CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

PAUL VER EECKE

# Sur le calcul différentiel dans les espaces vectoriels topologiques

*Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques*, tome 15, nº 3 (1974), p. 293-339

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1974__15_3_293_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

Vol. XV-3

# SUR LE CALCUL DIFFERENTIEL DANS LES ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES

*par Paul VER EECKE*

Depuis une dizaine d'années, on essaie d'étendre le Calcul Différentiel des espaces normables à ceux qui ne le sont pas, au moyen de procédés qui ressortissent à autant de présupposés sur la structure la mieux adaptée à ce projet, que ce soit celle d'espace vectoriel pseudo-topologique [6], quasi-topologique [2, 5 ,6], bornologique [4], quasi-bornologique [3] ou tout simplement la structure d'espace vectoriel topologique au sens commun [1]. Ce dernier point de vue est partagé par l'auteur. Pour une application $f: A \rightarrow F$, où $E$, $F$ sont des espaces vectoriels topologiques séparés et $A$ un ouvert de $E$, étant donné un recouvrement $\mathcal{S}$ de $E$, on propose une notion de $\mathcal{S}$-dérivabilité en un point $x_0$ de $A$, laquelle, dans le cas où $\mathcal{S}$ est l'ensemble des bornés de $E$, n'est autre que la $b$-dérivabilité introduite ailleurs [7] pour les besoins de la Géométrie Différentielle des variétés modelées sur un espace localement convexe. La démonstration des théorèmes généraux de $\mathcal{S}$-dérivabilité à l'ordre supérieur pour une application composée (II.6) ou implicite (III.2) montre d'une part l'inconvénient d'admettre que les ensembles de $\mathcal{S}$ ne soient pas forcément bornés, d'autre part l'intérêt des cas particuliers où $\mathcal{S}$ est un ensemble remarquable de bornés, par exemple celui des compacts de $E$ ($c$-dérivabilité). Cet article est essentiellement consacré à la démonstration des résultats annoncés dans une Note [8]. Mais on n'a pas retenu la définition primitive de la notion d'application de classe $C^n$; celle-ci a été remplacée de telle sorte que, les autres résultats étant saufs, une application $f: A \rightarrow F$, où $A \subset E$, $b$-dérivable en $x_0 \in A$, soit de classe $C^0$ en ce point, c'est-à-dire que l'on ait $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$ quelle que soit la suite $(x_n)$ convergeant vers $x_0$ au sens de Mackey. Mais $f$ est alors continue en $x_0$, si $E$ est localement convexe métrisable; ces espaces semblent donc particulièrement appropriés au Calcul Différentiel dans les espaces vectoriels topologiques.

C'est pour l'auteur un agréable devoir que de remercier Mademoiselle Françoise Berquier qui a relu et récrit le manuscrit.

*Induxi te ad legendum; sincerum mihi*
*Candore noto reddas iudicium peto.*

*Phèdre (Fables, III, prologue)*

# I DERIVEES DU PREMIER ORDRE

## I.1. $\mathcal{S}$-dérivabilité.

Les e.v.t.(espaces vectoriels topologiques) étant supposés réels et séparés dans ce qui suit, on dira qu'une application $f$ définie dans l'ouvert $A$ de l'e.v.t. $E$ à valeurs dans l'e.v.t. $F$ est *directionnellement dérivable en* $x_0 \in A$ si

$$Df(x_0)(h) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t}$$

existe quel que soit $h \in E$.

On dira alors que l'application $Df(x_0): h \to Df(x_0)(h)$ de $E$ dans $F$ est la *dérivée directionnelle de* $f$ *en* $x_0$. Etant donné un recouvrement $\mathcal{S}$ de $E$, un ouvert équilibré $\Omega \subset A - x_0$ de $E$ et une application $u$ de $E$ dans $F$, les propriétés suivantes sont équivalentes:

i) Quels que soient $M \in \mathcal{S}$ et le voisinage $W$ de $0 \in F$, il existe $0 < \alpha \leqslant 1$ tel que $h \in M \cap \Omega$, $0 < |t| < \alpha$ entraînent:

$$\frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t} - u(h) \in W.$$

ii) Quelles que soient la suite $(h_n)$ de $E$ subordonnée à $\mathcal{S}|_\Omega$ (c'est-à-dire telle qu'il existe $M \in \mathcal{S}$ de sorte que $(h_n)$ soit à valeurs dans $M \cap \Omega$ ) et la suite réelle $(t_n)$ de $[-1,1]-\{0\}$ convergeant vers $0$ , on a :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0+t_n h_n)-f(x_0)}{t_n} - u(h_n)=0.$$

On observe que $f$ est alors directionnellement dérivable en $x_0$ et que $Df(x_0)=u$. S'il existe un ouvert équilibré $\Omega \subset A-x_0$ et une application linéaire continue $u$ de $E$ dans $F$ tels que les conditions équivalentes ci-dessus (i) et (ii) soient vérifiées, on dira que $f:A\to F$, où $A\subset E$, est *$\mathfrak{S}$-dérivable en* $x_0$ et que $u$, c'est-à-dire $Df(x_0)$, est la *$\mathfrak{S}$-dérivée de $f$ en* $x_0$ . Lorsqu'il y aura lieu, on précisera que $f$ est $\mathfrak{S}$-dérivable (ou encore que $u$ est la $\mathfrak{S}$-dérivée de $f$) en $x_0$ , relativement à $\Omega$.

On dira que $f:A\to F$, où $A\subset E$, est *$\mathfrak{S}$-dérivable* si $f$ est $\mathfrak{S}$-dérivable en tout $x\in A$; on appellera alors *$\mathfrak{S}$-dérivée* de $f$ l'application $Df: A\to L(E,F)$ qui à $x$ fait correspondre $Df(x)$, où $L(E,F)$ dénote l'e.v.t. des applications linéaires continues de $E$ dans $F$, muni de la topologie de la convergence bornée.

REMARQUE 1. Si $f:A\to F$, où $A\subset E$, est $\mathfrak{S}$-dérivable en $x_0\in A$ (relativement à $\Omega$) et si le recouvrement $\mathfrak{S}'$ de $E$ est plus fin que $\mathfrak{S}$, alors $f$ est aussi $\mathfrak{S}'$-dérivable en $x_0$ (relativement à $\Omega$).

REMARQUE 2. Soit $\mathfrak{S}$ un recouvrement de $E$ borné (c'est-à-dire formé de parties bornées de l'e.v.t. $E$) et homothétiquement stable (ce qui signifie que $M\in\mathfrak{S}$, $0\leqslant r\leqslant 1$, entraînent qu'il existe $N\in\mathfrak{S}$ tel que $rM\subset N$). L'application $f:A\to F$, où $A\subset E$, est alors $\mathfrak{S}$-dérivable en $x_0\in A$ si et seulement s'il existe $u\in L(E,F)$ vérifiant les conditions équivalentes suivantes :

i) Quels que soient $M\in\mathfrak{S}$ et le voisinage $W$ de $0\in F$, il existe $\alpha>0$ tel que $h\in M$, $0<|t|<\alpha$ entraînent $x_0+th\in A$ et

$$\frac{f(x_0+th)-f(x_0)}{t} - u(h)\in W.$$

ii) $$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0+t_n h_n)-f(x_0)}{t_n} - u(h_n)=0,$$

quelles que soient la suite $(h_n)$ subordonnée à $\mathfrak{S}$ (c'est-à-dire qu'il existe $M \in \mathfrak{S}$ tel que $(h_n)$ soit à valeurs dans $M$) et la suite $(t_n)$ de $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} - \{0\}$ convergeant vers $0$.

L'application linéaire continue $u$ est alors la $\mathfrak{S}$-dérivée de $f$ en $x_0$ relativement à tout ouvert équilibré $\Omega \subset A - x_0$.

## I.2. Dérivabilité; $b$-dérivabilité; $c$-dérivabilité; quasi-dérivabilité.

On dira que $f: A \to F$, où $A \subset E$, est *dérivable* (resp. *b-dérivable*, resp. *c-dérivable*, resp. *quasi-dérivable*) en $x_0 \in A$ (chacune de ces propriétés entraînant la suivante en vertu de la remarque 1 de I.1) si $f$ est $\mathfrak{S}$-dérivable en $x_0$, où $\mathfrak{S}$ est l'ensemble de toutes les parties (resp. des bornés, resp. des compacts, resp. des parties réduites à un point) de $E$. On dira alors que $Df(x_0)$ est la dérivée (resp. la $b$-dérivée, resp. la $c$-dérivée, resp. la quasi-dérivée) de $f$ en $x_0$. Compte tenu de la remarque 2 de I.1, on observe :

REMARQUE 1. i) $f: A \to F$, où $A \subset E$, est quasi-dérivable en $x_0 \in A$ si et seulement si $f$ est directionnellement dérivable en $x_0$ et si $Df(x_0): E \to F$ est linéaire et continue.

ii) $f: A \to F$ est $b$-dérivable (resp. $c$-dérivable) en $x_0 \in A$ si et seulement s'il existe $u \in L(E, F)$ vérifiant:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0 + t_n h_n) - f(x_0)}{t_n} - u(h_n) = 0 \tag{1}$$

quelles que soient la suite bornée (resp. relativement compacte) $(h_n)$ et la suite $(t_n)$ de $\mathbf{R}^*$ convergeant vers $0$.

iii) $f: A \to F$ est dérivable en $x_0 \in A$ si et seulement s'il existe un ouvert équilibré $\Omega \subset A - x_0$ tel que l'on ait (1), quelles que soient la suite $(h_n)$ à valeurs dans $\Omega$ et la suite $(t_n)$ de $[-1, 1] - \{0\}$ convergeant vers $0$.

Les définitions ci-dessus concordent avec la définition usuelle dans le cas où $E$ est normable :

REMARQUE 2. Soit $f: A \to F$, où $A \subset E$, comme ci-dessus, $E$ étant supposé normable, et soit $u \in L(E, F)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes en $x_0 \in A$ :

i) $u$ est la dérivée de $f$ en $x_0$.

ii) $u$ est la $b$-dérivée de $f$ en $x_0$.

iii) Il existe une norme $| \ |$ compatible avec la topologie de $E$ telle que

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-u(h)}{|h|} = 0. \tag{1}$$

iv) On a (1) quelle que soit la norme $| \ |$ compatible avec la topologie de $E$.

**I.3. Applications $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$-lipschitziennes.**

Etant donné un ensemble de parties $\mathcal{S}$ (resp. $\mathcal{T}$) de l'e.v.t. $E$ (resp. $F$), on dira que $f: A \to F$, où $A \subset E$, est *$(\mathcal{S}, \mathcal{T})$-lipschitzienne en* $x_0 \in A$ s'il existe un ouvert équilibré $\Omega \subset A - x_0$ de $E$ tel que la suite $\left(\frac{f(x_0+t_n h_n)-f(x_0)}{t_n}\right)$ soit subordonnée à $\mathcal{T}$ quelles que soient la suite $(h_n)$ subordonnée à $\mathcal{S}|_\Omega$ et la suite $(t_n)$ de $[-1, 1] - \{0\}$ convergeant vers $0$. Lorsqu'il y a lieu, on précisera que $f$ est $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$-lipschitzienne en $x_0$ relativement à $\Omega$. En particulier, on dira que $f$ est *lipschitzienne* (resp. *b-lipschitzienne*, resp. *c-lipschitzienne*, resp. *quasi-lipschitzienne*) en $x_0 \in A$ si $f$ est $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$-lipschitzienne en $x_0$, où $\mathcal{S}$ désigne l'ensemble de toutes les parties de $E$ et $\mathcal{T}$ l'ensemble des bornés de $F$ (resp. $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ sont formés des bornés de $E$ et $F$, resp. des compacts de $E$ et $F$, resp. $\mathcal{S}$ est formé des parties de $E$ réduites à un point et $\mathcal{T}$ est l'ensemble des bornés de $F$).

Pour que $f$ soit $b$-lipschitzienne (resp. $c$-lipschitzienne) en $x_0$ il faut et il suffit que la suite $\left(\frac{f(x_0+t_n h_n)-f(x_0)}{t_n}\right)$ soit bornée (resp. relativement compacte) quelles que soient la suite $(h_n)$ bornée (resp. relativement compacte) et la suite $(t_n)$ de $\mathbf{R}^*$ convergeant vers $0$.

Etant donné un ensemble de parties $\mathcal{S}$ (resp. $\mathcal{T}$) de l'e.v.t. $E$ (resp. $F$) on dira que l'application linéaire continue $u: E \to F$ est $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$-

*admissible* s'il existe un ouvert équilibré $\Omega$ de $E$ tel que la suite $(u(h_n))$ soit subordonnée à $\mathcal{T}$ quelle que soit la suite $(h_n)$ subordonnée à $\mathcal{S}|_{\Omega}$. S'il y a lieu, on précisera que $u$ est $(\mathcal{S},\mathcal{T})$-admissible relativement à $\Omega$. Lorsque $\mathcal{T}$ est l'ensemble des bornés de $F$, on dira plus simplement que $u$ est $\mathcal{S}$-*admissible.* On dira enfin que l'ensemble de parties $\mathcal{S}$ de l'e.v.t. $E$ est *séquentiellement stable* si, pour toute suite $(h_n)$ subordonnée à $\mathcal{S}$ et pour toute suite $(x_n)$ de $E$ convergeant vers $0$, la suite $(h_n + x_n)$ est subordonnée à $\mathcal{S}$.

REMARQUE. Soient $f: A \to F$, $A \subset E$, comme ci-dessus, $\mathcal{S}$ un recouvrement de $E$ et $\mathcal{T}$ un ensemble de parties de $F$ séquentiellement stable. Si $f$ est $\mathcal{S}$-dérivable en $x_0 \in A$, alors $f$ est $(\mathcal{S},\mathcal{T})$-lipschitzienne en $x_0$ si et seulement si $Df(x_0)$ est $(\mathcal{S},\mathcal{T})$-admissible.

COROLLAIRE 1. *Soit $\mathcal{S}$ un recouvrement borné de l'e.v.t. $E$. Si $f: A \to F$, où $A \subset E$, est $\mathcal{S}$-dérivable en $x_0 \in A$, alors $f$ est $\mathcal{S}$-lipschitzienne en $x_0$.*

COROLLAIRE 2. *Si $f: A \to F$, où $A \subset E$, est c-dérivable (resp. b-dérivable, resp. dérivable, E ou F étant supposé normable dans ce dernier cas), alors $f$ est c-lipschitzienne (resp. b-lipschitzienne, resp. lipschitzienne) en $x_0$.*

## 1.4. Applications de classe $C^1$.

Etant donné un ensemble de parties $\mathcal{S}$ de l'e.v.t. $E$, on dira qu'une application $f: A \to F$, où $A \subset E$, définie comme ci-dessus, est $\mathcal{S}$-*continue en* $x_0 \in A$ s'il existe un ouvert équilibré $\Omega \subset A - x_0$ tel que l'on ait:

$$\lim_{n \to \infty} f(x_0 + t_n h_n) = f(x_0)$$

quelles que soient la suite $(h_n)$ subordonnée à $\mathcal{S}|_{\Omega}$ et la suite $(t_n)$ de $[-1, 1] - \{0\}$ convergeant vers $0$. S'il y a lieu, on précisera que $f$ est $\mathcal{S}$-continue en $x_0$ relativement à $\Omega$. Dans le cas où $\mathcal{S}$ est l'ensemble de tous les bornés de $E$, on dira que $f$ est *b-continue* ou encore *de classe $C^0$ en $x_0$*. Dans le cas où l'espace $E$ est l.c. (localement convexe) et métrisable, on sait que la $b$-continuité de $f: A \to F$ en $x_0$ équivaut à la continuité en ce point.

On vérifie aisément

REMARQUE. Soient $f:A\to F$, où $A\subset E$, et $g:B\to G$, où $B\subset F$, comme ci-dessus avec $f(A)\subset B$. Etant donné un ensemble de parties $\mathcal{S}$ de $E$, supposons que $f$ soit $\mathcal{S}$-continue en $x_0\in A$. Pour que $g\circ f:A\to G$ soit $\mathcal{S}$-continue en $x_0$, il suffit qu'il existe un ensemble de bornés $\mathcal{T}$ de $F$ tel que $g$ soit $\mathcal{T}$-continue en $f(x_0)$ et que $f$ soit $(\mathcal{S},\mathcal{T})$-lipschitzienne en $x_0$.

Pour que $f:A\to F$ soit $\mathcal{S}$-continue en $x_0\in A$, il suffit que $f$ soit $\mathcal{S}$-lipschitzienne en $x_0$ ; compte tenu des corollaires de I.3, il vient:

PROPOSITION 1. *Soit $\mathcal{S}$ un recouvrement de l'e.v.t. $E$. Si $f:A\to F$, où $A\subset E$, est $\mathcal{S}$-dérivable en $x_0\in A$ et si $Df(x_0)$ est $\mathcal{S}$-admissible, alors $f$ est $\mathcal{S}$-continue en $x_0$.*

COROLLAIRE. *Si $f:A\to F$, où $A\subset E$, est b-dérivable en $x_0\in A$, alors $f$ est b-continue en $x_0$.*

On dira que $f:A\to F$, où $A\subset E$, est *de classe $C^1$ en* $x_0\in A$ s'il existe un voisinage $V\subset A$ de $x_0$ tel que $f|_V$ soit $b$-dérivable et que $Df:V\to L(E,F)$ soit $b$-continue en $x_0$. On dira que $f:A\to F$ est *de classe $C^0$* (resp. *de classe $C^1$*) si cette propriété a lieu en tout point de $A$.

