CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

ARMANDO MACHADO

Espaces d'Antoine et pseudo-topologies

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 14, nº 3 (1973), p. 309-327

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1973__14_3_309_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE *Vol. XIV-3*
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

ESPACES D'ANTOINE ET PSEUDO-TOPOLOGIES

par Armando MACHADO

0. INTRODUCTION

Si $\mathbf{X}$ et $\mathbf{X}'$ sont deux espaces topologiques, d'ensembles sous-jacents X et X', on note $Hom(\mathbf{X}', \mathbf{X})$ l'ensemble des applications continues $f: \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}'$. On aimerait pouvoir considérer un espace topologique canonique $\mathbf{Hom}(\mathbf{X}', \mathbf{X})$, d'ensemble sous-jacent $Hom(\mathbf{X}', \mathbf{X})$, de sorte que les conditions suivantes soient vérifiées:

A) On a une application continue $\xi: \mathbf{Hom}(\mathbf{X}', \mathbf{X}) \times \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}'$, où $\xi(f, x) = f(x)$ (*application d'évaluation*);

B) Si $\mathbf{Y}$ est un espace topologique et $g: Y \longrightarrow Hom(\mathbf{X}', \mathbf{X})$ une application telle que $\overline{g}: \mathbf{Y} \times \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}'$ soit continue, où $\overline{g}(y, x) = g(y)(x)$, alors $g: \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbf{Hom}(\mathbf{X}', \mathbf{X})$ est continue.

La topologie de $\mathbf{Hom}(\mathbf{X}', \mathbf{X})$ serait alors en particulier la moins fine qui vérifie la condition A. Malheureusement ceci n'est pas toujours possible [1]; on sait le faire lorsque $\mathbf{X}$ est localement compact et séparé, en considérant sur $Hom(\mathbf{X}', \mathbf{X})$ la topologie de la convergence compacte [2].

Pour pouvoir résoudre ce problème, on est amené à considérer des structures plus générales que les topologies, en munissant alors l'ensemble $Hom(\mathbf{X}', \mathbf{X})$ d'une structure de ce type. La notion d'espace quasi-topologique a été définie par Kowalsky [3] et Fischer [4].

Une structure d'*espace quasi-topologique* sur l'ensemble X est définie par la donnée d'un ensemble $\pi(x)$ de filtres sur X, pour chaque $x \in X$, de sorte que les conditions suivantes soient remplies:

QT1) Si $x \in X$ et si x^{ε} est le filtre des parties A de X telles que $x \in A$, alors $x^{\varepsilon} \in \pi(x)$;

QT2) Si $F \in \pi(x)$ et $G \in \pi(x)$, alors $F \cap G \in \pi(x)$;

QT3) Si $F \in \pi(x)$ et $G \supset F$, alors $G \in \pi(x)$.

Si $F \in \pi(x)$, on dit que F converge vers x et l'on écrit $F \to x$. Si $\mathbf{X} = (X, \pi)$ et $\mathbf{X'} = (X', \pi')$ sont deux espaces quasi-topologiques et si $f: X \longrightarrow X'$ est une application, on dit que f est *continue* de $\mathbf{X}$ vers $\mathbf{X'}$, ou que $f: \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X'}$ est continue si

$$f(F) \in \pi'(f(x)) \text{ pour tout } F \in \pi(x).$$

Ceci permet de considérer la catégorie $\mathfrak{QT}$ dont les objets sont les espaces quasi-topologiques et dont les morphismes sont définis par les applications continues. On voit que la catégorie $\mathfrak{T}$ des applications continues peut être identifiée à une sous-catégorie pleine de $\mathfrak{QT}$ (un espace topologique (E, T) étant identifié à l'espace quasi-topologique défini par la donnée des filtres convergents pour T), de façon compatible avec les foncteurs d'oubli vers $\mathcal{E}ns$. Il existe des quasi-topologies initiales et finales, en particulier les produits d'espaces quasi-topologiques et les quasi-topologies induites.

