x) = b(x)^{-1}.$$

Le foncteur  $P$  est alors défini par

$$\forall x \in G, P(x) = a \cdot x \cdot a^{-1},$$

tandis que, pour tout  $x$ ,  $\Pi(x) = b^2(x) = b \cdot x \cdot b^{-1}$ .

La recherche de monades involutives de la forme  $(e, b)$ , ou  $(a, Id)$ , consiste à trouver soit les involutions sur  $G$ , soit les racines carrées des éléments du centre de  $G$ .

1.4.5. QUELQUES REMARQUES ELEMENTAIRES.

1° On a déjà utilisé en I.2 la monade involutive constante sur  $1$ , où  $1$  est final dans la catégorie  $C$ .

2° Une monade involutive sur la catégorie associée à un ordre  $(E, <)$  est nécessairement unique et son existence équivaut au fait que  $(E, <)$  soit une forêt plantée, i.e. soit somme disjointe d'arbres avec premiers éléments.

3° Si pour tout  $i$  on a une monade involutive  $U_i$  sur une catégorie  $C_i$ , alors on en déduit des monades involutives  $\Pi U_i$  et  $\Sigma U_i$  sur les catégories  $\Pi C_i$  et  $\Sigma C_i$ .

4° Si  $U = (F, i, \psi)$  est une monade involutive sur  $C$  et  $A'$  une catégorie, alors par composition à gauche avec les éléments de  $C^{A'}$ , on déduit de  $\bar{P} = (P, i, V)$  une monade  $\bar{P}^{A'}$  sur  $C^{A'}$ . Pour faire de cette monade une monade involutive dont l'involution soit définie par la formule

$$\forall a \in A_0, (I\tau)_a = \underline{I(\bar{\tau}_a)},$$

il faut et il suffit que pour tout  $\alpha : a \rightarrow a' \in A$ , et tout  $K, L \in C_0^{A'}$  on ait

$$FL\alpha \cdot \tau_a = F(t_{La}) \cdot F^2\tau_a \cdot FK\alpha \cdot i_{Ka},$$

dès que l'on a

$$F\tau_a \cdot FL\alpha \cdot i_{La} = FK\alpha \cdot F\tau_a \cdot t_{La}.$$

Ceci est vrai si  $A'$  est discrète, ou bien par exemple si  $A'$  est un groupe  $G$ , et si  $U = U_2$  sur  $\mathfrak{M}^0$ . La monade  $U_2^G$  est distincte de la monade canonique sur le topos  $\mathfrak{M}^{0G}$ .

5° Si  $\mathcal{O}$  est une partie de l'univers  $\mathcal{U}$  stable par  $\mathfrak{B}$ , alors la monade  $U_2$  se restreint à la sous-catégorie  $\mathfrak{M}_{\mathcal{O}}^0$  pleine de  $\mathfrak{M}^0$  ayant pour

objets les éléments de  $\mathcal{O}$ . Cela vaut par exemple si  $\mathcal{O}$  est l'ensemble  $\overleftarrow{\omega}$  des éléments finis de  $\mathcal{U}$ , ou bien l'ensemble  $\overrightarrow{\omega}$  des éléments infinis de  $\mathcal{U}$ , ou encore l'ensemble des éléments de  $\mathcal{U}$  de la forme  $2^E$  pour  $E \in \mathcal{U}$ .

Ceci, ainsi que le point 6 qui suit, montre que l'existence de monades involutives sur une catégorie  $C$  est indépendante de l'existence sur  $C$  de quelque limite inductive ou projective que ce soit.

6- Soit  $C$  une catégorie et  $U = (F, i, \psi)$  une monade involutive sur  $C$ . Notons  $\tilde{C}'$  (resp.  $\tilde{C}$ ) la catégorie dont les objets sont ceux de  $C$  et où un morphisme de  $e$  vers  $e'$  est une partie (resp. une partie non vide) de l'ensemble des morphismes dans  $C$  de  $e$  vers  $e'$ , la composition étant définie par

$$B.A = \{g.f \mid g \in B \text{ et } f \in A\}.$$

(Revoir les constructions du § III.3 de [1]; voir aussi [5] p.118-119, et [17], chapitre 2.)

On a une monade involutive  $(\tilde{F}, \tilde{i}, \tilde{\psi})$  sur  $\tilde{C}'$  (resp.  $\tilde{C}$ ) en posant

$$\tilde{F}(A) = \{F(f) \mid f \in A\}, \quad \tilde{i}_e = \{i_e\} \text{ et } \tilde{\psi}_e = \{\psi_e\}.$$

Une construction analogue peut être donnée en considérant la « filtration »  $C^\phi$  de  $C$  au sens de [18].

## APPENDICE I : CONTRE-EXEMPLES NATURELS.

On examine ici brièvement le cas de catégories usuelles où se présentent des monades « de sous-structure » qui ne sont pas involutives, cet examen nous semblant un préliminaire indispensable à la recherche de bonnes monades involutives sur les catégories en question.

### 1. Le cas des catégories.

a) Sur la catégorie  $\mathcal{F}^0$  des foncteurs l'étude de la théorie des relations et la recherche d'une monade « des parties » nous a conduit dans [19] à étudier la notion de machine et la bi-monade  $\mathcal{D}$  des diagrammes sur  $\mathcal{F}^0$ . Un formalisme analogue a été développé indépendamment, dans

[20], pour envisager les transductions comme relations entre monoïdes gradués.

b) Si  $\mathcal{U}$  et  $\hat{\mathcal{U}}$  sont deux univers et  $\mathcal{F}^\circ$  et  $\hat{\mathcal{F}}^\circ$  les catégories de foncteurs associées, l'application qui à  $C$  associe  $\mathfrak{M}^{C^*} = \hat{C}$ , de  $\mathcal{F}^\circ$  vers  $\hat{\mathcal{F}}^\circ$  s'étend en un foncteur (par extension de Kan) qui détermine un  $J$ -triple au sens de [21] pour  $J: \mathcal{F}^\circ \hookrightarrow \hat{\mathcal{F}}^\circ$ ; sa catégorie de Kleisli est la catégorie des distributeurs au sens de [22].

c) Soit  $\overline{\mathcal{F}}^\circ$  la sous-catégorie pleine de  $\hat{\mathcal{F}}^\circ$  ayant pour objets les catégories  $C$  qui sont des  $\mathcal{U}$ -catégories. Pour toute catégorie  $C \in \overline{\mathcal{F}}^\circ$ , notons  $Ind(C)$  la sous-catégorie pleine de  $\mathfrak{M}^{C^*}$  ayant pour objets les foncteurs  $H: C^* \rightarrow \mathfrak{M}^\circ$  qui peuvent s'écrire comme limites inductives suivant une catégorie filtrante  $I \in \overline{\mathcal{F}}^\circ$  de foncteurs représentables (voir [23] à [26]).  $Ind(C)$  est une sous-catégorie de  $\hat{C}$  stable par limites inductives, de sorte que  $\overline{Ind} = (Ind, \gamma, \underline{lim})$  est une monade sur  $\overline{\mathcal{F}}^\circ$  où  $\gamma_{C \cdot C'}: C \rightarrow Ind(C')$  est le plongement de Yoneda et  $\underline{lim}$ , le foncteur limite inductive  $\underline{lim}: Ind(Ind(C')) \rightarrow Ind(C')$ .

De manière duale on définit une monade  $\overline{Pro}$  avec

$$Pro(C) = (Ind(C^*))^*.$$

Dans [25] et [26] un sous-foncteur  $[-, \mathfrak{M}^\circ]_{inf}$  de  $Ind(-)$  est défini et étudié; il détermine une sous-monade de la monade  $\overline{Ind}$ .

d) On trouvera en Appendice III la monade «involutive»  $2^{(-)*}$  sur  $\mathcal{F}^\circ$  dont la catégorie de Kleisli est la catégorie des familles de cribles.

### 2. Le cas des compacts.

Pour tout espace topologique  $(X, T)$  on pose

$$2^X = \{ A \subset X \mid A \neq \emptyset \text{ et } A \text{ fermé pour } T \}$$

et on désigne par  $2^T$  la topologie sur  $2^X$  la moins fine telle que pour tout ouvert  $\mathcal{O} \in T$ , les ensembles

$$\mathcal{O}^+ = \{ A \in 2^X \mid A \cap \mathcal{O} \neq \emptyset \} \text{ et } \mathcal{O}^- = \{ A \in 2^X \mid A \subset \mathcal{O} \}$$

soient ouverts. L'espace  $(2^X, 2^T)$  sera noté aussi  $2^{(X, T)}$ ; on peut montrer qu'une base de la topologie  $2^T$  est constituée des ensembles  $\langle \mathcal{O}_i \rangle_{i \leq n}$  associés à toute famille finie  $(\mathcal{O}_i)_{i \leq n}$  d'ouverts de  $T$  en posant

$$\langle \mathcal{O}_i \rangle_{i \leq n} = \{ A \in 2^X \mid \forall i \leq n, A \cap \mathcal{O}_i \neq \emptyset \text{ et } A \subset \bigcup_{i \leq n} \mathcal{O}_i \}.$$

Dans [1] p.18 nous avons, avec d'autres notations, redécouvert cette topologie qui existait déjà chez VIETORIS, FRINK et MICHAEL (voir [27]) sous le nom de « finite topology ». On désignera par  $(\mathcal{C}(X), \mathcal{C}(T)) = \mathcal{C}(X, T)$  le sous-espace de  $2^{(X, T)}$  dont les points sont les fermés compacts non vides de  $T$  et pour  $A \in 2^X$  on pose

$$\theta A = \{ A' \in 2^X \mid A' \subset A \} \text{ et } \eta A = \{ A' \in 2^X \mid A' \cap A \neq \emptyset \}.$$

On a les résultats suivants :

1. (O. Frink) Si  $(X, T)$  est  $T_1$ , alors  $2^{(X, T)}$  est  $T_1$  (voir [28]).
2. Si  $(X, T)$  est  $T_1$  et régulier, alors  $2^{(X, T)}$  est  $T_2$ .
3. (O. Frink). Si  $(X, T)$  est quasi-compact, alors  $2^{(X, T)}$  est quasi-compact.

On a alors le théorème d'exponentiation que nous baptiserons: théorème de VIETORIS-FRINK-MICHAEL :

4. *L'espace  $(X, T)$  est compact si et seulement si  $2^{(X, T)}$  est compact (voir [27]).*

On a ensuite :

5. Si  $\mathbf{B} \in \mathcal{C}(\mathcal{C}(X))$ , alors  $\bigcup \mathbf{B} \in \mathcal{C}(X)$  (voir [27]).
6.  $\theta$  induit une application continue de  $\mathcal{C}(X)$  vers  $\mathcal{C}(\mathcal{C}(X))$ .
7. Si  $(X, T)$  est compact, alors  $\eta: \mathcal{C}(X) \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{C}(X))$  est continue.

De plus, pour tout  $(X, T)$ , l'application  $i_T^*: X \rightarrow \mathcal{C}(X)$  qui à  $x \in X$  associe  $\{x\}$  est continue, de même que  $V_T^*: \mathcal{C}(\mathcal{C}(X)) \rightarrow \mathcal{C}(X)$ , application qui à  $\mathbf{B}$  associe  $\bigcup \mathbf{B}$  (car

$$V_T^{*-1}(\mathcal{O}^+) = (\mathcal{O}^+)^+ \text{ et } V_T^{*-1}(\mathcal{O}^-) = (\mathcal{O}^-)^-).$$

Enfin, si  $f: (X, T) \rightarrow (X', T')$  est continue,  $T'$  et  $T$  étant compactes, l'application  $\mathcal{C}(f): (\mathcal{C}(X), \mathcal{C}(T)) \rightarrow (\mathcal{C}(X'), \mathcal{C}(T'))$  définie par

$$\mathcal{C}(f)(A) = \{ f(x) \mid x \in A \}$$

est bien définie (l'image d'un compact étant un compact) et continue. Si l'on désigne par  $\mathcal{C}_{\text{comp}}$  la catégorie des applications continues entre espaces compacts associés à un univers  $\mathcal{U}$ , on a

8.  $\bar{\mathcal{C}} = (\mathcal{C}, i', V')$  est une monade sur  $\mathcal{C}_{\text{comp}}$ .

Une légère variante de ceci était indiquée dans [1] p.20, Remarque 2, d'une manière trop peu explicite.

Pour tout espace  $(X, T)$  on note  $K(X, T) = (K(X), K(T))$  l'espace topologique somme  $\mathcal{C}(X) + 1$ , qui, en associant  $\emptyset$  à  $* \in 1$ , s'identifie à une partie de  $\mathfrak{P}(X)$ . On fait de  $K$  un foncteur prolongeant  $\mathcal{C}$  en posant  $K(*) = *$ , et on note

$$i_T : X \rightarrow K(X), V_T : K^2(X) \rightarrow K(X) \text{ et } \psi_T : K(X) \rightarrow K^2(X)$$

les restrictions des applications  $\gamma_X, U_X$  et  $\psi_X$ .

9. PROPOSITION. *Sur la catégorie  $\mathcal{C}omp$  le triplet  $(K, i, V) = \bar{K}$  est une monade, mais cette monade n'est pas involutive bien que pour tout  $(X, T) \in \mathcal{C}omp_0$  on ait un morphisme  $\psi_T : K(X) \rightarrow K^2(X)$  induit par  $\psi_X$ .*

Remarquons que, si  $(X, T)$  est compact métrisable de distance  $d$ , alors  $\mathcal{C}T$  est la topologie associée à la métrique  $\mathcal{C}d$  définie par :

$$\mathcal{C}d(A, B) = \inf \{ d(a, b) \mid (a, b) \in A \times B \}.$$

3. *Autres constructions en topologie.*

1° Soit  $\mathcal{Q}\mathcal{T}^0$  la catégorie des applications quasi-continues entre espaces quasi-topologiques [29] et  $\mathcal{Q}\mathcal{T}(-, -)$  le foncteur hom-interne de cette catégorie cartésienne fermée. On note  $S$  l'espace de Sierpinski, c'est-à-dire l'espace topologique d'ensemble sous-jacent  $\{0, 1\}$  dont les fermés sont  $\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}$ , et on désigne par  $exp_S : \mathcal{Q}\mathcal{T}^{0*} \rightarrow \mathcal{Q}\mathcal{T}^0$  le foncteur  $\mathcal{Q}\mathcal{T}(S, -)$ ; ce foncteur admet son dual pour adjoint et on note  $t_\pi : (X, \pi) \rightarrow exp_S^2(X, \pi)$  le morphisme canonique d'adjonction. Les axiomes C1 à C3 sont satisfaits, mais pour avoir une monade involutive il faudrait décomposer  $t_\pi$  sous la forme  $\psi_\pi \cdot i_\pi$ . On peut seulement utiliser la proposition I.1.5 et en déduire une construction sur les  $\delta$ -objets. Il est à noter (voir [30] et [31]) que, si  $(X, \pi)$  est compact, alors

$$i_X : X \rightarrow S^{(X, \pi)} \text{ et } \psi_X : S^{(X, \pi)} \rightarrow S(S^{(X, \pi)})$$

sont continus pour les quasi-topologies introduites ci-dessus, de sorte que  $(X, \pi)$  est  $\delta$ -compact.