PROPOSITION 2. *Soit $f:A\to F$, où $A\subset E$, comme ci-dessus, $F$ étant l.c., et soit $\mathcal{S}$ un recouvrement borné de $E$. Si $f$ est quasi-dérivable dans $A$ et si $Df:A\to L(E,F)$ est $\mathcal{S}$-continue en $x_0\in A$, alors $f$ est $\mathcal{S}$-dérivable en $x_0$.*

Il s'agit de vérifier :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0+t_n h_n)-f(x_0)}{t_n} - Df(x_0)(h_n)=0$$

quelles que soient la suite $(h_n)$ subordonnée à $\mathcal{S}$ et la suite $(t_n)$ de $\mathbf{R}^*$ convergeant vers $0$. Pour tout voisinage convexe fermé $W$ de $0\in F$, il s'agit donc d'indiquer $n_0$ tel que $n>n_0$ entraîne

$$(1) \qquad f(x_0+t_n h_n)-f(x_0)-Df(x_0)(t_n h_n)\in t_n W.$$

Or il existe par hypothèse $n_0$ tel que $n > r_0$ et $\tau \in [0,1]$ entraînent

$$x_0 + \tau t_n h_n \in A \quad \text{et} \quad (Df(x_0 + \tau t_n h_n) - Df(x_0))(h_n) \in W.$$

En effet, on aurait sinon une suite $(\tau_n)$ de $[0,1]$ et des sous-suites $(t_{k_n})$ et $(h_{k_n})$ de $(t_n)$ et $(h_n)$ telles que

$$(Df(x_0 + \tau_n t_{k_n} h_{k_n}) - Df(x_0)(h_{k_n})) \in W$$

quel que soit $n$. Puisque $\lim\limits_{n\to\infty} \tau_n t_{k_n} = 0$, ceci contredirait l'hypothèse de $\mathfrak{S}$-continuité de $Df$ en $x_0$. Pour tout $n > n_0$ fixé, on a donc :

$$Df(x_0 + \tau t_n h_n) - Df(x_0)(t_n h_n) \in t_n W, \text{ c'est-à-dire}$$

(2) $$g_n'(\tau) \in t_n W \quad \text{quel que soit } \tau \in [0,1],$$

où $g_n : [0,1] \to F$ désigne la fonction de la variable réelle, dérivable par hypothèse, et définie comme suit :

$$g_n(\tau) = f(x_0 + \tau t_n h_n) - \tau Df(x_0)(t_n h_n).$$

En vertu du théorème des accroissements finis [7], la relation (2) entraîne alors : $g_n(1) - g_n(0) \in t_n W$, c'est-à-dire (1).

COROLLAIRE. *Soit $f : A \to F$, où $A \subset E$, une application quasi-dérivable, $F$ étant supposé l.c.*

*i) Pour que $f$ soit b-dérivable en $x_0 \in A$, il suffit que $Df : A \to L(E,F)$ soit b-continue en $x_0$.*

*ii) Pour que $f$ soit de classe $C^1$ dans $A$, il faut et il suffit que $Df$ soit b-continue.*

## I.5. Transitivité.

PROPOSITION. *Soient $f : A \to F$, où $A \subset E$, et $g : B \to G$, où $B \subset F$, comme ci-dessus, avec $f(A) \subset B$. Etant donné un recouvrement $\mathfrak{S}$ de $E$, on suppose que $f$ est $\mathfrak{S}$-dérivable en $x_0 \in A$. Pour que $g \circ f : A \to G$ soit $\mathfrak{S}$-dérivable en $x_0$, il suffit qu'il existe un recouvrement (resp. séquentiellement stable) $\mathfrak{T}$ de $F$ tel que $f$ soit $(\mathfrak{S},\mathfrak{T})$-lipschitzienne en $x_0$ (resp. que $Df(x_0)$ soit $(\mathfrak{S},\mathfrak{T})$-admissible) et tel que $g$ soit $\mathfrak{T}$-dérivable en $f(x_0)$. On a alors $D(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0)) \circ Df(x_0)$.*

Soit $\Omega$ un ouvert équilibré de $F$, relativement auquel $g$ est $\mathfrak{T}$-

dérivable $\iota$ ` $f(x_0)$. Soient aussi d'une part $V$ un voisinage de $0 \in F$ et d'autre part $\Omega_1$ un ouvert équilibré de $E$ relativement auquel $f$ est $\mathfrak{S}$-dérivable et $(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$-lipschitzienne en $x_0$ (on tient compte de la remarque de I.3) tels qu l'on ait :

(1) $$Df(x_0)(\Omega_1) + V \subset W.$$

Il s'agit alors de vérifier :

(2) $$\lim_{n \to \infty} \frac{g(f(x_0 + t_n h_n)) - g(f(x_0))}{t_n} - Dg(f(x_0))(Df(x_0)(h_n)) = 0$$

quelles que soient la suite $(h_n)$ subordonnée à $\mathfrak{S}|_{\Omega_1}$ et la suite $(t_n)$ de $[-1, 1] - \{0\}$ convergeant vers $0$. Or le terme général de la suite (2) est la somme de

(3) $$\frac{g\left(f(x_0) + t_n\left(\frac{f(x_0 + t_n h_n) - f(x_0)}{t_n}\right)\right) - g(f(x_0))}{t_n}$$

$$- Dg(f(x_0))\left(\frac{f(x_0 + t_n h_n) - f(x_0)}{t_n}\right)$$

et de

(4) $$Dg(f(x_0))\left(\frac{f(x_0 + t_n h_n) - f(x_0)}{t_n} - Df(x_0)(h_n)\right).$$

La suite de terme général (4) converge vers $0$ parce que $f$ est $\mathfrak{S}$-dérivable en $x_0$, relativement à $\Omega_1$. On observera d'autre part que (3) converge vers $0$ parce que $g$ est $\mathfrak{T}$-dérivable en $f(x_0)$ relativement à $\Omega$ et qu'il existe $n_0$ tel que la suite $\left(\frac{f(x_0 + t_n h_n) - f(x_0)}{t_n}\right)_{n > n_0}$ soit subordonnée à $\mathfrak{T}|_{\Omega}$. En effet, il existe $n_0$ tel que $n > n_0$ entraîne :

$$\frac{f(x_0 + t_n h_n) - f(x_0)}{t_n} \in Df(x_0)(h_n) + V,$$

d'où $\frac{f(x_0 + t_n h_n) - f(x_0)}{t_n} \in \Omega$, compte tenu de (1).

Mais $\left(\frac{f(x_0+t_n h_n)-f(x_0)}{t_n}\right)_{n>n_0}$ est alors subordonnée à $\mathcal{T}|_{\Omega}$ du fait que $f$ est $(\mathcal{S},\mathcal{T})$-lipschitzienne relativement à $\Omega_1$.

COROLLAIRE 1. *Si $f:A\to F$, où $A\subset E$, et $g:B\to G$, où $f(A)\subset B\subset F$, sont dérivables (resp. b-dérivables, resp. c-dérivables) aux points $x_0\in A$ et $f(x_0)\in B$, alors $g\circ f:A\to G$ est dérivable (resp. b-dérivable, resp. c-dérivable) en $x_0$.*

COROLLAIRE 2. *Si $f:A\to F$, où $A\subset E$, et $g:B\to G$, où $B\subset F$, supposées b-dérivables respectivement dans $A$ et $B\supset f(A)$, sont de classe $C^1$ aux points $x_0\in A$ et $f(x_0)\in B$, alors $g\circ f:A\to G$ est de classe $C^1$ en $x_0$.*

D'après le corollaire précédent, $g\circ f$ est $b$-dérivable en $x_0$, et il s'agit donc de vérifier que

$$D(g\circ f):A\to L(E,G),\ \text{c'est-à-dire}\ \psi\circ(Df,Dg\circ f)$$

est $b$-continue en $x_0$, où $\psi:L(E,F)\times L(F,G)\to L(E,G)$ désigne l'application $(u,v)\to v\circ u$. Puisque $\psi$ est séquentiellement continue, il n'est que d'observer que $Df$ est $b$-continue en $x_0$ par hypothèse et que $Dg\circ f$ est $b$-continue en $x_0$ en vertu de la remarque de I.4; en effet, $Dg$ est $b$-continue en $f(x_0)$ par hypothèse et $f$ est $b$-lipschitzienne en $x_0$ parce que $b$-dérivable en ce point.

### I.6. Applications multilinéaires.

REMARQUE 1. Soit $\mathcal{S}$ un recouvrement de l'e.v.t. $E$, soient $f$ et $g$ des applications définies dans l'ouvert $A$ de $E$ à valeurs dans l'e.v.t. $F$, et soit $u$ une application linéaire continue de $F$ dans l'e.v.t. $G$. On suppose que $f$ et $g$ sont $\mathcal{S}$-dérivables en $x_0\in A$ (relativement à $\Omega$). Alors

i) $f+g:A\to F$ est $\mathcal{S}$-dérivable en $x_0$ (relativement à $\Omega$) et on a: $D(f+g)(x_0)=Df(x_0)+Dg(x_0)$.

ii) $u\circ f:A\to G$ est $\mathcal{S}$-dérivable en $x_0$ (relativement à $\Omega$) et on a

$$D(u\circ f)(x_0)=u\circ Df(x_0).$$

REMARQUE 2. Soit $f$ une application définie dans l'ouvert $A$ de l'e.v.t.

$E$ et à valeurs dans l'e.v.t. produit $F = \prod_{i \in I} F_i$. Soit $\mathfrak{S}$ un recouvrement de $E$, que l'on suppose borné et homothétiquement stable à moins que $I$ ne soit fini. Pour que $f$ soit $\mathfrak{S}$-dérivable en $x_0 \in A$, il faut et il suffit que chaque $pr_i \circ f : A \to F_i$, $i \in I$, soit $\mathfrak{S}$-dérivable en $x_0 \in A$; on a alors :

$$D f(x_0)(h) = (D(pr_i \circ f)(x_0)(h))_{i \in I} \text{ quel que soit } h \in E.$$

PROPOSITION. *Toute application multilinéaire $u$ définie dans l'e.v.t. produit $E = E_1 \times \ldots \times E_p$ à valeurs dans l'e.v.t. $F$, bornée sur les bornés et séparément continue, est de classe $C^1$ et on a :*

$$D u(x)(h) = \sum_{i=1,\ldots,p} u(x_1, \ldots, x_{i-1}, h_i, x_{i+1}, \ldots, x_p)$$

*quels que soient $x, h \in E$.*

On observe d'abord, pour $x \in E$ fixé, que l'application

$$\overline{u}(x) : h \to \sum_{i=1,\ldots,p} u(x_1, \ldots, x_{i-1}, h_i, x_{i+1}, \ldots, x_p)$$

de $E$ dans $F$ est linéaire et continue parce que $u$ est séparément continue. On observe aussi que l'application $x \to \overline{u}(x)$ de $E$ dans $L(E, F)$ est $b$-continue du fait que $u$ est bornée sur les bornés. Il suffit donc, $x \in E$ étant fixé, de vérifier que $\overline{u}(x)$ est la $b$-dérivée de $u$ en $x$. Quelles que soient la suite bornée $(h_n)$ de $E$ et la suite $(t_n)$ de $\mathbf{R}^*$ convergeant vers $0$, il s'agit de montrer :

$$\lim_{n \to \infty} \left( \frac{u(x + t_n h_n) - u(x)}{t_n} - \sum_{i=1,\ldots,p} u(x_1, \ldots, x_{i-1}, h_{ni}, x_{i+1}, \ldots, x_p) \right) = 0,$$

c'est-à-dire, $u$ étant multilinéaire :

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{\sigma \in P_2(\{1,\ldots,p\})} t_n^{k(\sigma)-1} u_\sigma(x; h_n) = 0$$

où $P_2(\{1, \ldots, p\})$ désigne l'ensemble des parties de $\{1, \ldots, p\}$ ayant $k(\sigma) \geqslant 2$ éléments et où on a posé

(1) $u_\sigma(x; y) = u(z_1, \ldots, z_p)$ avec $z_i = x_i$, $z_i = y_i$ selon que $i \notin \sigma$, $i \in \sigma$.

Or (1) résulte de ce que la suite $(u_\sigma(x; h_n))$ est bornée pour chaque $\sigma \in P_2(\{1, \ldots, p\})$ et de ce que $k(\sigma) \geqslant 2$ entraîne $\lim_{n \to \infty} t_n^{k(\sigma)-1} = 0$.

COROLLAIRE 1. *Soient $E, F, G$ des e.v.t.. L'application $(u, v) \to v \circ u$ de $L(E, F) \times L(F, G)$ dans $L(E, G)$ est de classe $C^1$.*

COROLLAIRE 2. *Soit $u : E_1 \times \ldots \times E_p \to F$ une application multilinéaire d'e.v.t., séparément continue et bornée sur les bornés. Soit $f_i$, $i = 1, \ldots, p$, une application définie dans l'ouvert $A$ d'un e.v.t. $E$ à valeurs dans $E_i$. Etant donné un recouvrement $\mathfrak{S}$ de $E$, on suppose, pour chaque $i = 1, \ldots, p$, que $f_i : A \to E_i$ est $\mathfrak{S}$-dérivable en $x_0 \in A$ et que $Df_i(x_0)$ est $\mathfrak{S}$-admissible. Alors $u \circ (f_1, \ldots, f_p) : A \to F$ est $\mathfrak{S}$-dérivable en $x_0$ et on a:*

$$D(u \circ (f_1, \ldots, f_p))(x_0)(h) =$$

$$\sum_{i=1,\ldots,p} u(f_1(x_0), \ldots, f_{i-1}(x_0), Df_i(x_0)(h), f_{i+1}(x_0), \ldots, f_p(x_0)),$$

*quel que soit $h \in E$.*

Ceci résulte de la proposition précédente et de celle de I.5 compte tenu de la remarque 2.

### I.7. Algèbres semi-topologiques.

Dans ce qui suit, on appellera *algèbre semi-topologique* toute algèbre associative réelle $E$, munie d'un élément unité $1$, d'une topologie séparée compatible avec la structure d'espace vectoriel sous-jacente et vérifiant les conditions suivantes quant à la structure multiplicative:

i) L'application bilinéaire $(x, y) \to xy$ de $E \times E$ dans $E$ est séparément continue et bornée sur les bornés.

ii) Quelle que soit la suite $(x_n)$ de $E$ formée d'éléments inversibles et convergeant vers $1$, la suite $(x_n^{-1})$ est bornée.

Il résulte de (i) que $(x_n^{-1})$ est bornée quelle que soit la suite $(x_n)$ de $E$ formée d'éléments inversibles.

PROPOSITION. *Soit $f$ une application définie dans l'ouvert $A$ de l'e.v.t. $E$ à valeurs dans le sous-espace des éléments inversibles d'une algèbre semi-topologique $F$. Etant donné un recouvrement $\mathfrak{S}$ de $E$, on suppose que $f : A \to F$ est $\mathfrak{S}$-dérivable en $x_0 \in A$ et que $Df(x_0)$ est $\mathfrak{S}$-admissible. Alors l'application $f^{-1} : A \to F$ qui à $x$ fait correspondre $f(x)^{-1}$ est $\mathfrak{S}$-dérivable en $x_0$ et on a: $Df^{-1}(x_0)(h) = -f(x_0)^{-1}(Df(x_0)(h))f(x_0)^{-1}$.*

Soit $\Omega$ un ouvert équilibré de $E$ relativement auquel $f$ est $\mathfrak{S}$-dérivable en $x_0$ et $Df(x_0)$, $\mathfrak{S}$-admissible. Puisque l'application

$$h \to -f(x_0)^{-1}(Df(x_0)(h))f(x_0)^{-1}$$

est linéaire et continue, il s'agit de vérifier: (1)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0+t_nh_n)^{-1}-f(x_0)^{-1}}{t_n} + f(x_0)^{-1}(Df(x_0)(h_n))f(x_0)^{-1}=0,$$

quelles que soient la suite $(h_n)$ subordonnée à $\mathfrak{S}_{|\Omega}$ et la suite $(t_n)$ de $[-1,1]-\{0\}$ convergeant vers $0$. Or le terme général de (1) égale:

$$(2)\ \frac{f(x_0+t_nh_n)^{-1}-f(x_0)^{-1}}{t_n} + f(x_0)^{-1}\left(\frac{f(x_0+t_nh_n)-f(x_0)}{t_n}\right)f(x_0)^{-1}$$

$$-f(x_0)^{-1}\left(\frac{f(x_0+t_nh_n)-f(x_0)}{t_n} - Df(x_0)(h_n)\right)f(x_0)^{-1} =$$

$$t_nf(x_0+t_nh_n)^{-1}\left(\frac{f(x_0+t_nh_n)-f(x_0)}{t_n}\right)f(x_0)^{-1}\left(\frac{f(x_0+t_nh_n)-f(x_0)}{t_n}\right)f(x_0)^{-1}$$

$$-f(x_0)^{-1}\left(\frac{f(x_0+t_nh_n)-f(x_0)}{t_n} - Df(x_0)(h_n)\right)f(x_0)^{-1}.$$

On a d'une part:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_0)^{-1}\left(\frac{f(x_0+t_nh_n)-f(x_0)}{t_n} - Df(x_0)(h_n)\right)f(x_0)^{-1}=0$$

en conséquence de la $\mathfrak{S}$-dérivabilité de $f$ en $x_0$. D'autre part, on observera que $\lim_{n\to\infty} t_nz_n=0$, où

$$z_n=f(x_0+t_nh_n)^{-1}\left(\frac{f(x_0+t_nh_n)-f(x_0)}{t_n}\right)f(x_0)^{-1}\left(\frac{f(x_0+t_nh_n)-f(x_0)}{t_n}\right)f(x_0)^{-1},$$

du fait que la suite $(z_n)$ est bornée. En effet, $\left(\frac{f(x_0+t_nh_n)-f(x_0)}{t_n}\right)$ est bornée, puisque $(Df(x_0)(h_n))$ est bornée; ceci entraîne

$$\lim_{n\to\infty} f(x_0+t_nh_n)=f(x_0)$$

et par conséquent que la suite $(f(x_0+t_nh_n)^{-1})$ est bornée aussi.