Si $\mathbf{X}$ et $\mathbf{X'}$ sont deux espaces quasi-topologiques, il existe un espace quasi-topologique canonique $\mathbf{Hom}(\mathbf{X'}, \mathbf{X})$ sur $Hom(\mathbf{X'}, \mathbf{X})$, ensemble des applications continues de $\mathbf{X}$ vers $\mathbf{X'}$; la quasi-topologie λ de $\mathbf{Hom}(\mathbf{X'}, \mathbf{X})$ est appelée *quasi-topologie de la convergence locale* [5] et définie comme suit:

Si F est un filtre sur $Hom(\mathbf{X'}, \mathbf{X})$ et $f \in Hom(\mathbf{X'}, \mathbf{X})$, alors $F \in \lambda(f)$ si, et seulement si, $\xi(F \times G) \to f(x)$ pour tout filtre G sur X tel que $G \to x$, où $\xi: Hom(\mathbf{X'}, \mathbf{X}) \times X \longrightarrow X'$ est l'application d'évaluation.

Si $\mathbf{X}$ et $\mathbf{X'}$ sont des espaces topologiques tels qu'il existe un espace topologique canonique $\mathbf{Hom}(\mathbf{X'}, \mathbf{X})$, on verra (proposition 1.3) que $\mathbf{Hom}(\mathbf{X'}, \mathbf{X})$ est aussi l'espace quasi-topologique canonique (ce qui n'est pas évident a priori).

Si $\mathbf{X}$ est un espace quasi-topologique, on dit qu'un ensemble $A \subset X$ est ouvert si $A \in F$ pour tout filtre F tel que $F \to x$, où $x \in A$. Les ouverts de $\mathbf{X}$ sont les ouverts d'un espace topologique $\mathbf{X}^{\sim}$ sur l'ensemble X, dit associé à $\mathbf{X}$. L'application identique $1_X : X \longrightarrow X$ est continue de $\mathbf{X}$ vers $\mathbf{X}^\sim$ et définit $\mathbf{X}^\sim$ comme projection de $\mathbf{X}$ vers la sous-catégorie pleine $\mathcal{T}$ de $\mathfrak{QT}$. En particulier $\mathbf{X} = \mathbf{X}^\sim$ si, et seulement si, $\mathbf{X}$ est topologique et $f : \mathbf{X}^\sim \longrightarrow \mathbf{X}'^\sim$ est continue si $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}'$ est continue. Il en résulte que toute topologie initiale est aussi une quasi-topologie initiale, donc un produit d'espaces topologiques est aussi un produit dans la catégorie $\mathfrak{QT}$ et toute topologie induite est une quasi-topologie induite.

La preuve des propositions suivantes peut être trouvée dans [6].

PROPOSITION 0.1. *Si* $\mathbf{X}'$ *est l'espace quasi-topologique initial défini par les espaces quasi-topologiques* $\mathbf{X}'_i$ *et les applications* $f'_i : X' \longrightarrow X'_i$, *où* $i \in I$, *et si* $\mathbf{X}$ *est un espace quasi-topologique, alors* $\mathbf{Hom}(\mathbf{X}', \mathbf{X})$ *est l'espace quasi-topologique initial défini par les espaces quasi-topologiques* $\mathbf{Hom}(\mathbf{X}'_i, \mathbf{X})$ *et les applications*

$$\hat{f}'_i = Hom(f'_i, 1_X) : Hom(\mathbf{X}', \mathbf{X}) \longrightarrow Hom(\mathbf{X}'_i, \mathbf{X}), \quad \text{où} \quad \hat{f}'_i(f) = f'_i \circ f.$$

PROPOSITION 0.2. *Si* $\mathbf{X}$ *est l'espace quasi-topologique final défini par les espaces quasi-topologiques* $\mathbf{X}_i$ *et les applications* $f_i : X_i \longrightarrow X$, *où* $i \in I$, *si* $X = \bigcup_{i \in I} f_i(X_i)$ *et si* $\mathbf{X}'$ *est un espace quasi-topologique, alors* $\mathbf{Hom}(\mathbf{X}', \mathbf{X})$ *est l'espace quasi-topologique initial défini par les espaces quasi-topologiques* $\mathbf{Hom}(\mathbf{X}', \mathbf{X}_i)$ *et les applications*

$$\hat{f}_i = Hom(1_{X'}, f_i) : Hom(\mathbf{X}', \mathbf{X}) \longrightarrow Hom(\mathbf{X}', \mathbf{X}_i), \quad \text{où} \quad \hat{f}_i(f) = f \circ f_i.$$

Peut-on remplacer $\mathfrak{QT}$ par une catégorie plus petite, plus précisément existe-t-il des sous-catégories pleines $\mathcal{C}$ de $\mathfrak{QT}$, contenant $\mathcal{T}$ la catégorie des espaces topologiques et telles que:

1) Si $\mathbf{X}$ est l'espace quasi-topologique initial défini par les espaces quasi-topologiques $\mathbf{X}_i$ et les applications $f_i : X \longrightarrow X_i$, où $i \in I$, et si chaque $\mathbf{X}_i$ est un objet de $\mathcal{C}$, alors $\mathbf{X}$ est aussi un objet de $\mathcal{C}$;

2) Si $\mathbf{X}$ et $\mathbf{X}'$ sont deux objets de $\mathcal{C}$, il existe sur $Hom(\mathbf{X}', \mathbf{X})$ un $\mathcal{C}$-objet canonique $\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbf{X}', \mathbf{X})$. (La notion de $\mathcal{C}$-objet canonique s'obtient à partir des conditions A et B en remplaçant «espace topologique» par «objet de $\mathcal{C}$».)

L'objectif de ce travail est l'étude de deux telles catégories (différentes de $\mathfrak{QT}$), à savoir celles dont les objets sont respectivement les *espaces d'Antoine* (appelés *espaces épitopologiques* dans [6]) et les *espaces pseudo-topologiques* de Choquet [7].

On peut trouver un résumé plus détaillé des propriétés principales des espaces quasi-topologiques dans [8]. (*)

1. ESPACES D'ANTOINE

Si X est un ensemble, F un filtre sur X et $a \in X$, on notera par $\mathbf{X}_{F,a}$ l'espace topologique dont l'ensemble sous-jacent est X et dont les ouverts sont les parties U de X telles que

$$a \notin U \text{ ou } U \in F.$$

Le filtre des voisinages de a est $F \cap a^{\varepsilon}$ et, si $b \neq a$, le filtre des voisinages de b est b^{ε}; il en résulte:

PROPOSITION 1.1. *Si* $\mathbf{X}$ *est un espace quasi-topologique,* F *un filtre sur* X *et* $a \in X$, *alors* $F \underset{\mathbf{X}}{\to} a$ *si, et seulement si,* $1_X : \mathbf{X}_{F,a} \longrightarrow \mathbf{X}$ *est continu.*

En considérant les espaces topologiques $\mathbf{X}_{F,a}$, on montre que tout espace topologique est un espace quasi-topologique final pour une famille d'espaces topologiques. Plus précisément:

PROPOSITION 1.2. *Soit* $\mathbf{X}$ *un espace topologique, soit* I *l'ensemble des couples* (F,a) *tels que* $a \in X$, F *est un filtre sur* X *et* $F \underset{\mathbf{X}}{\to} a$. *Alors* $\mathbf{X}$ *est l'espace quasi-topologique final déterminé par les espaces topologiques* $\mathbf{X}_{F,a}$ *et les applications identiques* $1_X : X \longrightarrow X$, *où* $(F,a) \in I$.

Démonstration. Si $F \to a$, alors $F \cap a^{\varepsilon} \to a$ et, si $b \neq a$, $b^{\varepsilon} \to b$, de sorte que $1_X : \mathbf{X}_{F,a} \longrightarrow \mathbf{X}$ est continue. Si $\mathbf{X}'$ est un espace quasi-topologique, si $f : X \longrightarrow X'$ est une application et si $f : \mathbf{X}_{F,a} \longrightarrow \mathbf{X}'$ est continue pour chaque $(F,a) \in I$, alors $f(F) \supset f(F \cap a^{\varepsilon}) \to f(a)$, ce qui montre que $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}'$ est continue et finit la démonstration.

(*) NOTE DE LA REDACTION. Les principaux résultats de cet article ont été exposés par A. Machado à Paris en 1971.

Les espaces $\mathbf{X}_{F,a}$ servent aussi à montrer que la quasi-topologie d'un $\mathcal{C}$-objet canonique est la quasi-topologie de la convergence locale:

PROPOSITION 1.3. *Soit $\mathcal{C}$ une sous-catégorie pleine de $\mathfrak{Q}\mathfrak{T}$, contenant la catégorie $\mathfrak{T}$ et vérifiant la condition 1 de l'introduction. Si $\mathbf{X}$ et $\mathbf{X'}$ sont deux objets de $\mathcal{C}$ et s'il existe un $\mathcal{C}$-objet canonique $\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbf{X'}, \mathbf{X})$ sur $Hom(\mathbf{X'}, \mathbf{X})$, alors $\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbf{X'}, \mathbf{X}) = \mathbf{Hom}(\mathbf{X'}, \mathbf{X})$.*