2° La définition d'une variété avec singularités comme ouvert de l'espace des germes de variétés donnée en [33] suggère la construction pour

tout espace topologique  $(X, T)$  d'un espace «des germes dans  $X$ », noté  $\mathcal{G}(X, T) = (\mathcal{G}X, \mathcal{G}T)$ , et défini comme suit :

Sur  $E = \{(A, B) \in \mathfrak{P}(X) \times \mathfrak{P}(X) \mid A \subset B\}$  on considère la relation d'équivalence définie par

$$(A, B) \sim (A', B') \iff \exists U \in T (A \subset U \text{ et } B \cap U = B' \cap U),$$

et on note  $\mathcal{G}(X)$  le quotient  $E / \sim$ ; la classe de  $(A, B)$  modulo  $\sim$  sera notée  $[A, B]$ . La topologie  $\mathcal{G}(T)$  est la topologie quotient par  $\sim$  de la topologie sur  $E$  induite par la topologie sur  $\mathfrak{P}(X) \times \mathfrak{P}(X)$  produit de la «finite topology» avec elle-même. Cet objet  $\mathcal{G}(X, T)$  est naturellement dans  $\mathcal{I}^0$  un «objet des parties» de  $(X, T)$  raisonnable, puisque, si  $T$  est discrète,  $\mathcal{G}(X)$  n'est autre que  $\mathfrak{P}(X)$ .

## II. ADJONCTION D'UN COMPLEMENT A UNE MONADE INVOLUTIVE

### II.1. Complément d'une monade involutive.

Le théorème II.1.1 qui suit a initialement été prouvé dans le cas ensembliste en cherchant à décrire les applications :

$$\mathcal{C}_X : \mathfrak{B}(X) \rightarrow \mathfrak{B}(X) \text{ et } \cap_X : \mathfrak{B}^2(X) \rightarrow \mathfrak{B}(X)$$

à partir des données  $2^{(-)}$ ,  $\gamma$  et  $\psi$ .

THEOREME II.1.1. Soit  $C$  une catégorie et  $U=(F, i, \psi)$  une monade involutive sur  $C$ . Supposons donné pour tout  $e \in C_0$  un morphisme  $\nu_e : F(e) \rightarrow F(e)$  de sorte que :

$$N1. (\forall e \in C_0) (\nu_e^2 = F(e)),$$

$$N2. (\forall e \in C_0) (F(\nu_e) \cdot t_e = \nu_{F(e)} \cdot t_e),$$

$$N3. (\forall f \in C) (\nu_{\alpha(f)} \cdot F(f) = F(f) \cdot \nu_{\beta(f)}).$$

Alors, en posant, pour tout  $e \in C_0$ ,

$$i'_e = \nu_e \cdot i_e \text{ et } \psi'_e = F(\nu_e) \cdot \nu_{F(e)} \cdot \psi_e \cdot \nu_e,$$

le triplet  $(F, i', \psi')$  est une monade involutive notée  $U'$  dont le foncteur «partie» associé, noté  $P'$ , vaut, pour tout  $f \in C$ ,

$$P'(f) = \nu_{\beta(f)} \cdot P(f) \cdot \nu_{\alpha(f)}.$$

DEMONSTRATION DE II.1.1.

a) Avec  $\psi_e \cdot i_e = t_e$  et  $\psi'_e \cdot i'_e = t'_e$  on a  $t'_e = t_e$  : en effet, ceci s'écrit

$$F(\nu_e) \cdot \nu_{F(e)} \cdot \psi_e \cdot \nu_e \cdot \nu_e \cdot i_e = \psi_e \cdot i_e,$$

d'où, en tenant compte de N1, en multipliant à gauche par l'inversible  $F(\nu_e)$  et en tenant encore compte de N1,

$$\nu_{F(e)} \cdot t_e = F(\nu_e) \cdot t_e,$$

c'est-à-dire N2.

Il est alors clair que les axiomes C1 et C3 de la définition I.1.3 sont satisfaits pour  $U'$  puisqu'ils le sont pour  $U$ .

b) Pour  $f: x \rightarrow y$  dans  $C$  on a

$$(1) \quad w_y \cdot F^2(f) = F^2(f) \cdot w_x,$$

en posant, pour tout  $e \in C_0$ ,  $w_e = F(\nu_e) \cdot \nu_{F(e)}$ . En effet, la formule (1) s'écrit

$$\begin{aligned} F(\nu_y) \cdot \nu_{F(y)} \cdot F^2(f) &= F^2(f) \cdot F(\nu_x) \cdot \nu_{F(x)} \\ &= F(\nu_x \cdot F(f)) \cdot \nu_{F(x)} \end{aligned}$$

soit, d'après N3 pour  $f$ ,

$$\begin{aligned} F(\nu_y) \cdot \nu_{F(y)} \cdot F^2(f) &= F(F(f) \cdot \nu_y) \cdot \nu_{F(x)} \\ &= F(\nu_y) \cdot F^2(f) \cdot \nu_{F(x)} \end{aligned}$$

et le résultat d'après N3 pour  $F(f)$ .

c) Pour  $f: x \rightarrow y$  dans  $C$  on a

$$(2) \quad F(i'_y) \cdot F^2(f) \cdot \psi'_x = \nu_y \cdot P(f) \cdot \nu_x,$$

car ceci s'écrit

$$F(\nu_y \cdot i_y) \cdot F^2(f) \cdot F(\nu_x) \cdot \nu_{F(x)} \cdot \psi_x \cdot \nu_x = \nu_y \cdot P(f) \cdot \nu_x,$$

ou, avec (1) et la définition de  $P$ ,

$$\begin{aligned} F(i_y) \cdot F(\nu_y) \cdot (F(\nu_y) \cdot \nu_{F(y)}) \cdot F^2(f) \cdot \psi_x \cdot \nu_x &= \\ &= \nu_y \cdot F(i_y) \cdot F^2(f) \cdot \psi_x \cdot \nu_x. \end{aligned}$$

En multipliant à droite par  $\nu_x$  et tenant compte de N1, et le premier membre se simplifiant aussi à cause de N1, il vient à prouver

$$F(i_y) \cdot \nu_{F(y)} \cdot F^2(f) \cdot \psi_x = \nu_y \cdot F(i_y) \cdot F^2(f) \cdot \psi_x,$$

ce qui résulte de N3 pour  $i_y$ .

d) Vérifions l'axiome C2, soit

$$F^2(f) \cdot \psi'_x = \psi'_y \cdot F(i'_y) \cdot F^2(f) \cdot \psi'_x,$$

c'est-à-dire

$$F^2(f) \cdot w_x \cdot \psi_x \cdot \nu_x = w_y \cdot \psi_y \cdot \nu_y \cdot (\nu_y \cdot P(f) \cdot \nu_x)$$

grâce à (2); ou encore, avec N1 et (1),

$$w_y \cdot F^2(f) \cdot \psi_x \cdot \nu_x = w_y \cdot \psi_y \cdot P(f) \cdot \nu_x,$$

ce qui résulte de C2 pour  $(F, i, \psi)$ .

e) Prouvons enfin C4, c'est-à-dire

$$F(\psi'_e) \cdot \psi'_{F(e)} = \psi'_e \cdot F(t'_e) \cdot \psi'_{F(e)}.$$

En développant (avec  $t'_e = t_e$ ) et tenant compte de N1 pour simplifier à droite par  $\nu_{F(e)}$  et à gauche par  $F(\nu_e)$ , on a à montrer :

$$F(\psi_e) \cdot F(w_e) \cdot w_{F(e)} \cdot \psi_{F(e)} = \nu_{F(e)} \cdot \psi_e \cdot \nu_e \cdot F(t_e) \cdot w_{F(e)} \cdot \psi_{F(e)}.$$

Or on a

$$\begin{aligned} F(w_e) \cdot w_{F(e)} &= F(F(\nu_e) \cdot \nu_{F(e)}) \cdot F(\nu_{F(e)}) \cdot \nu_{F^2(e)} \\ &= F(\nu_{F(e)} \cdot F(\nu_e) \cdot \nu_{F(e)}) \cdot \nu_{F^2(e)}, \end{aligned}$$

soit, avec N3 et N1,

$$F(w_e) \cdot w_{F(e)} = F^2(\nu_e) \cdot \nu_{F^2(e)} = \nu_{F^2(e)} \cdot F^2(\nu_e).$$

Le premier membre de l'identité à prouver s'écrit alors, avec N3,

$$\nu_{F(e)} \cdot F(\psi_e) \cdot F^2(\nu_e) \cdot \psi_{F(e)},$$

tandis que le second vaut

$$\begin{aligned} \nu_{F(e)} \cdot \psi_e \cdot F(t_e) \cdot \nu_{F^2(e)} \cdot (\nu_{F^2(e)} \cdot F(\nu_{F(e)})) \cdot \psi_{F(e)} \\ = \nu_{F(e)} \cdot \psi_e \cdot F(t_e) \cdot F(\nu_{F(e)}) \cdot \psi_{F(e)}, \end{aligned}$$

de sorte qu'il faut établir l'égalité

$$F(\psi_e) \cdot F^2(\nu_e) \cdot \psi_{F(e)} = \psi_e \cdot F(t_e) \cdot F(\nu_{F(e)}) \cdot \psi_{F(e)},$$

ou

$$F(\psi_e) \cdot \psi_{F(e)} \cdot P(\nu_e) = \psi_e \cdot F(t_e) \cdot F(\nu_{F(e)}) \cdot \psi_{F(e)}$$

et, en utilisant C4 pour  $(F, i, \psi)$ ,

$$\psi_e \cdot F(t_e) \cdot \psi_{F(e)} \cdot P(\nu_e) = \psi_e \cdot F(t_e) \cdot F(\nu_{F(e)}) \cdot \psi_{F(e)},$$

en composant à gauche avec  $F(i_e)$  et compte tenu de C6, il vient

$$F(t_e) \cdot F^2(\nu_e) \cdot \psi_{F(e)} = F(t_e) \cdot F(\nu_{F(e)}) \cdot \psi_{F(e)},$$

ce qui résulte de N2.

DEFINITION II.1.1. Sous les hypothèses du théorème II.1.1 le couple  $\mathbf{U} = (U, \nu)$  est appelé *monade involutive complémentée* (m.i.c.) et la mo-

nade  $U'$  est appelée monade involutive complément de  $U$  relativement à  $\nu$ .

Si  $(U, \nu)$  est une m.i.c. sur  $C$ , on pose pour tout  $e \in C_0$ ,

$$\omega_e = \psi_e \cdot \nu_e \quad \text{et} \quad \omega'_e = \psi'_e \cdot \nu_e$$

PROPOSITION II.1.2. La m.i.c.  $((F, i, \psi), \nu)$  est complètement déterminée par le triplet  $(F, i, \omega)$  (resp. par le triplet  $(F, i', \omega')$ ).

En effet, étant donné  $(F, i, \omega)$ , on pose, pour tout  $e \in C_0$ ,

$$\nu_e = F(i_e) \cdot \omega_e \quad \text{et} \quad \psi_e = \omega_e \cdot F(i_e) \cdot \omega_e.$$

REMARQUE. Si  $U$  est une m.i., on peut pour tout  $e \in C_0$  poser:  $\nu_e = F(e)$ ; alors  $(U, \nu)$  est une m.i.c. triviale. Une monade involutive s'identifie aussi à une monade involutive complétementée  $(F, i, \omega)$  satisfaisant de plus à:  $(\forall e \in C_0) \quad F(i_e) \cdot \omega_e = F(e)$ .

*Notations.*

Soit  $(U, \nu) = ((F, i, \psi), \nu) \simeq (F, i, \omega) = \mathbf{U}$  une m.i.c. sur une catégorie  $C$ , et  $U'$  la monade involutive complément de  $U$  relativement à  $\nu$ .

- On appelle **U-réunion** en  $e \in C_0$  le composé

$$V_e = F(t_e) \cdot \psi_{F(e)},$$

c'est-à-dire la multiplication de la monade  $\bar{P}$  en  $e$ .

- La **U-intersection** en  $e$  est le composé

$$\Lambda_e = \nu_e \cdot V_e \cdot P(\nu_e) = V'_e \cdot \nu_{F(e)}$$

où  $V'_e$  est la multiplication de  $\bar{P}'$  en  $e$ .

- Pour tout  $e \in C_0$ ,  $i_e$  est nommé **U-égalité** en  $e$  et  $\omega_e$  est nommé **U-non-inclusion** en  $e$ .

- Enfin pour tout  $e \in C_0$  on pose

$$E_e = \Lambda_{F(e)} \cdot P(\psi_e), \quad \delta_e = E_e \cdot P(\nu_e),$$

et  $\mathcal{J}_e = V_{F(e)} \cdot P(\nu_{F(e)}) \cdot \psi_e \cdot \nu_e$ ,

et ces trois morphismes sont appelés respectivement **U-engrènement** («Verzahnungoperator» dans le cas ensembliste dans [34]), **U-débor-**

dement et **U**-induction en  $e$ .

Le cas ensembliste.

Dans le cas ensembliste (convention à la fin du § I.4.1) on a indiqué les deux monades involutives  $U_2$  et  $U'_2$ ; elles sont complémentaires relativement à  $\mathcal{C}$ , en désignant pour tout ensemble  $X$  par

$$\mathcal{C}_X: \mathfrak{P}(X) \rightarrow \mathfrak{P}(X) \text{ l'application qui à tout } A \subset X \text{ associe}$$

$$\mathcal{C}_X A = \{x \in X \mid x \notin A\}.$$

Ainsi  $(U_2, \mathcal{C}) = \mathbf{U}_2$  est une m.i.c. sur  $\mathfrak{M}^0$ , que l'on appellera m.i.c. ensembliste canonique.