On dira qu'un e.v.t. $E$ est un *b-espace* si, pour toute suite $(u_n)$ d'homéomorphismes linéaires de $E$ sur lui-même convergeant vers $1_E$, la suite $(u_n^{-1})$ est bornée dans $L(E)$. On observe alors que l'e.v.t. $L(E)$ muni de la multiplication $(u,v)\to v\circ u$ est une algèbre semi-topologique et la proposition précédente entraîne :

COROLLAIRE. *Soient $E, F, G$ des e.v.t. et $f$ une application définie dans l'ouvert $A$ de $E$ à valeurs dans le sous-espace $Is(F,G)$ de $L(F,G)$ formé des homéomorphismes linéaires. Etant donné un recouvrement $\mathfrak{S}$ de $E$ on suppose que $f: A\to L(F,G)$ est $\mathfrak{S}$-dérivable en $x_0\in A$ et que $Df(x_0)$ est $\mathfrak{S}$-admissible. Alors l'application $x\to f(x)^{-1}$ de $A$ dans $L(G,F)$ est $\mathfrak{S}$-dérivable en $x_0$ et on a:*

$$D(x\to f(x)^{-1})(x_0)(h)=-f(x_0)^{-1}\circ(Df(x_0)(h))\circ f(x_0)^{-1}$$

*quel que soit $h\in E$.*

## I.8. Dérivées partielles.

Soit $f$ définie dans l'ouvert $A$ de l'e.v.t. produit $E_1\times\ldots\times E_p$ à valeurs dans l'e.v.t. $F$. Pour $i\in\{1,\ldots,p\}$ fixé, étant donné un recouvrement $\mathfrak{S}$ de $E_i$, on dira que $f$ est *partiellement $\mathfrak{S}$-dérivable* (s'il y a lieu, on précisera : par rapport au $i^{\text{ème}}$ argument ) en $x_0\in A$ si l'application

$$x_i\to f(x_{0\,1},\ldots,x_{0(i-1)},x_i,x_{0(i+1)},\ldots,x_{0\,p})$$

définie dans un voisinage ouvert de $x_{0\,i}\in E_i$, à valeurs dans $F$, admet au point $x_{0\,i}$ une $\mathfrak{S}$-dérivée au sens de (I.1), qu'on désignera alors par $D_if(x_0)$ et qu'on appellera la $\mathfrak{S}$-dérivée *partielle de $f$ en $x_0$* (par rapport au $i^{\text{ème}}$ argument).

REMARQUE. Soit $f: A\to F$, où $A\subset E_1\times\ldots\times E_p$, comme ci-dessus et, pour $i=1,\ldots,p$, soit $\mathfrak{S}_i$ un recouvrement de $E_i$. Si $f$ est $\mathfrak{S}_1\times\ldots\times\mathfrak{S}_p$-dérivable en $x_0\in A$, alors chaque $\mathfrak{S}_i$-dérivée partielle $D_if(x_0)$, $i=1,\ldots,p$, est définie et on a :

$$Df(x_0)(h) = \sum_{i=1,\dots,p} D_i f(x_0)(h_i) \text{ quel que soit } h \in E_1 \times \dots \times E_p .$$

On dira que $f : A \to F$, où $A \subset E_1 \times \dots \times E_p$, est *partiellement dérivable* (resp. *b-dérivable*, resp. *c-dérivable*, resp. *quasi-dérivable*) en $x_0 \in A$ par rapport au $i^{\text{ème}}$ argument si $f$ est partiellement $\mathfrak{S}$-dérivable en $x_0$, où $\mathfrak{S}$ désigne l'ensemble de toutes les parties (resp. des bornés, resp. des compacts, resp. des parties réduites à un point) de $E_i$. On dira alors que $D_i f(x_0)$ est la dérivée (resp. la $b$-dérivée, resp. la $c$-dérivée, resp. la quasi-dérivée) partielle de $f$ en $x_0$ par rapport au $i^{\text{ème}}$ argument.

Il résulte de la remarque ci-dessus que la dérivabilité (resp. la $b$-dérivabilité, resp. la $c$-dérivabilité, resp. la quasi-dérivabilité) de $f : A \to F$ en $x_0 \in A$ entraîne la dérivabilité (resp. la $b$-dérivabilité, resp. la $c$-dérivabilité, resp. la quasi-dérivabilité) partielle de $f$ en $x_0$ par rapport à chaque argument.

Dans ce qui suit, pour $i = 1, \dots, p$, on désigne par $\mathfrak{B}_i$ l'ensemble des bornés du sous-espace de l'e.v.t. produit $E_1 \times \dots \times E_p$ image de $E_1 \times \dots \times E_i$ par l'injection naturelle $E_1 \times \dots \times E_i \to E_1 \times \dots \times E_p$.

PROPOSITION. *Soit $f : A \to F$, où $A \subset E_1 \times \dots \times E_p$, comme ci-dessus, $F$ étant supposé l.c. Pour que $f$ soit b-dérivable en $x_0 \in A$, il suffit que $f$ soit b-dérivable en $x_0$ par rapport au $1^{er}$ argment et que, pour chaque $i = 2, \dots, p$, la quasi-dérivée partielle $D_i f : A \to L(E_i, F)$ soit définie dans $A$ et $\mathfrak{B}_i$-continue en $x_0$.*

On vérifie que l'application linéaire continue

$$h \to \sum_{i=1,\dots,p} D_i f(x_0)(h_i) \text{ de } E_1 \times \dots \times E_p \text{ dans } F$$

est la $b$-dérivée de $f$ en $x_0$. Pour toute suite bornée $(h_n)$ de $E_1 \times \dots \times E_p$ et toute suite $(t_n)$ de $\mathbf{R}^*$ convergeant vers $0$, il s'agit de montrer :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_0 + t_n h_n) - f(x_0)}{t_n} - \sum_{i=1,\dots,p} D_i f(x_0)(h_{ni}) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0+t_n(b_{n1},\dots,b_{ni},0,\dots,0))-f(x_0+t_n(b_{n1},\dots,b_{n(i-1)},0,\dots,0))}{t_n}$$

$$-D_i f(x_0)(b_{ni})=0$$

quel que soit $i=1,\dots,p$ fixé. Pour $i=1$, ceci équivaut à la $b$-dérivabilité partielle de $f$ en $x_0$ par rapport au 1[er] argument. Soit $i>1$ fixé. Pour tout voisinage convexe fermé $W$ de $0\in F$, il s'agit maintenant d'indiquer $n_0$ tel que $n>n_0$ entraîne :

(1) $f(x_0+t_n(b_{n1},\dots,b_{ni},0,\dots,0))-f(x_0+t_n(b_{n1},\dots,b_{n(i-1)},0,\dots,0))$
$-D_i f(x_0)(t_n b_{ni})\in t_n W$.

Or la quasi-dérivée $D_i f$ étant $\mathfrak{B}_i$-continue en $x_0$, on observe, en raisonnant comme dans la proposition 2 du I.4, qu'il existe $n_0$ tel que $n>n_0$, $\tau\in[0,1]$ entraînent

$$x_0+t_n(b_{n1},\dots,b_{n(i-1)},0,\dots,0)+\tau t_n \check{b}_{ni}\in A$$

(où $b_i\to\check{b}_i$ est l'injection naturelle de $E_i$ dans $E_1\times\dots\times E_p$) et

$$(D_i f(x_0+t_n(b_{n1},\dots,b_{n(i-1)},0,\dots,0)+\tau t_n\check{b}_{ni})$$
$$-D_i f(x_0+t_n(b_{n1},\dots,b_{n(i-1)},0,\dots,0)))(t_n b_n)\in t_n W.$$

C'est dire que, pour $n>n_0$ fixé, on a $g'_{ni}(\tau)\in t_n W$ quel que soit $\tau\in[0,1]$, où $g_{ni}:[0,1]\to F$ est la fonction dérivable définie par

$$g_{ni}(\tau)=f(x_0+t_n(b_{n1},\dots,b_{n(i-1)},0,\dots,0)+\tau t_n b_{ni})-\tau D_i f(x_0)(t_n\check{b}_{ni}).$$

Le théorème des accroissements finis entraîne alors $g_{ni}(1)-g_{ni}(0)\in t_n W$, c'est-à-dire (1).

COROLLAIRE. *Pour que $f:A\to F$, où $A\subset E_1\times\dots\times E_p$, soit de classe $C^1$, il faut et il suffit que $f$ soit quasi-dérivable partiellement dans $A$ par rapport à chaque argument et que chaque $D_i f:A\to L(E_i,F)$, $i=1,\dots,p$, soit $b$-continue.*

## II DERIVEES D'ORDRE SUPERIEUR

### II.1. Les espaces $L(E_1,\dots,E_n;F)$.

Etant donnés des e.v.t. $E_1,\dots,E_n$ et $F$, la bijection canonique évidente

$$\mathcal{F}(E_1,\mathcal{F}(E_2,\dots,\mathcal{F}(E_n,F\underbrace{))\dots)}_{n} \to \mathcal{F}(E_1\times\dots\times E_n,F)$$

entre ensembles d'applications induit un homéomorphisme linéaire de l'e.v.t. $L(E_1,L(E_2,\dots,L(E_n,F\underbrace{))\dots)}_{n}$ (muni de la topologie définie par récurrence sur $n$ au moyen de la convergence bornée) sur un sous-espace $L(E_1,\dots,E_n;F)$ de l'e.v.t. $L_b(E_1,\dots,E_n;F)$ formé des applications multilinéaires de $E_1\times\dots\times E_n$ dans $F$ bornées sur les bornés. Si $0<p<n$, on a un homéomorphisme linéaire

$$L(E_1,\dots,E_p;L(E_{p+1},\dots,E_n;F))\to L(E_1,\dots,E_n;F)$$

qui à $u$ fait correspondre $\bar{u}$ défini par :

$$\bar{u}(x_1,\dots,x_n)=u(x_1,\dots,x_p)\ (x_{p+1},\dots x_n).$$

Lorsque les $E_i$ sont tous égaux à un e.v.t. $E$, on écrira $L_n(E;F)$ (resp. $L_{nb}(E;F)$) au lieu de $L(E_1,\dots,E_n;F)$ (resp. $L_b(E_1,\dots,E_n;F)$). On observe que le sous-espace vectoriel $L_h(E_1,\dots,E_n;F)$ (resp. $L_{nh}(E;F)$) de $L_b(E_1,\dots,E_n;F)$ (resp. de $L_{nb}(E,F)$) formé des applications multilinéaires hypocontinues est un sous-espace de l'espace $L(E_1,\dots,E_n;F)$ (resp. $L_n(E;F)$). On observe d'ailleurs que toute $u$ de $L(E_1,\dots,E_n;F)$ est séparément continue et hypocontinue par rapport au premier argument. En outre :

REMARQUE. Soit $k\in\{2,\dots,n\}$ tel que l'e.v.t. $E_k$ soit métrisable ou de Baire. Alors toute $u\in L(E_1,\dots,E_n;F)$ est hypocontinue par rapport au $k^{\text{ième}}$ argument. Compte tenu de l'identification canonique

$$L(E_1,\dots,E_n;F)\sim L(E_1,\dots,E_{k-1};L(E_k,L(E_{k+1},\dots,E_n;F))),$$

cette propriété résulte du lemme suivant d'Analyse Fonctionnelle.

LEMME. Soient $E,F$ des e.v.t., $E$ étant supposé métrisable (resp. de Baire). Pour qu'une partie $H\subset L(E,F)$ soit équicontinue, il faut et il suffit que $H$ soit bornée dans $L_c(E,F)$ (resp. que $H$ soit simplement bornée).

## II.2. $\mathfrak{S}$-dérivées d'ordre supérieur.

Soit $f$ une application définie dans l'ouvert $A$ de l'e.v.t. produit $E=E_1\times\ldots\times E_n$ à valeurs dans l'e.v.t. $F$. Soit $(i_1,\ldots,i_p)$ une suite finie de $\{1,\ldots,n\}$ et, pour $k=1,\ldots,p$, soit $\mathfrak{S}_k$ un recouvrement de $E_k$. On définit par récurrence sur $p$ l'existence et la valeur de la $(\mathfrak{S}_1,\ldots,\mathfrak{S}_p)$-dérivée partielle $D_{i_1\ldots i_p}f(x_0)\in L(E_{i_1},\ldots,E_{i_p};F)$ (s'il y a lieu, on précisera par rapport à l'argument de multi-indice $(i_1,\ldots,i_p)$). Cette notion étant déjà définie (I.8) pour $p=1$, on suppose que tel est le cas jusqu'à l'ordre $p-1>0$; on dira alors que $f:A\to F$ est *partiellement* $(\mathfrak{S}_1,\ldots,\mathfrak{S}_p)$*-dérivable en* $x_0\in A$ s'il existe un voisinage ouvert $V\subset A$ de $x_0$ tel que la $(\mathfrak{S}_2,\ldots,\mathfrak{S}_p)$-dérivée partielle $D_{i_2\ldots i_p}f(x)\in L(E_{i_2},\ldots,E_{i_p};F)$ soit définie quel que soit $x\in V$ et que l'application

$$D_{i_2\ldots i_p}:V\to L(E_{i_2},\ldots,E_{i_p};F)$$

ainsi obtenue soit $\mathfrak{S}_1$-dérivable en $x_0$. On appellera alors $(\mathfrak{S}_1,\ldots,\mathfrak{S}_p)$-dérivée partielle de $f$ en $x_0$ (par rapport à l'argument de multi-indice $(i_1,\ldots,i_p)$ et on désignera par $D_{i_1\ldots i_p}f(x_0)$ l'image de la $\mathfrak{S}_1$-dérivée partielle $D_{i_1}(D_{i_2\ldots i_p}f)(x_0)$ par l'homéomorphisme linéaire naturel

$$L(E_{i_1},L(E_{i_2},\ldots,E_{i_p};F))\sim L(E_{i_1},\ldots,E_{i_p};F);$$

c'est-à-dire :

$$D_{i_1\ldots i_p}f(x_0)(h_1,\ldots,h_p)=(D_{i_1}(D_{i_2\ldots i_p}f)(x_0)(h_1))(h_2,\ldots,h_p)$$

quel que soit $(h_1,\ldots,h_p)\in E_{i_1}\times\ldots\times E_{i_p}$.

Si $\mathfrak{S}_k$, $k=1,\ldots,p$, est l'ensemble de toutes les parties (resp. des parties bornées, resp. des parties compactes, resp. des parties réduites à un point) de $E_{i_k}$, on dira que $f$ est partiellement dérivable (resp. $b$-dérivable, resp. $c$-dérivable, resp. quasi-dérivable) en $x_0$ *par rapport à l'argument de multi-indice* $(i_1,\ldots,i_p)$ et on dira que $D_{i_1\ldots i_p}f(x_0)$ est la dérivée (resp. $b$-dérivée, resp. $c$-dérivée, resp. quasi-dérivée) partielle de $f$ en $x_0$ par rapport à cet argument. Lorsque $n=1$ et que $\mathfrak{S}$ désigne un recouvrement de $E$, on obtient ainsi en particulier la définition de la $\mathfrak{S}$-dérivabilité d'ordre $p$ de $f: A \to F$ en $x_0$ et de ce que l'on appellera la *$\mathfrak{S}$-dérivée* $D^p f(x_0) \in L_p(E;F)$ *d'ordre* $p$ *de* $f$ *en* $x_0$.