Démonstration. Comme l'application d'évaluation

$$\xi : \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbf{X'}, \mathbf{X}) \times \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X'}$$

est continue, on voit que

$$1_{Hom(\mathbf{X'}, \mathbf{X})} : \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbf{X'}, \mathbf{X}) \longrightarrow \mathbf{Hom}(\mathbf{X'}, \mathbf{X})$$

est continue. Il reste à montrer la continuité de

$$1_{Hom(\mathbf{X'}, \mathbf{X})} : \mathbf{Hom}(\mathbf{X'}, \mathbf{X}) \longrightarrow \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbf{X'}, \mathbf{X}).$$

Soit donc F un filtre sur $Hom(\mathbf{X'}, \mathbf{X})$ et $f \in Hom(\mathbf{X'}, \mathbf{X})$ tels que

$$\xi(F \times G) \xrightarrow[\mathbf{X'}]{} f(x) \quad \text{pour tout} \quad G \xrightarrow[\mathbf{X}]{} x;$$

on doit montrer que $F \xrightarrow[\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbf{X'}, \mathbf{X})]{} f$, ou encore que

$$1_{Hom(\mathbf{X'}, \mathbf{X})} : [Hom(\mathbf{X'}, \mathbf{X})]_{F,f} \longrightarrow \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbf{X'}, \mathbf{X})$$

est continue.

Comme $[Hom(\mathbf{X'}, \mathbf{X})]_{F,f}$ est un espace topologique, en particulier un objet de $\mathcal{C}$, il nous suffit de montrer la continuité de

$$\xi : [Hom(\mathbf{X'}, \mathbf{X})]_{F,f} \times \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X'}.$$

Or, si $G \xrightarrow[\mathbf{X}]{} x$, on a

$$\xi((F \cap f^{\varepsilon}) \times G) = \xi(F \times G) \cap f(G) \xrightarrow[\mathbf{X'}]{} f(x)$$

et, pour $g \neq f$,

$$\xi(g^{\varepsilon} \times G) = g(G) \xrightarrow[\mathbf{X'}]{} g(x),$$

d'où le résultat.

DEFINITION 1.4. On dit qu'un espace quasi-topologique $\mathbf{X}$ est un *espace d'Antoine* s'il est l'espace quasi-topologique initial déterminé par une famille d'espaces quasi-topologiques $\mathbf{Hom}(\mathbf{X}'_i, \mathbf{X}_i)$ et une famille d'applications $f_i : X \longrightarrow Hom(\mathbf{X}'_i, \mathbf{X}_i)$, où chaque $\mathbf{X}'_i$ et chaque $\mathbf{X}_i$ est un espace topologique.

Le théorème de transitivité des structures initiales entraîne:

PROPOSITION 1.5. *Si les* $\mathbf{X}_j$, *où* $j \in J$, *sont des espaces d'Antoine et si* $\mathbf{X}$ *est l'espace quasi-topologique initial défini par les applications* $g_j : X \longrightarrow X_j$, *alors* $\mathbf{X}$ *est un espace d'Antoine.*

PROPOSITION 1.6. *Si* $\mathbf{X}$ *est un espace topologique, alors* $\mathbf{X}$ *est un espace d'Antoine.*

Démonstration. Soit $\{a\}$ un espace réduit à un point, avec la seule topologie possible. On a un homéomorphisme $\lambda : \mathbf{Hom}(\mathbf{X}, \{a\}) \longrightarrow \mathbf{X}$, défini par $\lambda(f) = f(a)$, ce qui entraîne que $\mathbf{X}$ est l'espace quasi-topologique initial défini par λ^{-1} et $\mathbf{Hom}(\mathbf{X}, \{a\})$.

La démonstration du lemme suivant peut être trouvée dans [5]:

LEMME 1.7. *Si* $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ *et* $\mathbf{Z}$ *sont trois espaces quasi-topologiques, il existe un homéomorphisme*

$$\theta : \mathbf{Hom}(\mathbf{Hom}(\mathbf{Z}, \mathbf{Y}), \mathbf{X}) \longrightarrow \mathbf{Hom}(\mathbf{Z}, \mathbf{Y} \times \mathbf{X})$$

défini par $\theta(f)(y, x) = f(x)(y)$.