Dans ce cas les morphismes  $\omega, E, \delta, \mathcal{J}$  introduits plus haut se décrivent comme suit, pour tout ensemble  $X$ , pour tout  $A \subset X$  et tout  $\mathbf{A} \subset \mathfrak{P}(X)$ :

$$\omega_X(A) = \{A' \subset X \mid A' \not\subset A\}, \quad E_X(\mathbf{A}) = \{A' \subset X \mid \forall A \in \mathbf{A} (A \cap A' \neq \emptyset)\},$$

$$\delta_X(\mathbf{A}) = \{A' \subset X \mid \forall A \in \mathbf{A} (A' \not\subset A)\}, \quad \mathcal{J}_X(\mathbf{A}) = \{A' \subset X \mid \exists A \in \mathbf{A} (A' \supset A)\}.$$

On note alors les deux formules

$$E_X^2 = E_X \quad \text{et} \quad \bigcap_{\mathfrak{P}(X)} \circ \mathfrak{P}(E_X) = E_X \circ \bigcup_{\mathfrak{P}(X)}$$

(voir [34]), ainsi que

$$E_X \circ \mathcal{J}_X = \mathcal{J}_X \circ E_X = E_X.$$

Dans ce cas ensembliste on introduit de plus pour tout ensemble  $X$  l'application  $\overleftarrow{p}_X: \mathfrak{P}(X) \rightarrow \mathfrak{P}^2(X)$  définie par

$$(\forall A \subset X) \quad \overleftarrow{p}_X(A) = \{A' \subset X \mid A' \subset A \text{ et } A' \text{ finie}\},$$

et on pose

$$\overleftarrow{\bigcap}_X = \mathfrak{P}(\bigcap_X) \circ \overleftarrow{p}_X.$$

PROPOSITION II.1.3. Soit  $X$  un ensemble et  $\mathbf{A} \subset \mathfrak{P}(X)$ . Alors  $\mathbf{A}$  est un filtre (resp. un ultrafiltre) sur  $X$  si et seulement si

$$\bigcap_X \overleftarrow{\omega}(\mathbf{A}) = \mathbf{A} \quad \text{et} \quad \mathcal{J}_X(\mathbf{A}) = \mathbf{A}$$

(resp.  $\bigcap_X \overleftarrow{\omega}(\mathbf{A}) = \mathbf{A} \quad \text{et} \quad E_X(\mathbf{A}) = \mathbf{A}$ ).

## II.2. Les catégories $\mathcal{J}_\alpha(\mathbf{U})$ et $\mathcal{J}_\alpha^\star(\mathbf{U})$ .

Avec les notations introduites en I.1 avant la définition I.1.1, si  $\mathbf{U}=(U, \nu) \simeq ((\bar{P}, I), \nu)$  est une m.i.c. au sens de II.1, la catégorie  $K_{\bar{P}}$  sera notée  $\mathcal{J}_\alpha(\mathbf{U})$ .

La catégorie  $\mathcal{J}_\alpha(\mathbf{U})$  est donc constituée des  $(y, \Phi, x)$ , où  $\Phi: F(x) \rightarrow F(y)$  est «V-compatible», c'est-à-dire satisfait

$$V_y \cdot P(\Phi) = \Phi \cdot V_x.$$

On note  $\mathcal{J}_\alpha^\star(\mathbf{U})$  la catégorie  $K_{\bar{P}}^\star$ , laquelle est constituée des  $(y, \Psi, x)$ , où  $\Psi: F(x) \rightarrow F(y)$  est « $\Lambda$ -compatible» c'est-à-dire satisfait

$$\Lambda_y \cdot P(\Psi) = \Psi \cdot \Lambda_x.$$

Les catégories  $\mathcal{J}_\alpha^\star(\mathbf{U})$  et  $\mathcal{J}_\alpha(\mathbf{U})$  sont des sous-catégories de  $C_P$  (cf. proposition I.2.2); les foncteurs  $o_{\bar{P}}$  et  $l_{\bar{P}}$  seront notés  $o_U$  et  $p_U$ . Enfin,  $d_U = J \circ l \circ J^{-1}$  est une involution sur  $\mathcal{J}_\alpha(\mathbf{U})$  telle que:

$$d_U(y, \Phi, x) = (x, F(i_x) \cdot F^3(\Phi) \cdot F^2(t_y) \cdot \psi_y, y).$$

Les propositions II.2.1 et II.2.3 qui suivent sont à rapprocher du théorème I.1 de [1]; elles établissent que la notion de m.i.c. est équivalente à la notion de «C'-chaîne dualisante» que nous avons introduite dans [35] p.60 en 1970.

Par analogie avec le cas ensembliste traité dans [1], pour  $f \in C_P$  on pose

$$K'(f) = (y, \nu_y \cdot f \cdot \nu_x, x),$$

et puis, pour  $\tilde{\Phi} = (y, \Phi, x) \in \mathcal{J}_\alpha(\mathbf{U})$ , on pose

$$\star(\tilde{\Phi}) = K'(d_U(\tilde{\Phi})).$$

Alors avec  $\star(\tilde{\Phi}) = (x, \Psi, y) = \tilde{\Psi}$  on a

$$[\nu_x \cdot V_x \cdot P(\nu_x)] \cdot P(\Psi) = \Psi \cdot [\nu_y \cdot V_y \cdot P(\nu_y)]$$

et donc  $\tilde{\Psi} \in \mathcal{J}_\alpha^\star(\mathbf{U})$  vu la définition de  $\Lambda_x$ .

Inversement, si  $\tilde{\Psi} \in \mathcal{J}_\alpha^\star(\mathbf{U})$ , on a

$$\tilde{\Psi} = \star(\tilde{\Phi}) \text{ en prenant } \tilde{\Phi} = d_U(K'(\tilde{\Psi})).$$

Ainsi  $\star$  détermine un anti-isomorphisme de  $\mathcal{J}_\alpha(\mathbf{U})$  sur  $\mathcal{J}_\alpha^\star(\mathbf{U})$ . Par exemple, on obtient

$$(x, V_x, F(x)) = \tilde{V}_x \in \mathcal{J}_\alpha(\mathbf{U}) \text{ et } d_{\mathbf{U}}(\tilde{V}_x) = (F(x), \psi_x, x),$$

ainsi que

$$\star(\tilde{V}_x) = (F(x), \nu_{F(x)} \cdot \omega_x, x) \text{ et } \star(\tilde{\psi}_x) = (x, \nu_x \cdot V_x \cdot \nu_{F(x)}, F(x)).$$

PROPOSITION II.2.1. Avec les notations introduites ci-dessus

$$F = o_U \circ d_{\mathbf{U}} \circ p_U = o_U \circ \star \circ p_U,$$

et, si l'on note  $FC$  la sous-catégorie de  $C_p$  formée des triplets de la forme  $(y, F(f), x)$  où  $f \in C$ , alors

$$FC \subset \mathcal{J}_\alpha(\mathbf{U}) \cap \mathcal{J}_\alpha^\star(\mathbf{U}).$$

Enfin, si  $(y, \Phi, x) \in \mathcal{J}_\alpha(\mathbf{U})$ , on a

$$d_{\mathbf{U}}(y, \Phi, x) = (x, F(i_x) \cdot F(\Phi) \cdot \psi_y, y).$$

DEMONSTRATION: a) Si  $f: x \rightarrow y \in C$ , on sait que

$$F(f) = V_x \cdot P(F(f), i_y),$$

soit

$$\begin{aligned} F(f) &= F(t_x) \cdot \psi_{F(x)} \cdot P(F(f), i_y) \\ &= F(t_x) \cdot F^2(F(f), i_y) \cdot \psi_y \end{aligned}$$

et, en introduisant  $F(F(t_x), t_{F(y)}) = F^2(y)$  à gauche de  $\psi_y$ ,

$$F(f) = F(t_x) \cdot F^2(F(f), i_y) \cdot F(t_{F(y)}) \cdot F^2(t_y) \cdot \psi_y.$$

Mais  $F(t_{F(y)})$  étant la multiplication de la monade  $\bar{\Pi}$ , on a par naturalité

$$\begin{aligned} F(f) &= F(t_x) \cdot F(t_{F^2(x)}) \cdot F^4(F(f), i_y) \cdot F^2(t_y) \cdot \psi_y \\ &= F(t_{F^2(x)} \cdot t_x) \cdot F^5(f) \cdot F^4(i_y) \cdot F^2(t_y) \cdot \psi_y. \end{aligned}$$

Or

$$t_{F^2(x)} \cdot t_x = F^2(t_x) \cdot t_x = F^2(\psi_x) \cdot F^2(i_x) \cdot t_x,$$

de sorte que

$$F(f) = F(t_x) \cdot F^3(i_x) \cdot F^3(\psi_x) \cdot F^5(f) \cdot F^4(i_y) \cdot F^2(t_y) \cdot \psi_y.$$

Si par ailleurs on considère  $(y, P(f), x) = \widetilde{P}(f) = p_U(f)$ , on obtient

$$d_{\mathbf{U}}(p_U(f)) = (x, F(t_x). F^3(i_x). F^3(P(f)). F^2(t_y). \psi_y, y)$$

et, en développant et comparant à  $F(f)$ , il vient

$$d_{\mathbf{U}}(p_U(f)) = (x, F(f), y).$$

b) Pour l'inclusion annoncée il suffit de montrer que  $FC \subset \mathcal{J}_{\alpha}(\mathbf{U})$ , l'autre partie se traitant de même. On calcule :

$$\begin{aligned} F(f). V_y &= F(f). F(t_y). \psi_{F(y)} = F(t_y.f). \psi_{F(y)} \\ &= F(F^2(f). t_x). \psi_{F(y)} = F(t_x). F^2(F(f)). \psi_{F(y)} \\ &= F(t_x). \psi_{F(x)}. P(F(f)) = V_x. P(F(f)). \end{aligned}$$

c) Enfin, soit  $(y, \Phi, x) \in \mathcal{J}_{\alpha}(\mathbf{U})$ . On a  $\Phi = V_y . P(\Phi . i_x)$ , d'où

$$\begin{aligned} (y, \Phi, x) &= (y, V_y, F(y)). (F(y), P(\Phi . i_x), x), \\ d_{\mathbf{U}}(y, \Phi, x) &= d_{\mathbf{U}}(F(y), P(\Phi . i_x), x). d_{\mathbf{U}}(y, V_y, F(y)). \end{aligned}$$

D'après la formule qui précède II.2.1 et d'après a, ci-dessus, il vient

$$\begin{aligned} d_{\mathbf{U}}(y, \Phi, x) &= (x, F(\Phi . i_x), F(y)). (F(y), \psi_y, y) \\ &= (x, F(i_x). F(\Phi). \psi_y, y). \end{aligned}$$

COROLLAIRE II.2.2. On a

$$\star \circ \star \circ p_U = p_U \circ \star.$$

En effet de c ci-dessus on tire

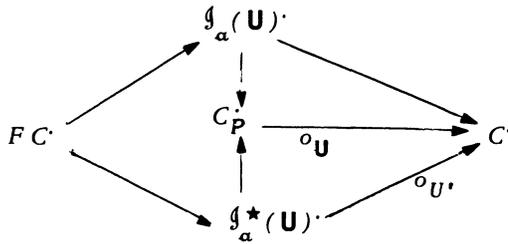
$$\star(y, \Phi, x) = (x, \nu_x . F(i_x). F(\Phi). \psi_y . \nu_y, y)$$

et en particulier

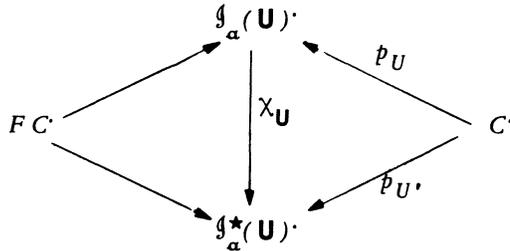
$$\begin{aligned} (\star \circ \star \circ p_U)(f) &= \star(\star \circ p_U(f)) = \star(x, F(f), y) \\ &= (y, \nu_y . F(i_y). F^2(f). \psi_x . \nu_x, y) \\ &= (y, P'(f), x). \end{aligned}$$

THEOREME II.2.3. Soit  $C$  une catégorie et  $(F, i, \omega) = \mathbf{U}$  une m.i.c. sur  $C$ . Avec les notations précédentes et en posant  $\star \circ d_{\mathbf{U}} = \chi_{\mathbf{U}}$  on a :

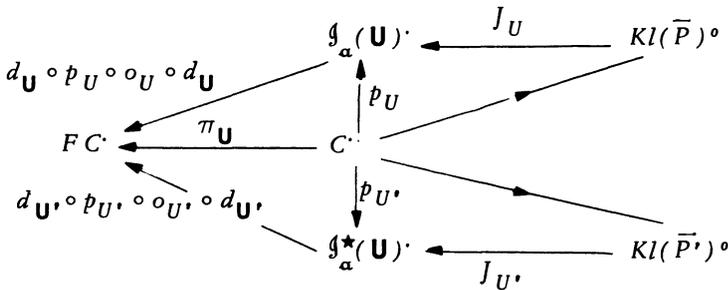
a) Dans le diagramme commutatif ci-dessous seul le foncteur  $\circ_{\mathbf{U}}$  n'admet pas d'adjoint en général.



b) Les catégories  $G_\alpha(U)$  et  $G_\alpha^*(U)$  sont auto-duales et isomorphes, un isomorphisme entre ces deux catégories étant établi par le foncteur  $\chi_U$ , et le diagramme suivant étant commutatif



c) On peut choisir les adjoints dont l'existence est affirmée en a de sorte à avoir le diagramme commutatif de foncteurs adjoints ci-après, avec  $d_{U'} = \chi_U \cdot d_U \cdot \chi_U^{-1}$ .



où  $\pi_U(f) = (F(y), F^2(f), F(x))$  pour tout  $f: x \rightarrow y$  dans  $C$ .

DEMONSTRATION: 1° Le diagramme donné en a est commutatif, et  $\circ_U$  n'admet pas d'adjoint en général, puisqu'un tel adjoint n'existe déjà pas dans le cas ensembliste (voir [1] §1). Les foncteurs  $\circ_U$  et  $\circ_{U'}$  ont pour adjoints les foncteurs  $p_U$  et  $p_{U'}$ .

