CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

ELISABETH BURRONI

Algèbres non déterministiques et *D*-catégories

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 14, nº 4 (1973), p. 417-475

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1973__14_4_417_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE *Vol. XIV-4*
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

ALGEBRES NON DETERMINISTIQUES ET D-CATEGORIES *

par Elisabeth BURRONI

INTRODUCTION.

Nous avons voulu étendre aux structures utilisées en Théorie des automates (automates non déterministiques, automates avec entrée et sortie,...) les descriptions algébriques habituelles faites au moyen des triples. En fait, il faut faire appel à la notion plus générale de «loi distributive» pour décrire commodément ces structures.

Nous avons donc défini les «algèbres dans une loi distributive **D**», ou **D**-algèbres, et mieux les **D**-catégories qui couvrent à la fois les **D**-algèbres et les **T**-catégories de [Bu] (où **T** est seulement un triple). La structure ainsi définie est à la fois générale et naturelle (elle symétrise la notion de **T**-catégorie); elle se réduit à la notion de monade dans une pseudo-catégorie (au sens de [Bu]): celle des **D**-spans.

Les **T**-algèbres non déterministiques peuvent être définies en toute généralité comme des **D**-algèbres, lorsque $\mathbf{D}:\mathbf{T}\longrightarrow\mathbf{P}$ est une loi distributive vers «le triple **P** des parties» (*). Mais ce sont, sans doute, les automates avec entrée et sortie qui constituent l'exemple le plus simple de **D**-algèbre, puisque **D** est alors la loi distributive entre deux monoïdes M et M' définie «au point A» par l'isomorphisme canonique:

$$(M'\times A)\times M \xrightarrow{\sim} M'\times(A\times M).$$

Enfin, nous considérons brièvement les «lois distributives mixtes» entre un triple et un cotriple.

★ Conférence donnée au Colloque d'Amiens.

(*) Cette notion diffère de celle de **T**-algèbre relationnelle de Barr. Cependant, lorsque **T** est un triple linéaire, il suffit de remplacer les inclusions figurant dans la définition des **T**-algèbres relationnelles par des égalités pour obtenir des **T**-algèbres non déterministiques.

SOMMAIRE.

0. PRELIMINAIRES

On utilise essentiellement le langage des triples. On précise certaines notations et on rappelle les résultats connus dont nous aurons besoin.

1. La loi de composition d'une catégorie $\mathfrak{E}$ sera notée par un $\circ$, 1_A désignera le morphisme identique en $A \in |\mathfrak{E}|$, où $|\mathfrak{E}|$ est la classe des objets de $\mathfrak{E}$. Si $\mathfrak{D}$ est une 2-catégorie, on notera aussi par un $\circ$ sa première loi et par un $\cdot$ la seconde: celle sur les $Hom_{\mathfrak{D}}(A, B)$ lorsque A et B sont des objets de $\mathfrak{D}$ $(A,\ B \in |\mathfrak{D}|)$.

2. L'expression $t : T \to \overline{T} : \mathfrak{E} \to \overline{\mathfrak{E}}$ signifiera que T et $\overline{T}$ sont deux foncteurs de source $\mathfrak{E}$ et de but $\overline{\mathfrak{E}}$ et que t est une transformation naturelle de source T et de but $\overline{T}$.

$t : T \to \overline{T} : \mathfrak{E} \to \overline{\mathfrak{E}}$ est *une transformation naturelle cartésienne* signifiera que, pour tout morphisme $f : A \to B$ dans $\mathfrak{E}$, le carré dans $\overline{\mathfrak{E}}$ qui suit est cartésien:

$$\begin{tikzcd} TA \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, "tA"'] & TB \arrow[d, "tB"] \\ \overline{T}A \arrow[r, "\overline{T}f"'] & \overline{T}B \end{tikzcd}$$

3. $\Theta = (A, \theta, i, k)$ désignera une monade (ou triple) dans $\mathfrak{D}$ (on rappelle les axiomes de neutralité et d'associativité des monades:

$$k.(\theta \circ i) = 1_A, \qquad k.(i \circ \theta) = 1_A \qquad \text{et} \qquad k.(\theta \circ k) = k.(k \circ \theta),$$

les 2-morphismes $i : 1_A \to \theta$ et $k : \theta \circ \theta \to \theta$ étant respectivement l'unité et la multiplication de Θ).

$\overrightarrow{\mathfrak{Mon}}\,\mathfrak{D}$ (resp. $\overleftarrow{\mathfrak{Mon}}\,\mathfrak{D}$) sera la 2-catégorie des monades dans $\mathfrak{D}$ dont:

– les morphismes sont les couples $(L, l) : \Theta \to \overline{\Theta}$ d'un morphisme $L : A \to \overline{A}$ de $\mathfrak{D}$ et d'un 2-morphisme $l : L \circ \theta \to \overline{\theta} \circ L$ de $\mathfrak{D}$ (resp. d'un 2-morphisme $l : L \circ \theta \leftarrow \overline{\theta} \circ L$) vérifiant les axiomes

$$l.(L \circ i) = \overline{i} \circ L \qquad \text{et} \qquad l.(L \circ k) = (\overline{k} \circ L).(\overline{\theta} \circ l).(l \circ \theta)$$

$$(\text{resp.} \quad L \circ i = l.(\overline{i} \circ L) \quad \text{et} \quad (L \circ k).(l \circ \theta).(\overline{\theta} \circ l) = l.(\overline{k} \circ L));$$

– les 2-morphismes sont les $\sigma:(L,l)\to(\overline{L},\overline{l}):\Theta\to\overline{\Theta}$ tels que (L,l) et $(\overline{L},\overline{l})$ soient des morphismes de $\overrightarrow{\mathfrak{Mon}}\,\mathfrak{D}$ (resp. $\overleftarrow{\mathfrak{Mon}}\,\mathfrak{D}$) de même source Θ et de même but $\overline{\Theta}$ et que $\sigma: L\to\overline{L}$ soit un 2-morphisme de $\mathfrak{D}$ tel que

$$\overline{l}.(\sigma\circ\theta)=(\overline{\theta}\circ\sigma).l \qquad \text{(resp.} \qquad (\sigma\circ\theta).l=\overline{l}.(\overline{\theta}\circ\sigma)\text{)}.$$

4. Si $\mathfrak{D}=\mathcal{C}at$, une monade dans $\mathcal{C}at$ est un triple $\mathbf{T}$ que l'on notera $\mathbf{T}=(\mathcal{E},T,I,K)$, ou $\mathbf{T}=(T,I,K)$ lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguité. $\overrightarrow{\mathcal{T}r}$ et $\overleftarrow{\mathcal{T}r}$ désigneront les catégories $\overrightarrow{\mathfrak{Mon}}\,\mathcal{C}at$ et $\overleftarrow{\mathfrak{Mon}}\,\mathcal{C}at$.

5. $\mathcal{K}\ell\,\mathbf{T}$ et $\mathcal{A}\ell g\,\mathbf{T}$ seront respectivement la catégorie de Kleisli et la catégorie des algèbres associées au triple $\mathbf{T}$ (nous noterons par un $\bigcirc$ la loi de composition de $\mathcal{K}\ell\,\mathbf{T}$ lorsqu'il sera utile de la distinguer de celle de $\mathcal{E}$).

${}^{\mathbf{T}}F \dashv {}^{\mathbf{T}}U$ et $F^{\mathbf{T}}\dashv U^{\mathbf{T}}$ désigneront les couples d'adjoints qui leur sont respectivement associés.

6. a) Si $\mathbf{T}$ et $\mathbf{T}'$ sont deux triples sur la catégorie $\mathcal{E}$, $\mathbf{D}:\mathbf{T}\to\mathbf{T}'$ est une *loi distributive* [Bec] signifie que l'on se donne une transformation naturelle $D: T\circ T'\to T'\circ T$ telle que les diagrammes (D_1), (D_2), (D_3), (D_4) qui suivent soient commutatifs dans $\mathcal{C}at$:

$$\begin{tikzcd}
T\circ T' \arrow[rr, "D"] & & T'\circ T \\
& T \arrow[ul, "T\circ I'"] \arrow[ur, "I'\circ T"'] \arrow[u, phantom, "(D_1)"] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T\circ T'\circ T' \arrow[r, "D\circ T'"] \arrow[dr, "T\circ K'"'] & T'\circ T\circ T' \arrow[r, "T'\circ D"] \arrow[d, phantom, "(D_2)"] & T'\circ T'\circ T \arrow[dl, "K'\circ T"] \\
& T\circ T' \arrow[r, "D"'] & T'\circ T
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
T\circ T' \arrow[rr, "D"] & & T'\circ T \\
& T' \arrow[ul, "I\circ T'"] \arrow[ur, "T'\circ I"'] \arrow[u, phantom, "(D_3)"] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T\circ T\circ T' \arrow[r, "T\circ D"] \arrow[dr, "K\circ T'"'] & T\circ T'\circ T \arrow[r, "D\circ T"] \arrow[d, phantom, "(D_4)"] & T'\circ T\circ T \arrow[dl, "T'\circ K"] \\
& T\circ T' \arrow[r, "D"'] & T'\circ T
\end{tikzcd}$$

b) DIERS et STREET ont montré dans [Di] et [Str] qu'*une loi distributive est une monade dans une 2-catégorie de triples*:

– d'une part $(T, D): \mathbf{T}' \to \mathbf{T}'$ est un morphisme dans $\overrightarrow{\mathcal{T}_n}$ (on utilise (D_1) et (D_2)) tel que

$$\mathbf{T}' \xrightarrow{I} (T, D) \xleftarrow{K} (T, D) \circ (T, D)$$

soit une monade dans $\overrightarrow{\mathcal{T}_n}$ (on utilise (D_3) et (D_4) pour exprimer le fait que I et K sont des 2-morphismes de $\overrightarrow{\mathcal{T}_n}$);

– d'autre part $(T', D): \mathbf{T} \to \mathbf{T}$ est un morphisme dans $\overleftarrow{\mathcal{T}_n}$ (on utilise (D_3) et (D_4)) tel que

$$\mathbf{T} \xrightarrow{I'} (T', D) \xleftarrow{K'} (T', D) \circ (T', D)$$

soit une monade dans $\overleftarrow{\mathcal{T}_n}$ (on utilise (D_1) et (D_2)).

c) Si $\mathbf{T}$ et $\mathbf{T}'$ sont deux triples sur $\mathcal{E}$, BECK a montré dans [Bec] que les trois propriétés suivantes sont équivalentes:

(i) il existe une loi distributive $\mathbf{D}: \mathbf{T} \to \mathbf{T}'$,

(ii) $T' \circ T$ est l'endofoncteur d'un triple sur $\mathcal{E}$, appelé le *triple composé* de $\mathbf{T}$ et $\mathbf{T}'$ et noté $\mathbf{T}' \otimes_{\mathbf{D}} \mathbf{T}$,

(iii) $\mathbf{T}'$ se *relève* en un triple $\tilde{\mathbf{T}}'$ sur $\mathcal{A}lg\,\mathbf{T}$.

((iii) signifie que le diagramme suivant commute lorsqu'on y remplace le couple $(V, \tilde{V})$ par chacun des couples $(T', \tilde{T}')$, $(I', \tilde{I}')$, $(K', \tilde{K}')$,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}lg\,\mathbf{T} & \xrightarrow{\tilde{V}} & \mathcal{A}lg\,\mathbf{T} \\ {\scriptstyle U^{\mathbf{T}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle U^{\mathbf{T}}} \\ \mathcal{E} & \xrightarrow[V]{} & \mathcal{E} \end{array}$$

Par exemple,

– si $\mathbf{D}: \mathbf{T} \to \mathbf{T}'$ est une loi distributive, on définit $\tilde{T}': \mathcal{A}lg\,\mathbf{T} \to \mathcal{A}lg\,\mathbf{T}$ comme étant le foncteur qui à la $\mathbf{T}$-algèbre $b: TA \to A$ associe la $\mathbf{T}$-algèbre

$$TT'A \xrightarrow{DA} T'TA \xrightarrow{T'b} T'A.$$

– si $\tilde{\mathbf{T}}'$ est un relèvement de $\mathbf{T}'$ sur $\mathcal{A}lg\,\mathbf{T}$, alors

$$DA: TT'A \xrightarrow{TT'IA} TT'TA \xrightarrow{\tilde{T}'KA} T'TA$$

est une transformation naturelle définissant une loi distributive $\mathbf{D} : \mathbf{T} \to \mathbf{T}'$.

d) Enfin, mentionnons le fait que $\mathcal{Alg}\,\mathbf{T}' \otimes_{\mathbf{D}} \mathbf{T} \simeq \mathcal{Alg}\,\widetilde{\mathbf{T}'}$: c'est-à-dire qu'une $\mathbf{T}' \otimes_{\mathbf{D}} \mathbf{T}$-algèbre est équivalente à la donnée d'une $\mathbf{T}$-algèbre $b : TA \to A$ et d'une $\mathbf{T}'$-algèbre $b' : T'A \to A$ qui sont $\mathbf{D}$-*compatibles*, i.e. telles que $b \circ T b' = b' \circ T' b \circ DA$; dans ce cas

$$T'TA \xrightarrow{T'b} T'A \xrightarrow{b'} A$$

est une $\mathbf{T}' \otimes_{\mathbf{D}} \mathbf{T}$-algèbre; inversement si $\hat{b} : T'TA \to A$ est une $\mathbf{T}' \otimes_{\mathbf{D}} \mathbf{T}$-algèbre,

$$TA \xrightarrow{I'TA} T'TA \xrightarrow{\hat{b}} A \quad \text{et} \quad T'A \xrightarrow{T'IA} T'TA \xrightarrow{\hat{b}} A$$

sont une $\mathbf{T}$-algèbre et une $\mathbf{T}'$-algèbre $\mathbf{D}$-compatibles, ce qui définit deux foncteurs projections

$$Q_1 = U^{\widetilde{\mathbf{T}'}} : \mathcal{Alg}\,\mathbf{T}' \otimes_{\mathbf{D}} \mathbf{T} \longrightarrow \mathcal{Alg}\,\mathbf{T} \quad \text{et} \quad Q_2 : \mathcal{Alg}\,\mathbf{T}' \otimes_{\mathbf{D}} \mathbf{T} \longrightarrow \mathcal{Alg}\,\mathbf{T}'.$$

7. Un (D_i) écrit à l'extrême gauche d'une ligne sur laquelle se trouve une égalité signifiera que cette dernière a été obtenue grâce à l'axiome (D_i) des lois distributives. De la même façon pour (T_i) et (Nt), si (T_1) et (T_2) désignent les axiomes de neutralité et d'associativité des triples (ou des monades), et (Nt) l'axiome de naturalité de la transformation naturelle t.

I. D-ALGEBRES

I.1 Définition et exemples.

Soit $\mathcal{E}$ une catégorie munie d'une loi distributive $\mathbf{D}: \mathbf{T} \to \mathbf{T}'$, où $\mathbf{T} = (T, I, K)$ et $\mathbf{T}' = (T', I', K')$.

DEFINITION I.1.1. On dira que le couple (A, b) est une **D**-*algèbre* (ou que b est une **D**-algèbre sur A) si A est un objet de $\mathcal{E}$ et $b: TA \to T'A$ un morphisme de $\mathcal{E}$ tel que les diagrammes suivants commutent:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "IA"] \arrow[dr, "I'A"'] & TA \arrow[d, "b"] \arrow[dl, phantom, "(A_1)"] \\ & T'A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} TTA \arrow[r, "KA"] \arrow[d, "T'b \circ DA \circ Tb"'] \arrow[dr, phantom, "(A_2)"] & TA \arrow[d, "b"] \\ T'T'A \arrow[r, "K'A"'] & T'A \end{tikzcd}$$

PROPOSITION I.1.1. *Si (A, b) est une* **D**-*algèbre, on peut la prolonger en une* **T**-*algèbre $\tilde{b}$ sur $T'A$ égale à*

$$TT'A \xrightarrow{DA} T'TA \xrightarrow{T'b} T'T'A \xrightarrow{K'A} T'A.$$

Inversement, si $(T'A, \tilde{b})$ est une **T**-*algèbre, si b désigne sa restriction à TA: $TA \xrightarrow{TI'A} TT'A \xrightarrow{\tilde{b}} T'A$ et si*

$$(*) \qquad \tilde{b} = K'A \circ T'b \circ DA,$$

alors (A, b) est une **D**-*algèbre. Autrement dit, il y a équivalence entre la donnée d'une* **D**-*algèbre b sur A et celle d'une* **T**-*algèbre $\tilde{b}$ sur $T'A$ reliées par $(*)$.* (Cette dernière relation signifie que $\tilde{b}$ et $K'A$ sont **D**-compatibles (0.6.d).)

PREUVE. Voir d'abord 0.7.

Si (A, b) est une **D**-algèbre,

$$\begin{aligned} & \tilde{b} \circ IT'A = K'A \circ T'b \circ DA \circ IT'A \\ (D_3) \qquad & \phantom{\tilde{b} \circ IT'A} = K'A \circ T'b \circ T'IA \\ (A_1) \qquad & \phantom{\tilde{b} \circ IT'A} = K'A \circ T'I'A \\ (T_1) \qquad & \phantom{\tilde{b} \circ IT'A} = 1_{T'A} \ , \end{aligned}$$

$$\widetilde{b} \circ K T' A = K' A \circ T' b \circ D A \circ K T' A$$

$$\begin{array}{ll}
(\mathrm{D}_4) & = K' A \circ T' b \circ T' K A \circ D T A \circ T D A \\
(\mathrm{A}_2) & = K' A \circ T' K' A \circ T' T' b \circ T' D A \circ T' T b \circ D T A \circ T D A \\
(\mathrm{T}_2) & = K' A \circ K' T' A \circ T' T' b \circ T' D A \circ T' T b \circ D T A \circ T D A \\
(\mathrm{N}K) & = K' A \circ T' b \circ K' T A \circ T' D A \circ T' T b \circ D T A \circ T D A \\
(\mathrm{N}D) & = K' A \circ T' b \circ K' T A \circ T' D A \circ D T' A \circ T T' b \circ T D A \\
(\mathrm{D}_2) & = K' A \circ T' b \circ D A \circ T K' A \circ T T' b \circ T D A \\
 & = \widetilde{b} \circ T \widetilde{b} ,
\end{array}$$

de sorte que $(T' A, \widetilde{b})$ est une $\mathbf{T}$-algèbre.

Inversement, soit $(T' A, \widetilde{b})$ une $\mathbf{T}$-algèbre reliée à sa restriction $b = \widetilde{b} \circ T I' A$ par $K' A \circ T' b \circ D A = \widetilde{b}$. On désignera encore par (A_1) et (A_2) les axiomes d'une $\mathbf{T}$-algèbre:

$$\begin{array}{ll}
(\mathrm{N}I) & b \circ I A = \widetilde{b} \circ T I' A \circ I A = \widetilde{b} \circ I T' A \circ I' A \\
(\mathrm{A}_1) & = I' A
\end{array}$$

et

$$\begin{array}{ll}
 & b \circ K A = \widetilde{b} \circ T I' A \circ K A \\
(\mathrm{N}K) & = \widetilde{b} \circ K T' A \circ T T I' A \\
(\mathrm{A}_2) & = \widetilde{b} \circ T \widetilde{b} \circ T T I' A \\
 & = \widetilde{b} \circ T b \\
(*) & = K' A \circ T' b \circ D A \circ T b
\end{array}$$

On a donc montré que (A, b) est une $\mathbf{D}$-algèbre. ∇

EXEMPLES.

1° Si $\mathbf{T}$ est un triple sur $\mathcal{E}$, les morphismes identiques 1_{TA} définissent une loi distributive ${}_{\mathbf{T}}\mathbf{1} : \mathbf{T} \to \mathbf{1}_{\mathcal{E}}$ ($\mathbf{1}_{\mathcal{E}}$ désigne le triple identique sur $\mathcal{E}$). Une ${}_{\mathbf{T}}\mathbf{1}$-*algèbre est évidemment une* $\mathbf{T}$-*algèbre.*

2° Si $\mathbf{T}'$ est un triple sur $\mathcal{E}$, de la même façon, les $1_{T' A}$ définissent une loi distributive $\mathbf{1}_{\mathbf{T}'} : \mathbf{1}_{\mathcal{E}} \to \mathbf{T}'$. Tout objet A est muni d'une unique $\mathbf{1}_{\mathbf{T}'}$-algèbre triviale $(A, I' A)$.

3° Si $\mathcal{E} = \mathcal{E}ns$, la catégorie des ensembles, si $\mathbf{T}'$ est le triple $\mathbf{P}$ des parties ($\mathbf{P} = (\mathcal{P}, I', K')$ où, pour tout ensemble A,

$$I'A : A \to \mathcal{P}A \qquad \text{et} \qquad K'A : \mathcal{P}\mathcal{P}A \to \mathcal{P}A$$

sont les opérations singleton et réunion), et si $\mathbf{T}$ est un triple sur $\mathcal{E}ns$ tel qu'il existe une loi distributive $\mathbf{D} : \mathbf{T} \to \mathbf{P}$, une $\mathbf{D}$-algèbre est appelée une $\mathbf{T}$-*algèbre non déterministique*. En voici deux exemples:

(i) Soit $\mathbf{T} = \mathbf{N}$ le triple des monoïdes $\mathbf{N} = (N, I, K)$ où, pour tout ensemble A, NA est l'ensemble des mots formés sur A, noté A^* par certains auteurs, où

$$IA : A \to NA \qquad \text{et} \qquad KA : NNA \to NA$$

sont les applications qui à

$$x \in A \qquad \text{et à} \qquad (x_{1,1} \dots x_{1,p_1}) \dots (x_{n,1} \dots x_{n,p_n}) \in NNA$$

associent respectivement les mots

$$x \qquad \text{et} \qquad x_{1,1}\, x_{1,2} \dots x_{1,p_1}\, x_{2,1} \dots x_{n,1} \dots x_{n,p_n}$$

THEOREME I.1.1. *L'application*

$$D_1 A : N\mathcal{P}A \to \mathcal{P}NA : \; X_1 \dots X_n \mapsto \{ (x_1 \dots x_n) \mid x_i \in X_i \}$$

définit une loi distributive $\mathbf{D}_1 : \mathbf{N} \to \mathbf{P}$ *pour laquelle les* $\mathbf{N}$-*algèbres non déterministiques sont les monoïdes non déterministiques.*

PREUVE. Si $b : NA \to \mathcal{P}A$ est une $\mathbf{N}$-algèbre non déterministique, $b(x_1 \dots x_n)$ *s'interprète comme l'ensemble des composés du mot* $x_1 \dots x_n$. Alors les axiomes (A_1) et (A_2) signifient que le seul composé du mot x est x (si $x \in A$) et que, si $(x_{1,1} \dots x_{1,p_1}) \dots (x_{n,1} \dots x_{n,p_n}) \in NNA$,

$$b(x_{1,1} \dots x_{1,p_1} \dots x_{n,p_n}) = \bigsqcup_{y_i \in b(x_{i,1} \dots x_{i,n_i})} b(y_1 \dots y_n)$$

La donnée de b équivaut donc à celle d'un monoïde non déterministique.∇

(ii) Soit $\mathbf{T} = \mathbf{M}$ le triple des actions à droite d'un monoïde M (on a $\mathbf{M} = ((-) \times M, I, K)$ où, pour tout ensemble A,

$$IA : A \to A \times M \qquad \text{et} \qquad KA : A \times M \times M \to A \times M$$

sont les applications qui à $x \in A$ et à $(x, m_1, m_2) \in A \times M \times M$ associent les couples $(x, 1)$ et $(x, m_1 m_2)$, si 1 est l'unité du monoïde M).

THEOREME I.1.2. *L'application*

$$D_2 A : (\mathcal{P} A) \times M \twoheadrightarrow \mathcal{P}(A \times M) : (X, m) \mapsto \{ (x, m) \mid x \in X \}$$

définit une loi distributive $\mathbf{D}_2 : \mathbf{M} \to \mathbf{P}$ *pour laquelle les* $\mathbf{M}$*-algèbres non -déterministiques sont les automates non déterministiques.*

PREUVE. Si $b : A \times M \to \mathcal{P} A$ est une $\mathbf{M}$-algèbre non déterministique, on interprète A comme l'ensemble des états d'une machine et $b(x, m)$ *comme l'ensemble des états possibles dans lesquels la machine peut se mettre après avoir reçu le signal d'entrée* m *dans l'état* x. Alors les axiomes (A_1) et (A_2) signifient que le signal d'entrée unité 1 ne modifie pas l'état de la machine: $b(x, 1) = \{ x \}$, et que, si $(x, m_1, m_2) \in A \times M \times M$,

$$b(x, m_1 m_2) = \bigsqcup_{y \in b(x, m_1)} b(y, m_2).$$

Ce sont exactement les axiomes d'un automate non déterministique. ∇

REMARQUES. La proposition I.1.1 redonne l'équivalence bien connue d'un automate non déterministique b sur A et d'un automate déterministique $\tilde{b}$ sur $\mathcal{P} A$ liés par la relation $\tilde{b}(X, m) = \bigcup_{x \in X} b(x, m)$.