Il résulte de la définition générale ci-dessus que $f$ est $p$ fois $\mathfrak{S}$-dérivable en $x_0$ s'il existe un voisinage ouvert $V \subset A$ de $x_0$ tel que la $\mathfrak{S}$-dérivée $D^{p-1} f(x) \in L_{p-1}(E;F)$ d'ordre $p-1$ soit définie en tout $x \in V$ et que l'application $D^{p-1} f: V \to L_{p-1}(E;F)$ soit $\mathfrak{S}$-dérivable en $x_0$. La $\mathfrak{S}$-dérivée $D^p f(x_0)$ d'ordre $p$ de $f$ en $x_0$ est alors l'image de la $\mathfrak{S}$-dérivée $D(D^{p-1} f)(x_0)$ par l'homéomorphisme linéaire canonique

$$L(E, L_{p-1}(E;F)) \sim L_p(E;F).$$

En particulier on dira que $f: A \to F$ est $p$ *fois dérivable* (resp. $b$-dérivable, resp. $c$-dérivable, resp. quasi-dérivable) en $x_0 \in A$ si $f$ est $p$ fois $\mathfrak{S}$-dérivable en ce point, $\mathfrak{S}$ étant l'ensemble de toutes les parties (resp. des parties bornées, resp. compactes, resp. réduites à un point) de $E$; on dira alors que $D^p f(x_0)$ est la dérivée (resp. $b$-dérivée, resp. $c$-dérivée, resp. quasi-derivée) d'ordre $p$ de $f$ en $x_0$. Conformément à I.4, on dira que $f: A \to F$, où $A \subset E$, *est de classe* $C^p$ *en* $x_0 \in A$ s'il existe un voisinage ouvert $V \subset A$ de $x_0$ tel que $f$ soit $p$ fois dérivable en tout $x \in V$ et que $D^p f: V \to L_p(E;F)$ soit $b$-continue en $x_0$. On dira que $f$ *est de classe* $C^p$ si cette propriété a lieu en tout $x \in A$, ce qui revient à dire que $f$ est $p$ fois $b$-dérivable dans $A$ et que $D^p f: A \to L_p(E;F)$ est $b$-continue. On dira enfin que $f$ *est de classe* $C^\infty$ si $f$ est de classe $C^p$ quel que soit $p > 0$.

### II.3. Linéarité; dérivées d'ordre supérieur d'applications multilinéaires.

REMARQUE 1. Soient $f$ et $g$ des applications définies dans l'ouvert $A$ de l'e.v.t. produit $E_1 \times \ldots \times E_n$ à valeurs dans l'e.v.t. $F$, et soient $u: F \to G$ et $v_i: E_i' \to E_i$, $i = 1, \ldots, n$, des applications linéaires continues d'e.v.t.. Etant donnés une suite finie $(i_1, \ldots, i_p)$ de $\{1, \ldots, n\}$ et, pour $k = 1, \ldots, p$, un recouvrement $\mathfrak{S}_k$ de $E_{i_k}$, on suppose que $f$ et $g$ sont $(\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_p)$-dérivables en $x_0 \in A$. Alors

i) $f + g: A \to F$ est $(\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_p)$-dérivable en $x_0$ et on a

$$D_{i_1\dots i_p}(f+g)(x_0)=D_{i_1\dots i_p}f(x_0)+D_{i_1\dots i_p}g(x_0).$$

ii) $u\circ f: A\to G$ est $(\mathfrak{S}_1,\dots,\mathfrak{S}_p)$-dérivable en $x_0$ et on a

$$D_{i_1\dots i_p}(u\circ f)(x_0)=u\circ D_{i_1\dots i_p}f(x_0);$$

iii) $f\circ(v_1,\dots,v_n):(v_1,\dots,v_n)^{-1}(A)\to F$ est $(v_{i_1}^{-1}(\mathfrak{S}_1),\dots,v_{i_p}^{-1}(\mathfrak{S}_p))$-dérivable en tout $x_0'\in(v_1,\dots,v_n)^{-1}(x_0)$ et on a

$$D_{i_1\dots i_p}(f\circ(v_1,\dots,v_n))(x_0')=D_{i_1\dots i_p}f(x_0)\circ(v_{i_1},\dots,v_{i_p}).$$

REMARQUE 2. Soit $f: A\to F$, où $A\subset E_1\times\dots\times E_n$, comme ci-dessus, soit $(i_1,\dots,i_{p+q})$, $p>0$, $q>0$, une suite finie de $\{1,\dots,n\}$ et soit $\mathfrak{S}_k$, $k=1,\dots,p+q$, un recouvrement de $E_{i_k}$. Pour que $f$ soit $(\mathfrak{S}_1,\dots,\mathfrak{S}_{p+q})$-dérivable en $x_0\in A$, il faut et il suffit qu'il existe un voisinage ouvert $V\subset A$ de $x_0$ tel que $f$ soit $(\mathfrak{S}_{p+1},\dots,\mathfrak{S}_{p+q})$-dérivable en tout $x\in V$ et que

$$D_{i_{p+1}\dots i_{p+q}}f: V\to L(E_{i_{p+1}},\dots,E_{i_{p+q}};F)$$

soit $(\mathfrak{S}_1,\dots,\mathfrak{S}_p)$-dérivable en $x_0$. Alors

i) les applications multilinéaires $D_{i_1\dots i_p}(D_{i_{p+1}\dots i_{p+q}}f)(x_0)$ et et $D_{i_1\dots i_{p+q}}f(x_0)$ se correspondent par l'homéomorphisme linéaire canonique

$$L(E_{i_1},\dots,E_{i_p};L(E_{i_{p+1}},\dots,E_{i_{p+q}};F))\sim L(E_{i_1},\dots,E_{i_{p+q}};F).$$

ii) Quel que soit $(h_1,\dots,h_{p+q})\in E_{i_1}\times\dots\times E_{i_{p+q}}$, l'application

$$x\to D_{i_{p+1}\dots i_{p+q}}f(x)(h_{p+1},\dots,h_{p+q}) \text{ de } V \text{ dans } F$$

est $(\mathfrak{S}_1,\dots,\mathfrak{S}_p)$-dérivable en $x_0$ et on a

$$D_{i_1\dots i_p}(x\to D_{i_{p+1}\dots i_{p+q}}f(x)(h_{p+1},\dots,h_{p+q}))(x_0)(h_1,\dots,h_p)=$$
$$D_{i_1\dots i_{p+q}}f(x_0)(h_1,\dots,h_{p+q}).$$

PROPOSITION. *Toute application multilinéaire hypocontinue*

$$u: E_1\times\dots\times E_n\to F$$

*d'e.v.t. est de classe* $C^\infty$ *et* $p>n$ *entraîne* $D^p u=0$.

Il s'agit de démontrer d'abord que $u$ est $p$ fois $h$-dérivable quel que soit l'entier $p$. Ceci est déjà établi d'après I.6 pour $p=1$. Supposons-le vérifié à l'ordre $p-1 \geqslant 1$ et démontrons-le à l'ordre $p$. D'après I.6 $u$ est $b$-dérivable et on a :

$$(1) \qquad Du = \sum_{i=1,\dots,n} \widetilde{pr}_i \circ u_i \circ pr_{\hat{i}},$$

où $u_i$ désigne l'application de $\prod_{\substack{j=1,\dots,n \\ j\neq i}} E_j$ dans $L(E_i, F)$ qui fait correspondre, à $(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n)$, $x_i \to u(x_1,\dots,x_n)$, où $pr_{\hat{i}}$ désigne la projection naturelle de $E_1\times\dots\times E_n$ sur $\prod_{\substack{j=1..n \\ j\neq i}} E_j$ et où $\widetilde{pr}_i$ désigne l'application linéaire continue $v \to v\circ pr_i$ de $L(E_i, F)$ dans $L(E_1\times..\times E_n, F)$. On observe que chaque $u_i$ est $n-1$-linéaire et hypocontinue, donc, en vertu de l'hypothèse de récurrence, $p-1$ fois $b$-dérivable. Il résulte alors de (1), compte tenu de la remarque 1, que la $b$-dérivée $Du$ est $p-1$ fois $b$-dérivable; donc, d'après la remarque 2, $u$ est $p$ fois $b$-dérivable. D'autre part $p>n$, c'est-à-dire $p-1>n-1$, entraîne en vertu de la récurrence $D^{p-1}u_i=0$ quel que soit $i=1,\dots,n$, d'où $D^{p-1}(Du)=0$, c'est-à-dire $D^p u=0$, compte tenu de (1) et de la remarque 1.

COROLLAIRE. *Soient $E, F, G$ des e.v.t., $F$ étant supposé métrisable ou de Baire. L'application $\psi : (u,v) \to v\circ u$ de $L(E,F)\times L(F,G)$ dans $L(E,G)$ est de classe $C^\infty$ et on a $D^3\psi=0$.*

En effet, l'application bilinéaire $\psi$ est hypocontinue en conséquence du lemme de II.1.

## II.4. Dérivées et dérivées partielles.

Dans la remarque suivante, on généralise par récurrence sur $p$ les énoncés correspondants de I.8.

REMARQUE. Soit $f : A \to F$, où $A \subset E_1\times..\times E_n$, comme ci-dessus et, pour $i=1,\dots,n$, soit $\mathfrak{S}_i$ un recouvrement de $E_i$. Si $f$ est $p$ fois $\mathfrak{S}_1\times\dots\times\mathfrak{S}_n$-dérivable en $x_0 \in A$, alors, pour toute suite $(i_1,\dots,i_p)$ de $p$ éléments de $\{1,\dots,n\}$, $f$ est $(\mathfrak{S}_{i_1},\dots,\mathfrak{S}_{i_p})$-dérivable en $x_0$ et on a

$$D^p f(x_0)(h_1,\dots,h_p) = \sum_{\substack{1\leqslant i_k\leqslant n \\ k=1,\dots,p}} D_{i_1\dots i_p} f(x_0)(h_{1i_1},\dots,h_{pi_p}),$$

quels que soient $h_k \in E_1\times..\times E_n$, $k=1,\dots,p$.

PROPOSITION. *Pour que $f: A \to F$, où $A \subset E_1 \times \ldots \times E_n$, définie comme ci-dessus, $F$ étant supposé l.c., soit de classe $C^p$, il faut et il suffit que, pour toute suite $(i_1, \ldots, i_p)$ de $p$ éléments de $\{1, \ldots, n\}$, la quasi-dérivée $D_{i_1 \ldots i_p} f: A \to L(E_{i_1}, \ldots, E_{i_p}; F)$ soit définie et b-continue.*

La condition étant nécessaire d'après la remarque précédente, vérifions qu'elle est suffisante. Or ceci étant déjà établi pour $p = 1$ d'après le corollaire de I.8, supposons-le vérifié à l'ordre $p - 1 > 0$ et démontrons-le à l'ordre $p$. Quel que soit $i = 1, \ldots, n$ fixé, la quasi-dérivée $D_i f: A \to L(E_i, F)$ admet, pour toute suite $(i_1, \ldots, i_{p-1})$ de $p$-$1$ éléments de $\{1, \ldots, n\}$, une quasi-dérivée $b$-continue

$$D_{i_1 \ldots i_{p-1}}(D_i f): A \to L(E_{i_1}, \ldots, E_{i_{p-1}}; L(E_i, F));$$

ceci résulte des hypothèses, compte tenu de la remarque 2 de II.3 et de l'homéomorphisme linéaire naturel

$$L(E_{i_1}, \ldots, E_{i_{p-1}}; L(E_i, F)) \sim L(E_{i_1}, \ldots, E_{i_{p-1}}, E_i; F).$$

L'hypothèse de récurrence entraîne alors que chaque quasi-dérivée $D_i f$, $i = 1, \ldots, n$, est de classe $C^{p-1}$. Il résulte du corollaire de I.8 que $f$ est $b$-dérivable et, compte tenu de la remarque 2 de II.3, il reste à observer que $Df$ est de classe $C^{p-1}$. Or ceci résulte de ce que les $D_i f$, $i = 1, \ldots, n$, sont de classe $C^{p-1}$, compte tenu de la remarque 1 de II.3 et de ce que $Df = \sum_{i=1,\ldots,n} \overline{pr}_i \circ D_i f$, où $\overline{pr}_i : L(E_i, F) \to L(E_1 \times \ldots \times E_n, F)$ est l'application linéaire continue $u \to u \circ pr_i$.

## II.5. Hypocontinuité et symétrie.

PROPOSITION 1. *Soit $f: A \to F$, où $A \subset E_1 \times \ldots \times E_n$, définie comme ci-dessus, une application partiellement quasi-dérivable en $x_0 \in A$, par rapport à l'argument de multi-indice $(i_1, \ldots, i_p)$. Soit $k \in \{2, \ldots, p\}$ tel que $E_{i_k}$ soit métrisable ou de Baire. Alors l'application p-linéaire*

$$D_{i_1 \ldots i_p} f(x_0): E_{i_1} \times \ldots \times E_{i_p} \to F$$

*est hypocontinue par rapport au $k^{\text{ième}}$ argument.*

Ceci résulte de la remarque II.1, compte tenu de ce que chaque

$D_{i_1 \dots i_p} f(x_0) \in L(E_{i_1}, \dots, E_{i_p}; F)$.

Dans ce qui suit, on dira que $f: A \to F$, où $A \subset E$, est *s-dérivable en* $x_0 \in A$ si $f$ est $\mathfrak{S}$-dérivable en ce point, $\mathfrak{S}$ étant l'ensemble des segments compacts

$$[x, y] = \{ tx + (1-t)\, y \,|\, 0 \leqslant t \leqslant 1 \}, \quad x \in E, \quad y \in E,$$

de $E$. On dira qu'un recouvrement de l'e.v.t. $E$ est *segmentiel* s'il est moins fin que celui formé des segments compacts. Etant donnés $f: A \to F$, où $A \subset E$, $x_0 \in A$ et $h, k \in A - x_0$ tels que $h + k \in A - x_0$, on pose

$$\Delta^2 f(x_0)(h, k) = f(x_0 + h + k) - f(x_0 + h) - f(x_0 + k) + f(x_0).$$

On peut alors énoncer :

LEMME. *Soit* $f: A \to F$, *où* $A \subset E$, *une application quasi-dérivable,* $F$ *étant supposé l.c. Si* $Df: A \to L(E, F)$ *est s-dérivable en* $x_0 \in A$, *alors*

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{\Delta^2 f(x_0)(th, tk)}{t^2} = D^2 f(x_0)(h, k),$$

*quels que soient* $h, k \in E$.

Pour tout voisinage convexe fermé symétrique $W$ de $0 \in F$ et toute suite $(t_n)$ de $\mathbf{R}^*$ convergeant vers $0$, il s'agit d'indiquer $n_0$ tel que $n > n_0$ entraîne :

$$(1) \qquad \Delta^2 f(x_0)(t_n h, t_n k) - D^2 f(x_0)(t_n h, t_n k) \in t_n^2 W.$$

Or il existe $n_0$ tel que $n > n_0$, $\tau \in [0, 1]$ entraînent

$$t_n(h + \tau k) \in A - x_0, \quad t_n \tau k \in A - x_0 \quad \text{et}$$

$$(2) \begin{cases} \left(\dfrac{Df(x_0 + t_n \tau k) - Df(x_0)}{t_n} - D(Df)(x_0)(\tau k)\right)(k) \in \dfrac{1}{2} W, \\[2ex] \left(\dfrac{Df(x_0 + t_n(h + \tau k)) - Df(x_0)}{t_n} - D(Df)(x_0)(h + \tau k)\right)(k) \in \dfrac{1}{2} W. \end{cases}$$

En effet, il existerait sinon une suite $(\tau_n)$ de $[0, 1]$ et une sous-suite $(t_{k_n})$ de $(t_n)$ telles que l'on ait

$$\left(\frac{Df(x_0+t_{k_n}(h+\tau_n k))-Df(x_0)}{t_{k_n}}-D(Df)(x_0)(h+\tau_n k)\right)(k)\notin \frac{1}{2}W,$$

pour tout $n$ et ceci contredirait l'hypothèse de $s$-dérivabilité de $Df$ en $x_0$, puisque $(h+\tau_n k)$ est une suite de points du segment $[h, h+k]$. Les relations (2) entraînent alors :

$$(3) \qquad Df(x_0+t_n(h+\tau k))(t_n k)-Df(x_0+t_n\tau k)(t_n k) - D^2f(x_0)(t_n h, t_n k)\in t_n^2 W,$$

quels que soient $n>n_0$ et $\tau\in[0,1]$. Pour tout $n>n_0$ fixé, la fonction de la variable réelle $g_n : [0,1]\to F$ définie par

$$g_n(\tau)=f(x_0+t_n(h+\tau k))-f(x_0+t_n\tau k)-\tau D^2f(x_0)(t_n h, t_n k)$$

est dérivable et on a :

$$g_n'(\tau)=Df(x_0+t_n(h+\tau k))(t_n k)-Df(x_0+t_n\tau k)(t_n k) -D^2f(x_0)(t_n h, t_n k),$$

c'est-à-dire, compte tenu de (3) :

$$g_n'(\tau)\in t_n^2 W \text{ quel que soit } \tau\in[0,1].$$

Le théorème des accroissements finis entraîne alors $g_n(1)-g_n(0)\in t_n^2 W$, c'est-à-dire (1) pour $n>n_0$.