2° Le foncteur d'insertion  $\iota: F C \rightarrow G_\alpha(U)$  admet un adjoint:

On peut voir que  $(F(x), (F(x), \psi_x, x))$  est un  $\iota$ -projecteur, c'est-à-dire que, pour tout  $y \in C_0$  et  $(y, \Phi, x) \in \mathcal{J}_\alpha(\mathbf{U})$ , il existe un unique

$$(y, F(f), \overline{F(x)}) \text{ tel que} \\ \Phi = F(f) \cdot \psi_x.$$

En effet, puisque  $\Phi, F(f)$  et  $\psi_x$  sont  $V$ -compatibles, l'égalité proposée équivaut à

$$\Phi \cdot i_x = F(f) \cdot \psi_x \cdot i_x = F(f) \cdot t_x$$

soit  $\Phi \cdot i_x = \overline{I(f)}$  ou

$$f = I(\overline{\Phi \cdot i_x}), \text{ c'est-à-dire} \\ f = F(i_x) \cdot F(\Phi) \cdot t_y.$$

3° Alors la valeur de l'adjoint à  $\iota$  sur  $\Phi$  est  $(F(y), F(g), F(x))$  avec  $g = F(i_x) \cdot F(\psi_y \cdot \Phi) \cdot t_{F(y)}$ , d'où avec l'axiome C7 :

$$g = F(i_x) \cdot F(\Phi) \cdot \psi_y.$$

De II.2.1, on en déduit que  $\iota$  admet  $d_{\mathbf{U}} \circ p_U \circ o_U \circ d_{\mathbf{U}}$  pour adjoint.

La fin de la preuve est omise.

### II.3. Définitions d'une monade involutive complémentée.

En II.2 nous avons vu que les m.i.c. peuvent se définir en mettant plus l'accent sur l'opération « $\star$ » associant à une application croissante son application croissante adjointe (comme fait en [1] et [35]). Nous terminons ici par une troisième présentation d'une m.i.c., plus adaptée à la définition d'une m.i. sous la forme «involutive»  $(\overline{P}, I)$ .

DEFINITION II.3.1. Si  $K'$  est une catégorie et  $I$  une involution sur  $K'$  (cf. définition I.1.1) on appelle *négation* sur  $(K', I)$  la donnée d'une application  $N$  de  $C$  dans  $C$  telle que

1.  $N^2 = Id_{K'}$ ,
2.  $N \circ I = I \circ N$ ,
3.  $\forall (f, g) \in C \star C \quad (N(f \cdot g) = N(f) \cdot g)$ .

THEOREME FONDAMENTAL II.3.1. Pour toute catégorie  $C$  l'ensemble

des monades involutives complémentées sur  $C$  est en bijection avec l'ensemble des couples  $(\bar{T}, (I, N))$  où  $(\bar{T}, I)$  est une monade involutive sur  $C$  et  $N$  une négation sur  $(Kl(\bar{T})^0, I)$ .

DEMONSTRATION de III.3.1. En s'appuyant sur le théorème I.1.1 et sa démonstration on constate que le passage d'une m.i.c. sous la forme  $(F, i, \omega)$  à une m.i.c. sous la forme  $((P, i, V), (I, N))$  se fait suivant le formulaire :

$$(a) \quad \begin{aligned} \nu_e &= F(i_e) \cdot \omega_e; \quad \psi_e = \omega_e \cdot \nu_e; \quad t_e = \psi_e \cdot i_e; \\ V_e &= F(t_e) \cdot \psi_{F(e)}; \quad P(f) = F(i_y) \cdot F^2(f) \cdot \psi_x; \\ I(\bar{r}) &= \overline{F(r) \cdot t_{\beta(r)}}; \quad N(\bar{r}) = \overline{\nu_{\beta(\bar{r})} \cdot r}. \end{aligned}$$

Le passage inverse se fait suivant le formulaire

$$(b) \quad \begin{aligned} \psi_e &= V_{F(e)} \cdot P(t_e); \quad t_e = \psi_e \cdot i_e; \quad t_e = I(\overline{P(e)}); \\ F(f) &= \overline{I(t_{\beta(f)} \cdot f)}; \quad \nu_e = \overline{N(\overline{P(e)})}; \quad \omega_e = \psi_e \cdot \nu_e. \end{aligned}$$

Pour prouver le théorème, compte-tenu de I.1.1, il faut encore montrer que :

a') Avec les notations de a et les hypothèses de la définition II.1.1 on a  $N \circ I = I \circ N$ .

b') Avec les notations de b et les hypothèses de la définition II.3.2 les axiomes N2 et N3 sont vérifiés pour  $((F, i, \psi), \nu)$ . En effet :

a') Si  $r: x \rightarrow F(y) \in C$ , on a  $\overline{I(\bar{r})} = F(r) \cdot t_y$ , d'où

$$\begin{aligned} \overline{(N \circ I)(\bar{r})} &= \nu_x \cdot F(r) \cdot t_y \\ &= F(r) \cdot \nu_{F(y)} \cdot t_y \quad (\text{d'après N3}) \\ &= F(r) \cdot F(\nu_y) \cdot t_y \quad (\text{d'après N2}) \\ &= F(\nu_y \cdot r) \cdot t_y \\ &= \overline{I(N(\bar{r}))}. \end{aligned}$$

b'1) Pour tout  $e \in C_0$  on a  $t_e = \overline{I(\overline{P(e)})}$  de sorte que

$$N(\overline{t_e}) = \overline{(N \circ I)(\overline{P(e)})}$$

et, puisque  $N \circ I = I \circ N$ ,

$$N(\overline{t_e}) = \overline{I(N(\overline{P(e)}))},$$

d'où  $\overline{\nu_{F(e)} \cdot t_e} = I(\overline{\nu_e})$ ,  $\nu_{F(e)} \cdot t_e = F(\nu_e) \cdot t_e$ .

b'2) Si  $f: x \rightarrow y$  dans  $C$ , on a

$$\begin{aligned} \nu_x \cdot F(f) &= \nu_x \cdot I(\overline{t_y \cdot f}) \\ &= \overline{N(I(t_y \cdot f))} \end{aligned}$$

et, encore avec  $N \circ I = I \circ N$ ,

$$\begin{aligned} \nu_x \cdot F(f) &= I(N(\overline{t_y \cdot f})) = I(\overline{\nu_{F(y)} \cdot t_y \cdot f}) \\ &= F(f) \cdot F(\nu_{F(y)} \cdot t_y) \cdot t_{F(y)}, \end{aligned}$$

soit, avec N2,

$$\begin{aligned} \nu_x \cdot F(f) &= F(f) \cdot F(F(\nu_y) \cdot t_y) \cdot t_{F(y)} \\ &= F(f) \cdot F(t_y) \cdot F^2(\nu_y) \cdot t_{F(y)} \\ &= F(f) \cdot F(t_y) \cdot t_{F(y)} \cdot \nu_y \\ &= F(f) \cdot \nu_y. \end{aligned}$$

D'après ce théorème on peut sans risque de confusion poser:

**DEFINITION II.3.2.** On appelle *monade involutive complémentée* sur une catégorie  $C$  la donnée d'un couple  $(\overline{T}, (I, N))$ , où  $(\overline{T}, I)$  est une monade involutive sur  $C$  (définition I.1.2) et  $N$  une négation (définition II.3.1) sur  $(Kl(\overline{T})^0, I)$ .

## APPENDICE II: EQUATIONS OU DONNEES SUPPLEMENTAIRES.

Nous donnons ici quelques exemples de conditions (équations, relations ou données supplémentaires) sur une monade involutive qui sont remplies dans le cas ensembliste (ou même dans le cas de la monade involutive  $U_\Omega$  sur un topos élémentaire) mais ne sont pas satisfaites en général par toute monade involutive. Rappelons que dans cet ordre d'idées on a déjà rencontré en I.2 les notions de quatuor  $U$ -semi-cartésien et de  $U$ -monomorphisme.

On désignera par  $U = (F, i, \psi)$  une monade involutive sur une catégorie  $C$ .

1. *Monomorphismes et U-monomorphismes.*

Soit  $C$  un topos. On sait (I.2.8, 2°) que les monomorphismes de  $C$  sont exactement les  $U$ -monomorphismes; il est vrai également que les épimorphismes sont les  $U$ -épimorphismes. Or si  $(F, i, \psi)$  est la m.i. canonique  $U_\Omega$  sur  $C$ , on a

$$\forall e \in C_0, \quad F(i_e) \cdot \psi_e = F(e)$$

(propriété C6 dans la preuve de I.1.2), de sorte que  $\psi_e$  est un monomorphisme et  $F(i_e)$  un épimorphisme; donc

$$(1') \quad F(\psi_e) \cdot P(\psi_e) = F^2(e),$$

$$(2') \quad P(F(i_e)) \cdot F(F(i_e)) = F^2(e).$$

PROPOSITION I. *Les égalités*

$$(1) \quad F(\psi_e) \cdot i_{F^2(e)} \cdot \psi_e = i_{F(e)}$$

et

$$(2) \quad F(i_{F(e)}) \cdot F^3(i_e) \cdot \psi_{F^2(e)} \cdot F^2(i_e) = F^2(e)$$

sont satisfaites pour tout  $e \in C_0$ , si  $U$  est la monade involutive  $U_\Omega$  sur le topos élémentaire  $C$ , mais elles ne sont pas toujours satisfaites pour d'autres monades involutives.

(Il en résulte que les m. i. de la forme  $U_\Omega$  ne sont pas « libres »).

PREUVE. Tout d'abord (1) et (2) ne sont que les développements de (1') et de (2').

Par ailleurs si l'on considère une monade involutive sur un groupe  $G$  (voir I.4.4), les formules (1) et (2) s'écrivent, avec les notations de I.4.4,

$$(1'') \quad b(a) \cdot a^{-1} \cdot b(a^{-1}) \cdot a \cdot b(a) = a,$$

$$(2'') \quad b(a^2) \cdot a \cdot b(a^{-1}) = b(a) \cdot a \cdot b(a) \cdot a^{-1},$$

et, si  $G$  est commutatif, chacune de ces égalités équivaut à

$$(3) \quad b(a) = a.$$

Or on peut trouver un groupe commutatif  $G$  et un automorphisme  $b$  de  $G$  tel que

$$b^2 = Id_G \text{ et } b \neq Id_G.$$

2. Les axiomes de commutation et de quasi-inversion.

Si  $f$  est une application de  $E$  dans  $F$ , alors  $(\star \circ \mathfrak{P})(f)$  est une application croissante adjointe à l'application croissante  $\mathfrak{P}(f)$ , et elle admet pour application croissante adjointe l'application

$$(\star \circ \star \circ \mathfrak{P})(f) = \mathcal{C}_Y \circ \mathfrak{P}(f) \circ \mathcal{C}_X$$

définie par

$$(\star \circ \star \circ \mathfrak{P})(f)(A) = \{ y \in F \mid \forall x \in E [(f(x) = y) \implies x \in A] \}.$$

Des inclusions d'adjonction on déduit les égalités (a) et (b) ci-après qui expriment que  $\mathfrak{P}(f)$  et  $(\star \circ \mathfrak{P})(f)$  sont quasi-inverses l'une de l'autre (voir [35]),

$$(a) \quad \mathfrak{P}(f) \circ (\star \circ \mathfrak{P})(f) \circ \mathfrak{P}(f) = \mathfrak{P}(f),$$

$$(b) \quad (\star \circ \mathfrak{P})(f) \circ \mathfrak{P}(f) \circ (\star \circ \mathfrak{P})(f) = (\star \circ \mathfrak{P})(f).$$

PROPOSITION 2. i) Si  $f$  est un morphisme de  $C'$ , les conditions

$$A(f): \quad P(f). F(f). P(f) = P(f),$$

$$B(f): \quad F(f). P(f). F(f) = F(f)$$

et

$$Q(f): \quad F^2(f). \psi_x . F(f). i_y . f = \psi_y . i_y . f$$

sont équivalentes (si elles sont satisfaites on dit que  $f$  est quasi-inversé par  $U$ ).

ii) Ces conditions ne sont pas satisfaites en général.

iii) Dans le cas où  $U$  est la monade involutive  $U_\Omega$  sur un topos  $C'$ , tout morphisme de  $C'$  est quasi-inversé par  $U_\Omega$ .

PREUVE: Pour iii, ceci est rappelé par exemple dans [4]. Pour ii, on voit que, dans un groupe  $G$  muni de  $(b, a)$ ,  $Q(f)$  s'écrit

$$b(f) = a . f . a^{-1}.$$

Prouvons i :

a) Rappelons que, si  $f: x \rightarrow y$  est dans  $C'$ , alors

$$\psi_x . F(f). i_y = \underline{I(\overline{P(f)})}$$

et que, si  $r : x \rightarrow F(y)$ , on a

$$\underline{I(\bar{r})} = F(r) \cdot t_y$$

(voir proposition I.1.3 c et 1), de sorte que

$$\psi_x \cdot F(f) \cdot i_y = F(P(f)) \cdot t_y.$$

b) Par ailleurs  $P(f)$  et  $F(f)$  sont tous deux  $V$ -compatibles (pour  $P(f)$  c'est clair et pour  $F(f)$  voir II.2.1 b).

c) Alors  $A(f)$  équivaut à

$$\begin{aligned} P(f) \cdot F(f) \cdot P(f) \cdot i_x &= P(f) \cdot i_x, \\ F(i_y) \cdot F^2(f) \cdot \psi_x \cdot F(f) \cdot i_y \cdot f &= P(f) \cdot i_x, \end{aligned}$$

ce qui équivaut à  $Q(f)$ , grâce à C2; ceci s'écrit encore

$$\begin{aligned} F(i_y) \cdot F^2(f) \cdot (F(P(f)) \cdot t_y) \cdot f &= P(f) \cdot i_x, \\ F(i_y) \cdot F^2(f) \cdot F(P(f)) \cdot F^2(f) \cdot t_x &= P(f) \cdot i_x, \\ F(i_y) \cdot F(F(f) \cdot P(f) \cdot F(f)) \cdot t_x &= P(f) \cdot i_x, \end{aligned}$$

ce qui est exact si l'on suppose  $B(f)$  vrai.

d) Inversement

$$\begin{aligned} F(f) \cdot i_y &= F(f) \cdot (F(i_y) \cdot \psi_y) \cdot i_y = F(f) \cdot F(i_y) \cdot t_y \\ &= F(i_y \cdot f) \cdot t_y = F(P(f) \cdot i_x) \cdot t_y, \end{aligned}$$

de sorte que, si  $A(f)$  est vrai, on a

$$\begin{aligned} F(f) \cdot i_y &= F(P(f) \cdot F(f) \cdot P(f) \cdot i_x) \cdot t_y \\ &= F(P(f) \cdot F(f) \cdot i_y \cdot f) \cdot t_y \\ &= F(f) \cdot F(i_y) \cdot F^2(f) \cdot F(P(f)) \cdot t_y \\ &= F(f) \cdot F(i_y) \cdot F^2(f) \cdot \psi_x \cdot F(f) \cdot i_y \\ &= F(f) \cdot P(f) \cdot F(f) \cdot i_y, \end{aligned}$$

c'est-à-dire  $B(f)$  puisqu'ici on peut simplifier par  $i_y$  (d'après b).