On retrouve, bien sûr, *les automates non déterministiques finis* en prenant pour A un ensemble fini et pour M le monoïde libre associé à un ensemble fini Σ: donc $m \in M$ est un mot construit sur l'alphabet Σ.

4° Soit $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{n\Delta}$ et soit $\mathbf{T}'$ le sous-triple du triple $\mathbf{P}$ suivant: $\mathbf{T}' = ((\text{-}) + 1, \overline{I'}, \overline{K'})$ où, pour tout ensemble A,

$$\overline{I'} A : A \twoheadrightarrow A + 1 \quad \text{et} \quad \overline{K'} A : A + 1 + 1 \twoheadrightarrow A + 1$$

sont respectivement l'injection canonique et la rétraction sur $A + 1$ transformant l'élément ajouté à $A + 1$ en celui ajouté à A. Si $\mathbf{T}$ est un triple sur $\mathcal{E}_{n\Delta}$ tel qu'il existe une loi distributive $\mathbf{D} : \mathbf{T} \to \mathbf{T}'$, une $\mathbf{D}$-algèbre est appelée une $\mathbf{T}$*-algèbre partielle.*

Alors les applications

$$\overline{D}_1 A : N(A + 1) \twoheadrightarrow (NA) + 1 \quad \text{et} \quad \overline{D}_2 A : (A + 1) \times M \twoheadrightarrow (A \times M) + 1$$

(qui d'une part sont l'identité sur NA et $A \times M$ et d'autre part assignent 0 (élément de 1) à tout mot construit sur $A + 1$ qui contient au moins un 0 et à tout couple $(0, m)$ de $(A + 1) \times M$) définissent des sous-lois distributives des lois distributives D_1 et D_2 (exemples 3(i) et 3 (ii)). On obtient donc en corollaire des théorèmes I.1.1 et I.1.2:

COROLLAIRE I.1.1. *Les* **N**-*algèbres partielles et les* **M**-*algèbres partielles définies par* $\overline{\mathbf{D}}_1$ *et* $\overline{\mathbf{D}}_2$ *sont les monoïdes partiels et les automates partiels.*

5° Soit $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{ns}$ et soit $\mathbf{M}' = (M' \times (-), I', K')$ le triple des actions à gauche d'un monoïde M'.

THEOREME I.1.3. *L'isomorphisme canonique*

$$D_3 A : (M' \times A) \times M \longrightarrow M' \times (A \times M)$$

définit une loi distributive $\mathbf{D}_3 : \mathbf{M} \to \mathbf{M}'$ *et les* $\mathbf{D}_3$-*algèbres sont les automates avec entrée et sortie (ou automates de Mealy).*

PREUVE. Soit $b : A \times M \to M' \times A$ une $\mathbf{D}_3$-algèbre; on considère à nouveau A comme l'ensemble des états d'une machine; si

$$b_1 : A \times M \longrightarrow M' \qquad \text{et} \qquad b_2 : A \times M \longrightarrow A$$

sont les deux projections de b, on interprète un élément m de M comme un signal d'entrée agissant sur la machine à l'état x en la faisant passer à l'état $b_2(x, m)$ et en produisant le signal de sortie $b_1(x, m)$. L'axiome (A_1) signifie alors que le signal d'entrée unité 1 ne modifie pas l'état de la machine et produit le signal de sortie 1: $b(x, 1) = (1, x)$; si $(x, m_1, m_2) \in A \times M \times M$, l'axiome (A_2) signifie que le signal d'entrée $m_1 m_2$ agit sur la machine à l'état x en la faisant passer à l'état $b_2(x, m_1 m_2) = b_2(b_2(x, m_1), m_2)$ et en produisant le signal de sortie

$$b_1(x, m_1 m_2) = b_1(x, m_1)\, b_1(b_2(x, m_1), m_2).$$

Il s'agit bien là d'un automate avec entrée et sortie, b_1 et b_2 étant les fonctions d'entrée et de transition. ∇

De façon analogue à l'exemple 3 (ii), l'application

$$D'_2 A : M' \times \mathcal{P} A \longrightarrow \mathcal{P}(M' \times A) : (m', X) \longmapsto \{(m', x) \mid x \in X\}$$

définit une loi distributive $\mathbf{D}'_2 : \mathbf{M}' \to \mathbf{P}$, de sorte que, si l'on se réfère à 0.6.c , $\mathcal{P} \circ (M' \times (-))$ est l'endofoncteur du triple $\mathbf{P} \otimes_{\mathbf{D}'_2} \mathbf{M}'$ composé des triples $\mathbf{M}'$ et $\mathbf{P}$.

THEOREME I.1.4. *L'application*

$$D_4 A : \mathcal{P}(M' \times A) \times M \longrightarrow \mathcal{P}(M' \times (A \times M)) :$$
$$(X, m) \longmapsto \{(m', (x, m)) \mid (m', x) \in X\}$$

définit une loi distributive $\mathbf{D}_4 : \mathbf{M} \to \mathbf{P} \otimes_{\mathbf{D}'_2} \mathbf{M}'$ *et les* $\mathbf{D}_4$*-algèbres* $b : A \times M \to \mathcal{P}(M' \times A)$ *sont les automates de Mealy non déterministiques.*

6° Enfin, mentionnons le fait que, si $\mathbf{T}$ est un triple sur $\mathcal{E}ns$, la donnée de n $\mathbf{T}$-algèbres, sans aucun lien entre elles sinon qu'elles sont sur un même ensemble A, est équivalente à la donnée d'une $\mathbf{D}_5$-algèbre sur A, où $\mathbf{D}_5 : \mathbf{T} \to \mathbf{T}'$ est la loi distributive définie par l'application

$$D_5 A = \langle p_1, \dots, p_n \rangle : T(A^n) \longrightarrow (TA)^n$$

(si $p_i : A^n \to A$ est la $\mathrm{i}^{\text{ème}}$ projection), $\mathbf{T}'$ étant le triple $((-)^n, (-)^i, (-)^\delta)$ où $n \xrightarrow{i} 1$ et $n \xrightarrow{\delta} n^2$ sont les applications finale et diagonale. Si $b_1 : TA \to A, \dots, b_n : TA \to A$ sont n $\mathbf{T}$-algèbres, $\langle b_1, \dots, b_n \rangle : TA \to A^n$ est une $\mathbf{D}_5$-algèbre, et inversement, si $b : TA \to A^n$ est une $\mathbf{D}_5$-algèbre, l'application $p_i \circ b : TA \to A$ est une $\mathbf{T}$-algèbre pour tout $i \leqslant n$.

Si $\mathbf{D} : \mathbf{T} \to \mathbf{T}'$ est une loi distributive sur $\mathcal{E}$, nous définissons *dans un premier temps* une catégorie de $\mathbf{D}$-algèbres notée $\mathcal{A}lg_1 \mathbf{D}$ dont les objets sont les $\mathbf{D}$-algèbres et les morphismes les

$$f : (A_1, b_1) \longrightarrow (A_2, b_2),$$

où $f : A_1 \to A_2$ est un morphisme de $\mathcal{E}$ tel que $T'f \circ b_1 = b_2 \circ Tf$.

On met en évidence les foncteurs $U^{\mathbf{D}}$, ${}^{\mathbf{D}}F$ et $L^{\mathbf{D}}$ suivants:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}lg_1 \mathbf{D} \arrow[rr, dashed, "L^{\mathbf{D}}"] \arrow[d, dashed, "U^{\mathbf{D}}"] \arrow[drr, "{}^{\mathbf{D}}U"] & & \mathcal{A}lg\, \widetilde{\mathbf{T}}' \cong \mathcal{A}lg\, \mathbf{T}' \otimes_{\mathbf{D}} \mathbf{T} \arrow[d, shift left, "U^{\widetilde{\mathbf{T}}'}"] \\
\mathcal{E} \arrow[u, shift left, bend left, "F^{\mathbf{D}}"] \arrow[rr, shift left, "F^{\mathbf{T}}"] & & \mathcal{A}lg\, \mathbf{T} \arrow[ll, shift left, "U^{\mathbf{T}}"] \arrow[u, shift left, "F^{\widetilde{\mathbf{T}}'}"] \arrow[ull, dashed, "{}^{\mathbf{D}}F"]
\end{tikzcd}$$

– Le foncteur $U^{\mathbf{D}} : \mathcal{A}lg_1\,\mathbf{D} \to \mathcal{E}$ est le foncteur d'oubli qui à la $\mathbf{D}$-algèbre (A, b) associe l'objet A.

– Le foncteur ${}^{\mathbf{D}}F : \mathcal{A}lg\,\mathbf{T} \to \mathcal{A}lg_1\,\mathbf{D}$ associe à la $\mathbf{T}$-algèbre (A, b) la $\mathbf{D}$-algèbre $(A, I'A \circ b)$. On définit donc un foncteur $F^{\mathbf{D}} : \mathcal{E} \to \mathcal{A}lg_1\,\mathbf{D}$, égal au composé ${}^{\mathbf{D}}F \circ F^{\mathbf{T}}$, qui à l'objet A associe la $\mathbf{D}$-algèbre $(TA, I'TA \circ KA)$.
$U^{\mathbf{D}}$ et ${}^{\mathbf{D}}F$ laissent invariants les morphismes, alors que $F^{\mathbf{D}}$ transforme le morphisme f de $\mathcal{E}$ en Tf.

– Le foncteur $L^{\mathbf{D}} : \mathcal{A}lg_1\,\mathbf{D} \to \mathcal{A}lg\,\tilde{\mathbf{T}}'$ associe à la $\mathbf{D}$-algèbre (A, b) la $\tilde{\mathbf{T}}'$-algèbre formée du couple $((T'A, K'A \circ T'b \circ DA), (T'A, K'A))$ (voir la proposition I.1.1). Ceci, par projection, définit un foncteur

$$ {}^{\mathbf{D}}U : \mathcal{A}lg_1\,\mathbf{D} \longrightarrow \mathcal{A}lg\,\mathbf{T} : (A, b) \longmapsto (T'A, K'A \circ T'b \circ DA). $$

De plus, $L^{\mathbf{D}}$ et ${}^{\mathbf{D}}U$ transforment le morphisme f de $\mathcal{A}lg_1\,\mathbf{D}$ en $T'f$.

On a évidemment les égalités $L^{\mathbf{D}} \circ {}^{\mathbf{D}}F = F^{\tilde{\mathbf{T}}'}$ *et* ${}^{\mathbf{D}}F \circ F^{\mathbf{T}} = F^{\mathbf{D}}$ (par définition de $F^{\mathbf{D}}$!).

On peut maintenant donner une première version catégorique de la proposition I.1.1:

PROPOSITION I.1.2. *$\mathcal{A}lg_1\,\mathbf{D}$ s'identifie à la sous-catégorie de $\mathcal{A}lg\,\tilde{\mathbf{T}}'$ définie par le produit fibré qui suit* (Q_2 est défini dans 0.6.d):

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}lg_1\,\mathbf{D} \arrow[r, hook, "L^{\mathbf{D}}"] \arrow[d, "U^{\mathbf{D}}"'] & \mathcal{A}lg\,\tilde{\mathbf{T}}' = \mathcal{A}lg\,\mathbf{T}' \otimes_{\mathbf{D}} \mathbf{T} \arrow[d, "Q_2"] \\
\mathcal{E} \arrow[r, hook, "F^{\mathbf{T}'}"'] & \mathcal{A}lg\,\mathbf{T}'
\end{tikzcd}$$

On n'a malheureusement pas les adjonctions $F^{\mathbf{D}} \dashv U^{\mathbf{D}}$ et ${}^{\mathbf{D}}F \dashv {}^{\mathbf{D}}U$ (bien que ${}^{\mathbf{D}}U \circ {}^{\mathbf{D}}F = \tilde{\mathbf{T}}'$, $L^{\mathbf{D}}$ n'est pas un foncteur de comparaison sémantique). Ceci s'explique par le fait que les morphismes de $\mathcal{A}lg_1\,\mathbf{D}$ sont trop stricts. La catégorie $\mathcal{A}lg_2\,\mathbf{D}$ définie dans I.3 possédera ces propriétés.

On considérera le problème des limites dans I.4 pour les $\mathbf{T}$-algèbres non déterministiques.

I.2 Composition des D-algèbres.

DEFINITION I.2.1. Si $\mathbf{D}: \mathbf{T} \to \mathbf{T}'$ et $\mathbf{D}': \mathbf{T}' \to \mathbf{T}''$ sont deux lois distributives sur $\mathcal{E}$, on dira qu'elles sont $\mathbf{D}''$-*compatibles* s'il existe une loi distributive $\mathbf{D}'': \mathbf{T} \to \mathbf{T}''$ telle que le diagramme (D) qui suit commute:

$$\begin{tikzcd}
T \circ T' \circ T'' \arrow[r, "D \circ T''"] \arrow[d, "T \circ D'"'] & T' \circ T \circ T'' \arrow[r, "T' \circ D''"] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{D})"] & T' \circ T'' \circ T \arrow[d, "D' \circ T"] \\
T \circ T'' \circ T' \arrow[r, "D'' \circ T'"'] & T'' \circ T \circ T' \arrow[r, "T'' \circ D"'] & T'' \circ T' \circ T
\end{tikzcd}$$

Cela équivaut à dire que

$$(\mathbf{T}, (T'', D''), I'', K'') \xrightarrow{I'} ((T', D), D') \xleftarrow{K'} ((T', D), D') \circ ((T', D), D')$$

est une monade dans une 2-catégorie de lois distributives, en l'occurence dans $\overrightarrow{\mathfrak{Mon}}\ \overleftarrow{\mathfrak{T}_n}$ (voir 0.6.b): en effet, le fait que $(\mathbf{T}, (T'', D''), I'', K'')$ et $(\mathbf{T}, (T', D), I', K')$ soient des monades dans $\overleftarrow{\mathfrak{T}_n}$ et $(\mathbf{T}'', (T', D'), I', K')$ une monade dans $\overrightarrow{\mathfrak{T}_n}$ signifie que $\mathbf{D}'': \mathbf{T} \to \mathbf{T}''$, $\mathbf{D}: \mathbf{T} \to \mathbf{T}'$ et $\mathbf{D}': \mathbf{T}' \to \mathbf{T}''$ sont des lois distributives, et le fait que

$$D': (T', D) \circ (T'', D'') \longrightarrow (T'', D'') \circ (T', D)$$

soit un 2-morphisme de $\overleftarrow{\mathfrak{T}_n}$ (de sorte que $((T', D), D'): \mathbf{D}'' \to \mathbf{D}''$ soit un morphisme de $\overrightarrow{\mathfrak{Mon}}\ \overleftarrow{\mathfrak{T}_n}$) donne l'axiome (D) qui précède.

On suppose dans toute la suite que l'on a trois lois distributives

$$\mathbf{D}: \mathbf{T} \to \mathbf{T}', \qquad \mathbf{D}': \mathbf{T}' \to \mathbf{T}'', \qquad \mathbf{D}'': \mathbf{T} \to \mathbf{T}''$$

sur $\mathcal{E}$, les deux premières étant $\mathbf{D}''$-compatibles (excepté dans le corollaire I.2.1 et les exemples qui le suivent).

THEOREME I.2.1. *Si* $b: TA \to T'A$ *est une* $\mathbf{D}$-*algèbre et* $b': T'A \to T''A$ *une* $\mathbf{D}'$-*algèbre qui sont* $(\mathbf{D}, \mathbf{D}', \mathbf{D}'')$-*compatibles* (en ce sens que le diagramme $(\tilde{\mathrm{A}})$ qui suit commute:

$$\begin{tikzcd}
T T' A \arrow[r, "DA"] \arrow[dd, "Tb'"'] & T' T A \arrow[r, "T'b"] \arrow[dd, phantom, "(\tilde{\mathrm{A}})"] & T' T' A \arrow[dr, "T'b'"] & \\
 & & & T' T'' A \arrow[dl, "D'A"] \\
T T'' A \arrow[r, "D''A"'] & T'' T A \arrow[r, "T''b"'] & T'' T' A &
\end{tikzcd}$$
),

alors $TA \xrightarrow{b} T'A \xrightarrow{b'} T''A$ *est une* $\mathbf{D}''$*-algèbre.*

On dit que $(A, b' \circ b)$ est la $\mathbf{D}''$*-composée* de (A, b) *et* (A, b') et on la note $(A, b')\otimes(A, b)$ (La preuve est triviale).

REMARQUE. Si (A, b) est une $\mathbf{D}$-algèbre et (A, b') une $\mathbf{D}'$-algèbre qui sont $(\mathbf{D}, \mathbf{D}', \mathbf{D}'')$-compatibles, alors la $\mathbf{D}'$-algèbre $b' : T'A \to T''A$ définit un morphisme de $\mathbf{T}$-algèbres

$$b' : {}^{\mathbf{D}}U(A, b) \longrightarrow {}^{\mathbf{D}''}U(A, b' \circ b)$$

(voir à la fin de I.1 la définition des foncteurs ${}^{\mathbf{D}}U : \mathcal{A}\ell g_1 \mathbf{D} \to \mathcal{A}\ell g \mathbf{T}$ et ${}^{\mathbf{D}''}U : \mathcal{A}\ell g_1 \mathbf{D}'' \to \mathcal{A}\ell g \mathbf{T}$); il suffit pour s'en convaincre de considérer le diagramme externe suivant dont la commutativité est due à celle des deux diagrammes qui lui sont internes:

$$\begin{tikzcd}
TT'A \arrow[r, "DA"] \arrow[ddd, "Tb'"'] & T'TA \arrow[rr, "T'b"] \arrow[dd, phantom, "(\tilde{\mathrm{A}})"] & & T'T'A \arrow[rr, "K'A"] \arrow[d, "T'b'"] & & T'A \arrow[ddd, "b'"] \\
& & & T'T''A \arrow[dd, "D'A"] \arrow[rr, phantom, "(\mathrm{A}_2)"] & & \\
& & & & & \\
TT''A \arrow[r, "D''A"'] & T''TA \arrow[rr, "T''b"'] & & T''T'A \arrow[r, "T''b'"'] & T''T''A \arrow[r, "K''A"'] & T''A
\end{tikzcd}$$

EXEMPLE. *On peut composer les automates de Mealy* à condition de faire apparaître l'isomorphisme entre le triple des actions à gauche et le triple des actions à droite du monoïde M' : si

$$b : A \times M \longrightarrow M' \times A \qquad \text{et} \qquad b' : A \times M' \longrightarrow M'' \times A$$

sont deux automates de Mealy (les lois distributives en question vérifiant l'axiome (D)), alors l'application

$$A \times M \xrightarrow{b} M' \times A \sim A \times M' \xrightarrow{b'} M'' \times A$$

est un automate de Mealy si les automates (A, b) et (A, b') vérifient l'axiome $(\tilde{\mathrm{A}})$, c'est-à-dire si l'on a les égalités:

$$b'_1(x, m') = b'_1(b_2(x, m), m'),$$

$$b_2(b'_2(x, m'), m) = b'_2(b_2(x, m), m'),$$

$$b_1(b'_2(x, m'), m) = b_1(x, m),$$

où $(m', x, m) \in M' \times A \times M$ et où b_1, b'_1 d'une part, b_2, b'_2 d'autre part, sont les premières et deuxièmes projections de b et b'. Toutefois, je ne sais guère comment interpréter la compatibilité écrite ci-dessus. De plus, il semble que cette composition n'ait rien à voir avec la composition connue des automates de Mealy: si $b : A \times M \to M' \times A$ et $b' : A' \times M' \to M'' \times A'$ sont deux automates de Mealy (sans aucune relation de compatibilité), on a coutume d'appeler composé de (A, b) et (A', b') l'automate $A \times A' \times M \to M'' \times A \times A'$:

$$(x, x', m) \longmapsto (b'_1(x', b_1(x, m)), b_2(x, m), b'_2(x', b_1(x, m))).$$

COROLLAIRE I.2.1. *Soit* $\mathbf{D} : \mathbf{T} \to \mathbf{T}'$ *une loi distributive sur* $\mathcal{E}$. *Soient de plus* $b : TA \to T'A$ *une* $\mathbf{D}$*-algèbre et* $b' : T'A \to A$ *une* $\mathbf{T}'$*-algèbre* $\mathbf{D}$*-compatibles:* $b \circ Tb' = T'b' \circ T'b \circ DA$; *alors* $TA \xrightarrow{b} T'A \xrightarrow{b'} A$ *est une* $\mathbf{T}$*-algèbre.*

PREUVE. Il est trivial de vérifier que $\mathbf{D}$ et ${}_{\mathbf{T}'}\mathbf{1}$ (voir le premier exemple de $\mathbf{D}$-algèbres dans I.1) sont ${}_{\mathbf{T}}\mathbf{1}$-compatibles et que l'égalité $b \circ Tb' = T'b' \circ T'b \circ DA$ signifie que (A, b) et (A, b') sont $(\mathbf{D}, {}_{\mathbf{T}'}\mathbf{1}, {}_{\mathbf{T}}\mathbf{1})$-compatibles (l'axiome $(\tilde{A})$ est vrai); donc la $\mathbf{T}$-algèbre $(A, b' \circ b)$ est leur ${}_{\mathbf{T}}\mathbf{1}$-composée $(A, b') \otimes (A, b)$. ∇

REMARQUES. 1° Le corollaire I.2.1 signifie que $(A, b') \otimes (-)$ est un opérateur qui permet d'associer une $\mathbf{T}$-algèbre en A à toute $\mathbf{D}$-algèbre en A qui est $\mathbf{D}$-compatible avec la $\mathbf{T}'$-algèbre (A, b').

2° Comme dans la remarque du théorème I.2.1, si (A, b) est une $\mathbf{D}$-algèbre et (A, b') une $\mathbf{T}'$-algèbre $\mathbf{D}$-compatibles, alors la $\mathbf{T}'$-algèbre $b' : T'A \to A$ définit un morphisme de $\mathbf{T}$-algèbres $b' : {}^{\mathbf{D}}U(A, b) \to (A, b' \circ b)$: on a l'égalité $b' \circ b \circ Tb' = b' \circ K'A \circ T'b \circ DA$ qui signifie (en utilisant l'axiome d'associativité de la $\mathbf{T}'$-algèbre (A, b')) que l'on a l'égalité $b' \circ b \circ Tb' = b' \circ T'(b' \circ b) \circ DA$, i.e. $b' : \tilde{T}'(A, b' \circ b) \to (A, b' \circ b)$ est un morphisme de $\mathbf{T}$-algèbres, où $\tilde{\mathbf{T}}'$ est le relèvement sur $\mathcal{A}\ell g\,\mathbf{T}$ de $\mathbf{T}'$, rappelé dans 0.6.c. Donc la $\mathbf{T}$-algèbre $(A, b' \circ b)$ et la $\mathbf{T}'$-algèbre (A, b') sont $\mathbf{D}$-compatibles au sens de 0.6.d .

EXEMPLE. Supposons que $\mathbf{T}'$ soit le triple $\mathbf{P}$ des parties sur $\mathcal{E}_{n\Delta}$, que $\mathbf{D}: \mathbf{T} \to \mathbf{P}$ soit une loi distributive sur $\mathcal{E}_{n\Delta}$, et que A soit muni d'une structure de treillis complet (l'opération $sup_A : \mathcal{P} A \to A$ est donc une $\mathbf{P}$-algèbre et l'ordre de A est donné par: $x \leqslant y$ ssi $sup_A \{x, y\} = y$), alors cette structure sur A permet d'associer, à toute $\mathbf{T}$-algèbre non déterministique $\mathbf{D}$-compatible avec sup_A, une $\mathbf{T}$-algèbre elle aussi $\mathbf{D}$-compatible avec sup_A.

Ainsi, si $\mathbf{T} = \mathbf{N}$ est le triple des monoïdes (donc $\mathbf{D} = \mathbf{D}_1$, défini dans le théorème I.1.1) et si $b : NA \to \mathcal{P} A$ est un monoïde non déterministique compatible avec sup_A (et donc avec l'ordre de A):

$$b(sup\, X_1 \dots sup\, X_n) = \{ sup_A\, b(x_1 \dots x_n) \mid x_i \in X_i \},$$

où $X_1 \dots X_n \in N \mathcal{P} A$, alors l'application

$$sup_A \circ b : NA \to A : \ x_1 \dots x_n \longmapsto sup_A\, b(x_1 \dots x_n)$$

définit une structure de monoïde sur A elle aussi compatible avec sup_A :

$$sup_A X_1 \circ \dots \circ sup_A X_n = sup_A \{ x_1 \circ \dots \circ x_n \mid x_i \in X_i \},$$

où le symbole $\circ$ désigne la loi de composition du monoïde $(A, sup_A \circ b)$.