PROPOSITION 1.8. *Si* $\mathbf{Y}$ *est un espace d'Antoine et si* $\mathbf{X}$ *est un espace quasi-topologique, alors* $\mathbf{Hom}(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$ *est un espace d'Antoine.*

Démonstration. $\mathbf{X}$ est l'espace quasi-topologique final déterminé par une famille d'espaces topologiques $\mathbf{X}_i$, où $i \in I$, et une famille d'applications $f_i : X_i \longrightarrow X$ telles que $X = \bigcup_{i \in I} f_i(X_i)$ (voir 1.2); $\mathbf{Hom}(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$ est donc (voir 0.2) l'espace quasi-topologique initial déterminé par les $\mathbf{Hom}(\mathbf{Y}, \mathbf{X}_i)$ et les $\hat{f}_i : Hom(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) \longrightarrow Hom(\mathbf{Y}, \mathbf{X}_i)$; compte tenu de 1.5, il nous suffit de démontrer le résultat quand $\mathbf{X}$ est un espace topologique.

Comme $\mathbf{Y}$ est l'espace quasi-topologique initial déterminé par une famille d'espaces $\mathbf{Hom}(\mathbf{Y}'_j, \mathbf{Y}_j)$ et une famille d'applications $g_j : \mathbf{Y} \longrightarrow Hom(\mathbf{Y}'_j, \mathbf{Y}_j)$, où $j \in J$ et où les espaces $\mathbf{Y}_j$ et $\mathbf{Y}'_j$ sont topologiques, $\mathbf{Hom}(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$ est l'espace quasi-topologique initial déterminé par les espaces $\mathbf{Hom}(\mathbf{Hom}(\mathbf{Y}'_j, \mathbf{Y}_j), \mathbf{X})$ et les applications

$$\hat{g}_j : Hom(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) \longrightarrow Hom(\mathbf{Hom}(\mathbf{Y}'_j, \mathbf{Y}_j), \mathbf{X})$$

(voir 0.1). Il suffit donc de montrer qu'un espace $\mathbf{Hom}(\mathbf{Hom}(\mathbf{C}, \mathbf{B}), \mathbf{A})$ est d'Antoine lorsque $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ sont des espaces topologiques; ceci résulte de 1.7.

On note $\mathfrak{Ant}$ la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{QT}$ dont les objets sont les espaces d'Antoine. Compte tenu des résultats précédents, $\mathfrak{Ant}$ contient la catégorie $\mathfrak{T}$ des espaces topologiques et vérifie les conditions 1 et 2 de l'introduction. D'après 1.3, $\mathfrak{Ant}$ est en fait la plus petite sous-catégorie pleine de $\mathfrak{QT}$ vérifiant ces conditions.

2. L'ESPACE DES OUVERTS

Soit $\mathbf{\Omega}$ l'espace topologique dont l'ensemble sous-jacent est $\{0, 1\}$ et dont les ouverts sont $\emptyset$, $\{1\}$, $\{0, 1\}$. Tous les filtres sur Ω convergent vers 0 et le seul filtre propre sur Ω qui converge vers 1 est 1^{ε}.

Si $\mathbf{X}$ est un espace quasi-topologique et si $\omega \subset X$ est un ouvert de $\mathbf{X}$, on a une application continue $\hat{\omega} : \mathbf{X} \longrightarrow \Omega$:

$$\hat{\omega}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \notin \omega \\ 1, & \text{si } x \in \omega. \end{cases}$$

En effet, si $F \xrightarrow[\mathbf{X}]{} x$, on a

- soit $x \notin \omega$ et $\hat{\omega}(F) \xrightarrow[\mathbf{\Omega}]{} 0$ (comme tout filtre),
- soit $x \in \omega$ et alors $\omega \in F$, ce qui entraîne $\hat{\omega}(F) \supset 1^{\varepsilon}$, donc $\hat{\omega}(F) \to 1$.

Réciproquement, si $f : \mathbf{X} \longrightarrow \Omega$ est une application continue, $\check{f} = f^{-1}(\{1\})$ est un ouvert de $\mathbf{X}$, car $\{1\}$ est un ouvert de Ω. On voit facilement que les correspondances $\omega \rightsquigarrow \hat{\omega}$ et $f \rightsquigarrow \check{f}$ sont inverses l'une de l'autre. Dans la suite, on note souvent par la même lettre un ouvert et l'application continue associée. Ces considérations sont dues à Antoine [9], ainsi que les résultats suivants jusqu'à la proposition 2.3.