PROPOSITION 2. *Soit $f: A\to F$, où $A\subset E$, définie comme ci-dessus, $F$ étant supposé l.c. Si $f$ est $p$ fois s-dérivable en $x_0\in A$, alors l'application $p$-linéaire $D^p f(x_0): E^p\to F$ est symétrique.*

L'énoncé étant établi pour $p=2$ en conséquence du lemme précédent, on suppose $p>2$. Il suffit de démontrer :

$$D^p f(x_0)(h_1,\dots,h_p)=D^p f(x_0)(h_1,\dots,h_{r-1},h_{r+1},h_r,h_{r+2},\dots,h_p)$$

quels que soient $(h_1,\dots,h_p)\in E$ et $r=1,\dots,p-1$. Tout d'abord, dans le cas particulier où $r=1$, compte tenu de la remarque 2 de II.3 et de ce que l'énoncé est établi pour $p=2$, il vient :

$$\begin{aligned} D^p f(x_0)(h_1,\dots,h_p) &= D^2(x\to D^{p-2}f(x)(h_3,\dots,h_p))(x_0)(h_1,h_2)\\ &= D^2(x\to D^{p-2}f(x)(h_3,\dots,h_p))(x_0)(h_2,h_1)\end{aligned}$$

$$= D^p f(x_0)(h_2, h_1, h_3, \dots, h_p).$$

Dans le cas général, où $1 < r < p$, on obtient, compte tenu de ce qui précède :

$$D^p f(x_0)(h_1, \dots, h_p) = D^{r-1}(x \to D^{p-r+1} f(x)(h_r, \dots, h_p))(x_0)(h_1, \dots, h_{r-1})$$
$$= D^{r-1}(x \to D^{p-r+1} f(x)(h_{r+1}, h_r, h_{r+2}, \dots, h_p))(x_0)(h_1, \dots, h_{r-1})$$
$$= D^p f(x_0)(h_1, \dots, h_{r-1}, h_{r+1}, h_r, h_{r+2}, \dots, h_p).$$

COROLLAIRE 1. *Soit $f : A \to F$ où $A \subset E$ une application $p$ fois s-dérivable en $x_0 \in A$. Si $F$ est l.c., alors $D^p f(x_0) : E^p \to F$ est hypocontinue.*

Ceci résulte de ce que l'application $p$-linéaire symétrique $D^p f(x_0)$ est hypocontinue par rapport au 1^er^ argument.

Compte tenu de la remarque de II.4, on peut énoncer aussi :

COROLLAIRE 2. *Soit $f : A \to F$, où $A \subset E_1 \times \dots \times E_n$ et où $F$ est l.c., une application $p$ fois s-dérivable en $x_0 \in A$. Pour toute suite $(i_1, \dots, i_p)$ de $p$ éléments de $\{1, \dots, n\}$, l'application $p$-linéaire*

$$D_{i_1 \dots i_p} f(x_0) : E_{i_1} \times \dots \times E_{i_p} \to F$$

*est hypocontinue et on a :*

$$D_{i_1 \dots i_p} f(x_0)(h_1, \dots, h_p) = D_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(p)}} f(x_0)(h_{\sigma(1)}, \dots, h_{\sigma(p)})$$

*quels que soient $(h_1, \dots, h_p) \in E_{i_1} \times \dots E_{i_p}$ et la permutation $\sigma$ de $\{1, \dots, p\}$.*

## II.6. Transitivité.

Etant donnés des e.v.t. $E_1, \dots, E_p$, $F$ et un ensemble de parties $\mathfrak{S}$ de $E_1$, on généralise une définition de I.3 en disant que $u$ est $\mathfrak{S}$-*admissible* où $u \in L(E_1, \dots, E_p ; F)$ si l'image $\bar{u}$ de $u$ par l'homéomorphisme linéaire canonique $L(E_1, \dots, E_p ; F) \sim L(E_1, L(E_2, \dots, E_p ; F))$ est $\mathfrak{S}$-admissible au sens de I.3. Etant donnés des entiers $m, n, p > 0$ tels que $m \leqslant n$ et $p \leqslant (n-m)+1$, on désignera par $P_{[m,n]p}$ l'ensemble des suites $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ formées de $p$ sous-suites $\alpha_i = (\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{i|\alpha_i|})$, $i = 1, \dots, p$, de $(m, m+1, \dots, n)$, vérifiant $\alpha_{1|\alpha_1|} < \alpha_{2|\alpha_2|} < \dots < \alpha_{p|\alpha_p|}$, et telles que

$$(\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1|\alpha_1|} ; \alpha_{21}, \dots, \alpha_{p1}, \dots, \alpha_{p|\alpha_p|})$$

soit une permutation de $\{m, m+1, \ldots, n\}$. On écrira $P_{np}$ au lieu de $P_{[1,n]\,p}$.

PROPOSITION. *Soient* $f : A \to F$, *où* $A \subset E$ *et* $g : B \to G$, *où* $B \subset F$, *comme ci-dessus avec* $f(A) \subset B$. *Etant donné un recouvrement* $\mathfrak{S}$ *de* $E$, *on suppose* $f$ $n-1$ *fois* $\mathfrak{S}$*-dérivable dans* $A$ *et* $n$ *fois* $\mathfrak{S}$*-dérivable en* $x_0 \in A$. *Si* $n > 1$, *on suppose que les applications multilinéaires*

$$D^n f(x_0) \in L_n(E;F) \text{ et } D^k f(x) \in L_k(E;F),\ x \in A,\ k = 2, \ldots, n-1,$$

*sont* $\mathfrak{S}$*-admissibles. Pour que* $g \circ f : A \to G$ *soit* $n$ *fois* $\mathfrak{S}$*-dérivable en* $x_0$, *il suffit qu'il existe un recouvrement (resp. séquentiellement stable)* $\mathfrak{T}$ *de* $F$ *vérifiant les conditions suivantes :*

*i)* $f$ *est* $(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$*-lipschitzienne en* $x_0$ *(resp.* $Df(x_0)$ *est* $(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$*-admissible ) et, si* $n > 1$, $f$ *est* $(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$*-lipschitzienne en* $x$ *(resp.* $Df(x)$ *est* $(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$*-admissible) quel que soit* $x \in A$.

*ii)* $g$ *est* $n-1$ *fois* $\mathfrak{T}$*-dérivable dans* $B$ *et* $n$ *fois* $\mathfrak{T}$*-dérivable en* $f(x_0)$.

*iii) Si* $n > 1$, *les applications multilinéaires* $D^n g(f(x_0)) \in L_n(F;G)$ *et* $D^k g(f(x)) \in L_k(F;G)$, $x \in A$, $k = 2, \ldots, n-1$, *sont* $\mathfrak{T}$*-admissibles.*

*iv) Si* $n > 2$, $F$ *est métrisable ou de Baire, à moins que* $G$ *ne soit l.c. et* $\mathfrak{T}$ *segmentiel.*

*Quel que soit* $(h_1, \ldots, h_n) \in E^n$, *on a alors :*

$$(1) \quad D^n(g \circ f)(x_0)(h_1, \ldots, h_p) = \sum_{\substack{(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in P_{np} \\ p = 1, \ldots, n}} D^p g(f(x_0))(D^{|\alpha_1|} f(x_0)(h_{\alpha_{11}}, \ldots, h_{\alpha_{1|\alpha_1|}}), \ldots, D^{|\alpha_p|} f(x_0)(h_{\alpha_{p1}}, \ldots, h_{\alpha_{p|\alpha_p|}})).$$

L'énoncé étant déjà établi en I.5 pour $n = 1$, supposons-le vérifié à l'ordre $n-1 \geqslant 1$ et démontrons-le à l'ordre $n$. L'hypothèse de récurrence entraîne que $g \circ f$ est $n-1$ fois $\mathfrak{S}$-dérivable dans $A$ et que l'on a :

$$(2)\ D^{n-1}(g \circ f) = \sum_{\substack{(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in P_{(n-1)p} \\ p = 1, \ldots, n-1}} \psi_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} \circ (D^p g \circ f, D^{|\alpha_1|} f, \ldots, D^{|\alpha_p|} f),$$

où $\psi_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}$ désigne l'application multilinéaire

de $L_{ph}(F;G) \times L_{|\alpha_1|}(E;F) \times \ldots L_{|\alpha_p|}(E;F)$ dans $L_{n-1}(E;G)$

qui à $(v, u_1, \dots, u_p)$ fait correspondre $v \circ (u_1 \circ \pi_{a_1}, \dots, u_p \circ \pi_{a_p})$; on a désigné par $\pi_{a_i}$ la projection

$$(h_1, \dots, h_n) \to (h_{a_{i1}}, \dots, h_{a_{i|a_i|}}) \text{ de } E^{n-1} \text{ sur } E^{|a_i|}.$$

Dans le second membre de (2), chaque application $D^p g \circ f : A \to L_p(F; G)$ peut en effet, moyennant un abus véniel de notation, être considérée comme prenant ses valeurs dans le sous-espace $L_{ph}(F, G)$, compte tenu de l'hypothèse (iv) et de la proposition 1 ainsi que du corollaire 1 de II.5. Il s'agit maintenant en premier lieu d'observer que

$$D^{n-1}(g \circ f) : A \to L_{n-1}(E; G)$$

est $\mathfrak{S}$-dérivable en $x_0$. Compte tenu de (2), ceci revient à vérifier que chaque $\psi_{a_1 \dots a_p} \circ (D^p g \circ f, D^{|a_1|} f, \dots, D^{|a_p|} f)$ est $\mathfrak{S}$-dérivable en $x_0$. Or l'application multilinéaire $\psi_{a_1 \dots a_p}$ est bornée sur les bornés et séparément continue. D'après le corollaire 2 de I.6, il suffit donc d'observer d'une part que, par hypothèse, les $\mathfrak{S}$-dérivées

$$D(D^{|a_i|} f)(x_0) \in L(E, L_{|a_i|}(E; F)), \quad i = 1, \dots, p,$$

sont définies et $\mathfrak{S}$-admissibles, d'autre part que la $\mathfrak{S}$-dérivée

$$D(D^p g \circ f)(x_0), \text{ définie et égale à } D(D^p g)(f(x_0)) \circ D f(x_0)$$

d'après I.5, est aussi $\mathfrak{S}$-admissible. Or soit $\Omega$ un ouvert équilibré de $F$, relativement auquel $D(D^p g)(f(x_0))$ est $\mathfrak{T}$-admissible. Il existe un voisinage $V$ de $0 \in F$ et un ouvert équilibré $\Omega_1$ de $E$ relativement auquel $f$ est $(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$-lipschitzienne en $x_0$ tels que l'on ait:

$$D f(x_0)(\Omega_1) + V \subset \Omega. \tag{3}$$

On observera alors que $D(D^p g)(f(x_0)) \circ D f(x_0)$ est $\mathfrak{S}$-admissible relativement à $\Omega_1$. Soient en effet $(h_n)$ une suite subordonnée à $\mathfrak{S}|\Omega_1$ et $(t_n)$ une suite de $[-1, 1] - \{0\}$ convergeant vers $0$. Il existe $n_0$ tel que $n > n_0$ entraîne

$$\frac{f(x_0 + t_n h_n) - f(x_0)}{t_n} \in D f(x_0)(h_n) + V;$$

donc, compte tenu de (3), la suite $\left(\frac{f(x_0 + t_n h_n) - f(x_0)}{t_n}\right)_{n > n_0}$ est subordonnée à $\mathcal{T}_{|\Omega}$. On a :

$$D(D^p g)(f(x_0))(Df(x_0)(h_n)) = D(D^p g)(f(x_0))\left(\frac{f(x_0+t_n h_n)-f(x_0)}{t_n}\right)$$

$$- D(D^p g)(f(x_0))\left(\frac{f(x_0+t_n h_n)-f(x_0)}{t_n} - Df(x_0)(h_n)\right).$$

Puisque

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0+t_n h_n)-f(x_0)}{t_n} - Df(x_0)(h_n) = 0$$

et que la suite

$$\left(D(D^p g)(f(x_0))\left(\frac{f(x_0+t_n h_n)-f(x_0)}{t_n}\right)\right)_{n>n_0}$$

est bornée d'après ce qui précède, $D(D^p g)(f(x_0))$ étant $\mathcal{T}$-admissible relativement à $\Omega$, il vient finalement que la suite

$$(D(D^p g)(f(x_0))(Df(x_0)(h_n)))$$

est bornée. Il reste à vérifier (1). Compte tenu de la remarque 2 de II.3 et de l'hypothèse de récurrence, ceci revient à démontrer que le second membre de (1) égale

(4) $$D(x \to \sum_M D^p g(f(x))(D^{|\alpha_1|} f(x) h_{\alpha_1}, \ldots, D^{|\alpha_p|} f(x) h_{\alpha_p}))(x_0)(h_1).$$

On a posé:

$$h_{\alpha_i} = (h_{\alpha_{i1}}, \ldots, h_{\alpha_{i|\alpha_i|}}) \quad \text{et} \quad M = \begin{cases} (\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in P[2,n]\,p \\ p = 1, \ldots, n-1 \end{cases}$$

Or (4) admet pour expression

(5) $$D(\sum_M \phi_p \circ (D^p g \circ f, \overline{h}_{\alpha_1} \circ D^{|\alpha_1|} f, \ldots, \overline{h}_{\alpha_p} \circ D^{|\alpha_p|} f))(x_0)(h_1),$$

$\phi_p : L_p(F;G) \times F^p \to G$ étant l'application $(v, k_1, \ldots, k_p) \to v(k_1, \ldots, k_p)$ et $\overline{h}_{\alpha_i} : L_{|\alpha_i|}(E;F) \to F$ l'application linéaire continue

$$u \to u(h_{\alpha_{i1}}, \ldots h_{\alpha_{i|\alpha_i|}}).$$

On observe que les $\phi_p$ ci-dessus sont multilinéaires, séparément continues et bornées sur les bornés. Il résulte alors du corollaire 2 de I.6 que (5) s'écrit :

$$\sum_M \Big( \phi_p(D(D^p g \circ f)(x_0)(h_1), \overline{h}_{\alpha_1}(D^{|\alpha_1|} f(x_0)), \dots, \overline{h}_{\alpha_p}(D^{|\alpha_p|} f(x_0)))$$

$$+ \sum_{i=1,\dots,p} \phi_p(D^p g(f(x_0)), \overline{h}_{\alpha_1}(D^{|\alpha_1|} f(x_0)), \dots$$

$$\dots, \overline{h}_{\alpha_{i-1}}(D^{|\alpha_{i-1}|} f(x_0)), D(\overline{h}_{\alpha_i} \circ D^{|\alpha_i|} f)(x_0)(h_1),$$

$$\overline{h}_{\alpha_{i+1}}(D^{|\alpha_{i+1}|} f(x_0)), \dots, \overline{h}_{\alpha_p}(D^{|\alpha_p|} f(x_0))) \Big) =$$

$$= \sum_M \Big( (D(D^p g)(f(x_0))(Df(x_0)(h_1)))(D^{|\alpha_1|} f(x_0) h_{\alpha_1}, \dots, D^{|\alpha_p|} f(x_0) h_{\alpha_p})$$

$$+ \sum_{i=1,\dots,p} D^p g(f(x_0))(D^{|\alpha_1|} f(x_0) h_{\alpha_1}, \dots, D^{|\alpha_{i-1}|} f(x_0) h_{\alpha_{i-1}},$$

$$(D(D^{|\alpha_i|} f)(x_0)(h_1)) h_{\alpha_i}, D^{|\alpha_{i+1}|} f(x_0) h_{\alpha_{i+1}}, \dots, D^{|\alpha_p|} f(x_0) h_{\alpha_p}) \Big) =$$

$$= \sum_M \Big( D^{p+1} g(f(x_0))(Df(x_0) h_{\alpha_0^{(0)}}, D^{|\alpha_1^{(0)}|} f(x_0) h_{\alpha_1^{(0)}}, \dots, D^{|\alpha_p^{(0)}|} f(x_0) h_{\alpha_p^{(0)}})$$

$$+ \sum_{i=1,\dots,p} D^p g(f(x_0))(D^{|\alpha_1^{(i)}|} f(x_0) h_{\alpha_1^{(i)}}, \dots, D^{|\alpha_p^{(i)}|} f(x_0) h_{\alpha_p^{(i)}}) \Big).$$

Ceci achève la démonstration, compte tenu de ce que l'on a

$$\bigcup_{p=1,\dots,n} P_{np} = \bigcup_M \{ (\alpha_0^{(0)}, \dots, \alpha_p^{(0)}), (\alpha_1^{(1)}, \dots, \alpha_p^{(1)}), \dots, (\alpha_1^{(p)}, \dots, \alpha_p^{(p)}) \},$$

où on a posé, d'une part,

$$\alpha_0^{(0)} = (1), \quad \alpha_k^{(0)} = \alpha_k \quad \text{pour} \quad k = 1, \dots, p,$$

et, d'autre part, pour $i = 1, \dots, p$ :

$$\alpha_i^{(i)} = (1, \alpha_{i1}, \dots, \alpha_{i|\alpha_i|}) \quad \text{et} \quad \alpha_j^{(i)} = \alpha_j \quad \text{si} \quad j \neq i .$$

COROLLAIRE 1. *Si* $f: A \to F$, *où* $A \subset E$, *est* $n$ *fois dérivable en* $x_0 \in A$ *et si* $g: B \to G$, *où* $B \subset F$, *est* $n$-$1$ *fois dérivable dans* $B \supset f(A)$ *et* $n$ *fois dérivable en* $f(x_0)$, *alors* $g \circ f: A \to G$ *est* $n$ *fois dérivable en* $x_0$ *dans les cas suivants :*

*i)* $n = 1$;

*ii)* $n = 2$ *et* $E$ *est normable;*

*iii)* $n > 2$, $E$ *est normable,* $G$ *est l.c., à moins que* $F$ *ne soit métrisable ou de Baire.*

On a remarqué que les hypothèses (i) et (ii) dans la proposition précédente entraînent, compte tenu de (I.5), que les $\mathfrak{S}$-dérivées

$$D(D^{n-1} g \circ f)(x_0) \text{ et } D(D^k g \circ f)(x),\ x \in A,\ k = 1, \dots, n-2,$$

sont définies. On peut alors dans la proposition précédente, et sans affecter le résultat, remplacer l'hypothèse (iii) par la $\mathfrak{S}$-admissiblité des applications linéaires ci-dessus. Cette hypothèse étant un fait trivial quel que soit $\mathfrak{S}$ lorsque $E$ est normable, il vient que l'énoncé du corollaire résulte de la proposition précédente.