*Note.* Si  $U$  est complétée (II.1.1), alors  $A(f)$  et  $B(f)$  sont équivalents à  $A'(f)$  et  $B'(f)$  obtenus en remplaçant dans  $A(f)$  et  $B(f)$  le foncteur  $P$  par le foncteur  $P'$ .

Dans [4] est indiquée la propriété suivante :

**PROPOSITION 3.** *Si  $U$  est la monade involutive  $U_\Omega$  sur un topos  $C'$ , si  $x$  et  $y$  sont deux objets de  $C'$  et si  $f, g: x \rightarrow y$  sont deux morphismes de  $C'$ , alors on a la formule de commutation :*

$$\mathcal{C}(f, g); P(f).F(f).P(g).F(g) = P(g).F(g).P(f).F(f).$$

### 3. La notion de $U$ -graphe.

Soit  $U$  une m.i. sur une catégorie  $C'$  à produits fibrés, et soit  $Sp(C')^V$  la catégorie des angles (spans) de  $C'$ . On désigne par  $\mathcal{G}_{n_U}$  l'ensemble des morphismes de  $K_{\mathcal{F}}$  de la forme  $(y, P(g).F(f), x)$  et on note  $gr_U: Sp(C')^V \rightarrow \mathcal{G}_{n_U}$  l'application qui à l'angle  $x \xleftarrow{f} a \xrightarrow{g} y$  associe  $(y, P(g).F(f), x)$ .

**PROPOSITION 4.** *i) L'involution de  $K_{\mathcal{F}}$  se restreint à  $\mathcal{G}_{n_U}$ .*

*ii) Si dans  $C'$  tout carré cartésien est  $U$ -semi-cartésien, alors  $\mathcal{G}_{n_U}$  définit une sous-catégorie de  $K_{\mathcal{F}}$  et  $gr_U$  un foncteur surjectif. Dans ce cas  $\mathcal{G}_{n_U} = K_{\mathcal{F}}$  si, et seulement si, pour tout  $e \in C'_0$  le morphisme  $(F^3(e), t_{F^2(e)}, F(e))$  appartient à  $\mathcal{G}_{n_U}$ .*

### 4. La notion d'objet $U$ -vide.

On appelle objet  $U$ -vide de  $C'$  et on note  $\Theta$  tout objet  $\Theta$  tel que

$$\psi_{F(\Theta)} = P(i_{F(\Theta)}).$$

Un tel objet n'est pas nécessairement initial mais, s'il l'est, alors  $F(\Theta) = \dagger$  est final.

**PROPOSITION 5.** *Dans le cas ensembliste un ensemble  $X$  est vide ( $X = \emptyset$ ) si et seulement s'il est  $U_2$ -vide pour la monade involutive canonique  $U_2$ ; dans ce cas l'application de passage au complémentaire*

$$\top_{\mathcal{P}(\emptyset)}: \mathcal{P}^2(\emptyset) = \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}$$

peut s'écrire

$$\top_{\mathcal{P}(\emptyset)} = (\star \circ \mathcal{P})(\mathcal{P}(\gamma_\emptyset)) \circ \gamma_{\mathcal{P}^2(\emptyset)}.$$

### 5. Inéquations.

Considérons sur une catégorie  $C'$  une monade involutive complé-mentée  $\mathbf{U} = ((F, i, \psi), \nu)$ . Alors, bien que satisfaites dans le cas ensem-

bliste, les inéquations et équations

$$\begin{aligned}
 & (\forall e \in C_0) (F(e) \neq e); (\forall e \in C_0) (\nu_e \neq F(e)); \\
 & (\forall e \in C_0) (F(V_e \cdot t_e) \cdot i_{F(e)} \neq F(V_e \cdot t_e) \cdot \psi_e); \\
 & (\forall e \in C_0) (F(V_e \cdot t_e) \cdot i_{F(e)} = \nu_e \cdot F(V_e \cdot t_e) \cdot \psi_e \cdot \nu_e)
 \end{aligned}$$

ne sont pas satisfaites en général. Remarquons que la seconde formule se déduit des deux dernières.

6. La question de l'ordre.

BENABOU [36] avec ses catégories avec déduction et LAMBEK [12] avec ses dogmas ont mis l'accent sur l'étude de foncteurs

$$\mathcal{R} : C^* \longrightarrow \text{Préord},$$

où  $C$  est une catégorie à produits finis, où  $\text{Préord}$  est la catégorie des applications croissantes entre ensembles préordonnés, et où l'on considère que, pour tout  $e \in C_0$ , l'ensemble  $\mathcal{R}(e)$  est l'ensemble des «prédicats» sur  $e$  pour une certaine théorie de déduction. La question se pose donc de comparer ce point de vue à celui des m.i. et, pour commencer, de déterminer si dans le cas ensembliste la description du foncteur  $\mathcal{R} : \mathcal{M}^{0*} \rightarrow \text{Préord}$  qui à tout  $X$  associe  $(\mathfrak{P}(X), \subset)$  peut se faire à partir de la monade involutive  $U_2$  seule (auquel cas l'existence de  $\mathcal{R}$  est une propriété de  $U_2$ ) ou non (auquel cas l'existence de  $\mathcal{R}$  est une donnée supplémentaire à  $U_2$ ).

Soit  $U$  une m.i. sur une catégorie  $C$  et  $\mathcal{M}^0$  la catégorie pleine d'applications associée à un univers  $\mathcal{U}$  tel que, pour tout  $e, e' \in C_0$  l'ensemble des morphismes dans  $C$  de  $e$  vers  $e'$  appartienne à  $\mathcal{U}$ .

Pour tout  $e \in C_0$  on désigne par  $\mathcal{R}(e)$  l'ensemble des morphismes de  $e$  vers  $F(e)$  dans  $C$ . Pour tout  $f : e \rightarrow e'$  de  $C$ , tout  $r \in \mathcal{R}(e)$  et tout  $r' \in \mathcal{R}(e')$  on pose

$$\mathcal{R}^-(f)(r') = F(f) \cdot r' \cdot f$$

et

$$\mathcal{R}^+(f)(r) = P(f) \cdot V_e \cdot P(r) \cdot F(f) \cdot i_{e'}$$

$\mathcal{R}^-(f)(r')$  et  $\mathcal{R}^+(f)(r)$  sont abrégés en  $f^-r'$  et  $fr$  respectivement.

PROPOSITION 6.  $\mathcal{R}^+ : C \rightarrow \mathfrak{M}^0$  et  $\mathcal{R}^- : C^* \rightarrow \mathfrak{M}^0$  sont deux foncteurs.

Ceci est clair pour  $\mathcal{R}^-$ , et pour  $\mathcal{R}^+$  cela revient principalement à prouver l'égalité

$$F(f) = V_e \cdot P(F(f), i_e, )$$

que l'on connaît déjà.

Soit maintenant  $\mathbf{U} = (U, \nu)$  une m.i.c. sur  $C$ .

DEFINITION. Soit  $x, y \in C_0$ . On définit sur l'ensemble des morphismes de  $C$  de  $x$  vers  $F(y)$  deux relations  $\overset{\mathbf{U}}{C}_{x,y}$  et  $\overset{U_{\sim}}{C}_{x,y}$  en posant, pour  $r_1, r_2 : x \rightarrow F(y)$  dans  $C$  :

$$r_1 \overset{\mathbf{U}}{C}_{x,y} r_2 \iff (\exists b \in C) (\Lambda_y \cdot b = r_1 \text{ et } V_y \cdot b = r_2),$$

$$r_1 \overset{U_{\sim}}{C}_{x,y} r_2 \iff (\exists b \in C) (F(i_y) \cdot b = r_1 \text{ et } V_y \cdot b = r_2).$$

Si  $C$  est la catégorie  $\mathfrak{M}^0$  et si  $\mathbf{U}$  est une m.i.c. de la forme  $(U_{\mathcal{O}}, n)$  (voir III.2 proposition III.2.1 et 2.3), alors pour tout ensemble  $Y$  les relations  $\overset{(U_{\mathcal{O}}, n)}{C}_{1,Y}$  et  $\overset{U_{\mathcal{O}}}{C}_{1,Y}$  seront simplement notées  $C_{\mathcal{O}, n, Y}$  et  $C_{\mathcal{O}, Y}$ . Par ailleurs on note  $C_{\mathcal{O}, Y}$  l'ordre sur  $\underline{\mathcal{O}}^Y$  déduit de l'ordre  $<$  sur  $\underline{\mathcal{O}}$  :

$$Y_1 C_{\mathcal{O}, Y} Y_2 \iff (\forall y \in Y) (Y_1(y) < Y_2(y)).$$

PROPOSITION 7. Dans le cas ensembliste où  $\mathcal{O} = 2$  et  $n = \mathcal{C}$  les relations  $C_{\mathcal{O}, n, Y}$  et  $C_{\mathcal{O}, Y}$  sont identiques. De plus pour tout s.m.a.  $\mathcal{O}$  et pour  $p_1, p_2 : Y \rightarrow \underline{\mathcal{O}}$  on a

$$p_1 \overset{\sim}{C}_{\mathcal{O}, Y} p_2 \implies p_1 C_{\mathcal{O}, Y} p_2,$$

l'implication inverse étant vraie si, pour tout  $y \in Y$ ,  $p_2 \neq \gamma_{\mathcal{O}}(y)$ .

Ainsi il apparaît que l'ordre sur  $\mathfrak{P}(Y)$  n'est pas une donnée supplémentaire à  $\mathbf{U}_2$ .

III. CONSTRUCTIONS DE MONADES INVOLUTIVES.

III.1. Les catégories  $MI(C)$ .

Soit  $C$  une catégorie,  $(F, i, \psi) = U$  une monade involutive sur  $C$ ,  $\bar{P} = (P, i, V)$  la monade «des parties» associée, et  $I$  l'involution sur  $Kl(\bar{P})^\circ$ . Soit  $U' = (\bar{P}', I')$  une deuxième monade involutive sur  $C$  et  $m: \bar{P} \rightarrow \bar{P}'$  un morphisme de monades (cf. preuve de I.1.2 § c). On note  $Kl(m)$  le foncteur de  $Kl(\bar{P})^\circ$  vers  $Kl(\bar{P}')^\circ$  déterminé par la composition avec  $m$  à gauche.

PROPOSITION III.1.1. Avec les notations ci-dessus les conditions

(a) 
$$Kl(m) \circ I = I' \circ Kl(m)$$

et

(b) Pour tout  $f: x \rightarrow y$  dans  $C$  on a

(b<sub>1</sub>) 
$$F'(f) \cdot m_y = m_x \cdot F(f),$$

(b<sub>2</sub>) 
$$F'(m_x) \cdot t'_x = m_{F(x)} \cdot t_x$$

sont équivalentes.

Dans ce cas on dira que  $m$  est un morphisme de  $U$  vers  $U'$ .

PREUVE : Si l'on suppose (a), alors on a

$$i'_y \cdot f = m_y \cdot i_y \cdot f$$

et donc  $I'(i'_y \cdot f) = m_y \cdot I(i_y \cdot f)$ , et puisque

$$F'(f) = V'_x \cdot P'(I'(\overline{i'_y \cdot f}))$$

et que  $F(f) = V_x \cdot P(I(\overline{i_y \cdot f}))$ , il vient

$$\begin{aligned} F'(f) \cdot m_y &= V'_x \cdot P'(I'(\overline{i'_y \cdot f})) \cdot m_y \\ &= V'_x \cdot m_{P'(x)} \cdot P(I'(\overline{i'_y \cdot f})) \\ &= V'_x \cdot m_{P'(x)} \cdot P(m_x \cdot I(\overline{i_y \cdot f})) \\ &= (V'_x \cdot m_{P'(x)}) \cdot P(m_x) \cdot P(I(\overline{i_y \cdot f})) \\ &= m_x \cdot V_x \cdot P(I(\overline{i_y \cdot f})) \\ &= m_x \cdot F(f). \end{aligned}$$

Pour obtenir  $(b_2)$  on part de  $\bar{t}_x = I(\overline{P(x)})$  d'où,

$$m_{F(x)} \cdot t_x = I'(m_x) = F'(m_x) \cdot t'_x.$$

Réciproquement si l'on suppose  $(b_1)$  et  $(b_2)$  on retrouve  $(a)$ , car cela s'écrit

$$\begin{aligned} F'(m_y \cdot r) \cdot t'_y &= m_x \cdot F(r) \cdot t_y, \\ F'(r) \cdot F'(m_y) \cdot t'_y &= m_x \cdot F(r) \cdot t_y \end{aligned}$$

et d'après  $(b_1)$  on doit montrer

$$F'(r) \cdot F'(m_y) \cdot t'_y = F'(r) \cdot m_{F(y)} \cdot t_y,$$

ce qui résulte de  $(b_2)$ .

DEFINITION III.1.1. Pour toute catégorie  $C$  on appelle *catégorie des monades involutives sur  $C$*  et on note  $MI(C)$  la catégorie ayant pour objets les monades involutives sur  $C$  et où les morphismes de  $U$  vers  $U'$  sont définis dans la proposition III.1.1.

Soit toujours  $C$  une catégorie,  $(F, i, \psi) = U$  une monade involutive sur  $C$ . Considérons alors un foncteur  $G: C \rightarrow D$  admettant un adjoint à gauche  $G'$ ; on note  $\varepsilon: D \rightarrow G \circ G'$  et  $\eta: G' \circ G \rightarrow C$  les transformations naturelles définissant l'adjonction; cette adjonction sera notée  $(G, G', \varepsilon, \eta) = g$ . On pose:

$$\begin{aligned} gF &= G \circ F \circ G'; & gP &= G \circ P \circ G'; \\ gi &= G(i_{G'}); & \varepsilon; & gV = G(V_{G'} \cdot P(\eta_{PG'})); \\ gt &= G(F(\eta_{PG'}) \cdot t_{G'}); & \varepsilon; & g\psi = (gV)_{gP} \cdot gP(gt); \\ g\bar{P} &= (gP, gi, gV). \end{aligned}$$

On vérifie que  $g\bar{P}$  est une monade sur  $D$  et on note  $Kl(g\bar{P})^\circ$  sa catégorie de Kleisli.