DEFINITION 2.1. Si $\mathbf{X}$ est un espace quasi-topologique, on appelle *espace des ouverts de* $\mathbf{X}$ l'espace quasi-topologique $\Omega\mathbf{X} = \mathbf{Hom}(\Omega, \mathbf{X})$.

Remarquons que $\Omega\mathbf{X}$ est toujours un espace d'Antoine, car Ω est un espace topologique (1.8). Si $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ sont deux espaces quasi-topologiques et si $f: \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ est une application continue, on leur associe une application continue $\Omega f: \Omega\mathbf{Y} \longrightarrow \Omega\mathbf{X}$, définie par $\hat{\omega} \leadsto \hat{\omega} \circ f$, ou en termes d'ouverts, définie par $\omega \leadsto f^{-1}(\omega)$. Réciproquement:

PROPOSITION 2.2. *Soit* $\mathbf{X}$ *un espace quasi-topologique,* $\mathbf{Y}$ *un espace d'Antoine et* $f: X \longrightarrow Y$ *une application telle que:*

a) Si ω *est un ouvert dans* $\mathbf{Y}$, $f^{-1}(\omega)$ *est ouvert dans* $\mathbf{X}$;

b) L'application $\Omega\mathbf{Y} \longrightarrow \Omega\mathbf{X}$ *définie par* $\omega \leadsto f^{-1}(\omega)$ *est continue.*

Alors $f: \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ *est une application continue.*

Démonstration. Elle est identique à celle du théorème 1.5 de [9].

Si $\mathbf{X}$ est un espace quasi-topologique, on définit l'application continue

$$\alpha: \mathbf{X} \longrightarrow \Omega\Omega\mathbf{X} = \mathbf{Hom}(\Omega, \mathbf{Hom}(\Omega, \mathbf{X})),$$

par $\alpha(x)(\hat{\omega}) = \hat{\omega}(x)$, associée à l'application continue

$$\mu: \mathbf{X} \times \mathbf{Hom}(\Omega, \mathbf{X}) \longrightarrow \Omega, \quad \text{où} \quad \mu(x, \hat{\omega}) = \hat{\omega}(x).$$

En termes d'ouverts, $\alpha(x)$ est l'ensemble W des ouverts ω de $\mathbf{X}$ tels que $x \in \omega$.

Comme corollaire de la proposition 2.2, on a:

PROPOSITION 2.3. *Si* $\mathbf{X}$ *est un espace quasi-topologique, alors* $\mathbf{X}$ *est espace d'Antoine si, et seulement si,* $\mathbf{X}$ *est l'espace quasi-topologique initial déterminé par* $\Omega\Omega\mathbf{X}$ *et par* $\alpha: X \longrightarrow \Omega\Omega\mathbf{X}$.

Démonstration. La condition suffisante résulte de 1.5 et du fait que $\Omega\Omega\mathbf{X}$ est toujours un espace d'Antoine. Supposons que $\mathbf{X}$ est un espace d'Antoine. Si $\mathbf{Z}$ est un espace quasi-topologique et si $f: Z \longrightarrow X$ est une application telle que $\alpha \circ f: \mathbf{Z} \longrightarrow \Omega\Omega\mathbf{X}$ soit continue, on a l'application continue associée

$$\mathbf{Z} \times \Omega\mathbf{X} \longrightarrow \Omega, \text{ où } (z, \hat{\omega}) \rightsquigarrow \alpha(f(z))(\hat{\omega}) = \hat{\omega}(f(z)),$$

qui, en termes d'ouverts, fait correspondre à un ouvert ω de $\mathbf{X}$ l'ouvert $f^{-1}(\omega)$ de $\mathbf{Z}$. La continuité de $f: \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{X}$ résulte alors de 2.2.

En appliquant la proposition précédente, on va trouver des conditions (portant sur les filtres convergents) pour qu'un espace quasi-topologique $\mathbf{X}$ soit un espace d'Antoine.

Si $\mathbf{X}$ est un espace quasi-topologique et si $A \subset X$, on note A^{o} l'ensemble des ouverts ω de $\mathbf{X}$ tels que $A \subset \omega$.