De même, si $\mathbf{T} = \mathbf{M}$ est le triple des actions à droite d'un monoïde M (donc $\mathbf{D} = \mathbf{D}_2$, défini dans le théorème I.1.2) et si $b : A \times M \to \mathcal{P} A$ est un automate non déterministique compatible avec sup_A :

$$b(sup_A X, m) = \{ sup_A\, b(x, m) \mid x \in X \}, \qquad \text{où} \qquad (X, m) \in \mathcal{P} A \times M,$$

alors l'application

$$\overline{b} = sup_A \circ b : A \times M \longrightarrow A : (x, m) \longmapsto sup_A\, b(x, m)$$

est un automate (déterministique) lui aussi compatible avec sup_A :

$$\overline{b}(sup_A X, m) = sup_A \{ \overline{b}(x, m) \mid x \in X \}.$$

Considérons le second cas particulier du théorème I.2.1 où la $\mathbf{D}$-algèbre est triviale, c'est-à-dire qu'elle s'écrit sous la forme $TA \xrightarrow{b} A \xrightarrow{I'A} T'A$, où (A, b) est une $\mathbf{T}$-algèbre; $(A, b') \otimes (A, I'A \circ b)$ est alors la $\mathbf{D}''$-algèbre triviale $(A, I''A \circ b)$. De plus, dans ce cas la $\mathbf{D}'$-algèbre $b' : T'A \longrightarrow T''A$ définit un morphisme de $\mathbf{T}$-algèbres

$b' : \tilde{T}'(A, b) \to \tilde{T}''(A, b)$: on a l'égalité $T''b \circ D''A \circ Tb' = b' \circ T'b \circ DA$ (en notant $\tilde{\mathbf{T}}'$ et $\tilde{\mathbf{T}}''$ les relèvements sur $\mathcal{Alg}\,\mathbf{T}$ rappelés dans 0.6.c).

En d'autres termes, la $\mathbf{D}'$-algèbre $b' : T'A \to T''A$ définit une $\tilde{\mathbf{D}}'$-algèbre $b' : \tilde{T}'(A, b) \to \tilde{T}''(A, b)$, où $\tilde{\mathbf{D}}' : \tilde{\mathbf{T}}' \to \tilde{\mathbf{T}}''$ est un relèvement de la loi distributive $\mathbf{D}' : \mathbf{T}' \to \mathbf{T}''$ sur $\mathcal{Alg}\,\mathbf{T}$: pour toute $\mathbf{T}$-algèbre (A, b), le morphisme de $\mathbf{T}$-algèbres

$$\tilde{D}'(A, b) : \tilde{T}'\tilde{T}''(A, b) \longrightarrow \tilde{T}''\tilde{T}'(A, b)$$

est défini par le morphisme $D'A : T'T''A \to T''T'A$ dans $\mathcal{E}$.

Plus généralement, on a le résultat suivant:

THEOREME I.2.2. *Il y a équivalence entre la donnée de trois lois distributives sur* $\mathcal{E}$: $\mathbf{D} : \mathbf{T} \to \mathbf{T}'$, $\mathbf{D}' : \mathbf{T}' \to \mathbf{T}''$, $\mathbf{D}'' : \mathbf{T} \to \mathbf{T}''$ *telles que les deux premières soient* $\mathbf{D}''$*-compatibles, et la donnée d'une loi distributive* $\tilde{\mathbf{D}}' : \tilde{\mathbf{T}}' \to \tilde{\mathbf{T}}''$ *sur* $\mathcal{Alg}\,\mathbf{T}$ *qui soit un relèvement de* $\mathbf{D}' : \mathbf{T}' \to \mathbf{T}''$. *De plus, une* $\tilde{\mathbf{D}}'$*-algèbre est la donnée d'une* $\mathbf{T}$*-algèbre* (A, b) *et d'une* $\mathbf{D}'$*-algèbre* (A, b') *telles que* $T''b \circ D''A \circ Tb' = b' \circ T'b \circ DA$ (c'est ce qu'on appellera l'axiome (A)).

PREUVE. On utilise l'axiome (D) pour exprimer la naturalité de $\tilde{D}' : \tilde{T}' \circ \tilde{T}'' \to \tilde{T}'' \circ \tilde{T}'$ obtenue par la commutativité du diagramme externe qui suit ($b : TA \to A$ étant une $\mathbf{T}$-algèbre):

$$\begin{tikzcd}
TT'T''A \arrow[r, "DT''A"] \arrow[d, "TD'A"'] \arrow[rr, phantom, "(D)", shift right=4ex] & T'TT''A \arrow[r, "T'D''A"] & T'T''TA \arrow[r, "T'T''b"] \arrow[d, "D'TA"] \arrow[dr, phantom, "(ND')"] & T'T''A \arrow[d, "D'A"] \\
TT''T'A \arrow[r, "D''T'A"'] & T''TT'A \arrow[r, "T''DA"'] & T''T'TA \arrow[r, "T''T'b"'] & T''T'A
\end{tikzcd}$$

Inversement si $\tilde{\mathbf{D}}' : \tilde{\mathbf{T}}' \to \tilde{\mathbf{T}}''$ relève $\mathbf{D}' : \mathbf{T}' \to \mathbf{T}''$ sur $\mathcal{Alg}\,\mathbf{T}$, on utilise le fait que

$$DA = \tilde{T}'KA \circ TT'IA \qquad \text{et} \qquad D''A = \tilde{T}''KA \circ TT''IA$$

(voir 0.6.c) pour obtenir l'axiome (D). ∇

Si, comme on l'a vu, la $\mathbf{D}''$-algèbre composée $(A, b') \otimes (A, I'A \circ b)$, associée à la $\tilde{\mathbf{D}}'$-algèbre $b' : \tilde{T}'(A, b) \to \tilde{T}''(A, b)$, est triviale (et égale à $(A, I''A \circ b)$), l'opérateur $(A, b')\otimes(\cdot)$ se comportant comme une identité sur les **T**-algèbres, on a cependant le résultat suivant:

THEOREME I.2.3. *Si l'on est toujours dans les hypothèses suivant la définition I.2.1, la loi distributive* $\mathbf{D}'' : \mathbf{T} \to \mathbf{T}''$ *se prolonge en une loi distributive* $\tilde{\mathbf{D}}'' : \mathbf{T}' \otimes_{\mathbf{D}} \mathbf{T} \to \mathbf{T}''$ *sur* $\mathfrak{S}$ *et, si* $b : TA \to A$ *est une* **T***-algèbre et* $b' : T'A \to T''A$ *une* **D'***-algèbre définissant une* $\tilde{\mathbf{D}}'$*-algèbre* (l'axiome (A) du théorème I.2.2 est vérifié), *alors* $T'TA \xrightarrow{T'b} T'A \xrightarrow{b'} T''A$ *est une* $\tilde{\mathbf{D}}''$*-algèbre* que l'on notera encore $(A, b')\otimes(A, b)$ et que l'on appellera la $\tilde{\mathbf{D}}''$*-composée* de (A, b) et (A, b').

PREUVE. La transformation naturelle $\tilde{D}'' : T' \circ T \circ T'' \to T'' \circ T' \circ T$ est définie par le composé

$$T' \circ T \circ T'' \xrightarrow{T' \circ D''} T' \circ T'' \circ T \xrightarrow{D' \circ T} T'' \circ T' \circ T .$$

Montrons que l'axiome (D_4) des lois distributives est vrai pour $\tilde{\mathbf{D}}''$: c'est le seul qui ne soit pas trivial. On rappelle pour cela que la multiplication du triple composé $\mathbf{T}' \otimes_{\mathbf{D}} \mathbf{T}$ est donnée par

$$\bar{\bar{K}} = T' \circ T \circ T' \circ T \xrightarrow{T' \circ D \circ T} T' \circ T' \circ T \circ T \xrightarrow{T' \circ T' \circ K} T' \circ T' \circ T \xrightarrow{K' \circ T} T' \circ T .$$

On a en utilisant la convention 0.7:

$$\tilde{D}''.(\bar{\bar{K}} \circ T'') =$$

$$= [(D' \circ T).(T' \circ D'')].\ [(K' \circ T \circ T'').(T' \circ T' \circ K \circ T'').(T' \circ D \circ T \circ T'')]$$

(NK') $\quad = (D' \circ T).(K' \circ T'' \circ T).(T' \circ T' \circ D'').(T' \circ T' \circ K \circ T'').(T' \circ D \circ T \circ T'')$

(D_4) $\quad = [T'' \circ K' \circ T).(D' \circ T' \circ T).(T' \circ D' \circ T)]$
$\quad .\ [(T' \circ T' \circ D'').(T' \circ T' \circ K \circ T'').(T' \circ D \circ T \circ T'')]$

(D_4) $\quad = [(T'' \circ K' \circ T).(D' \circ T' \circ T).(T' \circ D' \circ T).(T' \circ T' \circ T'' \circ K)]$
$\quad .\ [(T' \circ T' \circ D'' \circ T).(T' \circ T' \circ T \circ D'').(T' \circ D \circ T \circ T'')]$

(ND') $\quad = [(T'' \circ K' \circ T).(D' \circ T' \circ T).(T' \circ T'' \circ T' \circ K).(T' \circ D' \circ T \circ T)]$
$\quad .\ [(T' \circ T' \circ D'' \circ T).(T' \circ T' \circ T \circ D'').(T' \circ D \circ T \circ T'')]$

(ND') $\quad = [(T'' \circ K' \circ T).(T'' \circ T' \circ T' \circ K).(D' \circ T' \circ T \circ T).(T' \circ D' \circ T \circ T)]$
$\quad .\ [(T' \circ T' \circ D'' \circ T).(T' \circ T' \circ T \circ D'').(T' \circ D \circ T \circ T'')]$

(ND) $\quad = [(T'' \circ K' \circ T).(T'' \circ T' \circ T' \circ K).(D' \circ T' \circ T \circ T).(T' \circ D' \circ T \circ T)]$
$\quad .\ [(T' \circ T' \circ D'' \circ T).(T' \circ D \circ T'' \circ T).(T' \circ T \circ T' \circ D'')]$

$$\begin{aligned}
(\mathrm{D}) \quad &= [(T''\circ K'\circ T).(T''\circ T'\circ T'\circ K).(D'\circ T'\circ T\circ T).(T'\circ T''\circ D\circ T)] \\
&\qquad . [(T'\circ D''\circ T'\circ T).(T'\circ T\circ D'\circ T).(T'\circ T\circ T'\circ D'')] \\
(\mathrm{N}D') \quad &= [(T''\circ K'\circ T).(T''\circ T'\circ T'\circ K).(T''\circ T'\circ D\circ T).(D'\circ T\circ T'\circ T)] \\
&\qquad . [(T'\circ D''\circ T'\circ T).(T'\circ T\circ D'\circ T).(T'\circ T\circ T'\circ D'')] \\
&= [T''\circ [(K'\circ T).(T'\circ T'\circ K).(T'\circ D\circ T)]] \\
&\qquad . [[(D'\circ T).(T'\circ D'')]\circ(T'\circ T)]. [(T'\circ T)\circ[(D'\circ T).(T'\circ D'')]] \\
&= (T''\circ \overset{=}{K}). [\widetilde{D}''\circ(T'\circ T)]. [(T'\circ T)\circ\widetilde{D}''].
\end{aligned}$$

Il reste à montrer que, dans les hypothèses du théorème, $(A, b'\circ T'b)$ est une $\widetilde{\mathbf{D}}''$-algèbre. On rappelle que le composé $\overset{=}{I} = 1_{\mathcal{E}} \xrightarrow{I'} T' \xrightarrow{T'\circ I} T'\circ T$ est l'unité de $\mathbf{T}'\otimes_{\mathbf{D}}\mathbf{T}$. Alors

$$(b'\circ T'b)\circ \overset{=}{I} A = b'\circ T'b\circ T'IA\circ I'A = b'\circ I'A = I''A$$

et

$$\begin{aligned}
&b'\circ Tb'\circ \overset{=}{K} A = \\
&= b'\circ T'b\circ K'TA\circ T'T'KA\circ T'DTA \\
(\mathrm{N}K') \quad &= b'\circ K'A\circ T'T'b\circ T'T'KA\circ T'DTA \\
(\mathrm{A}_2) \quad &= K''A\circ T''b'\circ D'A\circ T'b'\circ T'T'b\circ T'T'KA\circ T'DTA \\
(\mathrm{A}_2) \quad &= K''A\circ T''b'\circ D'A\circ T'b'\circ T'T'b\circ T'T'Tb\circ T'DTA \\
(\mathrm{N}D) \quad &= K''A\circ T''b'\circ D'A\circ T'b'\circ T'T'b\circ T'DA\circ T'TT'b \\
(\mathrm{A}) \quad &= K''A\circ T''b'\circ D'A\circ T'T''b\circ T'D''A\circ T'Tb'\circ T'TT'b \\
(\mathrm{N}D') \quad &= K''A\circ T''b'\circ T''T'b\circ D'TA\circ T'D''A\circ T'Tb'\circ T'TT'b \\
&= K''A\circ T''(b'\circ T'b)\circ \widetilde{D}''A\circ T'T(b'\circ T'b) . \nabla
\end{aligned}$$

REMARQUES. 1° Dans le cas particulier où $\mathbf{D}' = {}_{\mathbf{T}'}\mathbf{1}$ (donc $\mathbf{D}'' = {}_{\mathbf{T}}\mathbf{1}$ et $\widetilde{\mathbf{D}}'' = {}_{\mathbf{T}'\otimes_{\mathbf{D}}\mathbf{T}}\mathbf{1}$), le théorème I.2.3 signifie que, si (A, b') est une $\mathbf{T}'$-algèbre, l'opérateur $(A, b')\otimes(-)$ permet de prolonger toute $\mathbf{T}$-algèbre (A, b), $\mathbf{D}$-compatible avec (A, b') au sens de 0.6.d, en la $\mathbf{T}'\otimes_{\mathbf{D}}\mathbf{T}$-algèbre $(A, b'\circ T'b)$ introduite par BECK, que nous avons notée ici $(A, b')\otimes(A, b)$ et que nous avons appelée la $\mathbf{T}'\otimes_{\mathbf{D}}\mathbf{T}$-*composée* de (A, b) et (A, b').

2° Sans doute le résultat précédent se prolonge-t-il aux $\mathbf{D}$-algèbres : si (A, b) est une $\mathbf{D}$-algèbre et (A, b') une $\mathbf{D}'$-algèbre $(\mathbf{D}, \mathbf{D}', \mathbf{D}'')$-compatibles, on peut prolonger leur $\mathbf{D}''$-composée

$$(A, b' \circ b) = (A, b') \otimes (A, b)$$

en une $\tilde{\mathbf{D}}''$-algèbre $(A, b' \circ K'A \circ T'b)$, appelée leur $\tilde{\mathbf{D}}''$-*composée* et notée encore $(A, b') \otimes (A, b)$. Nous n'en donnerons pas la démonstration!

I.3. Interprétation et propriétés des D-algèbres.

r est un $\mathbf{T}'$-*morphisme* signifiera que $r: A_1 \to A_2$ est un morphisme de $\mathcal{K}\ell\,\mathbf{T}'$, c'est-à-dire que $r: A_1 \to T'A_2$ est un morphisme de $\mathcal{E}$ ou $\mathcal{E}$-*morphisme*. Si f est un $\mathcal{E}$-morphisme, on écrira encore f son image $I'A_2 \circ f$ dans $\mathcal{K}\ell\,\mathbf{T}'$ par le plongement ${}^{\mathbf{T}'}F: \mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{K}\ell\,\mathbf{T}'$.

PROPOSITION I.3.1. *Si* $\mathbf{D}: \mathbf{T} \to \mathbf{T}'$ *est une loi distributive sur* $\mathcal{E}$, *le triple* $\mathbf{T} = (T, I, K)$ *se prolonge en un triple* $\tilde{\mathbf{T}} = (\tilde{T}, \tilde{I}, \tilde{K})$ *sur* $\mathcal{K}\ell\,\mathbf{T}'$, *où l'endofoncteur* $\tilde{T}: \mathcal{K}\ell\,\mathbf{T}' \to \mathcal{K}\ell\,\mathbf{T}'$ *associe au* $\mathbf{T}'$-*morphisme* $r: A_1 \to A_2$ *le* $\mathbf{T}'$-*morphisme* $\tilde{T}r: TA_1 \to TA_2$ *défini par le* $\mathcal{E}$-*morphisme*

$$TA_1 \xrightarrow{\;Tr\;} TT'A_2 \xrightarrow{\;DA_2\;} T'TA_2$$

(en particulier $DA = \tilde{T}(1_{T'A})$*)* ($\tilde{\mathbf{T}}$ prolonge $\mathbf{T}$ signifie que le diagramme suivant commute lorsqu'on y remplace la couple $(V, \tilde{V})$ par chacun des couples $(T, \tilde{T})$, $(I, \tilde{I})$ et $(K, \tilde{K})$:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{K}\ell\,\mathbf{T}' \arrow[r, "\tilde{V}"] & \mathcal{K}\ell\,\mathbf{T}' \\ \mathcal{E} \arrow[u, "{}^{\mathbf{T}'}F"] \arrow[r, "V"'] & \mathcal{E} \arrow[u, "{}^{\mathbf{T}'}F"'] \end{tikzcd}$$

(voir notations dans 0.5).)

PREUVE. Montrons d'abord que $\tilde{T}$ est un foncteur:

– $\tilde{T}(1_A) = 1_{\tilde{T}A}$ s'écrit $\tilde{T}(I'A) = I'TA$: c'est exactement l'axiome (D_1).

– Si $r_1: A_1 \to A_2$ et $r_2: A_2 \to A_3$ sont deux $\mathbf{T}'$-morphismes composables,

$$\text{(0.5)} \qquad \tilde{T}(r_2 \bigcirc r_1) = \tilde{T}(K'A_3 \circ T'r_2 \circ r_1)$$
$$= DA_3 \circ TK'A_3 \circ TT'r_2 \circ Tr_1$$

$$
\begin{array}{ll}
(\mathrm{D}_2) & = K' T A_3 \circ T' D A_3 \circ D T' A_3 \circ T T' r_2 \circ T r_1 \\
(\mathrm{N}D) & = K' T A_3 \circ T' D A_3 \circ T' T r_2 \circ D A_2 \circ T r_1 \\
 & = K' T A_3 \circ T' (\tilde{T} r_2) \circ \tilde{T} r_1 \\
 & = \tilde{T} r_2 \bigcirc \tilde{T} r_1
\end{array}
$$

$\tilde{T}$ est donc bien un foncteur; il prolonge évidemment T.
Pour tout objet A de $\mathcal{E}$, posons $\tilde{I} A = I A$ et $\tilde{K} A = K A$.

$$\tilde{I} : 1_{\mathcal{K}\ell\,\mathbf{T}'} \to \tilde{T} \qquad \text{et} \qquad \tilde{K} : \tilde{T} \circ \tilde{T} \to \tilde{T}$$

sont des transformations naturelles, car, si $r : A_1 \to A_2$ est un $\mathbf{T}'$-morphisme:

$$
\begin{array}{ll}
 & \tilde{T} r \bigcirc \tilde{I} A_1 = D A_2 \circ T r \circ I A_1 \\
(\mathrm{N}I) & \qquad = D A_2 \circ I T' A_2 \circ r \\
(\mathrm{D}_3) & \qquad = T' I A_2 \circ r \\
 & \qquad = I A_2 \bigcirc r = \tilde{I} A_2 \bigcirc r .
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
 & \tilde{T} r \bigcirc \tilde{K} A_1 = D A_2 \circ T r \circ K A_1 \\
(\mathrm{N}K) & \qquad = D A_2 \circ K T' A_2 \circ T T r \\
(\mathrm{D}_4) & \qquad = T' K A_2 \circ D T A_2 \circ T D A_2 \circ T T r \\
 & \qquad = T' K A_2 \circ D T A_2 \circ T (\tilde{T} r) \\
 & \qquad = T' K A_2 \circ \tilde{T} \tilde{T} r \\
 & \qquad = K A_2 \bigcirc \tilde{T} \tilde{T} r = \tilde{K} A_2 \bigcirc \tilde{T} \tilde{T} r .
\end{array}
$$

Le fait que $|\mathcal{K}\ell\,\mathbf{T}'| = |\mathcal{E}|$ et que pour tout objet A, $\tilde{T} A = T A$, $\tilde{I} A = I A$ et $\tilde{K} A = K A$ implique immédiatement que $(\tilde{T}, \tilde{I}, \tilde{K})$ est un triple sur $\mathcal{K}\ell\,\mathbf{T}'$. ∇

PROPOSITION I.3.2. *Inversement, soient* $\mathbf{T}$ *et* $\mathbf{T}'$ *deux triples sur* $\mathcal{E}$ *tels que* $\mathbf{T}$ *se prolonge en un triple* $\tilde{\mathbf{T}}$ *sur* $\mathcal{K}\ell\,\mathbf{T}'$. *Considérons le* $\mathcal{E}$*-morphisme* $1_{T'A} : T'A \to T'A$*; il définit un* $\mathbf{T}'$*-morphisme* $T'A \to A$, *noté encore* $1_{T'A}$. *Posons* $DA = \tilde{T}(1_{T'A})$. *C'est un* $\mathbf{T}'$*-morphisme:* $T T' A \to T A$ (i.e. un $\mathcal{E}$-morphisme $T T' A \to T' T A$). *Alors* $D : T \circ T' \longrightarrow T' \circ T$ *est une transformation naturelle qui définit une loi distributive* $\mathbf{D} : \mathbf{T} \to \mathbf{T}'$.

PREUVE. Tout revient à montrer que, pour tout $\mathbf{T}'$-morphisme $r : A_1 \to A_2$, on a $\tilde{T} r = D A_2 \circ T r$, ce qui est trivial car

$$\tilde{T}r = \tilde{T}(1_{T'A_2} \circ r) = \tilde{T}(1_{T'A_2} \bigcirc r) = \tilde{T}(1_{T'A_2}) \bigcirc \tilde{T}r = DA_2 \circ Tr$$

(on a utilisé le fait que $\tilde{T}$ est un foncteur, et qu'il prolonge T).

En effet, à l'aide de l'égalité $\tilde{T}r = DA_2 \circ Tr$, on déduit que l'égalité $\tilde{T}(1_A) = 1_{TA}$ n'est autre que l'axiome (D_1): $DA \circ TI'A = I'TA$. De plus, si dans l'égalité $\tilde{T}(r_2 \bigcirc r_1) = \tilde{T}r_2 \bigcirc \tilde{T}r_1$ on pose:

- d'une part $r_1 = 1_{T'T'A}$ et $r_2 = 1_{T'A}$, on obtient

$$\tilde{T}(1_{T'A} \bigcirc 1_{T'T'A}) = \tilde{T}(1_{T'A}) \bigcirc \tilde{T}(1_{T'T'A})$$

c'est-à-dire $DA \circ TK'A = DA \bigcirc DT'A$ et donc l'axiome (D_2):

$$DA \circ TK'A = K'A \circ T'DA \circ DT'A ;$$

- d'autre part $r_1 = 1_{T'A_2}$ et $r_2 = f : A_2 \to A_3$ un $\mathcal{E}$-morphisme, on obtient

$$\tilde{T}(f \bigcirc 1_{T'A_2}) = \tilde{T}f \bigcirc \tilde{T}(1_{T'A_2}) \quad \text{c'est-à-dire} \quad \tilde{T}T'f = \tilde{T}f \bigcirc DA_2$$

et donc la naturalité de $D : T \circ T' \to T' \circ T$:

$$DA_3 \circ TT'f = T'Tf \circ DA_2 .$$

Enfin, comme on l'a vu dans la preuve de la proposition I.2.1, l'égalité $\tilde{T}r = DA_2 \circ Tr$ nous permet de transcrire dans $\mathcal{E}$ les naturalités de $\tilde{I}$ et $\tilde{K}$ par les égalités:

$$(1) \quad DA_2 \circ Tr \circ IA_1 = T'IA_2 \circ r,$$

$$(2) \quad DA_2 \circ Tr \circ KA_1 = T'KA_2 \circ DTA_2 \circ TDA_2 \circ TTr,$$

lorsque $r : A_1 \to A_2$ est un $\mathbf{T}'$-morphisme. Il nous suffira donc, pour obtenir les axiomes (D_3) et (D_4), de poser $r = 1_{T'A}$ dans (1) et (2) (d'où $A_1 = T'A$ et $A_2 = A$). ∇

CONCLUSION. *L'existence d'une loi distributive* $\mathbf{D} : \mathbf{T} \to \mathbf{T}'$ *est équivalente au fait que le triple* $\mathbf{T}$ *se prolonge en un triple* $\tilde{\mathbf{T}}$ *sur* $\mathcal{K}\ell\,\mathbf{T}'$.

(On peut donc rajouter à l'équivalence de BECK rappelée dans 0.6.c :

(iv) $\mathbf{T}$ se *prolonge* en un triple $\tilde{\mathbf{T}}$ sur $\mathcal{K}\ell\,\mathbf{T}'$.)

Reste à voir ce qu'est une $\tilde{\mathbf{T}}$-algèbre (lorsque $\tilde{\mathbf{T}}$ est le prolongement de $\mathbf{T}$ sur $\mathcal{K}\ell\,\mathbf{T}'$ défini par une loi distributive $\mathbf{D} : \mathbf{T} \to \mathbf{T}'$):

THEOREME I.3.1. *Une* $\widetilde{\mathbf{T}}$*-algèbre n'est autre qu'une* $\mathbf{D}$*-algèbre* (Voir notre définition d'une $\mathbf{D}$-algèbre dans [bu 1]).