COROLLAIRE 2. *Si* $f: A \to F$, *où* $A \subset E$, *est* $n$ *fois b-dérivable (resp. c-dérivable) en* $x_0 \in A$ *et si* $g: B \to G$, *où* $B \subset F$, *est* $n-1$ *fois b-dérivable (resp. c-dérivable) dans* $B \supset f(A)$ *et* $n$ *fois b-dérivable (resp. c-dérivable) en* $f(x_0)$, *alors* $g \circ f: A \to G$ *est* $n$ *fois b-dérivable (resp. c-dérivable) en* $x_0$, *lorsque* $n \leqslant 2$ *ou que l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :*

*i)* $F$ *est métrisable ou de Baire,*

*ii)* $G$ *est l.c..*

COROLLAIRE 3. *Si* $f: A \to F$, *où* $A \subset E$, *supposée* $n$ *fois b-dérivable dans* $A$, *est de classe* $C^n$ *en* $x_0 \in A$ *et si* $g: B \to G$, *où* $B \subset F$, *supposée* $n$ *fois b-dérivable dans* $B \supset f(A)$ *est de classe* $C^n$ *en* $f(x_0)$, *alors* $g \circ f: A \to G$ *est de classe* $C^n$ *en* $x_0$ *pourvu que* $n \leqslant 2$, *ou que* $F$ *soit métrisable ou de Baire, ou encore que* $G$ *soit l.c..*

Il résulte alors du corollaire précédent que $g \circ f$ est $n$ fois b-dérivable dans $A$ et il s'agit de vérifier que $D^n(g \circ f): A \to L_n(E;G)$ est $b$-

continue en $x_0$. Or, ceci est déjà démontré pour $n=1$, d'après I.5. Dans le cas $n=2$, on a :

$$D^2(g\circ f)=\phi\circ(D^2 g\circ f, Df, Df)+\psi\circ(Dg\circ f, D^2 f),$$

où

$$\phi : L_2(F, G)\times L(E, F)\times L(E, F)\to L_2(E;G)$$

désigne l'application $(v, u_1, u_2)\to v\circ(u_1, u_2)$, et où

$$\psi : L(F, G)\times L_2(E;F)\to L_2(E;G)$$

désigne l'application $(v, u)\to v\circ u$. On observe d'abord que l'application bilinéaire $\psi$ est hypocontinue par rapport au 1[er] argument, donc séquentiellement continue, ce qui entraîne,

$$(Dg\circ f, D^2 f) : A \;\to\; L(F, G)\times L_2(E;F)$$

étant $b$-continue en $x_0$ (en effet, $f$ est $b$-dérivable en $x_0$, donc $b$-lipschitzienne en $x_0$, et $Dg$ est $b$-continue en $x_0$, donc $Dg\circ f$ est $b$-continue en $x_0$), que $\psi\circ(Dg\circ f, D^2 f)$ est $b$-continue en $x_0$. D'autre part pour les raisons suivantes $\phi\circ(D^2 g\circ f, Df, Df)$ est $b$-continue en $x_0$ : d'une part, l'application trilinéaire $\phi$, parce que bornée sur les bornés et continue par rapport au 1[er] argument, vérifie la propriété suivante :

$$\lim_{n\to\infty}\phi(u_0+u_n, v_0+t_n h_n, w_0+t'_n w_n)=\phi(u_0, v_0, w_0)$$

quels que soient

$$(u_0, v_0, w_0)\in L_2(F;G)\times L(E,F)\times L(E, F),$$

les suites bornées $(v_n)$, $(w_n)$ de $L(E, F)$, la suite $(u_n)$ de $L_2(F;G)$ convergeant vers $0$ et enfin les suites réelles $(t_n)$, $(t'_n)$ convergeant vers $0$. Puisque d'autre part $D^2 g\circ f$ est $b$-continue en $x_0$ (du fait que $f$ est $b$-lipschitzienne en $x_0$ et que $D^2 g$ est $b$-continue en $f(x_0)$) et que $Df$ est $b$-lipschitzienne en $x_0$, parce que $b$-dérivable en ce point, il vient que $\phi\circ(D^2 g\circ f, Df, Df)$ est $b$-continue en $x_0$, ce qui achève de montrer que $D^2(g\circ f)$ est $b$-continue en $x_0$. Soit $n>2$ ; avec les notations précèdentes, compte tenu des hypothèses sur $F$ ou $G$, on a :

$$D^n(g\circ f)=\sum_{\substack{(a_1,\dots,a_p)\in P_{np}\\ p=1,\dots,n}}\psi_{a_1\dots a_p}\circ(D^p g\circ f, D^{|a_1|}f,\dots,D^{|a_p|}f)$$

et il s'agit donc pour $(\alpha_1,\dots,\alpha_p)\in P_{np}$, $p=1,\dots,n$ fixés, d'observer que

$$\psi_{\alpha_1\dots\alpha_p}\circ(D^p g\circ f, D^{|\alpha_1|}f,\dots,D^{|\alpha_p|}f): A\to L_n(E;G)$$

est $b$-continue en $x_0$. Or d'une part,

$$\psi_{\alpha_1\dots\alpha_p}: L_{pb}(F;G)\times L_{|\alpha_1|}(E;F)\times\dots\times L_{|\alpha_p|}(E;F)\to L_n(E;G)$$

est hypocontinue par rapport au 1^er^ argument, donc séquentiellement continue. D'autre part $D^p g\circ f$ et les $D^{|\alpha_i|}f$ sont $b$-continues en $x_0$.

COROLLAIRE 4. *Si $f:A\to F$, où $A\subset E$, et $g:B\to G$, où $f(A)\subset B\subset F$, sont de classe $C^n$, alors $g\circ f$ est de classe $C^n$, pourvu que $n<2$, à moins que $F$ soit métrisable ou de Baire, ou encore que $G$ soit l.c. .*

## III FONCTIONS IMPLICITES

### III.1. $\mathcal{S}$-dérivabilité des fonctions implicites.

On vérifie le lemme suivant de la même façon que la remarque 2 de I.1 .

LEMME. Soit $f$ une application définie dans l'ouvert $A\times B$ de l'e.v.t. produit $E\times F$ à valeurs dans l'e.v.t. $G$. Soit $\mathcal{S}$ (resp. $\mathcal{T}$) un recouvrement de $E$ (resp. $F$) homothétiquement stable, $\mathcal{T}$ étant en outre supposé borné. Pour que $f$ soit $\mathcal{S}\times\mathcal{T}$-dérivable en $(x_0,y_0)\in A\times B$, il faut et il suffit qu'il existe un ouvert équilibré $\Omega\subset A-x_0$ de $E$ et $u\in L(E\times F,G)$ tels que l'on ait :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_0+t_nh_n,y_0+t_nk_n)-f(x_0,y_0)}{t_n}-u(h_n,k_n)=0,$$

quelles que soient la suite $(h_n)$ de $E$ (resp. la suite $(k_n)$ de $F$) subordonnée à $\mathcal{S}|_\Omega$ (resp. à $\mathcal{T}$) et la suite réelle $(t_n)$ de $[-1,1]-\{0\}$ convergeant vers $0$. On a alors $u=Df(x_0,y_0)$.

On précisera, s'il y a lieu, que $f$ est $\mathcal{S}\times\mathcal{T}$-dérivable en $(x_0,y_0)$ relativement à $\Omega$ et on peut adapter les remarques de I.6 au cas présent.

PROPOSITION. *Soit* $f : A \times B \to G$, *où* $A \times B \subset E \times F$, *comme ci-dessus; soit* $g : A \to F$, *telle que* $g(A) \subset B$ *et* $f(x, g(x)) = 0$ *quel que soit* $x \in A$; *soit enfin* $\mathcal{S}$ *un recouvrement homothétiquement stable de* $E$. *Pour que* $g$ *soit* $\mathcal{S}$-*dérivable en* $x_0 \in A$, *il suffit qu'il existe un recouvrement borné et homothétiquement stable* $\mathcal{T}$ *de* $F$, *tel que* $f$ *soit* $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$-*dérivable en* $(x_0, g(x_0))$ *avec* $D_2 f(x_0, g(x_0)) \in Is(F, G)$ *et que* $g$ *soit* $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$-*lipschitzienne en* $x_0$. *On a alors*

$$Dg(x_0) = -(D_2 f(x_0, g(x_0)))^{-1} \circ D_1 f(x_0, g(x_0)).$$

Soit $\Omega$ un ouvert équilibré de $E$, relativement auquel $f$ est $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$-dérivable en $(x_0, g(x_0))$ au sens ci-dessus, et relativement auquel $g$ est $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$-lipschitzienne en $x_0$. D'après les remarques de I.6, adaptées au cas présent, on observe que l'application $\overline{f} : A \times B \to F$ qui à $(x, y)$ fait correspondre $y - (D_2 f(x_0, g(x_0)))^{-1}(f(x, y))$ est $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$-dérivable en $(x_0, g(x_0))$ relativement à $\Omega$. On a :

$$D_1 \overline{f}(x_0, g(x_0)) = -(D_2 f(x_0, g(x_0)))^{-1} \circ D_1 f(x_0, g(x_0)),$$
$$D_2 \overline{f}(x_0, g(x_0)) = 0.$$

Il s'agit donc de vérifier :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{g(x_0 + t_n h_n) - g(x_0)}{t_n} - D_1 \overline{f}(x_0, g(x_0))(h_n) = 0,$$

quelles que soient la suite $(h_n)$ de $E$ subordonnée à $\mathcal{S}|\Omega$ et la suite $(t_n)$ de $[-1, 1] - \{0\}$ convergeant vers $0$. Or la relation précédente équivaut à

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\overline{f}(x_0 + t_n h_n, g(x_0 + t_n h_n)) - \overline{f}(x_0, g(x_0))}{t_n}$$
$$- D_1 \overline{f}(x_0, g(x_0))(h_n) = 0.$$

Puisque $D_2 \overline{f}(x_0, g(x_0)) = 0$, ceci équivaut aussi à :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\overline{f}\left(x_0 + t_n h_n, g(x_0) + t_n\left(\frac{g(x_0 + t_n h_n) - g(x_0)}{t_n}\right)\right) - \overline{f}(x_0, g(x_0))}{t_n}$$

$$- D\bar{f}(x_0, g(x_0))(h_n, \frac{g(x_0+t_n h_n)-g(x_0)}{t_n}) = 0.$$

Cette dernière relation résulte de ce que $f$ est $\mathcal{S}\times\mathcal{T}$-dérivable au point $(x_0, g(x_0))$ relativement à $\Omega$ et de ce que la suite

$$(\frac{g(x_0+t_n h_n)-g(x_0)}{t_n})$$

est par hypothèse subordonnée à $\mathcal{T}$.

COROLLAIRE. *Soient, comme ci-dessus,* $f: A\times B \to G$, *où* $A\times B\subset E\times F$, *et* $g: A\to F$ *telles que* $g(A)\subset B$ *et* $f(x, g(x))=0$ *quel que soit* $x\in A$. *Soit* $x_0\in A$ *tel que* $f$ *soit dérivable (resp. b-dérivable, resp. c-dérivable) en* $(x_0, g(x_0))$ *et que* $D_2 f(x_0, g(x_0))\in Is(F, G)$. *Pour que* $g$ *soit dérivable (resp. b-dérivable, resp. c-dérivable) en* $x_0$, *il suffit (resp. il faut et il suffit) que* $g$ *soit lipschitzienne (resp. b-lipschitzienne, resp. c-lipschitzienne) en* $x_0$.

Ceci résulte de la proposition précédente, compte tenu du corollaire 2 de I.3.

### III.2. $\mathcal{S}$-dérivabilité à l'ordre supérieur.

Etant donnée une suite $(i_1, ..., i_p)$ de $p$ éléments de $\{1, 2\}$, on désigne par $P_{n; i_1 ... i_p}$, où $n \geqslant p$, le sous-ensemble de $P_{np}$, défini en II.6, formé des $(\alpha_1, ..., \alpha_p)$ tels que $i_k = 1$, $k = 1, ..., p$, entraînent $|\alpha_k| = 1$. On désignera par $S_{np}^{(2)}$ l'ensemble des suites $(i_1, ..., i_p)$ de $p$ éléments de $\{1, 2\}$ telles que $P_{n; i_1 ... i_p}$ ne soit pas vide. Avec ces notations et celles de II.6 on peut énoncer :

LEMME. Soit $f$ une application définie dans l'ouvert $A_1\times A_2$ de l'e.v.t. produit $E_1\times E_2$, à valeurs dans l'e.v.t. $F$ et soit $g: A_1\to E_2$ telle que $g(A_1)\subset A_2$. Soit enfin $\mathcal{S}_1$ un recouvrement de $E_1$ tel que $g$ soit $n$-$1$ fois $\mathcal{S}_1$-dérivable dans $A_1$ et $n$ fois $\mathcal{S}_1$-dérivable en $x_0\in A_1$. Si $n > 1$, on suppose que les applications multilinéaires

$D^n g(x_0)\in L_n(E_1; E_2)$ et $D^k g(x)\in L_k(E_1; E_2)$, $x\in A_1$, $k = 2, ..., n$-$1$, sont $\mathfrak{S}_1$-admissibles. Pour que l'application $x \to f(x, g(x))$ définie dans $A_1 \subset E_1$ soit $n$ fois $\mathfrak{S}_1$-dérivable en $x_0$, il suffit qu'il existe un recouvrement $\mathfrak{S}_2$ de $E_2$ vérifiant les conditions suivantes :

i) $g$ est $(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2)$-lipschitzienne en $x_0$ et, si $n > 1$, $g$ est $(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2)$-lipschitzienne en tout $x \in A_1$.

ii) $f$ est $n-1$ fois $\mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2$-dérivable dans $A_1 \times A_2$ et $n$ fois $\mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2$-dérivable en $(x_0, g(x_0))$

iii) Si $n > 1$, les applications multilinéaires

$D^n f(x_0, g(x_0)) \in L_n(E_1 \times E_2 ; F)$ et $D^k f(x, g(x))$, $x \in A_1$, $k = 2, \ldots, n-1$

sont $\mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2$-admissibles.

iv) Si $n > 2$, $E_2$ est métrisable ou de Baire, à moins que $F$ ne soit l.c. et $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ segmentiels.

On a alors :

$$(1)\quad D^n(x \to f(x, g(x)))(x_0)(h_1, \ldots, h_n) =$$
$$\sum_{\substack{(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in P_{n; i_1, \ldots i_p} \\ (i_1, \ldots, i_p) \in S^{(2)}_{np} \\ p = 1, \ldots, n}} D_{i_1 \ldots i_p} f(x_0, g(x_0))(\delta^1_{i_1} h_{\alpha_1} + \delta^2_{i_1}(D^{|\alpha_1|} g(x_0) h_{\alpha_1}), \ldots$$
$$\ldots, \delta^1_{i_p} h_{\alpha_p} + \delta^2_{i_p}(D^{|\alpha_p|} g(x_0) h_{\alpha_p}))$$

quels que soient $h_k \in E_1$, $k = 1, \ldots, n$.