LEMME 2.4. *Si* $\mathbf{X}$ *est un espace quasi-topologique, si* F *est un filtre sur* $\Omega\mathbf{X}$ *et si* $\omega \in \Omega\mathbf{X}$, *alors* $F \underset{\Omega\mathbf{X}}{\rightarrow} \omega$ *si, et seulement si, pour tout* $x \in \omega$ *et tout* $G \underset{\mathbf{X}}{\rightarrow} x$, *il existe* $A \in G$ *tel que* $A^{o} \in F$.

Démonstration. Par la définition explicite de la quasi-topologie de la convergence locale de $\Omega\mathbf{X} = \mathbf{Hom}(\Omega, \mathbf{X})$, on a $F \underset{\Omega\mathbf{X}}{\rightarrow} \omega$ si, et seulement si, pour tout $x \in X$, et tout $G \underset{\mathbf{X}}{\rightarrow} x$, on a

$$\xi(F \times G) \underset{\Omega}{\rightarrow} \omega(x), \text{ où } \xi: \Omega\mathbf{X} \times \mathbf{X} \longrightarrow \Omega$$

est l'application d'évaluation. Comme tout filtre sur Ω converge vers 0, la condition précédente est toujours vérifiée si $x \notin \omega$. On est donc ramené à la condition $\xi(F \times G) \supset 1^{\varepsilon}$ pour tout $x \in \omega$ et tout $G \underset{\mathbf{X}}{\rightarrow} x$, c'est-à-dire qu'il existe $B \in F$ et $A \in G$ tels que $\xi(B \times A) \subset \{1\}$. La condition $\xi(B \times A) \subset \{1\}$ équivaut à dire que, si $\omega' \in B$ et $x' \in A$, alors $x' \in \omega'$, ou encore que, si $\omega' \in B$, alors $A \subset \omega'$; ceci signifie $B \subset A^{o}$. Au total $F \underset{\Omega\mathbf{X}}{\rightarrow} \omega$ si, et seulement si, pour tout $x \in \omega$ et tout $G \underset{\mathbf{X}}{\rightarrow} x$, il existe $A \in G$ tel que $A^{o} \in F$.

LEMME 2.5. *Soit* $\mathbf{X}$ *un espace quasi-topologique et* $\hat{\mathbf{X}}$ *l'espace quasi-topologique initial déterminé par* $\Omega\Omega\mathbf{X}$ *et par l'application* $\alpha: X \longrightarrow \Omega\Omega\mathbf{X}$. *Si* H *est un filtre sur* X *et* $a \in X$, *alors* $H \underset{\hat{\mathbf{X}}}{\rightarrow} a$ *si, et seulement si:*

(A) Quels que soient l'ouvert ω de $\mathbf{X}$ et le filtre F sur $\Omega\mathbf{X}$ tels que $a\in\omega$ et que, pour tout $G\underset{\mathbf{X}}{\to}x$ et tout $x\in\omega$, il existe $B\in G$ vérifiant $B^o\in F$, alors il existe $A\in H$ tel que $A^o\in F$.

Démonstration. Compte tenu de la construction explicite de la quasi-topologie initiale,

$$H\underset{\hat{\mathbf{X}}}{\to}a \text{ si, et seulement si, } \alpha(H)\underset{\Omega\Omega\mathbf{X}}{\longrightarrow}\alpha(a),$$

ce qui, vu le lemme précédent, est équivalent à la condition (A) avec «il existe $A\in H$ tel que $A^o\in F$» remplacé par «il existe $C\in F$ tel que $C^o\in\alpha(H)$». Si $A^o\in F$ pour un certain $A\in H$, on peut prendre $C=A^o$ et l'on voit que $C^o\supset\alpha(A)$; en effet, si $W\in\alpha(A)$, il existe $y\in A$ tel que $W=\alpha(y)$, donc $W\supset A^o=C$, c'est-à-dire $W\in C^o$; il s'ensuit $C^o\in\alpha(H)$. Réciproquement, si $C^o\in\alpha(H)$ pour un $C\in F$, on a $C^o\supset\alpha(A)$ pour un certain $A\in H$ et l'on obtient $A^o\supset C$; en effet, si $\omega\in C$, $\alpha(x)\in C^o$ pour tout $x\in A$, $\alpha(x)\supset C$ pour tout $x\in A$, donc $\omega\in\alpha(x)$ pour tout $x\in A$, c'est-à-dire $x\in\omega$ pour tout $x\in A$, ou encore $A\subset\omega$, $\omega\in A^o$. Il s'ensuit que $A^o\in F$, ce qui termine la démonstration.