PREUVE. Ceci est dû au fait que les égalités

$$b \circ I\cdot A = I'A \qquad \text{et} \qquad b \circ KA = K'A \circ T'b \circ DA \circ Tb$$

sont les transcriptions dans $\mathcal{E}$ des égalités

$$b \bigcirc \widetilde{I}A = 1_A \qquad \text{et} \qquad b \bigcirc \widetilde{K}A = b \bigcirc \widetilde{T}b \qquad \text{dans} \qquad \mathcal{K}\ell\,\mathbf{T}'.\nabla$$

Ceci nous conduit à définir une deuxième catégorie de $\mathbf{D}$-algèbres, notée $\mathcal{A}lg_2\,\mathbf{D}$ et égale à $\mathcal{A}lg\,\widetilde{\mathbf{T}}$ (BECK avait aussi $\mathcal{A}lg(\mathbf{T}'\otimes_{\mathbf{D}}\mathbf{T}) \simeq \mathcal{A}lg\,\widetilde{\mathbf{T}}'$): ses objets sont les $\mathbf{D}$-algèbres et ses morphismes sont les

$$r:(A_1, b_1) \to (A_2, b_2),$$

où $r: A_1 \to A_2$ est un $\mathbf{T}'$-morphisme tel que $r \bigcirc b_1 = b_2 \bigcirc \widetilde{T}r$ (i.e. tel que le $\mathcal{E}$-morphisme $r: A_1 \to T'A_2$ vérifie l'égalité

$$K'A_2 \circ T'r \circ b_1 = K'A_2 \circ T'b_2 \circ DA_2 \circ Tr).$$

On a évidemment l'inclusion $\mathcal{A}lg_1\,\mathbf{D} \subset \mathcal{A}lg_2\,\mathbf{D}$. De plus, $\mathcal{A}lg_1\,\mathbf{D}$ est défini par le produit fibré qui suit, où les deux foncteurs horizontaux sont des identités sur les objets:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}lg_1\,\mathbf{D} \arrow[r, hook, "{}^{\mathbf{D}}\widetilde{F}"] \arrow[d, "U^{\mathbf{D}}"'] & \mathcal{A}lg\,\widetilde{\mathbf{T}} = \mathcal{A}lg_2\,\mathbf{D} \arrow[d, "U^{\widetilde{\mathbf{T}}}"] \\
\mathcal{E} \arrow[r, hook, "\mathbf{T}'_F"'] & \mathcal{K}\ell\,\mathbf{T}'
\end{tikzcd}$$

(On a évidemment l'égalité $F^{\widetilde{\mathbf{T}}} \circ \mathbf{T}'F = {}^{\mathbf{D}}\widetilde{F} \circ F^{\mathbf{D}}$.)

Enfin, on a le carré de couples d'adjoints suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}lg\,\mathbf{T} \arrow[r, shift left, "\widetilde{{}^{\mathbf{D}}F}"] \arrow[d, shift left, "U^{\mathbf{T}}"] & \mathcal{A}lg\,\widetilde{\mathbf{T}} = \mathcal{A}lg_2\,\mathbf{D} \arrow[l, shift left, "\widetilde{{}^{\mathbf{D}}U}"] \arrow[d, shift left, "U^{\widetilde{\mathbf{T}}}"] \\
\mathcal{E} \arrow[u, shift left, "F^{\mathbf{T}}"] \arrow[r, shift left, "\mathbf{T}'_F"] & \mathcal{K}\ell\,\mathbf{T}' \arrow[l, shift left, "\mathbf{T}'_U"] \arrow[u, shift left, "F^{\widetilde{\mathbf{T}}}"]
\end{tikzcd}$$

où $\widetilde{{}^{\mathbf{D}}F} = {}^{\mathbf{D}}\widetilde{F} \circ {}^{\mathbf{D}}F$ (voir la fin de I.1) et où $\widetilde{{}^{\mathbf{D}}U}$ prolonge ${}^{\mathbf{D}}U$ à $\mathcal{A}lg_2\,\mathbf{D}$,

– le couple vertical de droite *prolongeant* à $\mathcal{K}\ell\,\mathbf{T}'$ le couple vertical de gauche ($\widetilde{\mathbf{T}}$ prolonge $\mathbf{T}$ à $\mathcal{K}\ell\,\mathbf{T}'$):

$$\widetilde{{}^{\mathbf{D}}F} \circ F^{\mathbf{T}} = F^{\widetilde{\mathbf{T}}} \circ {}^{\mathbf{T}'}F \qquad \text{et} \qquad {}^{\mathbf{T}'}F \circ U^{\mathbf{T}} = U^{\widetilde{\mathbf{T}}} \circ \widetilde{{}^{\mathbf{D}}F}\,;$$

– le couple horizontal du haut *relevant* sur $\mathcal{A}\ell g\,\mathbf{T}$ le couple horizontal du bas:

$$U^{\mathbf{T}} \circ \widetilde{{}^{\mathbf{D}}U} = {}^{\mathbf{T}'}U \circ U^{\widetilde{\mathbf{T}}} \qquad \text{et} \qquad U^{\widetilde{\mathbf{T}}} \circ \widetilde{{}^{\mathbf{D}}F} = {}^{\mathbf{T}'}F \circ U^{\mathbf{T}}$$

(on peut maintenant dire que $(TA, I'TA \circ KA)$ est la **D**-algèbre libre associée à $A \in |\mathcal{E}|$).

Le couple de foncteurs défini dans I.1 pour $\mathcal{A}\ell g_1\,\mathbf{D}$:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}\ell g\,\mathbf{T} \arrow[r, shift left, "{}^{\mathbf{D}}F"] & \mathcal{A}\ell g_1\,\mathbf{D} \arrow[l, shift left, "{}^{\mathbf{D}}U"] \end{tikzcd}$$

se prolonge en un couple d'adjoints

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}\ell g\,\mathbf{T} \arrow[r, shift left, "\widetilde{{}^{\mathbf{D}}F}"] & \mathcal{A}\ell g_2\,\mathbf{D} \arrow[l, shift left, "\widetilde{{}^{\mathbf{D}}U}"] \end{tikzcd}$$

qui induit sur $\mathcal{A}\ell g\,\mathbf{T}$ le triple $\widetilde{\mathbf{T}}'$. *Le foncteur* $\widetilde{{}^{\mathbf{D}}U}$ *n'est pas triplable:* le foncteur de comparaison sémantique $\widetilde{L^{\mathbf{D}}}: \mathcal{A}\ell g_2\,\mathbf{D} \to \mathcal{A}\ell g\,\widetilde{\mathbf{T}}'$ (qui prolonge $L^{\mathbf{D}}$ à $\mathcal{A}\ell g_2\,\mathbf{D}$) n'est pas un isomorphisme. Mais on a la deuxième version catégorique qui suit de la proposition I.1.1:

PROPOSITION I.3.3. *$\mathcal{A}\ell g_2\,\mathbf{D}$ s'identifie à la sous-catégorie de $\mathcal{A}\ell g\,\widetilde{\mathbf{T}}'$ définie par le produit fibré qui suit:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}\ell g_2\,\mathbf{D} = \mathcal{A}\ell g\,\widetilde{\mathbf{T}} \arrow[r, hook, "\widetilde{L^{\mathbf{D}}}"] \arrow[d, "U^{\widetilde{\mathbf{T}}}"'] & \mathcal{A}\ell g\,\widetilde{\mathbf{T}}' = \mathcal{A}\ell g\,\mathbf{T}' \otimes_{\mathbf{D}} \mathbf{T} \arrow[d, "Q_2"] \\ \mathcal{K}\ell\,\mathbf{T}' \arrow[r, hook] & \mathcal{A}\ell g\,\mathbf{T}' \end{tikzcd}$$

I.4. Comparaison avec les T-algèbres relationnelles.

Dorénavant tous les triples considérés seront des triples sur $\mathcal{E}ns$, catégorie des applications associée à un univers $|\mathcal{E}ns|$, et $\mathbf{T}'$ *sera le triple* $\mathbf{P} = (\mathcal{P}, I', K')$ *des parties* défini pour les exemples 3 de I.1. Comme

$\mathcal{K}\ell\,\mathbf{P}$ est la catégorie des relations, on la notera $\mathcal{R}el$ (une relation r est un $\mathbf{P}$-morphisme; on désignera par Γ_r son graphe).

Soit $\mathbf{T}=(T,I,K)$ un triple sur $\mathcal{E}ns$; on sait [Ba] qu'il se *prolonge* en un *pseudo-triple* $\tilde{\mathbf{T}}=(\tilde{T},\tilde{I},\tilde{K})$ sur $\mathcal{R}el$:

– $\tilde{T}r$ est par définition la *relation engendrée* par l'application Tr: son graphe $\Gamma_{\tilde{T}r}$ est l'image de $T\Gamma_r$ dans $TA_1\times TA_2$ (si $r:A_1\to A_2$ est une relation). $\tilde{T}:\mathcal{R}el\to\mathcal{R}el$ prolonge évidemment T; *c'est un pseudo-foncteur*: bien que l'on ait l'égalité

$$(1)\quad \tilde{T}(1_A)=1_{TA},$$

on a seulement l'inclusion

$$(2)\quad \tilde{T}(r_2\bigcirc r_1)\subset\tilde{T}r_2\bigcirc\tilde{T}r_1.$$

– $\tilde{I}:1_{\mathcal{R}el}\to\tilde{T}$ et $\tilde{K}:\tilde{T}\circ\tilde{T}\to\tilde{T}$ sont définis par $\tilde{I}A=IA$ et $\tilde{K}A=KA$ pour tout ensemble A. Ce sont des *transformations pseudo-naturelles*:

$$(3)\quad \tilde{I}A_2\bigcirc r\subset\tilde{T}r\bigcirc\tilde{I}A_1,$$

$$(4)\quad \tilde{K}A_2\bigcirc\tilde{T}\tilde{T}r\subset\tilde{T}r\bigcirc\tilde{K}A_1.$$

DEFINITION I.4.1. On dira que $\mathbf{T}$ est un *triple linéaire*, si $\mathbf{T}$ est un triple sur $\mathcal{E}ns$ tel que son prolongement $\tilde{\mathbf{T}}$ à $\mathcal{R}el$ soit un triple, c'est-à-dire que $\tilde{T}$ est un foncteur, $\tilde{I}$ et $\tilde{K}$ sont des transformations naturelles.

(Un triple linéaire $\mathbf{T}$ *est donc caractérisé par le fait qu'il existe une loi distributive* $\mathbf{D}:\mathbf{T}\to\mathbf{P}$: elle est définie par $DA=\tilde{T}(\varepsilon_A)$ si ε_A est la relation d'appartenance $1_{\mathcal{P}A}$ (voir proposition I.3.2); c'est *celle-ci que l'on considérera dans la définition I.4.2.)*

DEFINITION I.4.2. Si $\mathbf{T}$ est un triple linéaire, on dira que le couple (A,b) est une $\mathbf{T}$*-pseudo-algèbre non déterministique* si $b:TA\to\mathcal{P}A$ est une application telle que l'on ait les inclusions

$$(\tilde{\mathrm{A}}_1)\quad I'A\subset b\circ IA,$$

$$(\tilde{\mathrm{A}}_2)\quad K'A\circ T'b\circ DA\circ Tb\subset b\circ KA.$$

(Une $\mathbf{T}$-algèbre non déterministique est une $\mathbf{T}$-pseudo-algèbre non déterministique!)

THEOREME I.4.1. *Si* **T** *est un triple linéaire, il y a équivalence entre la donnée d'une* **T***-algèbre relationnelle de* BARR [*Ba*] *et celle d'une* **T***-pseudo-algèbre non déterministique.*

PREUVE. C'est trivial, car, si **T** est linéaire, alors $\tilde{T}b = DA \circ Tb$; les inclusions $(\tilde{A}_1)$ et $(\tilde{A}_2)$ s'écrivent donc:

$$1_A \subset b \bigcirc 1A, \qquad b \bigcirc \tilde{T} b \subset b \bigcirc KA. \nabla$$

REMARQUES. 1° Le théorème I.4.1 peut s'exprimer ainsi: lorsque le triple **T** est linéaire il y a équivalence entre les **T**-algèbres non déterministiques et les **T**-algèbres relationnelles «strictes».

2° Le théorème I.4.1 est la «version-pseudo» du théorème I.3.1. On peut, de la même façon, donner une «version-pseudo» de la proposition I.1.1 (tout ceci lorsque **T** est un triple linéaire).

EXEMPLES.

1° Les triples **N** et **M** des monoïdes et des actions d'un monoïde M (voir I.1) sont des triples linéaires: les lois distributives $\mathbf{D}_1 : \mathbf{N} \to \mathbf{P}$ et $\mathbf{D}_2 : \mathbf{M} \to \mathbf{P}$ que l'on avait définies sont justement telles que $D_1 A$ et $D_2 A$ soient les relations engendrées par $N \varepsilon_A$ et $\varepsilon_A \times M$ (ε_A est la relation d'appartenance $1_{\mathcal{P}A}$). *Les monoïdes non déterministiques et les automates non déterministiques sont donc respectivement des monoïdes relationnels stricts et des automates relationnels stricts.*

2° Le triple $\mathbf{Z} = (Z, I, K)$ des groupes n'est pas linéaire. En effet, considérons, pour tout ensemble A, la relation DA engendrée par $Z \varepsilon_A$. Ainsi $DA : Z\mathcal{P}A \to \mathcal{P}ZA$ associe au mot $X_1^{\varepsilon_1} \dots X_n^{\varepsilon_n}$, irréductible dans $\mathcal{P}A$, l'ensemble des mots dans A de la forme

$$m_1 x_1^{\varepsilon_1} m_2 x_2^{\varepsilon_2} m_3 \dots m_n x_n^{\varepsilon_n} m_{n+1},$$

où, pour tout $i = 1, \dots, n$, $x_i \in X_i$ et où, pour tout $j = 1, \dots, n+1$,

$$m_j = y_{j,1}^{\varepsilon_{j,1}} \dots y_{j,p_j}^{\varepsilon_{j,p_j}}$$

est un mot dans A vérifiant: pour tout $k = 1, \dots, p_j$, il existe une partie $Y_{j,k}$ de A avec $y_{j,k} \in Y_{j,k}$ et telle que le mot $Y_{j,1}^{\varepsilon_{j,1}} \dots Y_{j,p_j}^{\varepsilon_{j,p_j}}$ dans

$\mathcal{P} A$ soit réductible au mot vide (les indices supérieurs ε prenant la valeur $+1$ ou -1). DA ne définit pas une loi distributive, en particulier DA ne vérifie pas l'axiome (D_1) (ce qui prouve, s'il en était besoin, que le prolongement $\tilde{\mathbf{Z}}$ de $\mathbf{Z}$ à $\mathcal{R}el$ n'est pas un triple: l'opération $X \circ Y = \{x \circ y \mid x \in X,\ y \in Y\}$ définit seulement une structure de monoïde sur $\mathcal{P} G$ lorsque G est un groupe).

3° Le triple $\mathbf{U} = (\mathfrak{U}, I, K)$ des ultrafiltres [Ba] n'est pas linéaire, i.e. son prolongement $\tilde{\mathbf{U}}$ à $\mathcal{R}el$ n'est pas un triple. Cependant, il semble que $\mathbf{U}$ soit un triple *pseudo-linéaire*: la transformation pseudo-naturelle $\tilde{\mathfrak{U}} \varepsilon_A$ définit une pseudo-loi distributive (les égalités étant remplacées par des inclusions) de sorte que l'on peut présenter les topologies (i. e. les compacts relationnels) comme des pseudo-compacts non déterministiques pour cette pseudo-loi distributive. ($\tilde{\mathfrak{U}} \varepsilon_A$ associe à tout ultrafiltre $\mathfrak{A}$ sur $\mathcal{P} A$, l'ensemble des ultrafiltres plus fins que le filtre $\phi_{\mathfrak{A}}$ dont les éléments sont les $\bigcup \phi = \bigsqcup_{X \in \phi} X$ lorsque ϕ parcourt $\mathfrak{A}$.)

De plus, rien ne dit que l'on ne puisse pas trouver pour les triples $\mathbf{T}$ non linéaires une autre loi distributive $\mathbf{D}'$ (n'ayant rien à voir avec $\tilde{T} \varepsilon_A$) qui permettrait de présenter les $\mathbf{T}$-algèbres relationnelles comme des $\mathbf{T}$-pseudo-algèbres non déterministiques pour $\mathbf{D}'$.

La terminologie adoptée pour les triples linéaires est due au fait qu'il me semble (d'après les notes incomplètes que j'ai pu me procurer, d'un cours de EILENBERG fait à Paris en 1968, résumé dans [Eil. Wr]) que les Théories linéaires d'EILENBERG donnent des triples linéaires (je ne pourrais rien dire de la réciproque), puisqu'elles sont construites ad hoc pour que $\tilde{T} \varepsilon_A$ définisse une loi distributive $\mathbf{D} : \mathbf{T} \to \mathbf{P}$. Donc, *si* $\mathbf{T}$ *est un triple sur* $\mathcal{E}ns$ *défini par une Théorie linéaire, les* $\mathbf{T}$*-algèbres relationnelles d'*EILENBERG *coïncident avec les* $\mathbf{D}$*-algèbres.* (A remarquer que les morphismes choisis par EILENBERG sont ceux de $\mathcal{A}lg_2 \mathbf{D}$.)

Supposons dorénavant que $\mathbf{T}$ est un triple linéaire; en s'inspirant des morphismes de $\mathbf{T}$-algèbres relationnelles choisis par BARR dans [Ba], on peut définir une troisième catégorie de $\mathbf{D}$-algèbres: $\mathcal{A}lg_3 \mathbf{D}$.

Ses objets sont toujours les **D**-algèbres, et ses morphismes sont les $f:(A_1, b_1) \to (A_2, b_2)$ tels que $f: A_1 \to A_2$ soit une application vérifiant

$$\mathcal{P} f \circ b_1 \subset b_2 \circ T f \qquad \text{(ou} \qquad f \bigcirc b_1 \subset b_2 \bigcirc T f).$$

On a évidemment l'inclusion $\mathfrak{Alg}_1 \mathbf{D} \subset \mathfrak{Alg}_3 \mathbf{D}$; mais alors que $\mathfrak{Alg}_1 \mathbf{D}$ est une catégorie qui semble avoir peu de propriétés intéressantes, on a le résultat suivant:

PROPOSITION I.4.1. $\mathfrak{Alg}_3 \mathbf{D}$ *est complète.*

PREUVE. Indiquons seulement que le produit dans $\mathfrak{Alg}_3 \mathbf{D}$ des deux **D**-algèbres (A_1, b_1) et (A_2, b_2) est la **D**-algèbre $(A_1 \times A_2, \widetilde{b_1 \times b_2} \circ c)$, où $c: T(A_1 \times A_2) \to T A_1 \times T A_2$ est déterminé par $p_i \circ c = T p_i$, si on désigne par $p_i : A_1 \times A_2 \to A_i$ la $i^{\text{ème}}$ projection pour $i = 1, 2$, et où $\widetilde{b_1 \times b_2}$ est la relation engendrée par l'application $b_1 \times b_2$: son graphe $\Gamma_{\widetilde{b_1 \times b_2}}$ est l'image dans $(T A_1 \times T A_2) \times (A_1 \times A_2)$ de $\Gamma_{b_1} \times \Gamma_{b_2}$. On peut obtenir $\widetilde{b_1 \times b_2}$ à l'aide du composé suivant:

$$T A_1 \times T A_2 \xrightarrow{b_1 \times b_2} \mathcal{P} A_1 \times \mathcal{P} A_2 \xrightarrow{d} \mathcal{P}(A_1 \times A_2),$$

où d associe au couple (X_1, X_2) le produit $X_1 \times X_2$. ∇

I.5. Rapport avec les grammaires.

Nous allons exprimer dans le cadre des **D**-algèbres le résultat suivant de la théorie des automates:

THEOREME I.5.1. *Il y a équivalence entre la donnée d'un automate non déterministique et celle d'une grammaire régulière.*

Pour cela on pose la définition suivante:

DEFINITION I.5.1. Une *grammaire régulière* est la donnée d'un couple (A, δ), où $\delta : A \times \Sigma \to A$ est une relation.

L'ensemble P des productions de (A, δ) s'identifie alors au graphe Γ_δ: $x \to \sigma y \in P$ signifie que $y \in \delta(x, \sigma)$ (si $x, y \in A$ et $\sigma \in \Sigma$). Comme le veut l'usage,

$$m x m' \Longrightarrow m \sigma y m' \qquad \text{et} \qquad \alpha \overset{*}{\Longrightarrow} \beta$$

signifieront d'une part que $x \to \sigma y \in P$ et m, m' sont des mots dans $A \cup \Sigma$, et d'autre part que α et β appartiennent à $N(A \cup \Sigma)$ et qu'il existe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in N(A \cup \Sigma)$ tels que

$$\alpha \Longrightarrow \alpha_1, \qquad \alpha_1 \Longrightarrow \alpha_2, \qquad \ldots, \qquad \alpha_n \Longrightarrow \beta.$$

On peut alors prolonger δ à $A \times M$, si $M = N\Sigma$ est le monoïde libre associé à Σ:

$\delta^* : A \times M \to A$ est la relation définie par

$$\begin{cases} \delta^*(x, \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_n) = \{ y \in A \mid x \overset{*}{\Longrightarrow} \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_n y \}, \\ \delta^*(x, \varepsilon) = \{ x \} \end{cases}$$

si $x \in A$, si $\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_n \in M$ et si ε est le mot vide de M.

On montre que:

1° (A, δ^*) est une **M**-*algèbre relationnelle*:

L'axiome $(\tilde{A}_1)$ résulte évidemment de $\delta^*(x, \varepsilon) = \{ x \}$.

L'axiome $(\tilde{A}_2)$ se traduit ici par l'inclusion:

$$\bigcup_{y \in \delta^*(x, \sigma_1 \ldots \sigma_n)} \delta^*(y, \mu_1 \mu_2 \ldots \mu_m) \subset \delta^*(x, \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_n \mu_1 \ldots \mu_m) ;$$

on veut donc que $y \in \delta^*(x, \sigma_1 \ldots \sigma_n)$ et $z \in \delta^*(y, \mu_1 \ldots \mu_m)$ implique $z \in \delta^*(x, \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_n \mu_1 \ldots \mu_m)$. Or si

$$x \overset{*}{\Longrightarrow} \sigma_1 \ldots \sigma_n y \qquad \text{et} \qquad y \overset{*}{\Longrightarrow} \mu_1 \ldots \mu_m z,$$

par définition, il existe $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}$ éléments de A, tels que

$$x \to \sigma_1 x_1 \in P, \quad x_1 \to \sigma_2 x_2 \in P, \quad \ldots, \quad x_{n-1} \to \sigma_n y \in P,$$
$$y \to \mu_1 y_1 \in P, \qquad \ldots, \quad y_{m-1} \to \mu_m z \in P,$$

ce qui implique: $x \overset{*}{\Longrightarrow} \sigma_1 \ldots \sigma_n \mu_1 \ldots \mu_m z$.

2° (A, δ^*) est un *automate non déterministique*:

L'axiome (A_1) résulte de $\delta^*(x, \varepsilon) = \{ x \}$.

L'axiome (A_2) résulte de $(\tilde{A}_2)$ et de l'inclusion:

[1] $$\delta^*(x, \sigma_1 \ldots \sigma_n \mu_1 \ldots \mu_m) \subset \bigcup_{y \in \delta^*(x, \sigma_1 \ldots \sigma_n)} \delta^*(y, \mu_1 \ldots \mu_m) ;$$

si $z \in \delta^*(x,\ \sigma_1 \dots \sigma_n \mu_1 \dots \mu_m)$, existe-t-il un $y \in \delta^*(x,\ \sigma_1 \dots \sigma_n)$ tel que $z \in \delta^*(y,\ \mu_1 \dots \mu_m)$?

Or $x \overset{*}{\Longrightarrow} \sigma_1 \dots \sigma_n \mu_1 \dots \mu_m z$ signifie qu'il existe $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, y_1, y_2, \dots, y_{m-1} \in A$ tels que

$$x \to \sigma_1 x_1 \in P ,\quad x_1 \to \sigma_2 x_2 \in P ,\quad \dots ,\quad x_{n-1} \to \sigma_n y_1 \in P ,$$
$$y_1 \to \mu_2\, y_2 \in P ,\qquad \dots ,\quad y_{m-1} \to \mu_m z \in P ;$$

donc y_1 est tel que

$$x \overset{*}{\Longrightarrow} \sigma_1 \dots \sigma_n y_1 \qquad \text{et} \qquad y_1 \overset{*}{\Longrightarrow} \mu_1 \dots \mu_m z ;$$

c'est donc l'élément cherché pour ([1]).