Pour $n = 1$, l'énoncé résulte de I.5, puisque $(j_{A_1}, g) : A_1 \to E_1 \times E_2$ est $(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2)$-lipschitzienne en $x_0$ ($j_{A_1} : A_1 \to E_1$ désignera l'injection naturelle), et que

$$D(f \circ (j_{A_1}, g))(x_0) = Df(x_0, g(x_0)) \circ D(j_{A_1}, g)(x_0) =$$
$$= D_1 f(x_0, g(x_0)) + D_2 f(x_0, g(x_0)) \circ Dg(x_0).$$

L'énoncé étant supposé établi à l'ordre $n-1 \geqslant 1$, démontrons-le à l'ordre $n$. L'hypothèse de récurrence entraîne alors que $f \circ (j_{A_1}, g)$ est $n-1$ fois $\mathfrak{S}_1$-dérivable dans $A_1$ et que l'on a :

$$(2)\qquad D^{n-1}(f \circ (j_{A_1}, g)) =$$

$$= \sum_{\substack{(\alpha_1,\dots,\alpha_p)\in P_{n-1;i_1\dots i_p}\\ (i_1,\dots,i_p)\in S^{(2)}_{(n-1)p}\\ p=1,\dots,n-1}} \psi^{i_1\dots i_p}_{\alpha_1\dots\alpha_p}\circ(D_{i_1\dots i_p}f\circ(j_{A_1},g), D^{|\alpha_1|}g,\dots,D^{|\alpha_p|}g),$$

où $\psi^{i_1\dots i_p}_{\alpha_1\dots\alpha_p}$ :

$$L^{(2)}_b(E_{i_1},\dots,E_{i_p};F)\times L_{|\alpha_1|}(E_{i_1};F)\times\dots\times L_{|\alpha_p|}(E_{i_p};F)\to L_{n-1}(E_1;F)$$

est l'application multilinéaire qui à $(v,u_1,\dots,u_p)$ fait correspondre

$$v\circ(\delta^1_{i_1}\pi_{\alpha_1}+\delta^2_{i_1}(u_1\circ\pi_{\alpha_1}),\dots,\delta^1_{i_p}\pi_{\alpha_p}+\delta^2_{i_p}(u_p\circ\pi_{\alpha_p})),$$

où $\pi_{\alpha_k}: E_1^{n-1}\to E_1^{\alpha_k}$ est la projection naturelle, déjà définie en II.6, et où $L^{(2)}_b(E_{i_1},\dots,E_{i_p};F)$ est le sous-espace vectoriel de $L(E_{i_1},\dots,E_{i_p};F)$ qui est formé des applications multilinéaires $u: E_{i_1}\times\dots\times E_{i_p}\to F$ telles que $i_k=2$, $k=1,\dots,p$, entraînent que $u$ est hypocontinue par rapport au $k^{\text{ième}}$ argument. Dans le second membre de (2), chaque application

$$D_{i_1\dots i_p}f\circ(j_{A_1},g): A_1\to L(E_{i_1},\dots,E_{i_p};F)$$

peut en effet moyennant un abus véniel de notation être considérée comme prenant ses valeurs dans l'e.v.t. $L^{(2)}_b(E_{i_1},\dots,E_{i_p};F)$ en vertu de la proposition 1 et du corollaire 2 de II.5, compte tenu de l'hypothèse (iv). Il s'agit maintenant, en premier lieu, de montrer que

$$D^{n-1}(f\circ(j_{A_1},g)): A_1\to L_{n-1}(E_1;F)$$

est $\mathfrak{S}_1$-dérivable en $x_0$, c'est-à-dire, compte tenu de (2), que

$$\psi^{i_1\dots i_p}_{\alpha_1\dots\alpha_p}\circ(D_{i_1\dots i_p}f\circ(j_{A_1},g), D^{|\alpha_1|}g,\dots,D^{|\alpha_p|}g)$$

est $\mathfrak{S}_1$-dérivable en $x_0$, quels que soient

$$(i_1,\dots,i_p)\in S^{(2)}_{(n-1)p},\ (\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in P_{n;i_1,\dots,i_p},\ p=1,\dots,n-1, \text{ fixés.}$$

Or l'application multilinéaire $\psi^{i_1\dots i_p}_{\alpha_1\dots\alpha_p}$ est bornée sur les bornés et séparément continue. D'après le corollaire 2 du I.6, il suffit donc d'observer d'une part que, par hypothèse, les $\mathfrak{S}_1$-dérivées

$$D(D^{|\alpha_i|}g)(x_0)\in L(E_1,L_{|\alpha_i|}(E_1;E_2))$$

sont définies et $\mathcal{S}_1$-admissibles, et d'autre part que la $\mathcal{S}_1$-dérivée

$D(D_{i_1\ldots i_p} f\circ(j_{A_1}, g))(x_0)$, définie et égale à

$$D_1(D_{i_1\ldots i_p} f)(x_0, g(x_0)) + D_2(D_{i_1\ldots i_p} f)(x_0, g(x_0))\circ Dg(x_0)$$

est $\mathcal{S}_1$-admissible. Or, compte tenu de la remarque de II.4 et de l'hypothèse (iii), on observe que

$$D(D_{i_1\ldots i_p} f)(x_0, g(x_0)) \in L(E_1\times E_2, L(E_{i_1},\ldots, E_{i_p}; F)).$$

est $\mathcal{S}_1\times\mathcal{S}_2$-admissible donc

$$D_1(D_{i_1\ldots i_p} f)(x_0, g(x_0)) \in L(E_1, L(E_{i_1},\ldots,E_{i_p}; F))$$

est $\mathcal{S}_1$-admissible et

$$D_2(D_{i_1\ldots i_p} f)(x_0) \in L(E_2, L(E_{i_1},\ldots,E_{i_p}; F))$$

est $\mathcal{S}_2$-admissible. Puisque $g$ est $(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2)$-lipschitzienne en $x_0$, on observe, comme dans le passage analogue de la démonstration de la proposition de II.6, que $D_2(D_{i_1\ldots i_p} f)(x_0, g(x_0))\circ Dg(x_0)$ est $\mathcal{S}_1$-admissible, ce qui achève de montrer que $D(D_{i_1\ldots i_p} f\circ(j_{A_1}, g))(x_0)$ est $\mathcal{S}_1$-admissible. Il reste à vérifier (1), dont le second membre égale:

$$\sum_{\substack{(\alpha_1,\ldots,\alpha_p)\in P_{np}\\ p=1,\ldots,n}} \Big( \sum_{\substack{1\leq i_k\leq 2\\ k=1,\ldots,p}} D_{i_1\ldots i_p} f(x_0, g(x_0))(\delta^1_{i_1}(\delta^1_{|\alpha_1|} h_{\alpha_1}) + \delta^2_{i_2}(D^{|\alpha_1|} g(x_0) h_{\alpha_1}), \ldots, \delta^1_{i_p}(\delta^1_{|\alpha_p|} h_{\alpha_p}) + \delta^2_{i_p}(D^{|\alpha_p|} g(x_0) h_{\alpha_p}))\Big) =$$

$$\sum_{\substack{(\alpha_1,\ldots,\alpha_p)\in P_{np}\\ p=1,\ldots,n}} D^p f(x_0, g(x_0))((\delta^1_{|\alpha_1|} h_{\alpha_1}, D^{|\alpha_1|} g(x_0) h_{\alpha_1}), \ldots, (\delta^1_{|\alpha_p|} h_{\alpha_p}, D^{|\alpha_p|} g(x_0) h_{\alpha_p})).$$

C'est-à-dire qu'il faut vérifier:

$$(3)\quad D^n(f\circ(j_{A_1}, g))(x_0)(h_1,\ldots,h_n) = \sum_{\substack{(\alpha_1,\ldots,\alpha_p)\in P_{np}\\ p=1,\ldots,n}} D^p f(x_0, g(x_0))(D^{|\alpha_1|}(j_{A_1}, g)(x_0) h_{\alpha_1}, \ldots, D^{|\alpha_p|}(j_{A_1}, g)(x_0) h_{\alpha_p}).$$

Or $\psi_p : L_p(E_1 \times E_2 ; F) \times (E_1 \times E_2)^p \to F$ désignant l'application multilinéaire, bornée sur les bornés et séparément continue

$$(v, k_1, \dots, k_p) \to v(k_1, \dots, k_p),$$

il vient, comme dans II.6 et compte tenu de l'hypothèse de récurrence:

$$D^n(f \circ (j_{A_1}, g))(x_0)(h_1, \dots, h_n) =$$

$$D(x \to D^{n-1}(f \circ (j_{A_1}, g))(x)(h_2, \dots, h_n))(x_0)(h_1) =$$

$$D\Big( \sum_{\substack{(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in P_{[2,n]p} \\ p = 1, \dots, n-1}} \psi_p \circ (D^p f \circ (j_{A_1}, g), \bar{h}_{\alpha_1} \circ D^{|\alpha_1|}(j_{A_1}, g), \dots$$

$$\dots, \bar{h}_{\alpha_p} \circ D^{|\alpha_p|}(j_{A_1}, g)))(x_0)(h_1) =$$

$$= \sum_{\substack{(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in P_{np} \\ p = 1, \dots, n}} D^p f(x_0, g(x_0))(D^{|\alpha_1|}(j_{A_1}, g)(x_0) h_{\alpha_1}, \dots$$

$$\dots, D^{|\alpha_p|}(j_{A_1}, g)(x_0) h_{\alpha_p}),$$

ce qui achève la démonstration, compte tenu de (3).

Avec les notations ci-dessus, on peut énoncer:

PROPOSITION. *Soient* $f : A_1 \times A_2 \to F$, *où* $A_1 \times A_2 \subset E_1 \times E_2$, *et* $g : A_1 \to E_2$ *telles que* $g(A_1) \subset A_2$ *et* $f(x, g(x)) = 0$ *quel que soit* $x \in A_1$. *Soit* $\mathfrak{S}_1$ *un recouvrement homothétiquement stable de* $E_1$. *Pour que* $g$ *soit* $n$ *fois* $\mathfrak{S}_1$*-dérivable en* $x_0 \in A_1$, *il suffit qu'il existe un recouvrement borné et homothétiquement stable* $\mathfrak{S}_2$ *de* $E_2$ *tel que* $f$ *soit* $n-1$ *fois* $\mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2$*-dérivable en* $(x_0, g(x_0))$, *les conditions suivantes étant en outre remplies :*

*i)* $D_2 f(x_0, g(x_0)) \in Is(E_2, F)$ *et, si* $n > 1$, $D_2 f(x, g(x)) \in Is(E_2, F)$ *quel que soit* $x \in A_1$.

*ii) Si* $n > 1$,

$$D_{1 i_2 \dots i_n} f(x_0, g(x_0)) \in L(E_1, E_{i_2}, \dots, E_{i_n}; F)$$

*et*

$$D_{1 i_2 \dots i_p} f(x, g(x)) \in L(E_1, E_{i_2}, \dots, E_{i_p}; F)$$

*sont* $\mathfrak{S}_1$*-admissibles quels que soient, d'une part, la suite* $(i_2, \dots, i_n)$ *de*

*$n-1$ éléments de $\{1,2\}$, et, d'autre part, $x \in A$ et la suite $(i'_2,\dots,i_p)$ de $1 \leqslant p-1 \leqslant n-2$ éléments de $\{1,2\}$.*

*iii) $g$ est $(\mathfrak{S}_1,\mathfrak{S}_2)$-lipschitzienne en tout $x \in A_1$.*

*iv) Si $n>1$, $E_2$ est un b-espace.*

*v) Si $n>2$, $E_2$ est métrisable ou de Baire, à moins d'être l.c. et que $(\mathfrak{S}_1,\mathfrak{S}_2)$ soient segmentiels.*

*Les $D^k g(x_0)$, $k=1,\dots,n$, vérifient alors :*

$$(1_1)\qquad Dg(x_0) = -(D_2 f(x_0, g(x_0)))^{-1} \circ D_1 f(x_0, g(x_0)),$$

$$\begin{aligned}(1_m)\quad & D^m g(x_0) = -(D_2 f(x_0, g(x_0)))^{-1}\\ 1<m\leqslant n\quad & \circ\Big( \sum_{\substack{(\alpha_1,\dots,\alpha_p)\in P_{m;i_1\dots i_p}\\ (i_1,\dots,i_p)\in S^{(2)}_{mp}\\ p=2,\dots,m}} D_{i_1\dots i_p} f(x_0, g(x_0))\\ & \circ(\delta^1_{i_1}\pi_{\alpha_1} + \delta^2_{i_2}(D^{|\alpha_1|} g(x_0)\circ\pi_{\alpha_1}),\dots\\ & \dots,\delta^1_{i_p}\pi_{\alpha_p} + \delta^2_{i_p}(D^{|\alpha_p|} g(x_0)\circ\pi_{\alpha_p}))\Big).\end{aligned}$$

**L'énoncé étant déjà démontré en III.1 dans le cas $n=1$, supposons-le établi à l'ordre $n-1 \geqslant 1$ et vérifions-le à l'ordre $n$. Il résulte des hypothèses générales et de l'hypothèse de récurrence que $g$ est $n$-$1$ fois $\mathfrak{S}_1$-dérivable dans $A_1$ et on a, avec les notations du lemme :**

$$(2)\quad \begin{cases} D^{n-1} g = \phi_{n-1}\circ(D_1 f\circ(j_{A_1}, g), \sigma\circ(D_2 f\circ(j_{A_1}, g)))\\ \text{ou bien}\\ D^{n-1} g = \phi_{n-1}\circ\Big( \sum_{\substack{(\alpha_1,\dots,\alpha_p)\in P_{n-1;i_1\dots i_p}\\ (i_1,\dots,i_p)\in S^{(2)}_{(n-1)p}\\ p=2,\dots,n-1.}} \psi^{i_1\dots i_p}_{\alpha_1\dots\alpha_p}\circ(D_{i_1\dots i_p} f\circ(j_{A_1}, g),\\ \qquad D^{|\alpha_1|} g,\dots, D^{|\alpha_p|} g), \sigma\circ(D_2 f\circ(j_{A_1}, g))\Big)\end{cases}$$

**selon que $n=2$ ou $n>2$. Pour $k\geqslant 1$, on a désigné par $\phi_k$ l'application**

$$(u,v)\to -v\circ u \text{ de } L_k(E_1,F)\times L(F,E_2) \text{ dans } L_k(E_1,E_2)$$

**et par $\sigma$ l'application**

$$u\to u^{-1} \text{ de } Is(E_2,F) \text{ dans } L(F,E_2).$$

Vérifions donc d'abord que $D^{n-1}g : A_1 \to L_{n-1}(E_1 ; E_2)$ est $\mathfrak{S}_1$-dérivable en $x_0$. Puisque l'application bilinéaire $\phi_{n-1}$ est bornée sur les bornés et séparément continue, il suffit de vérifier que les $\mathfrak{S}_1$-dérivées

$$D(D_1 f \circ (j_{A_1}, g))(x_0) \in L(E_1, L(E_1, F)),$$

$$D(\sigma \circ (D_2 f \circ (j_{A_1}, g)))(x_0) \in L(E_1, L(F, E_2)),$$

$$D(\psi^{i_1 \dots i_p}_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \circ (D_{i_1 \dots i_p} f \circ (j_{A_1}, g), D^{|\alpha_1|} g, \dots, D^{|\alpha_p|} g))(x_0)$$
$$\in L(E_1, L_{n-1}(E_1 ; F))$$

sont définies et $\mathfrak{S}_1$-admissibles. Puisque $\mathfrak{S}_2$ est borné et que $g$ est $(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2)$-lipschitzienne en $x_0$, il résulte d'abord de la remarque de I.3 que la $\mathfrak{S}_1$-dérivée $Dg(x_0)$ est $\mathfrak{S}_1$-admissible. Mais alors les $\mathfrak{S}_1$-dérivées $D(D_i f \circ (j_{A_1}, g))(x_0)$, $i = 1, 2$, définies et égales à

$$D(D_i f)(x_0, g(x_0)) \circ D(j_{A_1}, g)(x_0) =$$
$$D_1(D_i f)(x_0, g(x_0)) + D_2(D_i f)(x_0, g(x_0)) \circ Dg(x_0)$$

d'après I.5, sont $\mathfrak{S}_1$-admissibles, compte tenu de l'hypothèse (ii).