Si  $\bar{r}$  est un morphisme dans  $Kl(g\bar{P})$  de  $d$  vers  $d'$  qui est défini par  $r$  de  $d$  vers  $(gP)(d')$  dans  $D$ , on note  $(gl)(\bar{r})$  le morphisme de  $Kl(g\bar{P})^\circ$  qui est défini par le morphisme  $(gF)(r) \cdot (gt)_{d'}$  de  $D$ .

Enfin si  $m: U \rightarrow U'$  est un morphisme de  $MI(C)$  on pose, pour tout objet  $d$  de  $D$ ,

$$(gm)_d = G(m_{G'(d)}),$$

on vérifie que  $gm$  détermine un morphisme de  $g\bar{P}$  vers  $g\bar{P}'$ .

LEMME III.1.2. Avec les notations ci-dessus on a :

a) les données  $(g\bar{P}, gI)$  et  $(gF, gi, g\psi)$  sont les deux présentations d'une monade involutive sur  $D'$  que l'on note  $gU$  et que l'on appelle image de  $U$  par l'adjonction  $g$ .

b) Si  $m:U \rightarrow U'$  est dans  $MI(C')$ , alors  $gm$  est un morphisme dans  $MI(D')$  de  $gU$  vers  $gU'$ .

c) On détermine un foncteur

$$MI(g):MI(C') \rightarrow MI(D')$$

en associant  $gm$  à tout morphisme  $m$  de  $MI(C')$ .

La preuve n'est pas détaillée.

On remarque que les catégories  $MI(C')$  sont des sous-catégories d'une 2-catégorie  $MI$  des m.i., construite au-dessus de la 2-catégorie  $M$  des monades.

Soit maintenant  $A$  un ensemble et  $\mathcal{N}(C', A)$  ou  $C'^A$  la catégorie des foncteurs de  $A$  (catégorie discrète) vers  $C'$ . On considère  $U=(F, i, \psi)$  une m.i. sur  $C'$  et on définit  $((F)_A, (i)_A, (\psi)_A)$  sur  $C'^A$  par les formules:

$$(F)_A(\tau) = F.\tau, ((i)_A)_\phi(a) = i_{\phi(a)}, ((\psi)_A)_\phi(a) = \psi_{\phi(a)}$$

pour  $a \in A$  et  $\tau \in C'^A$  (voir I.4.5, n° 4).

Il est évident que l'on obtient ainsi une monade involutive sur  $C'^A$  que l'on notera  $(U)_A$ .

Enfin supposons que  $C'$  soit à  $A$ -produits; on a donc le foncteur « diagonale »  $\Delta_C^A: C' \rightarrow C'^A$  qui est adjoint au foncteur « produit »  $\prod_C^A$  de  $C'^A$  vers  $C'$ ; cette adjonction sera désignée par

$$(\prod_C^A, \Delta_C^A, \varepsilon, \eta) = \prod_A.$$

En appliquant le lemme III.1.2 avec  $U=(U)_A$  et  $g=\prod_A$  on obtient donc sur  $C'$  la monade involutive  $\prod_A(U)_A$  que l'on notera simplement  $U^A=(F^A, i^A, \psi^A)$ .

### III.2. Les monades $U_{\mathcal{O}}$ dans $\mathfrak{M}^{\circ}$ .

Soit  $\mathcal{U}$  un univers et  $\mathfrak{M}^{\circ}$  la catégorie des applications associée à  $\mathcal{U}$ . On connaît déjà sur  $\mathfrak{M}^{\circ}$  la monade involutive  $U_2$  et son complément  $U'_2$  (I.4.1 d).

La construction qui suit est inspirée de celle de la m.i. associée à un semi-anneau commutatif unitaire donnée en I.4.2 et généralise la construction de  $U_2$ .

Soit  $\underline{\mathcal{O}}$  un ensemble,  $S$  une application de  $\mathfrak{P}(\underline{\mathcal{O}})$  vers  $\underline{\mathcal{O}}$ ,  $k$  une application de  $\underline{\mathcal{O}} \times \underline{\mathcal{O}}$  vers  $\underline{\mathcal{O}}$ , et  $o$  et  $e$  des éléments de  $\underline{\mathcal{O}}$ . Désormais, on pose  $(\underline{\mathcal{O}}, S, k, o, e) = \mathcal{O}$ , et pour tout ensemble  $X$  on note  $\underline{\mathcal{O}}^X$  l'ensemble des applications de  $X$  vers  $\underline{\mathcal{O}}$ , pour tout  $f$  de  $X$  vers  $Y$ , on note  $\underline{\mathcal{O}}^f$  l'application de  $\underline{\mathcal{O}}^Y$  vers  $\underline{\mathcal{O}}^X$  qui à tout  $\phi: Y \rightarrow \underline{\mathcal{O}}$  associe  $\phi \circ f$ . Le foncteur contravariant qui à tout  $f$  associe  $\underline{\mathcal{O}}^f$  sera noté  $\underline{\mathcal{O}}^{(-)}$  ou bien  $\text{exp}_{\mathcal{O}}(-): \mathfrak{M}^{\circ*} \rightarrow \mathfrak{M}^{\circ}$ . On définit pour tout  $X$  une application

$$\gamma_{\mathcal{O}_X}: X \rightarrow \underline{\mathcal{O}}^X \quad \text{par}$$

$$\gamma_{\mathcal{O}_X}(x)(x') = \begin{cases} e & \text{si } x = x' \\ o & \text{si } x \neq x', \end{cases}$$

et on définit  $\psi_{\mathcal{O}_X}: \underline{\mathcal{O}}^X \rightarrow \underline{\mathcal{O}}(\underline{\mathcal{O}}^X)$  par

$$\psi_{\mathcal{O}_X}(p)(p') = S(\{k(p(x), p'(x)) \mid x \in X\}).$$

**THEOREME III.2.1.** *Le triplet  $(\underline{\mathcal{O}}^{(-)}, \gamma_{\mathcal{O}}, \psi_{\mathcal{O}})$  est une monade involutive sur  $\mathfrak{M}^{\circ}$ , notée  $U_{\mathcal{O}}$ , si et seulement si :*

1° Muni de la relation  $x < y$  ssi  $S(x, y) = y$  l'ensemble  $\underline{\mathcal{O}}$  est un treillis complet dont l'application  $\text{Sup} <$  est  $S$  et le plus petit élément est  $o$ .

2° L'application  $k$  est une loi de monoïde abélien sur  $\underline{\mathcal{O}}$  d'unité  $e$ .

3° L'application  $k$  est compatible avec les  $\text{Sup}$ , c'est-à-dire, en notant  $\mathcal{O}_{\mathcal{O}}$  l'application canonique de  $\mathfrak{P}(\underline{\mathcal{O}}) \times \mathfrak{P}(\underline{\mathcal{O}})$  vers  $\mathfrak{P}(\underline{\mathcal{O}} \times \underline{\mathcal{O}})$  on a :

$$S \circ \mathfrak{P}(k) \circ \mathcal{O}_{\mathcal{O}} = k \circ (S \times S).$$

**DEFINITION III.2.1.** Sous les conditions du théorème III.2.1,  $\mathcal{O}$  est ap-

pelé un *sup-monoïde abélien* (s.m.a.) ou *monoïde abélien complet* (m.a.c.).

Le  $S(\underline{\mathcal{O}})$  est noté  $1$ ; il est différent de  $o$  en général. On remarque aussi que pour tout  $x \in \underline{\mathcal{O}}$  on a alors, en posant  $x' . x = k((x', x))$ :

$$x . o = x . \text{Sup}(\emptyset) = \text{Sup}(x . \emptyset) = \text{Sup}(\emptyset) = o.$$

Une fois énoncé le théorème n'est pas trop difficile à prouver. Nous indiquerons seulement les formules suivantes, où on pose

$$U_{\mathcal{O}} = (\underline{\mathcal{O}}^{(-)}, \gamma_{\mathcal{O}}, \psi_{\mathcal{O}}) \simeq (\overline{\mathbb{F}}_{\mathcal{O}}, 1) \text{ avec } \overline{\mathbb{F}}_{\mathcal{O}} = (\mathbb{F}_{\mathcal{O}}, \gamma_{\mathcal{O}}, \cup_{\mathcal{O}}):$$

pour tout ensemble  $X$ , tout  $x \in X$  et tout  $Q \in \underline{\mathcal{O}}(\underline{\mathcal{O}}^X)$  on a

$$\cup_{\mathcal{O}_X}(Q)(x) = S(\{k(Q(p), p(x)) \mid p \in \underline{\mathcal{O}}^X\}),$$

pour toute application  $f: X \rightarrow Y$ , pour tout  $y \in Y$  et tout  $p \in \underline{\mathcal{O}}^Y$ , il vient

$$\mathbb{F}_{\mathcal{O}}(f)(p)(y) = S(\{p(x) \mid f(x) = y\}).$$

On démontre alors la partie directe du théorème en vérifiant les formules C1 à C4 de la définition d'une construction standard contravariante (I.1.3). La réciproque suit après de l'examen de la preuve directe.

Soit  $\underline{\mathcal{O}}$  un ensemble muni d'un ordre  $<$  qui en fait un treillis complet. Si  $a, b \in \underline{\mathcal{O}}$  on écrit  $a \wedge b$  pour  $\inf_{<}(\{a, b\})$  et on désigne par  $a \wedge (-): (\underline{\mathcal{O}}, <) \rightarrow (\underline{\mathcal{O}}, <)$  l'application croissante qui à tout  $x$  associe  $a \wedge x$ . Si  $(b_i)_{i \in I}$  est une famille d'éléments de  $\underline{\mathcal{O}}$  on écrit  $\bigvee_{i \in I} b_i$  pour  $\text{Sup}_{<} \{b_i \mid i \in I\}$ . Alors les conditions (L) et (A) suivantes sont équivalentes:

(L) Pour tout  $a \in \underline{\mathcal{O}}$  et toute famille  $(b_i)_{i \in I}$  d'éléments de  $\underline{\mathcal{O}}$ , on a

$$a \wedge (\bigvee_{i \in I} b_i) = \bigvee_{i \in I} (a \wedge b_i).$$

(A) Pour tout  $a \in \underline{\mathcal{O}}$  l'application croissante  $a \wedge (-)$  admet une application croissante adjointe à droite notée  $a \rightarrow (-)$ .

En effet il est clair que (A) entraîne (L), et réciproquement si l'on a (L), alors la définition pour tout  $a, b \in \underline{\mathcal{O}}$

$$(a \rightarrow b) = \text{Sup}_{<} \{z \mid a \wedge z < b\}$$

convient pour (A) ( $(\underline{\mathcal{O}}, <)$  étant supposé complet) car on a bien, pour tout  $c \in \underline{\mathcal{O}}$ ,

$$c < (a \rightarrow b) \text{ si et seulement si } a \wedge c < b.$$

DEFINITION III.2.2. Un treillis complet satisfaisant à (L) ou (A) sera appelé *treillis local* ou *treillis complet distributif* ou encore *algèbre de Heyting complète*.

COROLLAIRE III.2.2. Pour tout treillis local  $(\underline{\mathcal{O}}, <)$  on a une monade involutive  $U_{\underline{\mathcal{O}}}$  sur  $\mathfrak{M}^{\circ}$  associée par le théorème III.2.1 à

$$\underline{\mathcal{O}} = (\underline{\mathcal{O}}, \text{Sup}, \text{inf}, 0, 1).$$

En particulier pour  $\underline{\mathcal{O}} = \{0, 1\}$  avec l'ordre  $0 < 1$  on note  $\mathcal{2}$  le s.m.a.  $\underline{\mathcal{O}}$  et  $U_{\mathcal{2}}$  la monade associée : c'est bien la monade des parties déjà introduite sous cette notation. Et si on note  $\mathcal{2}^*$  le s.m.a. associé à  $\{0, 1\}$  avec l'ordre  $1 < 0$  la monade  $U_{\mathcal{2}^*}$  est  $U'_{\mathcal{2}}$ , le complément de  $U_{\mathcal{2}}$  au sens de II.1 (revoir I.4.1.d).

Comme exemples de s.m.a. qui ne soient pas des treillis locaux on remarquera  $([0, 1], \text{Sup}_{<}, \dots, 0, 1)$ , où  $[0, 1]$  est l'intervalle unité réel,  $<$  son ordre usuel,  $\cdot$  sa multiplication usuelle. Ce s.m.a. sera encore désigné par  $[0, 1]$ ; on prendra garde de ne pas le confondre avec le s.m.a.  $([0, 1], \text{Sup}_{<}, \text{inf}, 0, 1)$ .

On remarquera aussi  $(\mathbf{N} \cup \{\infty\}, \text{Sup}_{<}, \dots, 0, 1) = \overline{\mathbf{N}}$ , où  $<$  est l'ordre usuel sur  $\mathbf{N} \cup \{\infty\}$  ( $\forall x \in \mathbf{N}, x < \infty$ ) et où  $x \cdot y$  est le produit usuel d'entiers si  $x, y \in \mathbf{N}$ , tandis que pour  $x \neq 0$  on a

$$x \cdot \infty = \infty \cdot x = \infty \text{ et que } 0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0.$$

Soit maintenant  $n: \underline{\mathcal{O}} \rightarrow \underline{\mathcal{O}}$  une application. Pour tout ensemble  $X$  on définit  $\nu_X: \underline{\mathcal{O}}^X \rightarrow \underline{\mathcal{O}}^X$  comme l'application  $n^X$  qui à  $p: X \rightarrow \underline{\mathcal{O}}$  associe  $n \circ p$ .

PROPOSITION III.2.3. Le couple  $(U_{\underline{\mathcal{O}}}, \nu)$  est une m.i.c. (cf. II.1.1 ou II.3.2) si et seulement si  $n^2 = \text{Id}_{\underline{\mathcal{O}}}$ .

PREUVE: En effet cette condition est nécessaire et suffisante pour

avoir N1 dans II.1.1.