Inversement, si $(A,\ \delta^*)$ est un automate non déterministique, la restriction $\delta : A \times \Sigma \to A$ de la relation $\delta^* : A \times M \to A$ définit une grammaire régulière G vérifiant la condition suivante: si $y \in \delta^*(x, \sigma_1 \dots \sigma_n)$, il existe $x_1, \dots, x_{n-1} \in A$ tels que

$$x_1 \in \delta(x, \sigma_1),\qquad x_2 \in \delta(x_1, \sigma_2),\qquad \dots ,\qquad y \in \delta(x_{n-1}, \sigma_n).$$

(On applique d'abord l'inclusion:

([2]) $$b(x, m_1 m_2) \subset \bigcup_{y \in b(x, m_1)} b(y, m_2)$$

à x et aux mots $m_1 = \sigma_1$, $m_2 = \sigma_2 \dots \sigma_n$; il en résulte l'existence de $x_1 \in A$ tel que $x_1 \in \delta(x, \sigma_1)$ et $y \in \delta^*(x_1, \sigma_2 \dots \sigma_n)$; puis l'inclusion ([2]) appliquée à x_1 et $m_1 = \sigma_2$, $m_2 = \sigma_3 .. \sigma_n$ nous donnera x_2, ...)
Ainsi, $y \in \delta(x, \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n)$ *peut s'interpréter comme* $x \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n y$.

On a un résultat analogue pour les grammaires indépendantes du contexte.

DEFINITION I.5.2. Une *grammaire indépendante du contexte* est la donnée d'un couple $(A,\ \delta)$, où $\delta : NA \to A$ est une relation.

A nouveau, l'ensemble P des productions de $(A,\ \delta)$ s'identifie au graphe Γ_δ: $x \to x_1 x_2 \dots x_n \in P$ signifie que $x \in \delta(x_1 x_2 \dots x_n)$; les *symboles:* $m x m' \Longrightarrow m x_1 x_2 \dots x_n m'$ et $\alpha \overset{*}{\Longrightarrow} \beta$ signifieront d'une part que m et $m' \in NA$ et $x \to x_1 x_2 \dots x_n \in P$, d'autre part qu'il existe $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in NA$ tels que

$$\alpha \Longrightarrow \alpha_1, \qquad \alpha_1 \Longrightarrow \alpha_2, \qquad \dots, \qquad \alpha_n \Longrightarrow \beta \qquad (\text{si } \alpha, \beta \in NA).$$

THEOREME I.5.2. *Pour tout monoïde non déterministique (A, b), il existe une grammaire indépendante du contexte $G=(A, \delta)$ dont les productions sont de la forme $x \to m$, où m est un mot dans A de longueur 1 ou 2 et telle que $x \in b(x_1 x_2 \dots x_n)$ s'interprète comme $x \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} x_1 x_2 \dots x_n$.*

PREUVE. On définit $\delta : NA \to A$ comme étant la relation dont le graphe Γ_δ est l'ensemble des (x, x) et des (x_1, x_2, x) qui sont dans Γ_b : les productions de G sont donc de la forme $x \to x$ et $x \to x_1 x_2$, où $x \in A$ et $x \in b(x_1 x_2)$. Alors, si $x_1 x_2 \dots x_n \in NA$, on applique l'inclusion

$$(^3) \qquad b \circ KA \subset K'A \circ \mathcal{P} b \circ DA \circ Nb$$

au chemin $(x_1 x_2)(x_3)\dots(x_n)$ dans NA :

$$b(x_1 x_2 \dots x_n) \subset \bigsqcup_{y_1 \in b(x_1 x_2)} b(y_1 x_3 \dots x_n),$$

de sorte que $x \in b(x_1 x_2 \dots x_n)$ implique l'existence d'un $y_1 \in b(x_1 x_2)$ $(y_1 \to x_1 x_2 \in P)$ tel que $x \in b(y_1 x_3 \dots x_n)$. En appliquant à nouveau $(^3)$ au chemin $(y_1 x_3)(x_4)\dots(x_n)$, on voit que $x \in b(y_1 x_3 \dots x_n)$ implique l'existence d'un $y_2 \in b(y_1 x_3)$ $(y_2 \to y_1 x_3 \in P)$ tel que $x \in b(y_2 x_4 \dots x_n)$. En continuant de la même façon, on met en évidence, l'existence, pour tout $i = 1, 2, \dots, n-2$, d'un $y_i \in A$ tel que $y_1 \to x_1 x_2 \in P$, que $y_i \to y_{i-1} x_{i+1} \in P$ pour $i = 2, \dots, n-3$ et que $x \to y_{n-2} x_n \in P$. On peut donc affirmer que $x \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} x_1 x_2 \dots x_n$. ∇

II. D-CATEGORIES.

II.1. Définition et exemples.

Nous allons définir une notion unificatrice: celle de **D**-catégories: les **D**-algèbres et les **T**-catégories [Bu 1] (elles-mêmes inspirées des **T**-algèbres relationnelles [Ba]) en seront deux cas particuliers.

Dans tout ce qui suit, nous supposerons que $\mathbf{D}: \mathbf{T} \to \mathbf{T}'$ est une loi distributive sur une catégorie $\mathcal{E}$ munie d'un choix canonique de produits fibrés finis.

DEFINITION II.1.1. Une **D**-*catégorie* est un quintuplet $\Theta = (A, a, b, i, k)$, où

(1) A est un objet de $\mathcal{E}$,

(2) $\theta = (a, b)$ est un span (ou **D**-span) $TA \xleftarrow{a} \pi \xrightarrow{b} T'A$ dans $\mathcal{E}$, de sommet π et que l'on appellera le **D**-*graphe* sous-jacent à la **D**-catégorie,

(3) $i: A \to \pi$ est *l'unité* de la **D**-catégorie et vérifie les égalités:

$$a \circ i = 1A \qquad \text{et} \qquad b \circ i = 1'A,$$

(4) $k: \pi_2 = T\pi \times_{T'TA} T'\pi \to \pi$ est la *loi de composition* de la **D**-catégorie et vérifie les égalités:

$$a \circ k = KA \circ Ta \circ v_2 \qquad \text{et} \qquad b \circ k = K'A \circ T'b \circ v_2',$$

où le produit fibré π_2 (ayant pour projections v_2 et v_2') est celui des morphismes:

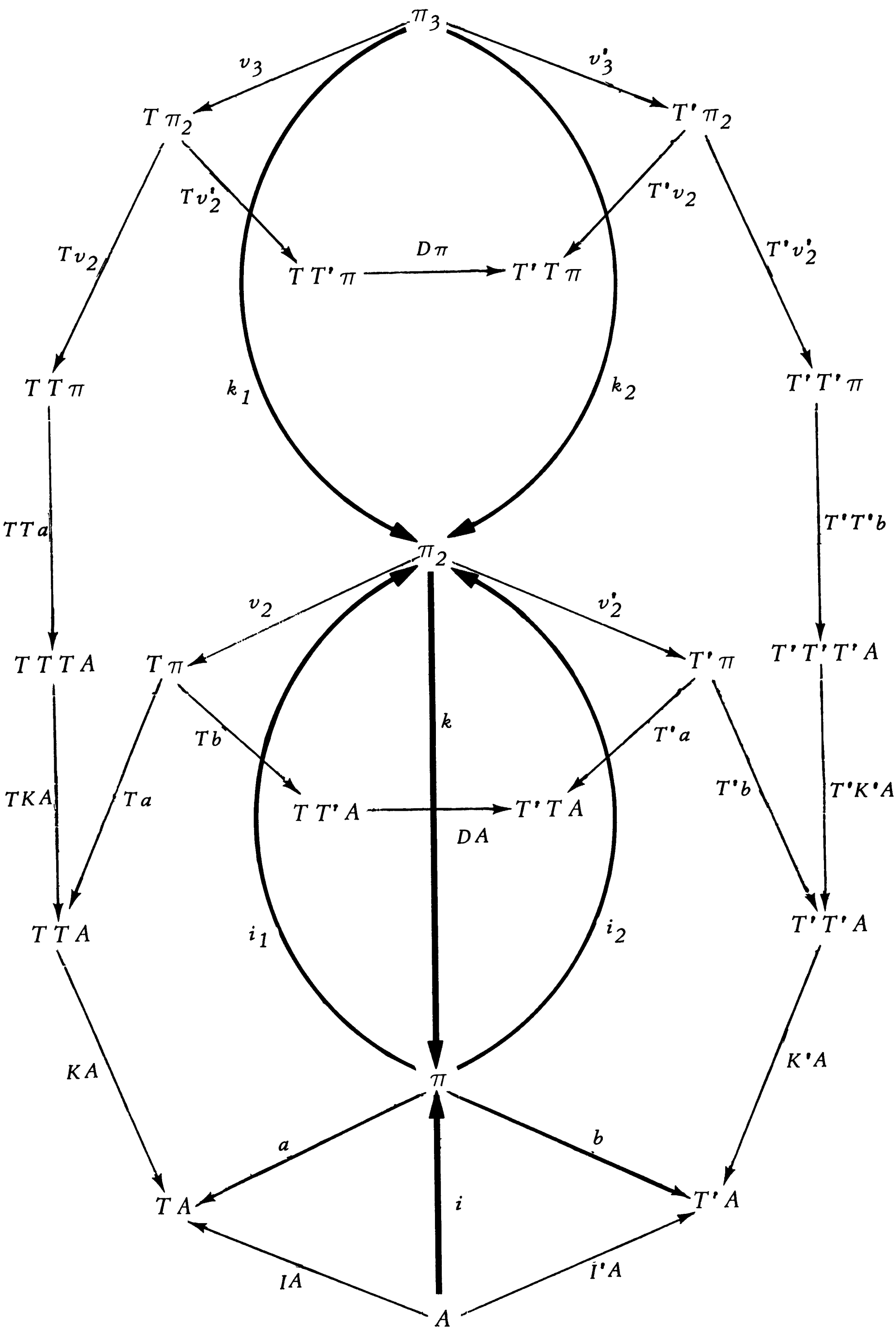
$$T\pi \xrightarrow{Tb} TT'A \xrightarrow{DA} T'TA \qquad \text{et} \qquad T'\pi \xrightarrow{T'a} T'TA.$$

Ces données doivent en plus satisfaire les axiomes de neutralité et d'associativité suivants:

(5) $k \circ i_1 = 1_\pi$, $\quad k \circ i_2 = 1_\pi$,

(6) $k \circ k_1 = k \circ k_2$,

où i_1, i_2, k_1 et k_2 sont les morphismes canoniques de $\mathcal{E}$, que l'on peut noter:


π_3
v_3
v'_3
$T\pi_2$
$T'\pi_2$
Tv'_2
$T'v_2$
Tv_2
$T'v'_2$
$D\pi$
$TT'\pi$
$T'T\pi$
$TT\pi$
k_1
k_2
$T'T'\pi$
TTa
$T'T'b$
π_2
v_2
v'_2
$TTTA$
$T\pi$
$T'\pi$
$T'T'T'A$
k
Tb
$T'a$
TKA
Ta
$TT'A$
$T'TA$
$T'b$
$T'K'A$
DA
TTA
i_1
i_2
$T'T'A$
KA
$K'A$
π
a
b
i
TA
$T'A$
IA
$I'A$
A

$$< Ti \circ a, I'\pi > , \qquad < I\pi, T'i \circ b > ,$$

$$< Tk \circ v_3, K'\pi \circ T'v'_2 \circ v'_3 > , \qquad < K\pi \circ T v_2 \circ v_3, T'k \circ v'_3 > ,$$

car ils sont dus au produit fibré π_2 et sont respectivement caractérisés par les égalités (E):

$$\begin{array}{ll} v_2 \circ i_1 = Ti \circ a, & v'_2 \circ i_1 = I'\pi, \\ v_2 \circ i_2 = I\pi, & v'_2 \circ i_2 = T'i \circ b, \\ v_2 \circ k_1 = Tk \circ v_3, & v'_2 \circ k_1 = K'\pi \circ T'v'_2 \circ v'_3, \\ v_2 \circ k_2 = K\pi \circ T v_2 \circ v_3, & v'_2 \circ k_2 = T'k \circ v'_3, \end{array}$$

si v_3 et v'_3 sont les projections du produit fibré $\pi_3 = T\pi_2 \times_{T'T\pi} T'\pi_2$ des morphismes:

$$T\pi_2 \xrightarrow{Tv'_2} TT'\pi \xrightarrow{D\pi} T'T\pi \quad \text{et} \quad T'\pi_2 \xrightarrow{T'v_2} T'T\pi .$$

Dans la suite, (P_2) et (P_3) désigneront les deux produits fibrés de sommets π_2 et π_3 intervenant dans la définition d'une **D**-catégorie.

EXEMPLES.

1° Si $\mathbf{T}' = \mathbf{1}_{\mathcal{E}}$ est le triple identique sur $\mathcal{E}$, on a vu que l'on a une loi distributive $_{\mathbf{T}}\mathbf{1} : \mathbf{T} \to \mathcal{E}$ (définie par $DA = 1_{TA}$) et qu'*une* $_{\mathbf{T}}\mathbf{1}$*-catégorie est une* **T***-catégorie* [Bu 1] .
En particulier, si **D** est la loi distributive identique sur $\mathcal{E}$ (cas où $\mathbf{T} = \mathbf{T}' = \mathbf{1}_{\mathcal{E}}$), on sait qu'une $\mathbf{1}_{\mathcal{E}}$-catégorie est une $\mathcal{E}$-catégorie, c'est-à-dire une catégorie dans $\mathcal{E}$, dont a et b sont les morphismes source et but.

2° Si (A, a, b, i, k) est une **D**-catégorie telle que le morphisme canonique $\pi \xrightarrow{<a,b>} TA \times T'A$ soit un monomorphisme, on dira que c'est un **D**-*préordre* (on retrouve les $\mathcal{E}$-préordres lorsque $\mathbf{T} = \mathbf{T}' = \mathbf{1}_{\mathcal{E}}$): le produit $TA \xleftarrow{p_1} TA \times T'A \xrightarrow{p_2} T'A$ (lorsqu'il existe) définit un **D**-préordre. Plus généralement, le produit fibré d'une **T**-algèbre (A, b) et d'une **T'**-algèbre (A, b') **D**-compatibles (0.6.d) définit un **D**-span

$$TA \xleftarrow{\bar{a}} \bar{\pi} \xrightarrow{\bar{b}} T'A ,$$

qui est le **D**-graphe sous-jacent à une **D**-catégorie dont l'unité et la multiplication sont les morphismes canoniques (dûs au produit fibré $\bar{\bar{\pi}}$) suivants:

$$< IA, I'A > \qquad \text{et} \qquad < KA \circ T\bar{\bar{a}} \circ v_2, K'A \circ T'\bar{\bar{b}} \circ v'_2 > .$$

On obtient un cas particulier intéressant de **D**-préordre lorsque le morphisme $a: \pi \to TA$ est un monomorphisme: nous en avons étudié un exemple dans la première partie: les **D**-*algèbres*. En effet, dans ce cas, $a = 1_{TA}$ et les égalités (3) et (4) de la définition II.1.1 impliquent que $i = IA$ et $b \circ IA = I'A$, ainsi que

$$k = KA \qquad \text{et} \qquad b \circ KA = K'A \circ T'b \circ DA \circ Tb .$$

De plus,

$$i_1 = TIA, \qquad i_2 = ITA, \qquad k_1 = TKA \qquad \text{et} \qquad k_2 = KTA$$

(voir les égalités (E)).

$\mathcal{C}at\,$**D** désignera la catégorie dont les objets sont les **D**-catégories et dont les morphismes, les **D**-*foncteurs*, sont les couples

$$(f, \bar{f}): \Theta = (A, a, b, i, k) \longrightarrow \bar{\Theta} = (\bar{A}, \bar{a}, \bar{b}, \bar{i}, \bar{k})$$

d'un morphisme $f: A \to \bar{A}$ et d'un morphisme $\bar{f}: \pi \to \bar{\pi}$ (où π et $\bar{\pi}$ sont les sommets respectifs des **D**-catégories) vérifiant les égalités:

$$\text{(i) } T'f \circ b = \bar{b} \circ \bar{f}, \qquad \text{(ii) } Tf \circ a = \bar{a} \circ \bar{f},$$

$$\text{(iii) } \bar{i} \circ f = \bar{f} \circ i, \qquad \text{(iv) } \bar{k} \circ \bar{\bar{f}} = \bar{f} \circ k,$$

si $\bar{\bar{f}}: \pi_2 \to \bar{\pi}_2$ est le morphisme canonique (dû au produit fibré $\bar{\pi}_2$) suivant: $< T\bar{f} \circ v_2, T'\bar{f} \circ v'_2 >$.

REMARQUES. 1° $\mathcal{C}at_{\mathbf{T}}\mathbf{1}$ est la catégorie $\mathcal{C}at\,\mathbf{T}$ des **T**-catégories [Bu 1].

2° Si Θ et $\bar{\Theta}$ sont des **D**-préordres, si $f: A \to \bar{A}$ et $\bar{f}: \pi \to \bar{\pi}$ sont des morphismes de $\mathcal{E}$ qui vérifient les égalités (i) et (ii), alors $(f, \bar{f}): \Theta \to \bar{\Theta}$ est un **D**-foncteur. $\mathcal{O}rd\,$**D** désignera la catégorie des **D**-préordres.

3° Si $\Theta = (A, b)$ et $\bar{\Theta} = (\bar{A}, \bar{b})$ sont des **D**-algèbres, et si $f: (A, b) \to (\bar{A}, \bar{b})$ est un morphisme de $\mathcal{A}lg_1\,$**D**, alors (f, Tf) est un

$\mathbf{D}$-foncteur, de sorte que l'on a les inclusions pleines:

$$\mathfrak{Alg}_1\,\mathbf{D} \subset \mathfrak{Ord}\,\mathbf{D} \subset \mathfrak{Cat}\,\mathbf{D}.$$

On appellera encore $U^{\mathbf{D}}$ les foncteurs d'oubli $\mathfrak{Ord}\,\mathbf{D} \to \mathcal{E}$ et $\mathfrak{Cat}\,\mathbf{D} \to \mathcal{E}$ qui prolongent le foncteur d'oubli $U^{\mathbf{D}} : \mathfrak{Alg}_1\,\mathbf{D} \to \mathcal{E}$ défini dans I.1.

Supposons, pour établir les deux propositions qui suivent, que $\mathcal{E}$ *admet des limites projectives finies.*

PROPOSITION II.1.1. *Les foncteurs d'oubli* $U^{\mathbf{D}} : \mathcal{X} \to \mathcal{E}$ *(pour* $\mathcal{X} = \mathfrak{Ord}\,\mathbf{D}$ *et* $\mathcal{X} = \mathfrak{Cat}\,\mathbf{D}$*) admettent un coadjoint:*

$$TA \xleftarrow{\;p_1\;} TA \times T'A \xrightarrow{\;p_2\;} T'A$$

est le $\mathbf{D}$*-graphe sous-jacent à la* $\mathbf{D}$*-catégorie (au* $\mathbf{D}$*-préordre) colibre associé à* $A \in |\mathcal{E}|$*;* son unité et sa multiplication sont les morphismes canoniques $< IA, I'A >$ et $< KA \circ Tp_1 \circ v_2, K'A \circ T'p_2 \circ v'_2 >$. On l'appelle *la* $\mathbf{D}$*-catégorie grossière sur* A.

PROPOSITION II.1.2. *Si l'unité* I' *du triple* $\mathbf{T}'$ *est une transformation naturelle cartésienne (voir 0.2), alors les foncteurs d'oubli* $U^{\mathbf{D}} : \mathcal{X} \to \mathcal{E}$ *(pour* $\mathcal{X} = \mathfrak{Ord}\,\mathbf{D}$ *et* $\mathcal{X} = \mathfrak{Cat}\,\mathbf{D}$*) admettent un adjoint:* $(A, IA, I'A, 1_A, 1_A)$ *est la* $\mathbf{D}$*-catégorie (le* $\mathbf{D}$*-préordre,* car I' cartésienne et $\mathcal{E}$ munie d'un objet final impliquent que $I'A$ est un monomorphisme pour tout $A \in |\mathcal{E}|$*) libre associée à* $A \in |\mathcal{E}|$ *que l'on appelle la* $\mathbf{D}$*-catégorie discrète sur* A.

PREUVE. Si l'on se réfère à la définition II.1.1, $i = 1_A$ et $k = 1_A$ vérifient évidemment les égalités (3) et (4), l'hypothèse que I' soit cartésienne assurant que $A = \pi_2$, c'est-à-dire que le diagramme externe suivant est un produit fibré (car le carré interne en est un):

$$\begin{tikzcd}
 & & A \arrow[dll, "IA"'] \arrow[dr, "I'A"] & \\
TA \arrow[dr, "TI'A"'] \arrow[drr, "I'TA"] & & & T'A \arrow[dl, "T'IA"] \\
 & TT'A \arrow[r, "DA"'] & T'TA &
\end{tikzcd}$$

De plus, $i_1 = i_2 = k_1 = k_2 = 1_A$; on utilise pour le voir les égalités (E) caractérisant ces différents morphismes. ∇

REMARQUES. 1° Contrairement aux triples $\mathbf{1}_{\mathcal{E}}$, $\mathbf{N}$ et $\mathbf{M}$, $\mathbf{P}$ est un exemple de triple dont l'unité n'est pas cartésienne.

2° L'adjoint et le coadjoint des foncteurs d'oubli $U^{\mathbf{D}}$ sont des sections de $U^{\mathbf{D}}$.

Parallèlement au résultat obtenu par Albert BURRONI dans [Bu 1] on a la proposition suivante:

PROPOSITION II.1.3. *Les foncteurs d'oubli* $U^{\mathbf{D}} : \mathcal{X} \to \mathcal{E}$ *(pour* $\mathcal{X} = \mathcal{O}rd\,\mathbf{D}$ *et* $\mathcal{X} = \mathcal{C}at\,\mathbf{D}$*) sont fibrants.*

PREUVE. Si $\Theta = (A, a, b, i, k)$ est une $\mathbf{D}$-catégorie (ou un $\mathbf{D}$-préordre) et si $f : A' \to A$ est un morphisme dans $\mathcal{E}$, le $\mathbf{D}$-graphe (a', b') sous-jacent à la $\mathbf{D}$-catégorie (au $\mathbf{D}$-préordre) $f^*(\Theta)$ est obtenu par limite projective du diagramme en traits pleins ci-dessous:

$$\begin{tikzcd}
 & \pi' \arrow[rrrr, dashed, "\overline{f}"] \arrow[dl, dashed, "a'"'] \arrow[ddrr, dashed, "b'"] & & & & \pi \arrow[dl, "a"'] \arrow[ddr, "b"] & \\
TA' \arrow[rrrr, "Tf"'] & & & & TA & & \\
 & & & T'A' \arrow[rrr, "T'f"'] & & & T'A
\end{tikzcd}$$

∇

On renvoie le lecteur à II.2 pour la question des limites dans $\mathcal{C}at\,\mathbf{D}$.

II.2. Extension aux morphismes de lois distributives.

Nous allons construire un foncteur $\mathcal{C}at\,\mathbf{L} : \mathcal{C}at\,\mathbf{D} \to \mathcal{C}at\,\overline{\mathbf{D}}$, lorsque $\mathbf{L} : \mathbf{D} \to \overline{\mathbf{D}}$ est un morphisme de lois distributives. Pour cela, si l'on se réfère à 0.6.b , on remarque que l'on a plusieurs façons de définir un morphisme de lois distributives, selon qu'il s'agit d'un morphisme de $\overleftarrow{\mathcal{M}an}\,\overleftarrow{\mathcal{T}r}$, de $\overrightarrow{\mathcal{M}an}\,\overrightarrow{\mathcal{T}r}$, de $\overleftarrow{\mathcal{M}an}\,\overrightarrow{\mathcal{T}r}$... Nous verrons qu'ils ne donnent pas lieu aux mêmes foncteurs $\mathcal{C}at\,\mathbf{L}$.

On suppose dans tout ce qui suit que $\mathbf{D}: \mathbf{T} \to \mathbf{T}'$ et $\overline{\mathbf{D}}: \overline{\mathbf{T}} \to \overline{\mathbf{T}}'$ sont deux lois distributives, la première sur $\mathcal{E}$, la seconde sur $\overline{\mathcal{E}}$, les catégories $\mathcal{E}$ et $\overline{\mathcal{E}}$ étant toutes deux munies d'un choix canonique de produits fibrés finis.

A. $\mathbf{L}: \mathbf{D} \to \overline{\mathbf{D}}$ est un morphisme de $\overleftarrow{\mathcal{M}on}\overleftarrow{\mathcal{F}r}$.