Puisque la $\mathfrak{S}_1$-dérivée $D(D_2 f \circ (j_{A_1}, g))(x_0)$ est définie et $\mathfrak{S}_1$-admissible, il résulte du corollaire de I.7, compte tenu de l'hypothèse (iv), que la $\mathfrak{S}_1$-dérivée $D(\sigma \circ (D_2 f \circ (j_{A_1}, g)))(x_0)$ est définie et $\mathfrak{S}_1$-admissible. En vue de montrer que la $\mathfrak{S}_1$-dérivée

$$D(\psi^{i_1 \dots i_p}_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \circ (D_{i_1 \dots i_p} f \circ (j_{A_1}, g), D^{|\alpha_1|} g, \dots, D^{|\alpha_p|} g))(x_0)$$

est définie et $\mathfrak{S}_1$-admissible, il suffit, compte tenu du corollaire 2 de I.6, de vérifier d'abord que la $\mathfrak{S}_1$-dérivée $D(D_{i_1 \dots i_p} f \circ (j_{A_1}, g))(x_0)$ est définie et $\mathfrak{S}_1$-admissible, ce que l'on voit comme pour les

$$D(D_i f \circ (j_{A_1}, g))(x_0), \quad i = 1, 2,$$

ci-dessus compte tenu de l'hypothèse (ii). Ensuite, il faut observer que les $\mathfrak{S}_1$-dérivées

$$D(D^{|\alpha_i|} g)(x_0) \in L(E_1, L_{|\alpha_i|}(E_1 ; E_2)), \quad i = 1, \dots, p,$$

définies en vertu de l'hypothèse de récurrence, sont $\mathfrak{S}_1$-admissibles. On a déjà remarqué que $Dg(x_0)$ est $\mathfrak{S}_1$-admissible. Il résulte alors de proche en proche des relations $(1_m)$, $m<n$, établies en vertu de l'hypothèse de récurrence, que chaque $D^m g(x_0)$, $m<n$, c'est-à-dire $D(D^{m-1}g)(x_0)$ est $\mathcal{S}_1$-admissible. Il reste à vérifier $(1_n)$. Compte tenu du corollaire 2 de I.6 et de ce que les

$$D(D_{i_1\dots i_p} f\circ(j_{A_1},g))(x_0),\ (i_1,\dots,i_p)\in S^{(2)}_{np},\ p=1,\dots,n-1,$$

et $D(\sigma\circ(D_2 f\circ(j_{A_1},g)))(x_0)$ sont $\mathcal{S}_1$-admissibles, on observe que $D(D^{n-1}g)(x_0)$, c'est-à-dire, d'après ce qui précède,

$$D(\phi_{n-1}\circ(\sum_{\substack{(\alpha_1,\dots,\alpha_p)\in P_{n-1;i_1\dots i_p}\\(i_1,\dots,i_p)\in S^{(2)}_{(n-2)p}\\p=2,\dots,n-1}} \psi^{i_1\dots i_p}_{\alpha_1\dots\alpha_p}(D_{i_1\dots i_p} f\circ(j_{A_1},g), D^{|\alpha_1|}g,\dots$$

$$\dots, D^{|\alpha_p|}g), \sigma\circ(D_2 f\circ(j_{A_1},g))))(x_0)$$

est $\mathcal{S}_1$-admissible. Le lemme entraîne alors que la $\mathcal{S}_1$-dérivée

$$D^n(f\circ(j_{A_1},g))(x_0) \text{ est définie et égale à}$$

$$\sum_{\substack{(\alpha_1,\dots,\alpha_p)\in P_{n;i_1\dots i_p}\\(i_1,\dots,i_p)\in S^{(2)}_{np}\\p=1,\dots,n}} D_{i_1\dots i_p} f(x_0,g(x_0))\circ(\delta^1_{i_1}\pi_{\alpha_1}$$

$$+\delta^2_{i_1}(D^{|\alpha_1|}g(x_0)\circ\pi_{\alpha_1}),\dots,\delta^1_{i_p}\pi_{\alpha_p}+\delta^2_{i_p}(D^{|\alpha_p|}g(x_0)\circ\pi_{\alpha_p})).$$

Puisque $f\circ(j_{A_1},g)=0$, il vient :

$$D_2 f(x_0,g(x_0))\circ D^n g(x_0)+\sum_{\substack{(\alpha_1,\dots,\alpha_p)\in P_{n;i_1\dots i_p}\\(i_1,\dots,i_p)\in S^{(2)}_{np}\\p=2,\dots,n}} D_{i_1\dots i_p} f(x_0,g(x_0))$$

$$\circ(\delta^1_{i_1}\pi_{\alpha_1}+\delta^2_{i_1}(D^{|\alpha_1|}g(x_0)\circ\pi_{\alpha_1}),\dots,\delta^1_{i_p}\pi_{\alpha_p}+\delta^2_{i_p}(D^{|\alpha_p|}g(x_0)\circ\pi_{\alpha_p}))$$

$$=0,$$

d'où $(1_n)$.

Le corollaire de III.1 admet alors l'extension suivante à l'ordre $n>1$.

COROLLAIRE. *Soient* $f : A \times B \to G$, *où* $A \times B \subset E \times F$ *et* $g : A \to F$ *telles que* $g(A) \subset B$ *et* $f(x, g(x)) = 0$ *pour tout* $x \in A$. *On suppose que* $f$ *est* $n > 1$ *fois c-dérivable (resp. b-dérivable; resp. dérivable,* $E$ *étant supposé normable dans ce dernier cas) en* $(x_0, g(x_0)) \in A \times B$ *et* $n-1$ *fois c-dérivable (resp. b-dérivable, resp. dérivable) dans* $A \times B$. *On suppose aussi que* $D_2 f(x, g(x)) \in Is(F, G)$ *quel que soit* $x \in A$, *et enfin que* $F$ *est un b-espace et, en outre, si* $n > 2$, *métrisable, de Baire ou l.c..*

*Pour que* $g$ *soit* $n-1$ *fois c-dérivable (resp. b-dérivable, resp. dérivable) dans* $A$ *et* $n$ *fois c-dérivable (resp. b-dérivable, resp. dérivable) en* $x_0$, *il faut et il suffit que* $g$ *soit c-lipschitzienne (resp. b-lipschitzienne, resp. lipschitzienne) dans* $A$.

## III.3. Fonctions implicites de classe $C^n$.

PROPOSITION. *Soient* $f : A_1 \times A_2 \to F$, *où* $A_1 \times A_2 \subset E_1 \times E_2$, *et* $g : A_1 \to E_2$ *comme ci-dessus, telles que* $g(A_1) \subset A_2$ *et* $f(x, g(x)) = 0$ *quel que soit* $x \in A_1$. *On suppose que* $f$ *est* $n$ *fois b-dérivable dans* $A_1 \times A_2$, *de classe* $C^n$ *en* $(x_0, g(x_0)) \in A_1 \times A_2$ *et que* $D_2 f(x, g(x)) \in Is(E_2, F)$ *quel que soit* $x \in A_1$. *On suppose en outre les conditions suivantes:*

*i) si* $n = 1$, *l'application* $u \to u^{-1}$ *du sous-espace* $Aut(F) \subset L(F)$ *dans* $L(F)$ *est séquentiellement continue, à moins que* $F$ *ne soit un un b-espace métrisable ou de Baire.*

*ii) Si* $n > 1$, *on suppose que* $F$ *est un b-espace.*

*iii) Si* $n > 2$, *on suppose que* $F$ *est métrisable, de Baire ou l.c..*

*Alors* $g$ *est* $n$ *fois b-dérivable dans* $A_1$ *et de classe* $C^n$ *en* $x_0$ *si et seulement si* $g$ *est b-lipschitzienne dans* $A_1$.

La condition étant évidemment nécessaire, vérifions qu'elle est suffisante. Il résulte du corollaire de III.2 que $g$ est $n$ fois $b$-dérivable dans $A_1$. Il s'agit de vérifier que $D^n g : A_1 \to L_n(E_1; F)$ est $b$-continue en $x_0$. Soit d'abord $n = 1$. Avec les notations de III.2, on a:

$$(1) \qquad Dg = \phi_1 \circ (D_1 f \circ (j_{A_1}, g), \sigma \circ (D_2 f \circ (j_{A_1}, g))).$$

On observe que $D_i f \circ (j_{A_1}, g)$, $i = 1, 2$, est $b$-continue en $x_0$, parce que, par hypothèse, $Df$, et donc $D_1 f$, $D_2 f$ sont $b$-continues en $(x_0, g(x_0))$

et que $(j_{A_1}, g)$ est $b$-lipschitzienne en $x_0$. Si l'application $u \to u^{-1}$ de $Aut(F)$ dans $L(F)$ est séquentiellement continue, alors

$$(D_1 f \circ (j_{A_1}, g), \sigma \circ (D_2 f \circ (j_{A_1}, g))) : A_1 \to L(E_1, F) \times L(F, E_2)$$

est donc $b$-continue en $x_0$ et par conséquent aussi $Dg$, compte tenu de (1) et de ce que

$$\phi_1 : L(E_1, F) \times L(F, E_2) \to L(E_1, E_2),$$

hypocontinue par rapport au second argument est séquentiellement continue. Si $F$ est un $b$-espace, alors d'une part l'image par $\sigma$ de toute suite convergente est bornée, et

$$\phi_1 \circ (D_1 f \circ (j_{A_1}, g), \sigma \circ (D_2 f \circ (j_{A_1}, g)))$$

est encore $b$-continue en $x_0$, pourvu que $E_2$ soit métrisable ou de Baire, parce qu'alors $\phi_1$ est aussi hypocontinue par rapport au 1$^{er}$ argument en conséquence du lemme de II.1.

Si $n = 2$, on a :

$$(2) \qquad D_2 g = \phi_2 (\psi \circ (D^2 f \circ (j_{A_1}, g), Dg, Dg)), \sigma \circ (D_2 f \circ (j_{A_1}, g))),$$

où

$$\psi : L_2(E_1 \times E_2 ; F) \times L(E_1, E_2) \times L(E_1, E_2) \to L_2(E_2 ; F)$$

est l'application qui à $(v, u_1, u_2)$ fait correspondre

$$(h_1, h_2) \to v((h_1, u_1(h_1)), (h_2, u_2(h_2))).$$

Puisque d'une part $D^2 f \circ (j_{A_1}, g)$ est $b$-continue en $x_0$ vu que $(j_{A_1}, g)$ est elle $b$-lipschitzienne en $x_0$ et que $D^2 f$ est $b$-continue en $x_0$, et que d'autre part $Dg$ est $b$-lipschitzienne en $x_0$ parce que $b$-dérivable en $x_0$, on observe, comme dans le passage analogue du corollaire 3 de II.6, que $\psi \circ (D^2 f \circ (j_{A_1}, g), Dg, Dg)$ est $b$-continue en $x_0$. Il résulte du corollaire de I.7 et de la $b$-dérivabilité de $D^2 f \circ (j_{A_1}, g)$ en $x_0$ que

$$\sigma \circ (D_2 f \circ (j_{A_1}, g)) \text{ est } b\text{-dérivable en } x_0,$$

donc $b$-continue en ce point. Puisque $\phi_2$ est séquentiellement continue, on observe alors, compte tenu de (2), que $D^2 g$ est $b$-continue en $x_0$.

Dans le cas général où $n > 2$, on a, avec les notations de III.2 :

$$D^n g = \phi_n \circ \Big( \sum_{\substack{(\alpha_1,\ldots,\alpha_p)\in P_{n;i_1\ldots i_p} \\ (i_1,\ldots,i_p)\in S^{(2)}_{np} \\ p=2,\ldots,n}} \psi^{i_1\ldots i_p}_{\alpha_1\ldots\alpha_p} \circ (D_{i_1\ldots i_p} f \circ (j_{A_1}, g), D^{|\alpha_1|} g, \ldots, D^{|\alpha_p|} g, \sigma \circ D_2 f \circ (j_{A_1}, g))\Big).$$

La $b$-continuité de $D^n g$ en $x_0$ résulte alors de la continuité séquentielle de $\phi_n$, de la $b$-continuité en $x_0$ de $\sigma\circ(D_2 f\circ(j_{A_1}, g))$, déjà observée ci-dessus, de la continuité séquentielle des $\psi^{i_1\ldots i_p}_{\alpha_1\ldots\alpha_p}$, de la $b$-continuité en $x_0$ des $D_{i_1\ldots i_p} f\circ(j_{A_1}, g)$ et enfin des $D^{|\alpha_i|} g$, $b$-dérivables en $x_0$ puisque $|\alpha_i| < n$.

COROLLAIRE. *Soient $f: A\times B \to G$, où $A\times B \subset E\times F$, et $g: A\to F$ telles $g(A)\subset B$ et $f(x, g(x))=0$ quel que soit $x\in A$. On suppose que $F$ est un $b$-espace l.c. métrisable, que $f$ est de classe $C^n$ dans $A\times B$ et que $D_2 f(x, g(x))\in Is(F, G)$ quel que soit $x\in A$. Pour que $g$ soit de classe $C^n$ dans $A$, il faut et il suffit que $g$ soit $b$-continue et quasi-lipschitzienne dans $A$.*

La condition étant évidemment nécessaire, vérifions qu'elle est suffisante. Du fait que $g$ est quasi-lipschitzienne dans $A$, il résulte de III.2 que $g$ est quasi-dérivable dans $A$ et on a :

(1) $$Dg = \phi_1\circ(D_1 f\circ(j_{A_1}, g), \sigma\circ(D_2 f\circ(j_{A_1}, g)))$$

avec les notations définies ci-dessus. Compte tenu de la proposition précédente, il n'est que de vérifier que $g$ est $b$-lipschitzienne dans $A$. Il suffit à cette fin de montrer que $g$ est $b$-dérivable, ce qui revient à montrer que la quasi-dérivée $Dg$ est $b$-continue, compte tenu du corollaire de la proposition 2 de I.4, $F$ étant l.c.. Puisque $F$ est métrisable,

$$\phi_1 : L(E, G)\times L(G, F)\to L(E, F)$$

est hypocontinue par rapport au 1$^{er}$ argument; donc il s'agit, compte tenu de (1), de vérifier

(2) $$\lim_{n\to\infty} D_i f(x_0 + t_n h_n, g(x_0 + t_n h_n)) = D_i f(x_0, g(x_0)),$$

et que la suite

$$(3) \qquad ((D_2 f(x_0 + t_n h_n, g(x_0 + t_n h_n)))^{-1}$$

est bornée, quelles que soient la suite bornée $(h_n)$ de $E$ et la suite $(t_n)$ de $\mathbf{R}^*$ convergeant vers $0$. Or par hypothèse on a

$$\lim_{n\to\infty} g(x_0 + t_n h_n) = g(x_0).$$

Puisque $F$ est l.c., métrisable, il existe alors une suite bornée $(k_n)$ de $F$ et une suite réelle $(t'_n)$ convergeant vers $0$ telles que $(g(x_0 + t_n h_n))$ soit la suite $(g(x_0) + t'_n k_n)$. Pour $i = 1, 2$, on a alors :

$$\lim_{n\to\infty} \ddot{D}_i f(x_0 + t_n h_n, g(x_0 + t_n h_n)) =$$

$$\lim_{n\to\infty} D_i f(x_0 + t''_n(\frac{t_n}{t''_n}) h_n, g(x_0) + t''_n(\frac{t'_n}{t''_n}) k_n) = D_i f(x_0, g(x_0)),$$

parce que $Df$ est $b$-continue; on a posé $t''_n = max(|t_n|, |t'_n|)$. On a ainsi vérifié (2) et aussi, $F$ étant un $b$-espace, que la suite (3) est bornée, ce qui achève la démonstration.

*Supersunt mihi, quae scribam, sed parco sciens;*
*Primum, esse ne tibi videar molestior,*
*Distringit quem multarum rerum varietas*
*Dein, si quis eadem forte conari velit*
*Habere ut possit aliquid operis residui.*

*Phèdre (Fables, III, épilogue)*

## BIBLIOGRAPHIE

[1] AVERBUCK - SMOLYANOV, The theory of differentiation in linear topological spaces, *Russian Mathematical Surveys* XXII, n° 6 (1967).

[2] BASTIANI, Applications différentiables et variétés de dimension infinie, *Journal d'Analyse Mathématique* XIII (1964).

[3] BERQUIER, Calcul différentiel dans les espaces quasi-bornologiques (Thèse 3ème cycle Paris VII), *Esquisses Math.* 20, Paris (1973).

[4] COLOMBEAU, *Différentiation et bornologie,* Thèse, Bordeaux (1973).

[5] FRÖLICHER - BUCHER, Calculus in vector spaces without norm, *Lecture Notes in Math.* 30, Springer (1966).

[6] SIMONNET, Calcul différentiel dans les espaces non normables, *Cahiers de Topo. et Géom. Diff.* XIII-4 (1972) et XIV-1 (1973).

[7] VER EECKE, Connexions d'ordre infini, *Cahiers de Topo. et Géom. Diff.* XI-3 (1970).

[8] VER EECKE, Sur le calcul différentiel dans les espaces vectoriels topologiques, *C.R.A.S.* Paris, 276 (1973), p. 1549.

[9] H. H. KELLER, Differential Calculus in locally convex spaces, *Lecture Notes* 417, Springer 1974.

[10] S. YAMAMURO, Differential Calculus in topological linear spaces, *Lecture Notes* 374, Springer 1974.

U.E.R. de Mathématiques
Université de Picardie
33 rue Saint-Leu
80039 AMIENS

## SOMMAIRE