Par ailleurs vue la définition de  $\gamma_{\mathcal{O}_X}$  et  $\psi_{\mathcal{O}_X}$  on obtient, pour  $t_{\mathcal{O}_X} = \psi_{\mathcal{O}_X} \circ \gamma_{\mathcal{O}_X}$  :

$$t_{\mathcal{O}_X}(x)(p) = p(x) \text{ pour } x \in X \text{ et } p \in \underline{\mathcal{O}}^X.$$

On constate alors que, sans conditions sur  $n$ , les axiomes N2 et N3 sont automatiquement satisfaits. On peut ensuite expliciter

$$\begin{aligned} \cap_{\mathcal{O}_X} &= \nu_X \circ \cup_{\mathcal{O}_X} \circ \mathbb{P}_{\mathcal{O}}(\nu_X) : \\ \cap_{\mathcal{O}_X}(Q)(x) &= n(\text{Sup}_{<} \{ Q(n \circ p) \cdot p(x) \mid p \in \underline{\mathcal{O}}^X \}). \end{aligned}$$

NOTATIONS III.2.1. 1° Pour tout entier  $\underline{m}$  le treillis local  $[m] = (\underline{m}, \leq)$  où  $\leq$  est l'ordre usuel sur  $\underline{m} = \{0, 1, \dots, m-1\}$  sera abusivement désigné par  $m$ . On notera que pour  $\underline{m} > 3$  le treillis  $(\underline{m}, \leq)$  porte plusieurs lois de monoïdes sup-compatibles non isomorphes.

2° Soit  $\mathcal{O} = (\underline{\mathcal{O}}, \text{Sup}_{<}, +)$  un sup-monoïde abélien et soit  $\mathcal{A} = (A, <)$  un ordre. On note  $\mathcal{O}^A$  le s.m.a. des applications de  $A$  vers  $\underline{\mathcal{O}}$  où  $<$  et  $+$  sont définies par

$$f < g \iff \forall a \in A (f(a) < g(a))$$

et

$$(\forall a \in A) [(f+g)(a) = f(a) + g(a)].$$

On désigne par  $\mathcal{O}^{\mathcal{A}}$  le sous-sup-monoïde abélien de  $\mathcal{O}^A$  constitué des applications croissantes de  $\mathcal{A}$  vers  $\mathcal{O}$ .

3° Ainsi on a, avec les notations, et pour tout entier  $\underline{m}$ ,  $2^{\underline{m}} = m+1$  (voir [15]) et en particulier  $2^2 = 3$ .

L'objet simplicial  $\hat{U}$ .

Supposons que  $(A, <) = \mathcal{A}$  soit un ordre; on détermine une sous-monade involutive  $(U_2)^{\mathcal{A}}$  de  $(U_2)^A$  en posant, pour tout ensemble  $X$ ,  $\mathbb{P}(X)^{\mathcal{A}} = \{f \in \mathbb{P}(X)^A \mid f \text{ application croissante de } \mathcal{A} \text{ vers } (\mathbb{P}(X), \subset_X)\}$ .

PROPOSITION III.2.4. Pour tout  $\mathcal{A}$  on a l'isomorphisme

$$(U_2)^{\mathcal{A}} \simeq U_2^{\mathcal{A}}.$$

On désignera par  $Mon_{a.c.}^{\circ}$  la catégorie ayant pour objets les sup-monoïdes abéliens (ou monoïdes abéliens complets)  $\mathcal{O}$  tels que  $\underline{\mathcal{O}} \in \mathcal{U}$ , et où un morphisme de  $\mathcal{O}$  vers  $\mathcal{O}'$  est une application de  $\underline{\mathcal{O}}$  vers  $\underline{\mathcal{O}'}$  sup-compatible qui est aussi un homomorphisme de monoïdes. De plus pour tout morphisme  $m: \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}'$  dans  $Mon_{a.c.}^{\circ}$  et pour tout ensemble  $X$  on note  $m^X$  l'application de  $\underline{\mathcal{O}}^X$  vers  $\underline{\mathcal{O}'}^X$  qui à tout  $\phi$  associe  $m \circ \phi$ , et on pose  $(m^X)_X \in \mathcal{U} = U_m$ .

PROPOSITION III.2.5. *On détermine un foncteur*

$$U_{(-)}: Mon_{a.c.}^{\circ} \longrightarrow MI(\mathfrak{M}^{\circ})$$

en associant, à tout  $m: \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}'$  de  $Mon_{a.c.}^{\circ}$ ,  $U_m: U_{\mathcal{O}} \rightarrow U_{\mathcal{O}'}$  qui est effectivement un élément de  $MI(\mathfrak{M}^{\circ})$ .

La vérification n'est pas reproduite. En application on obtient une deuxième approche de la question de l'ordre sur  $2^X$  (à comparer à Appendice II, Proposition 7):

La proposition III.2.4 nous donne l'isomorphisme

$$3^X \simeq \{ (A, B) \in \mathfrak{P}(X) \times \mathfrak{P}(X) \mid A \subset B \subset X \},$$

qui signifie que  $3^X$  est le graphe de la relation d'ordre sur  $2^X$ . En fait  $2 \longleftarrow 3$  est un objet ordonné dans  $Mon_{a.c.}^{\circ}$  et on déduit de III.2.5:

COROLLAIRE III.2.6. *Dans la catégorie  $MI(\mathfrak{M}^{\circ})$  l'objet  $U_2$  est un objet ordonné, l'objet graphe de l'ordre étant  $U_3$ , de sorte que l'on a un objet simplicial dans  $MI(\mathfrak{M}^{\circ})$ :*

$$\hat{U}: U_1 \xleftarrow{\varepsilon} U_2 \begin{array}{c} \xleftarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{u} \\ \xleftarrow{\beta} \end{array} U_3 \xleftarrow{\kappa} U_4 \xleftarrow{\quad} \dots$$

*Notion d'objet cantorien.*

DEFINITION III.2.2. Si  $C$  est une catégorie à produits finis, on appelle objet cantorien de  $C$  la donnée d'un quadruplet  $(a; ev, i, \psi) = \alpha$ , où  $a \in C_0$ , et où  $ev, i$  et  $\psi$  consistent en la donnée pour tout  $c \in C_0$  de morphismes  $ev_c, i_c$  et  $\psi_c$  satisfaisant aux conditions de la proposition I.1.6, lesquelles signifient que  $(exp_a(\cdot), i, \psi)$  est une monade

involutive désignée par  $U_a$  ou par  $exp_a$ , et dite *m.i. de type exponentiel*.

PROPOSITION III.2.7. *Sur la catégorie  $\mathfrak{M}^0$  toute monade involutive est isomorphe (dans  $MI(\mathfrak{M}^0)$ ) à une monade involutive de type exponentiel.*

DEMONSTRATION. Soit  $U=(F, i, \psi) \simeq (\bar{P}, I)$  une monade involutive sur  $\mathfrak{M}^0$ . On pose  $F(1)=A$ .

Pour tout ensemble  $X$  l'involution  $I$  détermine une bijection  $I_X : A^X = F(1)^X = Hom_{\mathfrak{M}^0}(X, F(1)) \rightarrow Hom_{\mathfrak{M}^0}(1, F(X)) = F(X)^1 \simeq FX$  qui à  $r : X \rightarrow F(1)$  associe  $I(\bar{r}) : 1 \rightarrow F(X)$ .

On désigne par  $t_X : X \rightarrow F^2(X)$  le composé  $\psi_X \circ i_X$ , et on note  $t_{A_X} : X \rightarrow A^{(A^X)}$  le morphisme d'évaluation qui en  $x$  vaut  $t_{A_X}(x) : A^X \rightarrow A : p \mapsto p(x)$ . On pose, pour tout  $X$ ,

$$\hat{i}_X = I_X^{-1} \circ i_X \quad \text{et} \quad \hat{\psi}_X = A^{I_X} \circ I_{F(X)}^{-1} \circ \psi_X \circ I_X.$$

Alors  $(I_X^{-1})_{X \in \mathfrak{M}^0}$  détermine un isomorphisme de  $U$  vers la monade  $(exp_A, i, \psi)$ . Pour voir cela il suffit de montrer les points suivants:

1° Pour tout  $f : X \rightarrow Y$  on a

$$F(f) \circ I_Y = I_X \circ A^f.$$

2° Pour tout  $X$  on a

$$t_X = I_{F(X)} \circ A^{I_X^{-1}} \circ t_{A_X}.$$

Pour le premier point, soit  $g : Y \rightarrow A$  et  $I_Y(g) : 1 \rightarrow F(Y)$ ; alors

$$F(f)(I_Y(g)) \simeq F(f) \circ g;$$

et par ailleurs

$$\begin{aligned} A^f(g) &= g \circ f = \overline{\bar{g} \circ (i_Y \circ f)}, \\ I_X(A^f(g)) &= \overline{I(\bar{g} \circ (i_Y \circ f))} \\ &= \overline{I(i_Y \circ f) \circ I(\bar{g})} \\ &= \overline{F(f) \circ i_Y \circ I_Y(g)} \\ &= \overline{F(f) \circ g}. \end{aligned}$$

Pour le deuxième point, pour  $1 \xrightarrow{x} X$  on calcule

$$t_X \circ x = \overline{t_X \circ (i_X \circ x)}$$

et donc

$$\begin{aligned} I(\overline{t_X \circ x}) &= I(\overline{i_X \circ x}) \circ I(\overline{t_X}) \\ &= (\overline{F(x)} \circ \overline{i_X}) \circ \overline{P(X)} \\ &= \overline{F(x)}, \end{aligned}$$

de sorte que pour conclure il faut comparer  $F(x)$  et  $t_{A_X} \circ x \circ I_X^{-1}$ . Or d'après le premier point on a

$$F(x) = I_1 \circ A^x \circ I_X^{-1},$$

et il reste à vérifier  $I_1 \circ A^x = t_{A_X}(x)$ , ce qui est bien vrai.

### III.3. Monades involutives dans un topos élémentaire.

Rappelons (voir [37] et [38]) qu'un topos élémentaire est une catégorie  $H'$  satisfaisant à :

- 1°  $H'$  est à limites projectives finies.
- 2°  $H'$  possède un monomorphisme universel noté  $1 \xrightarrow{\text{vrai}} \Omega$ .
- 3° Pour tout  $x \in H'_0$  l'objet  $\Omega$  possède une  $x \times (-)$ -structure colibre  $\Omega^x$  naturalisée par  $ev_x : \Omega^x \times x \rightarrow \Omega$ .

Cela peut encore se dire sous la forme indiquée en I.4.1.b, ou sous la forme (cf. [1] § IV.1 p.28 ou [2, e]) :  $H'$  est une catégorie à objet final, à produits fibrés, avec  $m$ -égalité et  $m$ -appartenance, où  $m$  est un monomorphisme tel que  $H^*(m)$  soit l'ensemble de tous les monomorphismes de  $H'$ .

On sait qu'alors  $H'$  est à limites inductives finies (J. MIKKELSEN) et est cartésienne fermée (A. KOCK).

On sait aussi (puisque, grâce à 2, pour tout  $x$  l'ensemble des morphismes de  $x$  vers  $\Omega$  est en bijection avec l'ensemble  $Sub(x)$  des sous-objets de  $x$  (au sens du § 0.0 de [1] par exemple)) que  $\Omega$  est un objet ordonné interne à  $H'$  (qui est même une algèbre de Heyting interne à  $H'$ ).

Enfin pour toute catégorie  $C' \in \mathcal{F}_0$  la catégorie  $\mathfrak{M}^{\circ} C'^{*} = \hat{C}'$  des préfaisceaux d'ensembles sur  $C'$  est un topos élémentaire, et cela de manière que la donnée d'une topologie de Grothendieck sur  $C'$  coïncide

exactement avec la donnée d'une «topologie» sur le topos  $\hat{C}$  au sens suivant :

DEFINITION III.3.1 (voir [38]). Soit  $H'$  un topos élémentaire. On appelle *topologie* sur  $H'$  la donnée d'un morphisme  $j: \Omega \rightarrow \Omega$  dans  $H'$  tel que

- a)  $j \cdot \text{vrai} = \text{vrai}$ ,
- b)  $j \cdot j = j$ ,
- c)  $j$  préserve l'ordre sur  $\Omega$ .

Si  $j$  est une topologie sur  $H'$ , on note  $J$  l'objet  $j^*(\text{vrai})$ , et on appelle monomorphisme *j-dense* tout monomorphisme  $m: x' \rightarrow x$  dont le morphisme caractéristique  $\chi_m: x \rightarrow \Omega$  (cf. 2) se factorise à travers  $J$ . Un objet  $y \in H'_0$  est appelé *j-faisceau* si, pour tout monomorphisme *j-dense*  $m: x' \rightarrow x$  et tout  $b: x' \rightarrow y$  dans  $H'$ , il existe un et un seul  $f: x \rightarrow y$  tel que  $f \cdot m = b$ . On désigne par  $H_j$  la sous-catégorie pleine de  $H'$  ayant pour objets les *j-faisceaux*. On peut alors démontrer que  $H_j$  est un topos élémentaire et que l'inclusion  $i: H_j \rightarrow H'$  admet un adjoint à gauche exact à gauche  $a: H' \rightarrow H_j$  (si  $x \in H'_0$ ,  $a(x)$  est nommé *j-faisceau associé à x*). Si l'on désigne par  $\Omega_j$  le noyau dans  $H'$  de  $j$  et  $Id_{\Omega}$ , on montre que  $\Omega_j$  est un *j-faisceau*, que  $\text{vrai}$  factorise à travers  $\Omega_j$  (hypothèse a) et que  $\text{vrai}: 1 \rightarrow \Omega_j$  est le monomorphisme universel de  $H_j$ .

Ces rappels étant faits, on peut énoncer :

PROPOSITION III.3.1. Toute topologie  $j$  sur un topos élémentaire  $H'$  détermine une monade involutive  $(\text{exp}_{\Omega_j}(-), i, \psi)$  sur  $H'$  de type exponentiel (III.2.2).

PREUVE. Puisque  $H_j$  est un topos élémentaire, on a, sur  $H_j$ , une monade involutive canonique  $U_{\Omega_j}$  (cf. I.4.1, b). Alors (Lemme III.1.2, a) on peut considérer l'image de  $U_{\Omega_j}$  par l'adjonction  $(i, a, \varepsilon, \eta)$  et c'est la m.i. cherchée. En effet, il suffit de vérifier que, avec les notations de III.1.2,  $\text{gexp}_{\Omega_j}(-) = \text{exp}_{\Omega_j}(-)$ , c'est-à-dire que pour tout  $x \in H'_0$  on a  $\Omega_j^{a(x)} \simeq \Omega_j^x$ , ce qui résulte du lemme de Yoneda et du fait que  $\Omega_j^y$  pour tout  $y \in H'_0$  est un *j-faisceau*.

REMARQUE. Puisque  $\Omega_j$  est le noyau de  $Id_\Omega$  et de l'idempotent  $j$ , on a, en notant  $u: \Omega_j \rightarrow \Omega$  le morphisme canonique, un unique  $p: \Omega \rightarrow \Omega_j$  tel que  $u \cdot p = j$ . Alors les données  $F, i, \psi$  de la structure de  $\Omega_j^{(-)}$  se déduisent de celles de  $\Omega^{(-)}$  en faisant suivre celles-ci chaque fois que nécessaire par l'opération de fermeture déterminée par  $p$ . (Remarque dans [38, b]; voir aussi les formules des monades virtuelles en [2, j].)