Autrement dit, $\mathbf{L} = ((L, l), l')$, où:

- $L: \mathcal{E} \to \overline{\mathcal{E}}$ est un foncteur,
- $(L, l): \mathbf{T} \to \overline{\mathbf{T}}$ et $(L, l'): \mathbf{T}' \to \overline{\mathbf{T}}'$ sont deux morphismes de $\overleftarrow{\mathcal{F}r}$ qui rendent commutatif le diagramme $(\overleftarrow{\mathrm{D}})$ dans $\mathcal{C}at$:

$$\begin{tikzcd}
L \circ T' \circ T & \overline{T}' \circ L \circ T \arrow[l, "l' \circ T"'] & \overline{T}' \circ \overline{T} \circ L \arrow[l, "\overline{T}' \circ l"'] \\
L \circ T \circ T' \arrow[u, "L \circ D"] \arrow[ur, phantom, "(\overleftarrow{\mathrm{D}})"] & \overline{T} \circ L \circ T' \arrow[l, "l \circ T'"] & \overline{T} \circ \overline{T}' \circ L \arrow[l, "\overline{T} \circ l'"] \arrow[u, "\overline{D} \circ L"']
\end{tikzcd}$$

qui exprime que $l': (\overline{T}', \overline{D}) \circ (L, l) \to (L, l) \circ (T', D)$ est un 2-morphisme de $\overleftarrow{\mathcal{F}r}$.

PROPOSITION II.2.1. *On peut construire un foncteur $\overleftarrow{\mathcal{C}at}\,\mathbf{L}$ rendant commutatif le diagramme suivant, lorsque L respecte les produits fibrés de $\mathcal{E}$:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}at\,\mathbf{D} \arrow[r, "U^{\mathbf{D}}"] \arrow[d, "\overleftarrow{\mathcal{C}at}\,\mathbf{L}"'] & \mathcal{E} \arrow[d, "L"] \\
\mathcal{C}at\,\overline{\mathbf{D}} \arrow[r, "U^{\overline{\mathbf{D}}}"'] & \overline{\mathcal{E}}
\end{tikzcd}$$

PREUVE. Soit $\Theta = (A, a, b, i, k)$ une $\mathbf{D}$-catégorie. On construit le $\overline{\mathbf{D}}$-graphe sous-jacent à la $\overline{\mathbf{D}}$-catégorie $\overleftarrow{\mathcal{C}at}\,\mathbf{L}(\Theta) = (LA, \overline{a}, \overline{b}, \overline{i}, \overline{k})$ en effectuant la limite projective dans $\overline{\mathcal{E}}$ du diagramme en traits pleins suivant

$$\begin{tikzcd}
 & & & \overline{\pi} \arrow[dl, dashed, "\overline{p}"'] \arrow[dr, dashed, "\overline{p}'"] & & & \\
 & & \pi_1 \arrow[dr, dashed, "p"] \arrow[ddll, dashed, "q"'] & (\overline{\mathrm{P}}) & \pi'_1 \arrow[dl, dashed, "p'"'] \arrow[ddrr, dashed, "q'"] & & \\
 & (\mathrm{P}) & & L\pi \arrow[dll, "La"] \arrow[drr, "Lb"'] & & (\mathrm{P}') & \\
\overline{T}LA \arrow[r, "lA"'] & LTA & & & & LT'A & \overline{T}'LA \arrow[l, "l'A"]
\end{tikzcd}$$

(elle est obtenue à l'aide des trois produits fibrés (P), (P') et ($\overline{\mathrm{P}}$)); alors $\overline{a} = q \circ \overline{p}$ et $\overline{b} = q' \circ \overline{p}'$.

L'unité $\overline{i}: L A \to \overline{\pi}$ est le morphisme canonique (dû au produit fibré ($\overline{\mathrm{P}}$)) caractérisé par $\overline{p} \circ \overline{i} = j$ et $\overline{p}' \circ \overline{i} = j'$, où $j: L A \to \pi_1$ et $j': L A \to \pi'_1$ sont eux-mêmes les morphismes canoniques (dûs respectivement à (P) et (P')) caractérisés par les égalités $q \circ j = \overline{I} L A$ et $p \circ j = L i$ d'une part, $q' \circ j' = \overline{I}' L A$ et $p' \circ j' = L i$ d'autre part.

La multiplication $\overline{k}: \overline{\pi}_2 \to \overline{\pi}$ est le morphisme canonique (dû à ($\overline{\mathrm{P}}$)) caractérisé par $\overline{p} \circ \overline{k} = g$ et $\overline{p}' \circ \overline{k} = g'$, où $g: \overline{\pi}_2 \to \pi_1$ et $g': \overline{\pi}_2 \to \pi'_1$ sont eux-mêmes les morphismes canoniques (dûs à (P) et (P')) caractérisés par les égalités

$$q \circ g = \overline{K} L A \circ \overline{T} q \circ \overline{T} \overline{p} \circ \overline{v}_2 \quad \text{et} \quad p \circ g = L k \circ h$$

d'une part,

$$q' \circ g' = \overline{K}' L A \circ \overline{T}' q' \circ \overline{T}' \overline{p}' \circ \overline{v}'_2 \quad \text{et} \quad p' \circ g' = L k \circ h$$

d'autre part, où $h: \overline{\pi}_2 \to L \pi_2$ est le morphisme canonique (dû au produit fibré $L(\mathrm{P}_2)$) caractérisé par:

$$L v_2 \circ h = l \pi \circ \overline{T} p' \circ \overline{T} \overline{p}' \circ \overline{v}_2 \quad \text{et} \quad L v'_2 \circ h = l' \pi \circ \overline{T}' p \circ \overline{T}' \overline{p} \circ \overline{v}'_2 .$$

Justifions par exemple l'existence de h, si $L(\mathrm{P}_2)$ désigne le produit fibré dans $\mathcal{E}$ dont chacun des morphismes qui le constitue est $L D A \circ L T b$, $L v_2$, $L T' a$, $L v'_2$:

$$\begin{array}{ll}
 & L D A \circ L T b \circ (l \pi \circ \overline{T} p' \circ \overline{T} \overline{p}' \circ \overline{v}_2) = \\
(\mathrm{N} l) & = L D A \circ l T' A \circ \overline{T} L b \circ \overline{T} p' \circ \overline{T} \overline{p}' \circ \overline{v}_2 \\
(\mathrm{P}') & = L D A \circ l T' A \circ \overline{T} l' A \circ \overline{T} q' \circ \overline{T} \overline{p}' \circ \overline{v}_2 \\
 & = L D A \circ l T' A \circ \overline{T} l' A \circ \overline{T} \overline{b} \circ \overline{v}_2 \\
(\overleftarrow{\mathrm{D}}) & = l' T A \circ \overline{T}' l A \circ \overline{D} L A \circ \overline{T} \overline{b} \circ \overline{v}_2 \\
(\overline{\mathrm{P}}_2) & = l' T A \circ \overline{T}' l A \circ \overline{T}' \overline{a} \circ \overline{v}'_2 \\
 & = l' T A \circ \overline{T}' l A \circ \overline{T}' q \circ \overline{T}' \overline{p} \circ \overline{v}'_2 \\
(\mathrm{P}) & = l' T A \circ \overline{T}' L a \circ \overline{T}' p \circ \overline{T}' \overline{p} \circ \overline{v}'_2 \\
(\mathrm{N} l') & = L T' a \circ (l' \pi \circ \overline{T}' p \circ \overline{T}' \overline{p} \circ \overline{v}'_2).
\end{array}$$

Il est trivial de vérifier, grâce aux égalités caractérisant les divers morphismes introduits, que $\overline{i}$ et $\overline{k}$ vérifient les égalités (3) et (4) et les axiomes (5) et (6) de la définition II.1.1. ∇

REMARQUE. Le foncteur $\overleftarrow{\mathcal{C}at}\,\mathbf{L}$ respecte les préordres: Si Θ est un **D**-préordre, alors $\overleftarrow{\mathcal{C}at}\,\mathbf{L}(\Theta)$ est un $\overline{\mathbf{D}}$-préordre. Il n'en est pas de même pour les algèbres: si Θ est une **D**-algèbre, $\overleftarrow{\mathcal{C}at}\,\mathbf{L}(\Theta)$ est seulement un $\overline{\mathbf{D}}$-préordre.

COROLLAIRE II.2.1. *Soit* $\mathbf{D}: \mathbf{T} \to \mathbf{T}'$ *une loi distributive sur une catégorie* $\mathcal{E}$ *munie d'un choix canonique de produits fibrés finis. Supposons de plus que* $\mathcal{E}$ *est complète; alors il en est de même des catégories* $\mathcal{O}rd\,\mathbf{D}$ *et* $\mathcal{C}at\,\mathbf{D}$, *et les foncteurs figurant dans la suite*

$$\mathcal{O}rd\,\mathbf{D} \longrightarrow \mathcal{C}at\,\mathbf{D} \longrightarrow \mathcal{E}$$

commutent avec les limites projectives.

PREUVE. Soit $\mathcal{C}$ une petite catégorie et considérons la loi distributive $\overline{\mathbf{D}}: \overline{\mathbf{T}} \to \overline{\mathbf{T}}'$ sur $\mathcal{E}^{\mathcal{C}}$ induite par $\mathbf{D}$: si $F: \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ est un foncteur, on a:

$$\overline{T}(F) = T \circ F, \quad \overline{I}(F) = I \circ F, \quad \overline{K}(F) = K \circ F,$$
$$\overline{T'}(F) = T' \circ F, \quad \overline{I'}(F) = I' \circ F, \quad \overline{K'}(F) = K' \circ F,$$
$$\overline{D}(F) = D \circ F: T \circ T' \circ F \longrightarrow T' \circ T \circ F.$$

Une $\overline{\mathbf{D}}$-catégorie n'est autre que la donnée d'un foncteur $\phi: \mathcal{C} \to \mathcal{C}at\,\mathbf{D}$, que l'on notera $(A_c, a_c, b_c, i_c, k_c)_{c \in |\mathcal{C}|}$.

Si $\underleftarrow{Lim}: \mathcal{E}^{\mathcal{C}} \to \mathcal{E}$ désigne le foncteur $\mathcal{C}$-limite projective et si l et l' sont les transformations naturelles

$$T \circ \underleftarrow{Lim} \to \underleftarrow{Lim} \circ T \quad \text{et} \quad T' \circ \underleftarrow{Lim} \to \underleftarrow{Lim} \circ T'$$

(définies ponctuellement à l'aide des morphismes canoniques), alors

$$(\underleftarrow{Lim}, l): \overline{\mathbf{T}} \longrightarrow \mathbf{T} \quad \text{et} \quad (\underleftarrow{Lim}, l'): \overline{\mathbf{T}'} \longrightarrow \mathbf{T}'$$

sont deux morphismes de $\overleftarrow{\mathcal{T}r}$ qui vérifient l'axiome $(\overleftarrow{\mathrm{D}})$, de sorte que $\underleftarrow{\mathbf{Lim}} = ((\underleftarrow{Lim}, l), l')$ est un morphisme de $\overleftarrow{\mathcal{M}on}\,\overleftarrow{\mathcal{T}r}$. Comme $\underleftarrow{Lim}$ respecte les produits fibrés de $\mathcal{E}^{\mathcal{C}}$, on utilise la proposition II.2.1: on a donc un foncteur $\overleftarrow{\mathcal{C}at}\,\underleftarrow{\mathbf{Lim}}: \mathcal{C}at\,\overline{\mathbf{D}} \to \mathcal{C}at\,\mathbf{D}$ qui, à la $\overline{\mathbf{D}}$-catégorie

$$(A_c, a_c, b_c, i_c, k_c)_{c \in |\mathcal{C}|} \quad \text{dans } \mathcal{E}^{\mathcal{C}}$$

associe la **D**-catégorie sur $\underleftarrow{Lim}\,A_c$ dont le **D**-graphe sous-jacent (a, b) est obtenu par limite projective du diagramme en traits pleins suivant:

$$\begin{tikzcd}
 & & \pi \arrow[ddll, dashed, "a"'] \arrow[ddrr, dashed, "b"] & & \\
 & & \underleftarrow{Lim}\,\pi_c \arrow[dl, "\underleftarrow{Lim}\,a_c"'] \arrow[dr, "\underleftarrow{Lim}\,b_c"] & & \\
T\,\underleftarrow{Lim}\,A_c \arrow[r, "l\,A_c"'] & \underleftarrow{Lim}\,T A_c & & \underleftarrow{Lim}\,T'A_c & T'\,\underleftarrow{Lim}\,A_c \arrow[l, "l'A_c"]
\end{tikzcd}$$

∇

B. $\mathbf{L} : \mathbf{D} \to \overline{\mathbf{D}}$ est un morphisme de $\overrightarrow{\mathfrak{Man}}\,\overrightarrow{\mathfrak{Tr}}$.

Autrement dit, $\mathbf{L} = ((L, l'), l)$, où

- $L : \mathfrak{E} \to \overline{\mathfrak{E}}$ est un foncteur,
- $(L, l) : \mathbf{T} \to \overline{\mathbf{T}}$ et $(L, l') : \mathbf{T'} \to \overline{\mathbf{T}}'$ sont deux morphismes de $\overrightarrow{\mathfrak{Tr}}$ qui rendent commutatif le diagramme $(\overrightarrow{\mathrm{D}})$ dans $\mathfrak{Cat}$:

$$\begin{tikzcd}
L \circ T' \circ T \arrow[r, "l' \circ T"] & \overline{T}' \circ L \circ T \arrow[r, "\overline{T}' \circ l"] & \overline{T}' \circ \overline{T} \circ L \\
 & (\overrightarrow{\mathrm{D}}) & \\
L \circ T \circ T' \arrow[uu, "L \circ D"] \arrow[r, "l \circ T'"'] & \overline{T} \circ L \circ T' \arrow[r, "\overline{T} \circ l'"'] & \overline{T} \circ \overline{T}' \circ L \arrow[uu, "\overline{D} \circ L"']
\end{tikzcd}$$

qui exprime que $l : (L, l') \circ (T, D) \to (\overline{T}, \overline{D}) \circ (L, l')$ est un 2-morphisme de $\overrightarrow{\mathfrak{Tr}}$.

DEFINITION II.2.1. On dira que $\mathbf{L} = ((L, l'), l) : \mathbf{D} \to \overline{\mathbf{D}}$ est *un morphisme de lois distributives cartésien dans* $\overrightarrow{\mathfrak{Man}}\,\overrightarrow{\mathfrak{Tr}}$ si:

1° $L : \mathfrak{E} \to \overline{\mathfrak{E}}$ respecte les produits fibrés de $\mathfrak{E}$,

2° $l : L \circ T \to \overline{T} \circ L$ et $l' : L \circ T' \to \overline{T}' \circ L$ sont des transformations naturelles cartésiennes (0.2),

3° Le diagramme $(\overrightarrow{\mathrm{D}})$ est un produit fibré.

(1 et 2 signifient que (L, l) et (L, l') sont des *morphismes de triples cartésiens dans* $\overrightarrow{\mathfrak{Tr}}$.)

PROPOSITION II.2.2. *On peut construire un foncteur* $\overrightarrow{\mathfrak{Cat}}\,\mathbf{L}$ *rendant commutatif le diagramme suivant, lorsque* $\mathbf{L} : \mathbf{D} \to \overline{\mathbf{D}}$ *est un morphisme de lois distributives cartésien dans* $\overrightarrow{\mathfrak{Man}}\,\overrightarrow{\mathfrak{Tr}}$:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}at\,\mathbf{D} \arrow[r, "U^{\mathbf{D}}"] \arrow[d, "\overrightarrow{\mathcal{C}at}\,\mathbf{L}"'] & \mathcal{E} \arrow[d, "L"] \\
\mathcal{C}at\,\overline{\mathbf{D}} \arrow[r, "U^{\overline{\mathbf{D}}}"'] & \overline{\mathcal{E}}
\end{tikzcd}$$

PREUVE. Si $\Theta = (A, a, b, i, k)$ est une **D**-catégorie, la construction de la $\overline{\mathbf{D}}$-catégorie $\overrightarrow{\mathcal{C}at}\,\mathbf{L}(\Theta)$ est immédiate: elle est égale à

$$(LA, lA \circ La,\ l'A \circ Lb,\ Li,\ Lk):$$

$$\begin{tikzcd}
 & & L\pi \arrow[dl, "La"'] \arrow[dr, "Lb"] & & \\
\overline{T}LA & LTA \arrow[l, "lA"'] & & LT'A \arrow[r, "l'A"] & \overline{T}'LA
\end{tikzcd}$$

Le fait que **L** soit un morphisme cartésien est utilisé pour pouvoir affirmer que le diagramme extérieur $(\overline{\mathrm{P}}_2)$ ci-dessous est un produit fibré (chacun des diagrammes internes en étant un), de sorte que

$$\overline{\pi}_2 = L\,\pi_2, \quad \overline{v}_2 = l\pi \circ L\,v_2 \quad \text{et} \quad \overline{v}'_2 = l'\pi \circ L\,v'_2.$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & \overline{\pi}_2 = L\pi_2 \arrow[dll, "Lv_2"'] \arrow[drr, "Lv'_2"] & & & \\
 & LT\pi \arrow[dl, "l\pi"'] \arrow[dr, "LTb"] & & L(\mathrm{P}_2) & & LT'\pi \arrow[dl, "LT'a"'] \arrow[dr, "l'\pi"] & \\
\overline{T}L\pi \arrow[dr, "\overline{T}Lb"'] & & LTT'A \arrow[dl, "lT'A"'] \arrow[rr, "LDA"] & & LT'TA \arrow[dr, "l'TA"] & & \overline{T}'L\pi \arrow[dl, "\overline{T}'La"] \\
 & \overline{T}LT'A \arrow[dr, "\overline{T}l'A"'] & & (\overrightarrow{\mathrm{D}}) & & \overline{T}'LTA \arrow[dl, "\overline{T}'lA"] & \\
 & & \overline{T}\,\overline{T}'LA \arrow[rr, "\overline{D}LA"'] & & \overline{T}'\overline{T}LA & &
\end{tikzcd}$$

∇

REMARQUES. 1° Si (A, b) est une **D**-algèbre, $\overrightarrow{\mathcal{C}at}\,\mathbf{L}(A, b)$ est la $\overline{\mathbf{D}}$-catégorie $(LA, lA, l'A \circ Lb, LIA, LKA)$.

2° Les hypothèses exigées sur **L** sont trop fortes pour que l'on puisse conclure, parallèlement au corollaire II.2.1 que $\mathcal{C}at\,\mathbf{D}$ est co-complète lorsque $\mathcal{E}$ l'est.

C. $\mathbf{L} : \mathbf{D} \to \overline{\mathbf{D}}$ est un morphisme de $\overleftarrow{\mathcal{M}on}\,\overrightarrow{\mathcal{T}_n}$,

Autrement dit, $\mathbf{L} = ((L, l'), l)$, où

- $L : \mathcal{E} \to \overline{\mathcal{E}}$ est un foncteur,
- $(L, l) : \mathbf{T} \to \overline{\mathbf{T}}$ est un morphisme de $\overleftarrow{\mathcal{T}_n}$ et $(L, l') : \mathbf{T'} \to \overline{\mathbf{T}}'$ un morphisme de $\overrightarrow{\mathcal{T}_n}$ qui rendent commutatif le diagramme $(\overleftrightarrow{\overline{\mathrm{D}}})$ dans $\mathcal{C}at$:

$$\begin{tikzcd}
L \circ T' \circ T \arrow[r, "l' \circ T"] & \overline{T}' \circ L \circ T & \overline{T}' \circ \overline{T} \circ L \arrow[l, "\overline{T}' \circ l"'] \\
L \circ T \circ T' \arrow[u, "L \circ D"] & \overline{T} \circ L \circ T' \arrow[l, "l \circ T'"] \arrow[r, "\overline{T} \circ l'"'] \arrow[u, phantom, "(\overleftrightarrow{\overline{\mathrm{D}}})"] & \overline{T} \circ \overline{T}' \circ L \arrow[u, "\overline{D} \circ L"']
\end{tikzcd}$$

qui exprime que $l : (\overline{T}, \overline{D}) \circ (L, l') \to (L, l') \circ (T, D)$ est un 2-morphisme de $\overrightarrow{\mathcal{T}_n}$.

En s'inspirant des propositions II.2.1 et II.2.2, on en déduit celle qui suit:

PROPOSITION II.2.3. *On peut construire un foncteur* $\overleftrightarrow{\mathcal{C}at}\,\mathbf{L}$ *rendant commutatif le diagramme suivant, lorsque* $(L, l') : \mathbf{T'} \to \overline{\mathbf{T}}'$ *est un morphisme de triples cartésien dans* $\overrightarrow{\mathcal{T}_n}$ *:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}at\,\mathbf{D} \arrow[r, "U^{\mathbf{D}}"] \arrow[d, "\overleftrightarrow{\mathcal{C}at}\,\mathbf{L}"'] & \mathcal{E} \arrow[d, "L"] \\
\mathcal{C}at\,\overline{\mathbf{D}} \arrow[r, "U^{\overline{\mathbf{D}}}"'] & \overline{\mathcal{E}}
\end{tikzcd}$$

(le $\overline{\mathbf{D}}$*-graphe* $(\overline{a}, \overline{b})$ *sous-jacent à* $\overleftrightarrow{\mathcal{C}at}\,\mathbf{L}(\Theta)$ *est le suivant,*

$$\begin{tikzcd}
& \overline{\pi} \arrow[r, "p"] \arrow[dl, "\overline{a}"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{P})"] & L\pi \arrow[dl, "La"] \arrow[dr, "Lb"] & & \\
\overline{T}LA \arrow[r, "lA"'] & LTA & & LT'A \arrow[r, "l'A"'] & \overline{T}'LA
\end{tikzcd}$$

où $\quad \overline{b} = l'A \circ Lb \circ p \quad$ si $\quad \Theta = (A, a, b, i, k)$).

REMARQUE. Cette fois-ci, le foncteur $\overleftrightarrow{\mathcal{C}at}\,\mathbf{L}$ respecte les $\mathbf{D}$-algèbres: si (A, b) est une $\mathbf{D}$-algèbre, $\overleftrightarrow{\mathcal{C}at}\,\mathbf{L}(A, b)$ est la $\overline{\mathbf{D}}$-algèbre

$$\overline{T}LA \xrightarrow{lA} LTA \xrightarrow{Lb} LT'A \xrightarrow{l'A} \overline{T}'LA .$$

D. Supposons ici que $\mathbf{D} : \mathbf{T} \to \mathbf{T'}$ et $\overline{\mathbf{D}} : \overline{\mathbf{T}} \to \overline{\mathbf{T}}'$ soient deux lois distributives sur $\mathcal{E}$ (toujours munie d'un choix canonique de produits fibrés finis) : $\mathcal{E} = \bar{\mathcal{E}}$. Soit un morphisme $\mathbf{L} = ((L, l'), l) : \mathbf{D} \to \bar{\mathbf{D}}$ dans $\overrightarrow{\mathcal{M}on}\,\overrightarrow{\mathcal{T}r}$ tel que $L = 1_{\mathcal{E}}$. Alors, selon que l'on considère $(1_{\mathcal{E}}, l)$ et $(1_{\mathcal{E}}, l')$ comme des morphismes de $\overrightarrow{\mathcal{T}r}$ (donc

$$(1_{\mathcal{E}}, l) : \mathbf{T} \to \bar{\mathbf{T}} \quad \text{et} \quad (1_{\mathcal{E}}, l') : \mathbf{T'} = \bar{\mathbf{T}}' \,)$$

ou de $\overleftarrow{\mathcal{T}r}$ (donc

$$(1_{\mathcal{E}}, l) : \bar{\mathbf{T}} \to \mathbf{T} \quad \text{et} \quad (1_{\mathcal{E}}, l') : \bar{\mathbf{T}}' \to \mathbf{T'} \,),$$

on définit d'une part un morphisme

$$\overrightarrow{\mathbf{L}} = \mathbf{L} = ((1_{\mathcal{E}}, l'), l) : \mathbf{D} \to \bar{\mathbf{D}} \quad \text{dans} \quad \overrightarrow{\mathcal{M}on}\,\overrightarrow{\mathcal{T}r},$$

et d'autre part un morphisme

$$\overleftarrow{\mathbf{L}} = ((1_{\mathcal{E}}, l), l') : \bar{\mathbf{D}} \to \mathbf{D} \quad \text{dans} \quad \overleftarrow{\mathcal{M}on}\,\overleftarrow{\mathcal{T}r}.$$

Pour établir le résultat qui suit, on suppose que $\overrightarrow{\mathbf{L}}$ est un morphisme de lois distributives cartésien dans $\overrightarrow{\mathcal{M}on}\,\overrightarrow{\mathcal{T}r}$.

PROPOSITION II.2.4. *Le foncteur* $\overrightarrow{\mathcal{C}at}\,\overrightarrow{\mathbf{L}} : \mathcal{C}at\,\mathbf{D} \to \mathcal{C}at\,\bar{\mathbf{D}}$ *est un adjoint du foncteur* $\overleftarrow{\mathcal{C}at}\,\overleftarrow{\mathbf{L}} : \mathcal{C}at\,\bar{\mathbf{D}} \to \mathcal{C}at\,\mathbf{D}$.

PREUVE. Si $\Theta = (A, a, b, i, k)$ et $\hat{\Theta} = (\hat{A}, \hat{a}, \hat{b}, \hat{\imath}, \hat{k})$ sont respectivement une **D**-catégorie et une $\bar{\mathbf{D}}$-catégorie, on doit établir l'isomorphisme:

$$Hom_{\mathcal{C}at\,\mathbf{D}}(\Theta, \overleftarrow{\mathcal{C}at}\,\overleftarrow{\mathbf{L}}(\hat{\Theta})) \simeq Hom_{\mathcal{C}at\,\bar{\mathbf{D}}}(\overrightarrow{\mathcal{C}at}\,\overrightarrow{\mathbf{L}}(\Theta), \hat{\Theta}).$$

Au morphisme $(f, \hat{f}) : \overrightarrow{\mathcal{C}at}\,\overrightarrow{\mathbf{L}}(\Theta) \to \hat{\Theta}$ de $\mathcal{C}at\,\bar{\mathbf{D}}$, on associe le morphisme $(f, \bar{f}) : \Theta \to \overleftarrow{\mathcal{C}at}\,\overleftarrow{\mathbf{L}}(\hat{\Theta})$ de $\mathcal{C}at\,\mathbf{D}$, où $\bar{f} : \pi \to \bar{\pi}$ est le morphisme canonique (dû à $(\bar{\mathrm{P}})$) caractérisé par

$$\bar{p} \circ \bar{f} = f_1 \quad \text{et} \quad \bar{p}' \circ \bar{f} = f'_1 \,,$$

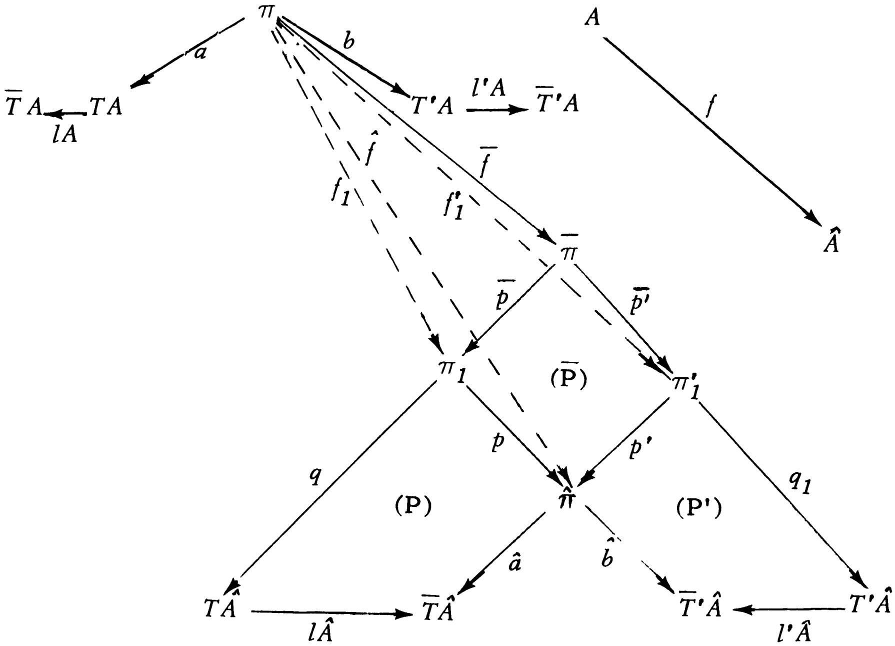
où $f_1 : \pi \to \pi_1$ et $f'_1 : \pi \to \pi'_1$ sont eux-mêmes les morphismes canoniques (dûs à (P) et (P')) caractérisés par les égalités

$$q \circ f_1 = Tf \circ a \quad \text{et} \quad p \circ f_1 = \hat{f}$$

d'une part,

$$q' \circ f'_1 = T'f \circ b \quad \text{et} \quad p' \circ f'_1 = \hat{f}$$

d'autre part.



Inversement, au morphisme $(f,\overline{f}): \Theta \to \overleftarrow{\mathcal{C}at}\,\overleftarrow{\mathbf{L}}(\hat{\Theta})$ de $\mathcal{C}at\,\mathbf{D}$, on associe le morphisme $(f,\hat{f}): \overrightarrow{\mathcal{C}at}\,\overrightarrow{\mathbf{L}}(\Theta) \to \hat{\Theta}$ de $\mathcal{C}at\,\overline{\mathbf{D}}$ défini par:

$$\hat{f} = p \circ \overline{p} \circ \overline{f} = p' \circ \overline{p'} \circ \overline{f}. \qquad \nabla$$

II.3. Interprétation des D-catégories: la pseudo-catégorie des D-spans.

Dans la définition des **D**-catégories (II.1), nous avons utilisé un **D**-span; nous allons voir que les **D**-spans forment une pseudo-catégorie $\mathcal{S}p\,\mathbf{D}$ au sens d'Albert BURRONI [Bu 2] et que les **D**-catégories sont des monades dans cette pseudo-catégorie. On suppose toujours que $\mathbf{D}: \mathbf{T} \to \mathbf{T'}$ est une loi distributive sur la catégorie $\mathcal{E}$ munie d'un choix canonique de produits fibrés finis.

A. Soient A et B deux objets de $\mathcal{E}$; on considère la catégorie $Hom_{\mathcal{S}p\,\mathbf{D}}(A,B)$ dont les objets sont les **D**-spans $\theta = (a,b): A \to B$ de la forme

$$TA \xleftarrow{\ a\ } \pi \xrightarrow{\ b\ } T'B$$

(où π est le sommet de θ), et dont les morphismes sont les $m: \theta \to \bar{\theta}$, où $m: \pi \to \bar{\pi}$ est un morphisme de $\mathfrak{E}$ rendant les deux triangles suivants commutatifs:

$$
\begin{tikzcd}
 & \pi \arrow[dl, "a"'] \arrow[dr, "b"] \arrow[dd, "m"] & \\
TA & & T'B \\
 & \bar{\pi} \arrow[ul, "\bar{a}"] \arrow[ur, "\bar{b}"'] &
\end{tikzcd}
$$

La loi de composition de $Hom_{\mathfrak{Sp}\,\mathbf{D}}(A, B)$ est trivialement donnée par celle de $\mathfrak{E}$ et notée «.».

Il se trouve que les **D**-spans peuvent être munis d'une autre loi de composition, appelée *première loi de* $\mathfrak{Sp}\,\mathbf{D}$, et notée $\otimes$: Si

$$\theta_1 = (a_1, b_1): A_1 \to A_2 \quad \text{et} \quad \theta_2 = (a_2, b_2): A_2 \to A_3$$

sont des **D**-spans, leur composé est le **D**-span

$$\theta_2 \otimes \theta_1 = (KA_1 \circ Ta_1 \circ v_{1,2},\ K'A_3 \circ T'b_2 \circ v'_{1,2}): A_1 \to A_3,$$

où $(P_{1,2})$ est un produit fibré:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & & \pi_{1,2} \arrow[dll, "v_{1,2}"'] \arrow[drr, "v'_{1,2}"] & & & & \\
 & & T\pi_1 \arrow[ddll, "Ta_1"'] \arrow[dr, "Tb_1"] & & (P_{1,2}) & & T'\pi_2 \arrow[dl, "T'a_2"'] \arrow[ddrr, "T'b_2"] & & \\
 & & & TT'A_2 \arrow[rr, "DA_2"'] & & T'TA_2 & & & \\
TTA_1 \arrow[dr, "KA_1"'] & & & \pi_1 \arrow[dll, "a_1"'] \arrow[drrr, "b_1"] & & \pi_2 \arrow[dlll, "a_2"'] \arrow[drr, "b_2"] & & & T'T'A_3 \arrow[dl, "K'A_3"] \\
 & TA_1 & TA_2 & & & & T'A_2 & T'A_3 &
\end{tikzcd}
$$

La loi $\otimes$ s'étend bien sûr aux morphismes de **D**-spans (grâce à la propriété universelle des produits fibrés), que l'on appellera dorénavant les 2-morphismes de $\mathfrak{Sp}\,\mathbf{D}$.

$\mathfrak{Sp}\,\mathbf{D}$ *munie de ces deux lois de composition n'est pas une 2-catégorie, ni même une bicatégorie au sens de* BENABOU *:*

1° La loi $\otimes$ n'est unitaire qu'à des 2-morphismes de $\mathcal{S}p\,\mathbf{D}$ près: si $\theta = (a, b): A \to B$ est un $\mathbf{D}$-span, et si 1_A désigne le $\mathbf{D}$-span

$$TA \xleftarrow{IA} A \xrightarrow{I'A} T'A$$

(que l'on appellera le $\mathbf{D}$-span identique en A), on a des 2-morphismes

$$l(\theta): \theta \to 1_B \otimes \theta \quad \text{et} \quad r(\theta): \theta \to \theta \otimes 1_A$$

définis par les morphismes canoniques $\langle I\pi, b\rangle$ et $\langle a, I'\pi\rangle$ (voir la figure précédente en y remplaçant θ_2 par I_B ou θ_1 par I_A). La «cohérence» de $l(\theta)$ et $r(\theta)$ sera considérée plus loin (diagramme ($\overline{\mathbf{A}}$)).

2° Pour l'associativité, la situation est encore plus compliquée: pour tout entier n et tout n-uplet de $\mathbf{D}$-spans

$$(\theta_n, \theta_{n-1}, \ldots, \theta_1), \quad \text{où} \quad \theta_i = (a_i, b_i): A_i \to A_{i+1},$$

il existe un composé n-aire

$$\theta_n \otimes \theta_{n-1} \otimes \ldots \otimes \theta_1 : A_1 \to A_{n+1},$$

appelé le *composé canonique de* $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ et que l'on construit à l'aide de la récurrence suivante:

- On suppose que l'on sait construire le composé canonique

$$\theta_j \otimes \theta_{j-1} \otimes \ldots \otimes \theta_i = (a_{i,j}, b_{i,j})$$

chaque fois que $j - i + 1 = n - 1$, et qu'il est muni d'un $\mathbf{D}$-*span auxiliaire*

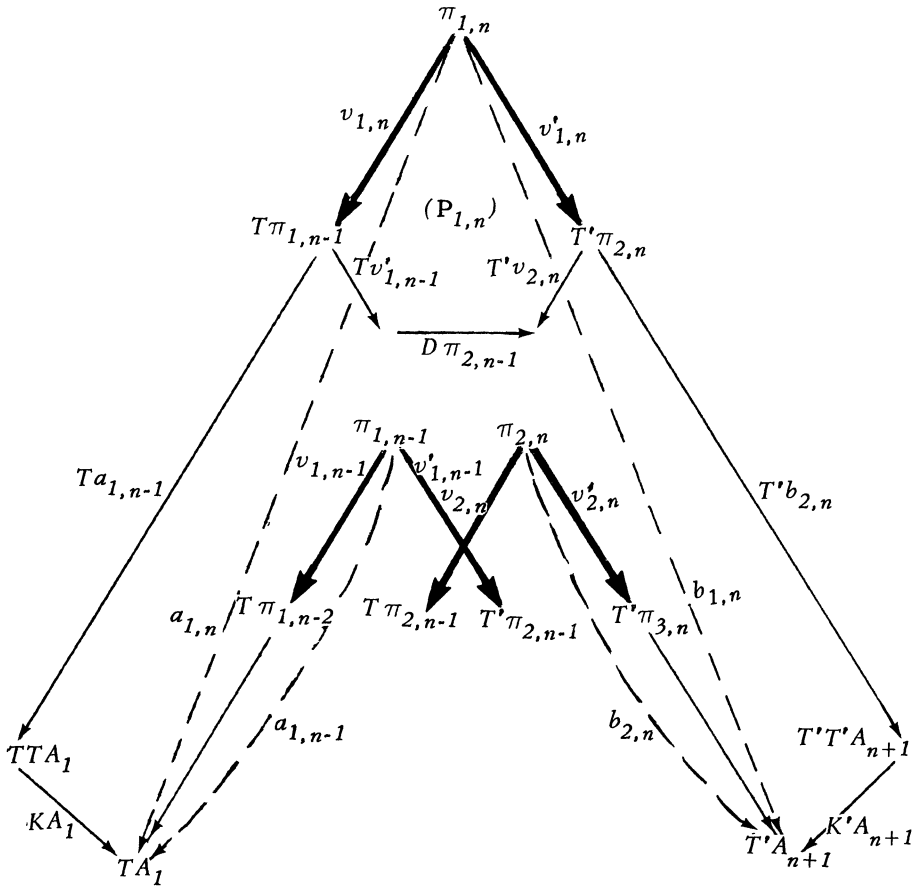
$$(v_{i,j}, v'_{i,j}): \pi_{i,j-1} \to \pi_{i+1,j}:$$

$$\begin{tikzcd}
 & & \pi_{i,j} \arrow[dl, "v_{i,j}"'] \arrow[dr, "v'_{i,j}"] \arrow[ddll, dashed, "a_{i,j}"'] \arrow[ddrr, dashed, "b_{i,j}"] & & \\
 & T\pi_{i,j-1} \arrow[dl] & & T'\pi_{i+1,j} \arrow[dr] & \\
TA_i & & & & T'A_{j+1}
\end{tikzcd}$$

où $\pi_{i,j}$, $\pi_{i,j-1}$, $\pi_{i+1,j}$ sont les sommets des $\mathbf{D}$-spans

$$\theta_j \otimes \ldots \otimes \theta_i, \quad \theta_{j-1} \otimes \ldots \otimes \theta_i, \quad \theta_j \otimes \ldots \otimes \theta_{i+1}.$$

- Alors $\theta_n \otimes \ldots \otimes \theta_1$ se construit à l'aide des composés canoniques des n-1 premiers et des $n - 1$ derniers $\mathbf{D}$-spans, et du produit fibré $(\mathrm{P}_{1,n})$ intervenant dans la composition de leurs deux $\mathbf{D}$-spans auxiliaires respectifs $(v_{1,n-1}, v'_{1,n-1})$ et $(v_{2,n}, v'_{2,n})$:



$$\theta_n \otimes \theta_{n-1} \otimes \ldots \otimes \theta_1 = (a_{1,n}, b_{1,n}) : A_1 \to A_{n+1} ,$$

où $a_{1,n} = KA_1 \circ Ta_{1,n-1} \circ v_{1,n}$ et $b_{1,n} = K'A_{n+1} \circ T'b_{2,n} \circ v'_{1,n}$,

et où $(v_{1,n}, v'_{1,n})$ est le **D**-span auxiliaire de $\theta_n \otimes \theta_{n-1} \otimes \ldots \otimes \theta_1$.

Cette récurrence n'est valable que si l'on convient que le **D**-span auxiliaire d'un **D**-span $\theta = (a, b)$ est (a, b), de sorte que le composé $\theta_2 \otimes \theta_1$ construit précédemment s'insère bien dans le cadre de cette construction générale.

Un 2-morphisme relie de façon «cohérente» (voir le diagramme $(\overline{A})$ plus loin) ce composé canonique à tout autre composé fait par associativité sur ces n **D**-spans.

Ainsi, pour $n = 3$, au lieu d'un isomorphisme

$$(\theta_3 \otimes \theta_2) \otimes \theta_1 \longrightarrow \theta_3 \otimes (\theta_2 \otimes \theta_1),$$

on a les 2-morphismes d'associativité

$$(\theta_3 \otimes \theta_2) \otimes \theta_1 \xleftarrow{s'(\theta_3, \theta_2, \theta_1)} \theta_3 \otimes \theta_2 \otimes \theta_1 \xrightarrow{s(\theta_3, \theta_2, \theta_1)} \theta_3 \otimes (\theta_2 \otimes \theta_1)$$

que nous allons construire.

On adopte les mêmes notations que précédemment; de plus $\pi_{1,23}$ et $\pi_{12,3}$ sont les sommets des **D**-spans $(\theta_3 \otimes \theta_2) \otimes \theta_1$ et $\theta_3 \otimes (\theta_2 \otimes \theta_1)$. Par construction, ce sont les sommets des produits fibrés de

$$D A_2 \circ T b_1 \quad \text{et} \quad T' a_{2,3} = T' K A_2 \circ T' T a_2 \circ T' v_{2,3}$$

d'une part (les projections étant ω_1 et ω'_1), de

$$D A_3 \circ T b_{1,2} = D A_3 \circ T K' A_3 \circ T T' b_2 \circ T v'_{1,2} \quad \text{et} \quad T' a_3$$

d'autre part (les projections étant ω_3 et ω'_3). Alors s' et s sont les morphismes canoniques

$$\langle K \pi_1 \circ T v_{1,2} \circ v_{1,3}, v'_{1,3} \rangle \quad \text{et} \quad \langle v_{1,3}, K' \pi_3 \circ T' v'_{2,3} \circ v'_{1,3} \rangle$$

dûs aux produits fibrés $\pi_{1,23}$ et $\pi_{12,3}$ et aux égalités:

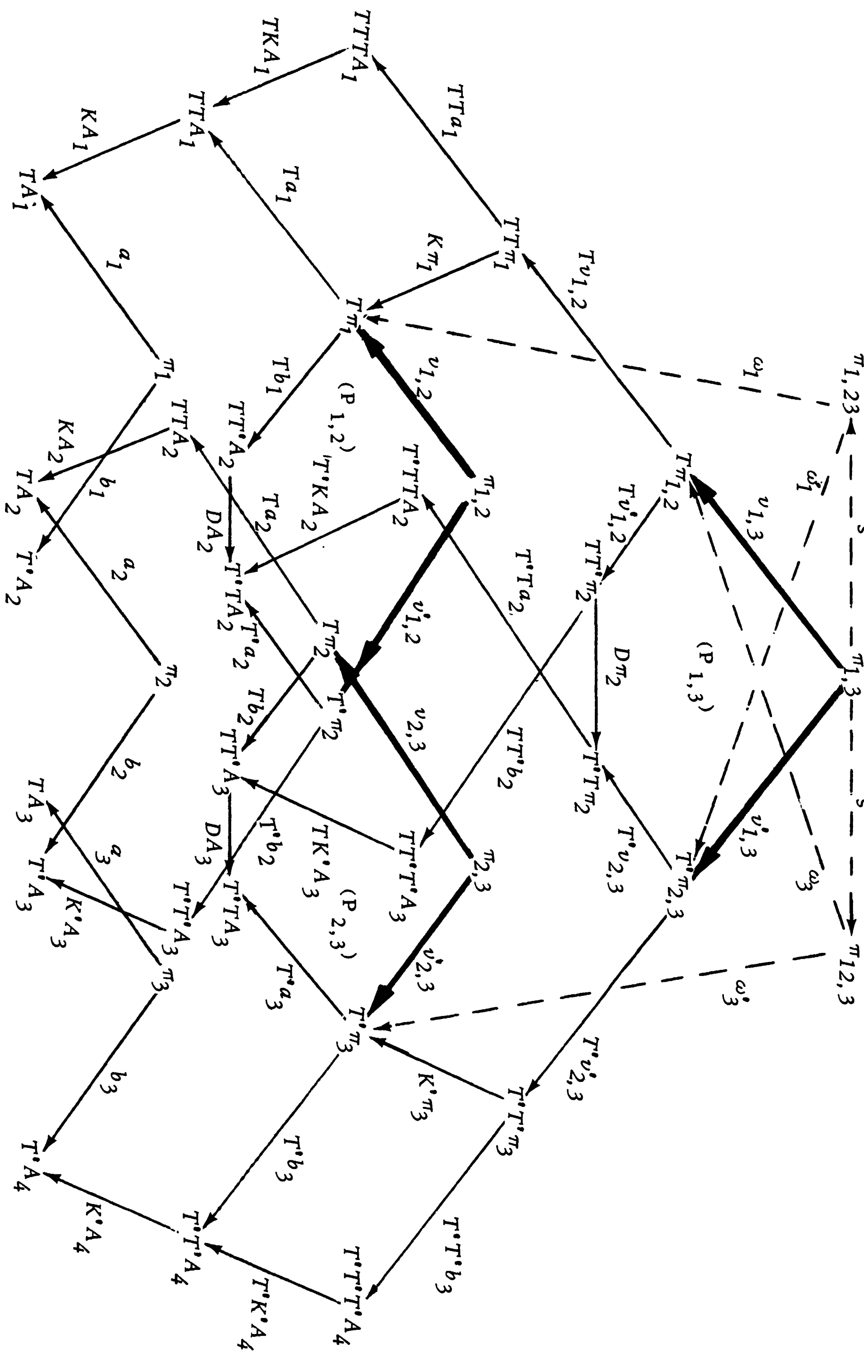
$$D A_2 \circ T b_1 \circ K \pi_1 \circ T v_{1,2} \circ v_{1,3} = T' a_{2,3} \circ v'_{1,3}$$

$$\text{et} \quad D A_3 \circ T b_{1,2} \circ v_{1,3} = T' a_3 \circ K' \pi_3 \circ T' v'_{2,3} \circ v'_{1,3} \,;$$

démontrons par exemple la seconde de ces égalités:

$$\begin{array}{lll} & D A_3 \circ T b_{1,2} \circ v_{1,3} & = D A_3 \circ T K' A_3 \circ T T' b_2 \circ T v'_{1,2} \circ v_{1,3} \\ (D_2) & & = K' T A_3 \circ T' D A_3 \circ D T' A_3 \circ T T' b_2 \circ T v'_{1,2} \circ v_{1,3} \\ (ND) & & = K' T A_3 \circ T' D A_3 \circ T' T b_2 \circ D \pi_2 \circ T v'_{1,2} \circ v_{1,3} \\ (P_{1,3}) & & = K' T A_3 \circ T' D A_3 \circ T' T b_2 \circ T' v_{2,3} \circ v'_{1,3} \\ (P_{2,3}) & & = K' T A_3 \circ T' T' a_3 \circ T' v'_{2,3} \circ v'_{1,3} \\ (NK') & & = T' a_3 \circ K' \pi_3 \circ T' v'_{2,3} \circ v'_{1,3} \,. \end{array}$$

En fait, $\mathcal{S}p\,\mathbf{D}$ est une *pseudo-catégorie* au sens d'Albert BURRONI [Bu 2]. En effet, sa première loi de composition peut être définie à



TTTA1
TKA1
TTA1
KA1
TA1
TTa1
Ta1
a1
TTπ1
Kπ1
Tπ1
Tv1,2
π1
Tb1
v1,2
ω1
π1,23
TTA2
KA2
TA2
b1
T'A2
TT'A2
(P1,2)
T'KA2
T'TTA2
π1,2
Tπ1,2
v1,3
ω'1
s'
Ta2
DA2
T'TA2
T'Tv'1,2
TT'π2
T'Ta2
a2
T'a2
Tπ2
v'1,2
Dπ2
(P1,3)
π1,3
π2
Tb2
T'π2
v2,3
TT'b2
T'Tπ2
b2
TT'A3
TA3
T'A3
a3
DA3
T'b2
TK'A3
TT'T'A3
π2,3
T'v2,3
T'π2,3
v'1,3
s
ω3
K'A3
T'T'A3
T'TA3
(P2,3)
π12,3
π3
T'a3
v'2,3
ω'3
T'π3
T'v'2,3
b3
K'π3
T'T'π3
T'b3
T'A4
K'A4
T'T'A4
T'T'b3
T'K'A4
T'T'T'A4

l'aide d'un morphisme $\beta : N\mathcal{S}p\,\mathbf{D} \to \mathcal{S}p\,\mathbf{D}$ dans la catégorie $\mathcal{C}at\mathcal{G}r$ des objets-catégories dans la catégorie des graphes, où $\mathbf{N} = (\mathcal{C}at\mathcal{G}r, N, I, K)$ est le triple des monoïdes (voir exemple 3-(i) de I.1); $\mathcal{S}p\,\mathbf{D} \in |\mathcal{C}at\mathcal{G}r|$, en considérant sur $\mathcal{S}p\,\mathbf{D}$ la seconde loi et en oubliant la première loi pour ne considérer les $\mathbf{D}$-spans et leurs morphismes que comme les flèches d'un graphe; alors β nous donne la première loi:

$$\beta(\theta_n, \dots, \theta_1) = \theta_n \otimes \theta_{n-1} \otimes \dots \otimes \theta_1 ,$$

si $(\theta_n, \dots, \theta_1)$ est un chemin de $\mathbf{D}$-spans (*). On aura entièrement défini β lorsqu'on aura précisé que $\beta(\theta) = \theta$ et que $\beta(\emptyset_A) = 1_A$, si $\emptyset_A$ est le chemin vide en A (on rappelle que 1_A est le $\mathbf{D}$-span identique en A). β se prolonge de façon «naturelle» aux 2-morphismes de $\mathcal{S}p\,\mathbf{D}$.