PROPOSITION III.3.2. *Tout objet  $a$  d'un topos élémentaire  $H'$  détermine une monade involutive  $(\exp_{\Omega^a}(\cdot), i, \psi)$  sur  $H'$  de type exponentiel.*

PREUVE.  $H'$  étant à produits finis et produits fibrés, pour tout  $a \in H'_0$  on a sur  $Sp'(H')^V$  une m.i.  $(a \times (\cdot), i, \psi)$  (voir I.4.3 b), dont on peut prendre l'image par l'adjonction  $g = (P, \Gamma, \varepsilon, \eta)$  (I.4.1 a et b) (qui existe bien puisque  $H'$  est un topos). Il est clair que

$$g(a \times (\cdot)) \simeq (\Omega^a)^{(\cdot)}.$$

COROLLAIRE III.3.3. *Soit  $H'$  un topos élémentaire et  $b$  un objet de  $H'$ . Pour qu'il existe une monade involutive de type exponentiel de la forme  $(\exp_b(\cdot), i, \psi)$  sur  $H'$ , il suffit qu'il existe une topologie  $j$  sur  $H'$  et un objet  $a$  de  $H'$  tels que*

$$b \simeq \Omega_j^a.$$

Ceci se déduit de III.3.1, III.3.2 et de la compatibilité du foncteur  $j$ -faisceau associé avec les produits.

### APPENDICE III: LES MONADES $\mathcal{U}_\mathcal{O}$ ET LES CRIBLAGES.

Actuellement deux outils fondamentaux de la théorie des catégories sont le foncteur de Yoneda et l'extension de Kan; on aimerait les retrouver dans une monade sur la catégorie  $\mathcal{F}^0$  des foncteurs respectivement comme l'unité et l'endofoncteur. Ces outils apparaissent précisément dans la définition du foncteur « $\hat{\cdot}$ » (Appendice I, 1.b), mais ce foncteur n'est pas à valeurs dans  $\mathcal{F}$ . Si l'on cherche à «approcher»  $\hat{\cdot}$  par une monade sur  $\mathcal{F}^0$ , une première possibilité est d'introduire le

foncteur  $Ind$  (Appendice I,1,c). Une deuxième manière, qui donne en particulier  $2^{(-)*}$ , est la suivante, basée sur l'usage des sup-monoïdes abéliens (III.2.1). On notera qu'un s.m.a. peut aussi être vu comme une catégorie complète (i.e. un ordre complet) équipée d'une structure monoïdale symétrique.

Soit  $\mathcal{U}$  un univers et  $Or^o$  la catégorie des applications croissantes entre ensembles ordonnés  $(\underline{X}, <) = X$  où  $X \in \mathcal{U}$ . Si  $X$  est un ensemble ordonné, on note  $X^*$  l'ensemble ordonné dual et ainsi  $(-)^*$  est un foncteur de  $Or^o$  vers  $Or^o$  de carré l'identité. On reste cohérent avec les notations de III.2.1 en notant  $X^Y$  l'exponentiation dans  $Or^o$  (qui est cartésienne fermée).

Soit  $\mathcal{O} = (\underline{\mathcal{O}}, Sup, <, \otimes)$  un s.m.a. dont la loi de monoïde est notée  $\otimes$ .

Pour tout ordre  $(\underline{X}, <) = X$  on définit une application croissante  $\gamma_{\mathcal{O}_X} : X \rightarrow \mathcal{O}^{X^*}$  par

$$(1) \quad \gamma_{\mathcal{O}_X}(x)(x') = \begin{cases} e & \text{si } x' < x \\ 0 & \text{si } x' \not< x, \end{cases}$$

et on définit une application croissante  $V_{\mathcal{O}_X} : \mathcal{O}^{(\mathcal{O}^{X^*})^*} \rightarrow \mathcal{O}^{X^*}$  en posant, pour  $x \in X$  et  $Q : \mathcal{O}^{X^*} \rightarrow \mathcal{O}$ ,

$$(2) \quad V_{\mathcal{O}_X}(Q)(x) = Sup_q \{ Q(q) \otimes q(x) \}.$$

Pour une application croissante  $f : X \rightarrow Y = (\underline{Y}, <)$  on définit l'application croissante  $P_{\mathcal{O}}(f) : \mathcal{O}^{X^*} \rightarrow \mathcal{O}^{Y^*}$  par

$$(3) \quad P_{\mathcal{O}}(f)(p)(y) = Sup_x \{ p(x) \mid f(x) > y \}.$$

On note  $\mathcal{C}_{\mathcal{O}}$  la catégorie des  $\mathcal{O}$ -criblages dont les objets sont les ensembles ordonnés, où un morphisme de  $X$  vers  $Y$  est une application croissante  $R$  de  $X \times Y^*$  vers  $\mathcal{O}$ , et où la composition de  $R$  avec  $S : Y \times Z^* \rightarrow \mathcal{O}$  se fait suivant la formule

$$(S \otimes R)(x, z) = Sup_y \{ R(x, y) \otimes S(y, z) \}.$$

PROPOSITION. Le triplet  $(P_{\mathcal{O}}, \gamma_{\mathcal{O}}, V_{\mathcal{O}})$  est une monade sur  $Or^o$ , que l'on désignera par  $\mathcal{U}_{\mathcal{O}}$ , et dont la catégorie de Kleisli est isomorphe à

la catégorie  $\mathbf{C}_\mathcal{O}$  des  $\mathcal{O}$ -criblages.

On notera que cette monade n'est pas involutive au sens strict de I.1.2, mais que l'on a néanmoins sur  $Kl(\mathcal{U}_\mathcal{O})^\circ = \mathbf{C}_\mathcal{O}$  une involution relative à  $(-)^*$ , c'est-à-dire un foncteur  $I: \mathbf{C}_\mathcal{O} \rightarrow \mathbf{C}_\mathcal{O}^*$  tel que  $I^* \circ I = Id_{\mathbf{C}_\mathcal{O}}$  et tel que, pour tout objet  $X$  de  $\mathbf{C}_\mathcal{O}$ , on ait  $I(X) = X^*$  (suivant par exemple les principes généraux de [39] la théorie des m.i. ainsi relativisée pourrait servir de base pour décrire les différents types de dualités pour les structures algébriques monadiques).

On notera aussi que, si  $\mathcal{O} = 2$ , la catégorie des algèbres (cf. avant I.2.3) de la monade  $\mathcal{U}_2$  sur  $Or^\circ$  est isomorphe à la catégorie des algèbres de  $\overline{\mathbb{F}}_2$  sur  $\mathbb{M}^\circ$ : c'est la catégorie des applications sup-compatibles entre ensembles ordonnés complets.

Si  $B = (\underline{B}, <) \in Or$ , le foncteur  $b^B$  de  $Or^\circ$  vers  $\mathbb{M}^\circ$  qui à tout  $X$  associe  $\underline{X}^B$  admet pour adjoint le foncteur  $b'^B$  qui à  $X$  associe  $\sum_X B$ , et si l'on note  $g_B$  l'adjonction  $(b^B, b'^B, \varepsilon, \eta)$ , on obtient sur  $\mathbb{M}^\circ$  la monade image  $g_B \mathcal{U}_\mathcal{O}$ .

Pour terminer, en notant  $i: Or^\circ \rightarrow \mathcal{F}^\circ$  l'insertion canonique et  $i'$  son adjoint, l'image de  $\mathcal{U}_\mathcal{O}$  par l'adjonction  $(i, i', \varepsilon, \eta)$  est une monade, involutive relativement à  $(-)^*$ , sur  $\mathcal{F}^\circ$ .

## REFERENCES.

- [1] R. GUITART, Foncteurs sous-objets et relations continues, *Cahiers Topo. Géo. Diff.*, XIII-1 (1972), p. 57.
- [2] R. GUITART, *C.R.A.S. de Paris*: a) t. 270 (1970), p. 1388; b) t. 270 (1970), p. 1572; c) t. 271 (1970), p. 635; d) t. 272 (1971), p. 1175; e) t. 273 (1971), p. 558; f) t. 275 (1972), p. 259; g) t. 277 (1973), p. 83; h) t. 277 (1973), p. 935; i) t. 279 (1974), p. 491; j) t. 279 (1974), p. 541.
- [3] A. WIWEGER, *Concrete categories, duality, embeddings and quotients*, Inst. of math. Pol. Ac. of Sciences, Preprint n° 47, July 1972.
- [4] M. et M.F. COSTE, J. PARENT, Algèbres de Heyting dans les topos, *Séminaire Bénabou 1973-74*, Paris.
- [5] J. LEVY-BRUHL, *Introduction aux structures algébriques*, Dunod, Paris 1968.
- [6] A. BURRONI, T-catégories, *Cahiers Topo. Géo. Diff.*, XIII-3 (1971), p. 215.
- [7] J. BECK, Distributive laws, *Lecture Notes* n° 80, Springer (1969), p. 119.
- [8] E. BURRONI, Algèbres non déterministiques et D-catégories, *Cahiers Topo. Géo. Diff.* XIV-4 (1973), p. 417.
- [9] L. COPPEY, *Catégories avec décompositions*, 1975 (à paraître).
- [10] J. GRAY, Compte-rendu du Midwest Category Seminar à Zürich en 1970, *Lecture Notes* n° 195, Springer (1971).
- [11] J. PENON, Quasi-topos, Colloque d'Amiens 1973, *Cahiers Topo. Géo. Diff.*, XIV-2 (1973), p. 50.
- [12] J. LAMBEK, *From type to sets*, preliminary version, 1974.
- [13] J. RIGUET, *C.R.A.S. de Paris*, t. 236 (1953), p. 2369.
- [14] J. MESSEGUER and I. SOLS, On a categorical tensor calculus for automata, mult. Sept. 1973, to appear in *Bull. Acad. Pol. Sci.*
- [15] L. COPPEY, Décomposition de structures en produits, *Esquisses math.* n° 14, Paris 1971.
- [16] D. PUPPE, H.B. BRINKMAN, Kategorien und Funktoren, *Lecture Notes* n° 18, Springer (1966).
- [17] C. EHRESMANN, *Catégories et structures*, Dunod, Paris, 1965.
- [18] E. ENGELER, Categories of Mapping Filters, *Proc. Conf. on categorical algebra*, La Jolla 1965, Springer (1966), p. 247.

- [19] R. GUITART, Remarques sur les machines et les structures. *Cahiers Topo. Géo. Diff.*, XV-2 (1974), p. 113-144.
- [20] G. JACOB, Thèse d'Etat, Paris VII, 1975, chap. XIV.
- [21] Y. DIERS, *J-adjonctions et J-monades*, mult. Université de Lille, 1970.
- [22] J. BENABOU, *Les distributeurs*, Inst. de math. pure et appl., Univ. cath. de Louvain, rapport 33 (1973).
- [23] P. DELIGNE, in *Lecture Notes* n°20, appendix p.404, Springer (1966).
- [24] S.G.A. 4, exposé 1, *Lecture Notes* n° 269, Springer (1972).
- [25] J.R. ISBELL, Adequate subcategories, *Ill. J. math.* 4 (1960).
- [26] J. LAMBEK, Completion of categories, *Lecture Notes* n°24, Springer. (1966).
- [27] E. MICHAEL, Topology on spaces of subsets, *T.A.M.S.* 71 (1951), p. 152.
- [28] O. FRINK, Topology in lattices, *T.A.M.S.* 51 (1942), p. 569.
- [29] H. KOWALSKY, Limesräume und Kompletierung, *Math. Nach.* 12 (1954), p.301.
- [30] P. ANTOINE, Notion de compacité et de quasi-topologie, *Cahiers Topo. Géo. Diff.* XIV-3 (1973), p. 291.
- [31] A. MACHADO, Espaces d'Antoine et pseudo-topologies, *Cahiers Topo. Géo. Diff.* XIV-3 (1973), p. 309.
- [32] G. BOURDAUD, *Espaces d'Antoine et semi-espaces d'Antoine*, mult. Université Paris VII, 1974, à paraître.
- [33] C. EHRESMANN, Cours donné à Paris VII durant le 1<sup>er</sup> semestre 1974-75.
- [34] J. SCHMIDT, Beiträge zur filter theorie II, *Math. Nach.* 10 (1953).
- [35] R. GUITART, Relations - Fermetures - Continuité, *Esquisses math.* n°1, Paris 1970.
- [36] J. BENABOU, *Catégories et logiques faibles*, conférence à Oberwolfach (1973).
- [37] F.W. LAWVERE, Introduction, *Lecture Notes* n°274, Springer (1972).
- [38] M. TIERNEY, a) Axiomatic sheaf theory: Some constructions and applications, *C.I.M.E.* Vol. 1971(3), Cremonese, Roma 1973. b) Cours donné à Paris VII durant le 1<sup>er</sup> semestre 1974-75.
- [39] C. LAIR, Dualité pour les structures algébriques esquissées, Colloque d'Amiens 1973, *Cahiers Topo. Géo. Diff.*, XIV-2 (1973) et XV-4 (1974).
- [40] A. KOCK, On double dualization monads, *Math. Scand.* 27 (1970), p.151.
- [41] J. LAMBEK, Cours donné à Paris VII durant le 2<sup>ème</sup> semestre 1973-74.  
J. LAMBEK, B. RATTRAY, Localization at injectives in complete categories, *Proc. A.M.S.* 41 (1973), p. 1-9.

- [42] J. P. BARTHELEMY, Sur la réfutabilité, *Cahiers Topo. Géo. Diff.* XV-1 (1974), p. 21.
- [43] R. GUITART, a) *Equational translation of set theoretical notions*, Conférence à Oberwolfach (1974). b) *Categorias cantorianas*, Conférence à Rio multigraphiée, Rio de Janeiro (Février 1974).
- [44] M.-L. DUBREIL-JACOTIN, L. LESIEUR et R. CROISOT, *Leçons sur la théorie des treillis, des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques*, Cahiers Scientifiques XXI, Gauthier-Villars, 1953.
- [45] Seminar on triples and categorical homology theory, *Lecture Notes* 80, Springer (1969).
- [46] H. KLEISLI, Every standard construction is induced by a pair of adjoint functors, *Proc. Nat. Acad. Sci.* 16 (1965).

U. E. R. de Mathématiques  
Université Paris 7, Tour 45  
2 Place Jussieu  
75005 PARIS

•