De plus, *$(\mathcal{S}p\,\mathbf{D}, \beta)$ est une $\mathbf{N}$-2-algèbre* [Bu 2] (voir la définition précise et générale dans [bu 2]): il existe un 2-morphisme

$$\begin{tikzcd}
NN\mathcal{S}p\,\mathbf{D} \arrow[r, "N\beta"] \arrow[d, "K\mathcal{S}p\,\mathbf{D}"'] & N\mathcal{S}p\,\mathbf{D} \arrow[d, "\beta"] \\
N\mathcal{S}p\,\mathbf{D} \arrow[r, "\beta"'] \arrow[ur, phantom, "\kappa"] & \mathcal{S}p\,\mathbf{D}
\end{tikzcd}$$

qui est cohérent en ce sens que le diagramme $(\bar{\mathrm{A}})$ suivant est commutatif dans $\mathcal{C}at\mathcal{G}r$:

$$\begin{tikzcd}
\beta\circ K\mathcal{S}p\,\mathbf{D}\circ KN\mathcal{S}p\,\mathbf{D} \arrow[r, "\kappa\circ KN\mathcal{S}p\,\mathbf{D}"] \arrow[d, equal] & \begin{matrix}\beta\circ K\mathcal{S}p\,\mathbf{D}\circ NN\beta \\ \| \\ \beta\circ N\beta''\circ KN\mathcal{S}p\,\mathbf{D}\end{matrix} \arrow[r, "\kappa\circ NN\beta"] \arrow[d, phantom, "(\bar{\mathrm{A}})"] & \beta\circ N\beta\circ NN\beta \\
\beta\circ K\mathcal{S}p\,\mathbf{D}\circ NK\mathcal{S}p\,\mathbf{D} \arrow[rr, "\kappa\circ NK\mathcal{S}p\,\mathbf{D}"'] & & \beta\circ N\beta\circ NK\mathcal{S}p\,\mathbf{D} \arrow[u, "\beta\circ N\kappa"']
\end{tikzcd}$$

A tout chemin dans $N\mathcal{S}p\,\mathbf{D}$:

$$\bar{\theta} = ((\theta_{p,n_p}, \dots, \theta_{p,1}), \dots, (\theta_{2,n_2}, \dots, \theta_{2,1}), (\theta_{1,n_1}, \dots, \theta_{1,1})),$$

κ associe un 2-morphisme $\kappa(\bar{\theta})$:

$$\theta_{p,n_p} \otimes \dots \otimes \theta_{p,1} \otimes \dots \otimes \theta_{2,n_2} \otimes \dots \otimes \theta_{2,1} \otimes \theta_{1,n_1} \otimes \dots \otimes \theta_{1,1} \longrightarrow$$
$$(\theta_{p,n_p} \otimes \dots \otimes \theta_{p,1}) \otimes \dots \otimes (\theta_{2,n_2} \otimes \dots \otimes \theta_{2,1}) \otimes (\theta_{1,n_1} \otimes \dots \otimes \theta_{1,1}).$$

(*) Contrairement à ce que l'on avait fait dans la première partie pour les mots, notés par simple juxtaposition, un chemin de $\mathbf{D}$-spans sera représenté par un n-uplet.

κ est obtenu lui aussi à l'aide de morphismes canoniques: nous ne donnerons ici ni la construction de κ, ni la preuve de sa cohérence, car elles font appel à une récurrence horriblement longue (contrairement au cas des bicatégories, il ne suffit pas que l'axiome de cohérence soit vrai à l'ordre 4, mais il doit être vérifié pour tout ordre n).

(En fait, dans la définition d'une **N**-2-algèbre, on a un 2-morphisme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S}p\,\mathbf{D} \arrow[r, "I\,\mathcal{S}p\,\mathbf{D}"] \arrow[dr, "1_{\mathcal{S}p\,\mathbf{D}}"'] & N\,\mathcal{S}p\,\mathbf{D} \arrow[d, "\beta"] \\ & \mathcal{S}p\,\mathbf{D} \arrow[ul, phantom, "\iota", near start] \end{tikzcd}$$

mais ici $\beta(\theta) = \theta$ implique que ι est une identité.)

Afin de mieux comprendre la signification de cet axiome de cohérence $(\overline{\mathrm{A}})$, remarquons que les *2-morphismes l, r, s' et s construits précédemment sont tous obtenus à l'aide de* κ:

$$\begin{aligned} l(\theta)&: \theta \to 1_B \otimes \theta &&= \kappa(\emptyset_B, (\theta)),\\ r(\theta)&: \theta \to \theta \otimes 1_A &&= \kappa((\theta), \emptyset_A),\\ s'(\theta_3, \theta_2, \theta_1)&: \theta_3 \otimes \theta_2 \otimes \theta_1 \to (\theta_3 \otimes \theta_2) \otimes \theta_1 &&= \kappa((\theta_3, \theta_2), (\theta_1)),\\ s(\theta_3, \theta_2, \theta_1)&: \theta_3 \otimes \theta_2 \otimes \theta_1 \to \theta_3 \otimes (\theta_2 \otimes \theta_1) &&= \kappa((\theta_3), (\theta_2, \theta_1)). \end{aligned}$$

Si on applique le diagramme $(\overline{\mathrm{A}})$ aux chemins dans $N\,N\,\mathcal{S}p\,\mathbf{D}$ suivants:

$$(((\theta_2), \emptyset_{A_2}), ((\theta_1))) \quad \text{et} \quad (((\theta_2)), (\emptyset_{A_2}, (\theta_1)))$$

d'une part,

1° $(((\theta_4), (\theta_3, \theta_2)), ((\theta_1)))$,

2° $(((\theta_4, \theta_3), (\theta_2)), ((\theta_1)))$,

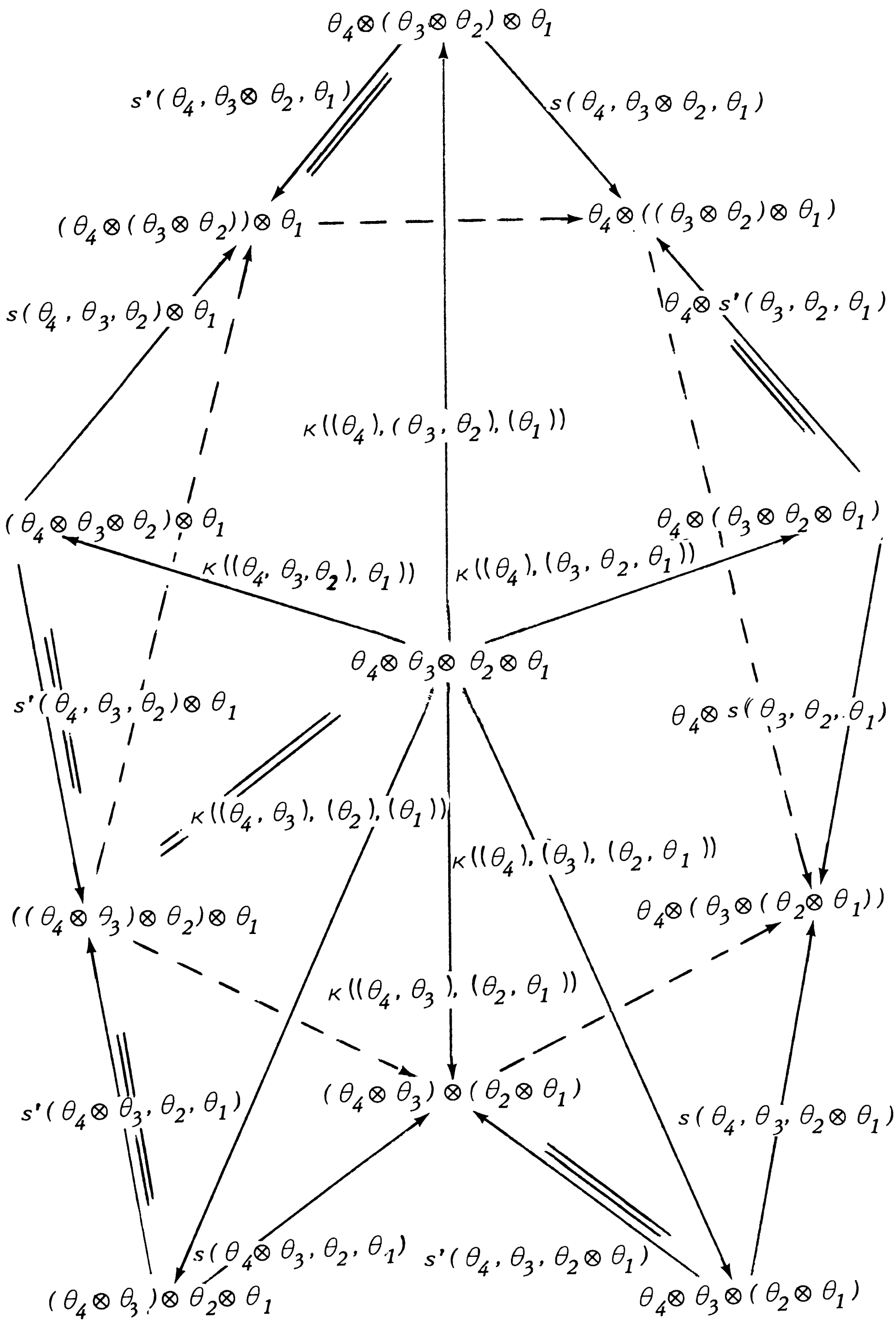
3° $(((\theta_4, \theta_3)), ((\theta_2), (\theta_1)))$,

4° $(((\theta_4), (\theta_3)), ((\theta_2, \theta_1)))$,

5° $(((\theta_4)), ((\theta_3), (\theta_2, \theta_1)))$,

6° $(((\theta_4)), ((\theta_3, \theta_2), (\theta_1)))$

d'autre part, alors, d'une part les deux triangles (*) commutent


θ4⊗(θ3⊗θ2)⊗θ1
s'(θ4, θ3⊗θ2, θ1)
s(θ4, θ3⊗θ2, θ1)
(θ4⊗(θ3⊗θ2))⊗θ1
θ4⊗((θ3⊗θ2)⊗θ1)
s(θ4, θ3, θ2)⊗θ1
θ4⊗s'(θ3, θ2, θ1)
κ((θ4), (θ3, θ2), (θ1))
(θ4⊗θ3⊗θ2)⊗θ1
θ4⊗(θ3⊗θ2⊗θ1)
κ((θ4, θ3, θ2), θ1))
κ((θ4), (θ3, θ2, θ1))
θ4⊗θ3⊗θ2⊗θ1
s'(θ4, θ3, θ2)⊗θ1
θ4⊗s(θ3, θ2, θ1)
κ((θ4, θ3), (θ2), (θ1))
κ((θ4), (θ3), (θ2, θ1))
((θ4⊗θ3)⊗θ2)⊗θ1
θ4⊗(θ3⊗(θ2⊗θ1))
κ((θ4, θ3), (θ2, θ1))
(θ4⊗θ3)⊗(θ2⊗θ1)
s'(θ4⊗θ3, θ2, θ1)
s(θ4, θ3, θ2⊗θ1)
s(θ4⊗θ3, θ2, θ1)
s'(θ4, θ3, θ2⊗θ1)
(θ4⊗θ3)⊗θ2⊗θ1
θ4⊗θ3⊗(θ2⊗θ1)

(*)

$$\begin{tikzcd}
(\theta_2\otimes 1_{A_2})\otimes\theta_1 & \theta_2\otimes 1_{A_2}\otimes\theta_1 \arrow[l, "s'(\theta_2,1_{A_2},\theta_1)", "="'] \arrow[r, "s(\theta_2,1_{A_2},\theta_1)"] & \theta_2\otimes(1_{A_2}\otimes\theta_1) \\
& \theta_2\otimes\theta_1 \arrow[ul, "r(\theta_2)\otimes\theta_1"] \arrow[u, "\kappa((\theta_2),\emptyset_{A_2},(\theta_1))"] \arrow[ur, "\theta_2\otimes l(\theta_1)"'] &
\end{tikzcd}$$

d'autre part les six diagrammes issus du centre du décagone (**) commutent (si on tourne dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, le quadrilatère en haut et à gauche correspond au chemin 1°).

Ces diagrammes vont nous redonner les axiomes de neutralité et d'associativité connus:

En effet, supposons $\mathbf{T}' = \mathbf{1}_{\mathcal{E}}$; $\mathcal{S}p\,\mathbf{D}$ n'est autre que la pseudo-catégorie $\mathcal{S}p\,\mathbf{T}$ des $\mathbf{T}$-spans considérée par Albert BURRONI dans [Bu 1] (un $\mathbf{T}$-span étant de la forme $TA \xleftarrow{a} \pi \xrightarrow{b} B$); les égalités mentionnées sur le triangle (*) de gauche et sur le décagone (**), résultant du fait que $\mathbf{T}' = \mathbf{1}_{\mathcal{E}}$, impliquent que, pour tout n,

$$\theta_n\otimes\theta_{n-1}\otimes\ldots\otimes\theta_1 = (\ldots((\theta_n\otimes\theta_{n-1})\otimes\theta_{n-2})\otimes\ldots\otimes\theta_2)\otimes\theta_1$$

(de sorte que s' est une identité et qu'on a des 2-morphismes d'associativité de la forme:

$$\theta_3\otimes\theta_2\otimes\theta_1 = (\theta_3\otimes\theta_2)\otimes\theta_1 \xrightarrow{s(\theta_3,\theta_2,\theta_1)} \theta_3\otimes(\theta_2\otimes\theta_1));$$

alors *la commutativité du triangle* (*) *de droite et du pentagone* (**) *en pointillés nous donne les axiomes de neutralité et d'associativité de la pseudo-catégorie* $\mathcal{S}p\,\mathbf{T}$ (qui est une bicatégorie à ceci près que l, r et s ne sont pas des isomorphismes). Si de plus on pose $\mathbf{T} = \mathbf{T}' = \mathbf{1}_{\mathcal{E}}$, alors l, r et s sont des isomorphismes et on retrouve la bicatégorie $\mathcal{S}p\,\mathcal{E}$ des spans dans $\mathcal{E}$ (un span étant de la forme $A \xleftarrow{a} \pi \xrightarrow{b} B$).

Terminons ceci en disant que $\mathcal{S}p\,\mathbf{D}$ nous paraît un exemple important de pseudo-catégorie, puisque c'est le seul que nous connaissions pour lequel κ n'est pas dégénéré (comme dans le cas de $\mathcal{S}p\,\mathbf{T}$ ou de $\mathcal{S}p\,\mathcal{E}$). N'importe comment, *toute bicatégorie est une pseudo-catégorie qui s'ignore* (l'existence des composés canoniques étant masquée par le fait que ces derniers sont égaux à l'un des composés obtenus par associativité:

$$\theta_n \otimes \theta_{n-1} \otimes \dots \otimes \theta_1 = (\dots((\theta_n \otimes \theta_{n-1}) \otimes \theta_{n-2}) \otimes \dots \otimes \theta_2) \otimes \theta_1 \;).$$

Il en est *de même des catégories monoïdales*: on peut toujours construire un composé canonique de longueur n quelconque; il suffit pour s'en convaincre de considérer leur modèle: la catégorie $\mathcal{E}ns$ des ensembles. En effet, tout ensemble A s'identifie au **D**-span $1 \longleftarrow A \longrightarrow 1$ (**T** et **T'** sont égaux au triple constant sur 1 et $DA = 1_1$) et le composé canonique des trois **D**-spans

$$1 \longleftarrow A_3 \longrightarrow 1 \longleftarrow A_2 \longrightarrow 1 \longleftarrow A_1 \longrightarrow 1$$

n'est autre que le produit canonique $A_3 \times A_2 \times A_1$.

B. DEFINITION II.3.1. Une *monade* dans la pseudo-catégorie $\mathfrak{Sp}\,\mathbf{D}$ est un quadruplet (A, θ, i, k), où A est un objet de $\mathcal{E}$, où $\theta : A \to A$ est un **D**-span, où i et k sont les morphismes de **D**-spans suivants:

$$\begin{tikzcd}
 & & 1_A \otimes \theta \arrow[dr, "i \otimes \theta"] & & (\theta \otimes \theta) \otimes \theta \arrow[dl, "k \otimes \theta"'] & \\
1_A \arrow[r, "i"] & \theta \arrow[ur, "l(\theta)"] \arrow[dr, "r(\theta)"'] & & \theta \otimes \theta \arrow[ll, "k"'] & & \theta \otimes \theta \otimes \theta \arrow[ul, "s'(\theta)"'] \arrow[dl, "s(\theta)"] \\
 & & \theta \otimes 1_A \arrow[ur, "\theta \otimes i"'] & & \theta \otimes (\theta \otimes \theta) \arrow[ul, "\theta \otimes k"] &
\end{tikzcd}$$

tels que l'on ait les égalités suivantes dans $\mathfrak{Sp}\,\mathbf{D}$:

$$k.(\theta \otimes i).r(\theta) = 1_\theta, \quad k.(i \otimes \theta).l(\theta) = 1_\theta,$$

$$k.(\theta \otimes k).s(\theta) = k.(k \otimes \theta).s'(\theta)$$

(1_A est le **D**-span identique $(IA, I'A)$).

THEOREME II.3.1. *La donnée d'une* **D***-catégorie équivaut à celle d'une monade dans la pseudo-catégorie* $\mathfrak{Sp}\,\mathbf{D}$ *des* **D***-spans.*

PREUVE. Soit (A, a, b, i, k) une **D**-catégorie. Montrons que (A, θ, i, k) est une monade dans $\mathfrak{Sp}\,\mathbf{D}$, où $\theta = (a, b)$. Le fait que

$$i : A \longrightarrow \pi \quad \text{et} \quad k : \pi_2 \longrightarrow \pi$$

définissent des morphismes de **D**-spans $1_A \longrightarrow \theta$ d'une part, $\theta \otimes \theta \longrightarrow \theta$ d'autre part, résulte des égalités (3) et (4) de la définition II.1.1; si

$$i_1,\ i_2 : \pi \longrightarrow \pi_2 \quad \text{et} \quad k_1,\ k_2 : \pi_3 \longrightarrow \pi_2$$

sont les quatre morphismes canoniques de la définition II.1.1, ils définissent des morphismes de **D**-spans:

$$i_1,\ i_2 : \theta \longrightarrow \theta \otimes \theta \quad \text{d'une part,}$$
$$k_1,\ k_2 : \theta \otimes \theta \otimes \theta \longrightarrow \theta \otimes \theta \quad \text{d'autre part}$$

(la preuve en est triviale et résulte des égalités (E)), et on a les égalités (E') suivantes dans $\mathcal{S}p\,\mathbf{D}$:

$$i_1 = (\theta \otimes i).r(\theta), \quad i_2 = (i \otimes \theta).l(\theta),$$
$$k_1 = (\theta \otimes k).s(\theta), \quad k_2 = (k \otimes \theta).s'(\theta).$$

Montrons par exemple la première de ces égalités; traduite dans $\mathcal{E}$, elle s'écrit $i_1 = (\theta \otimes i) \circ r(\theta)$ et elle sera vraie si et seulement si

$$v_2 \circ i_1 = v_2 \circ (\theta \otimes i) \circ r(\theta) \quad \text{et} \quad v'_2 \circ i_1 = v'_2 \circ (\theta \otimes i) \circ r(\theta).$$

Or on sait que

$$v_2 \circ i_1 = Ti \circ a \quad \text{et} \quad v'_2 \circ i_1 = I'\pi$$

(voir les égalités (E)); de plus $\theta \otimes i$ et $r(\theta)$ sont les morphismes canoniques (dûs à (P_2) et à $(\bar{P}_2)$, ce dernier étant le produit fibré intervenant dans la construction de $\theta \otimes 1_A$) résultant de la commutativité des deux diagrammes en traits pleins qui suivent:

$$\begin{tikzcd}
TA \arrow[d, "Ti"'] & & \bar{\pi}_2 \arrow[ll, "\bar{v}_2"'] \arrow[dl, dashed, "\theta \otimes i"'] \arrow[d, "\bar{v}'_2"] \\
 & \pi_2 \arrow[dl, dashed, "v_2"'] \arrow[dr, dashed, "v'_2"] & \\
T\pi \arrow[d, "Tb"'] & (P_2) & T'\pi \arrow[d, "T'a"] \\
TT'A \arrow[rr, "DA"'] & & T'TA
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \pi \arrow[dl, "a"'] \arrow[d, dashed, "r(\theta)"] \arrow[dr, "I'\pi"] & \\
 & \bar{\pi}_2 \arrow[dl, dashed, "\bar{v}_2"'] \arrow[dr, dashed, "\bar{v}'_2"] & \\
TA \arrow[d, "TI'A"'] & (\bar{P}_2) & T'\pi \arrow[d, "T'a"] \\
TT'A \arrow[rr, "DA"'] & & T'TA
\end{tikzcd}$$

Par suite

$$v_2 \circ (\theta \otimes i) \circ r(\theta) = Ti \circ \bar{v}_2 \circ r(\theta) = Ti \circ a,$$
$$v'_2 \circ (\theta \otimes i) \circ r(\theta) = \bar{v}'_2 \circ r(\theta) = I'\pi.$$

On déduit des égalités (E') que les axiomes (5) et (6) d'une **D**-catégorie sont équivalents aux axiomes d'une monade. ∇

APPENDICE: LOIS DISTRIBUTIVES MIXTES

En s'inspirant du fait qu'une loi distributive est une monade dans une des 2-catégories de triples $\overrightarrow{\mathcal{T}r}$ et $\overleftarrow{\mathcal{T}r}$ (voir 0.6.b), on définit des lois distributives mixtes entre un triple et un cotriple comme étant des comonades dans $\overrightarrow{\mathcal{T}r}$ ou dans $\overleftarrow{\mathcal{T}r}$:

$$\mathbf{D}^*: \mathbf{G} \longrightarrow \mathbf{T} \ \text{(dans } \overrightarrow{\mathcal{T}r}\text{)} \quad \text{et} \quad {}^*\mathbf{D}: \mathbf{T} \longrightarrow \mathbf{G} \ \text{(dans } \overleftarrow{\mathcal{T}r}\text{)},$$

si $\mathbf{T}$ est un triple et $\mathbf{G}$ un cotriple. Brièvement, on peut dire qu'*il existe autant de telles lois distributives mixtes que de lois distributives.* Pour le voir on utilise les adjonctions dans $\mathcal{C}at$ relatives aux triples $\mathbf{T}$ et $\mathbf{T}'$:

$$\mathcal{E} \underset{U^{\mathbf{T}}}{\overset{F^{\mathbf{T}}}{\rightleftarrows}} \mathcal{A}lg\,\mathbf{T} \quad \text{et} \quad \mathcal{E} \underset{\mathbf{T}'U}{\overset{\mathbf{T}'F}{\rightleftarrows}} \mathcal{K}\ell\,\mathbf{T}'$$

Lorsqu'il existe une loi distributive $\mathbf{D}: \mathbf{T} \longrightarrow \mathbf{T}'$, celles-ci se «relèvent» dans $\overrightarrow{\mathcal{T}r}$ et $\overleftarrow{\mathcal{T}r}$ respectivement (les foncteurs d'oubli en question associant à tout triple la catégorie sous-jacente) en des adjonctions:

$$(*) \qquad \mathbf{T}' \rightleftarrows \tilde{\mathbf{T}}' \quad \text{et} \quad \mathbf{T} \rightleftarrows \tilde{\mathbf{T}},$$

où $\tilde{\mathbf{T}}'$ est le relèvement du triple $\mathbf{T}'$ sur la catégorie des algèbres de $\mathbf{T}$ résultant de $\mathbf{D}$ et rappelé dans 0.6.c, et $\tilde{\mathbf{T}}$ le prolongement de $\mathbf{T}$ sur la catégorie de Kleisli de $\mathbf{T}'$ construit dans la proposition I.3.1.

Alors, d'une part $\mathbf{D}$ est défini par l'une ou l'autre des monades en $\mathbf{T}'$ et $\mathbf{T}$ résultant des adjonctions $(*)$, d'autre part, la comonade en $\tilde{\mathbf{T}}'$ définit un $\mathbf{D}^*$ et la comonade en $\tilde{\mathbf{T}}$ un ${}^*\mathbf{D}$.

On renvoie à [bu 3] pour plus de détails.

BIBLIOGRAPHIE.

[Ba] M. BARR, Relational algebras, *Lecture Notes 137*, Springer (1969).

[Be] J. BENABOU, Exposé fait à Oberwolfach en 1972 (non publié).

[Bec] J. BECK, Distributive laws, *Lecture Notes 80*, Springer (1969).

[Bu 1] A. BURRONI, **T**-catégories, *Cahiers Topo. et Géo. dif. XII-3* (1971).

[Bu 2] A. BURRONI, Structures 2-algébriques (à paraître, résumé dans *Cahiers Topo. et Géo. dif. XIV-2*).

[bu 1] E. BURRONI, Algèbres relatives à une loi distributive, *C.R.A.S. Paris 276* (Février 1973), p. 443.

[bu 2] E. BURRONI, Catégories relatives à une loi distributive, *C.R.A.S. Paris 276* (Février 1973), p. 669.

[bu 3] E. BURRONI, Lois distributives mixtes, *C.R.A.S. Paris 276* (Mars 73), p. 897.

[Di] DIERS, Catégories de monades, *Séminaire Bénabou*, Paris (1972).

[Eil. Wr] EILENBERG - WRIGHT, Automata in general Algebras, *Information and Control 11* (1967), p. 452-470.

[Hop. Ull] HOPCROFT - ULLMANN, *Formal languages and their relation to automata*, Addison - Wesley Publ. Company.

Département de Mathématiques, Tour 45
Université Paris 7
2 Place Jussieu
75221 PARIS CEDEX 05.