PROPOSITION 2.6. *Un espace quasi-topologique $\mathbf{X}$ est un espace d'Antoine si, et seulement si, quel que soit le couple (H,a), formé d'un filtre H sur X et d'un point $a\in X$, vérifiant la condition (A) du lemme précédent, on a $H\underset{\mathbf{X}}{\to}a$.*

Démonstration. Comme l'application canonique $\alpha:\mathbf{X}\longrightarrow\Omega\Omega\mathbf{X}$ est toujours continue, on en déduit que $1_X:\mathbf{X}\longrightarrow\hat{\mathbf{X}}$ est aussi continue. Dire que $\mathbf{X}$ est un espace d'Antoine équivaut à dire que $\mathbf{X}=\hat{\mathbf{X}}$ (2.3), c'est-à-dire que $1_X:\hat{\mathbf{X}}\longrightarrow\mathbf{X}$ est continue. La proposition résulte donc du lemme précédent.

3. ESPACES PSEUDO-TOPOLOGIQUES

Les espaces pseudo-topologiques ont été définis par Choquet dans [7] bien avant que les espaces quasi-topologiques soient définis. On donne ici de ces espaces une définition équivalente qui conduit à les considérer comme des espaces quasi-topologiques vérifiant une condition supplémentaire.

Si $\mathbf{X}$ est un espace quasi-topologique, on dit qu'un filtre F sur X *admet une sous-limite* $a \in X$ s'il existe un filtre propre G sur X tel que

$$G \supset F \quad \text{et} \quad G \underset{\mathbf{X}}{\to} a,$$

ou, de façon équivalente, s'il existe un ultrafiltre H sur X, tel que

$$H \supset F \quad \text{et} \quad H \underset{\mathbf{X}}{\to} a$$

(tout filtre propre est contenu dans un ultrafiltre). Si H est un ultrafiltre, a est sous-limite de H si, et seulement si, $H \underset{\mathbf{X}}{\to} a$.

PROPOSITION 3.1. *Si* $\mathbf{X}$ *est un espace quasi-topologique, les deux propriétés suivantes sont équivalentes:*

(α) Si $F \underset{\mathbf{X}}{\not\to} a$ *($\not\to$ signifie «ne converge pas»), il existe un filtre propre* G *tel que* $G \supset F$ *et que* G *n'admette pas* a *pour sous-limite.*

(β) Si $F \underset{\mathbf{X}}{\not\to} a$*, il existe un ultrafiltre* H *tel que* $H \supset F$ *et* $H \underset{\mathbf{X}}{\not\to} a$.

DEFINITION 3.2. Un *espace pseudo-topologique* est un espace quasi-topologique $\mathbf{X}$ vérifiant les conditions (α) et (β) de la proposition précédente.

REMARQUE 3.3. Soit X un ensemble et soit $\mathfrak{U}(x)$, pour chaque $x \in X$, un ensemble d'ultrafiltres sur X, tel que $x^{\varepsilon} \in \mathfrak{U}(x)$. Il existe alors un et un seul espace pseudo-topologique $\mathbf{X}$ tel que $\mathfrak{U}(x)$ soit l'ensemble des ultrafiltres qui convergent vers x. Si F est un filtre sur X, on a $F \underset{\mathbf{X}}{\to} x$ si, et seulement si, $H \in \mathfrak{U}(x)$ quel que soit l'ultrafiltre H contenant F. En effet, s'il existe un tel espace pseudo-topologique, la condition (β) et l'axiome QT 3 garantissent que les filtres qui convergent vers x sont bien ceux qui vérifient la condition énoncée. Dans tous les cas, si l'on définit les filtres qui convergent vers x par la condition énoncée, les ultrafiltres qui convergent vers x sont les éléments de $\mathfrak{U}(x)$ et les axiomes QT 1 et QT 3 sont évidemment vérifiés; l'axiome QT 2 résulte du fait qu'un ultrafiltre qui contient l'intersection de deux filtres, contient l'un deux, et la condition (β) est immédiate. C'est d'ailleurs par la donnée des ultrafiltres convergents vers chaque point que Choquet a défini les espaces pseudo-topologiques.

On dit qu'un espace quasi-topologique $\mathbf{X}$ est *semi-topologique* si, pour chaque $x \in X$, il existe un filtre minimum $\mathcal{O}_x$ qui converge vers x ou, ce qui est équivalent, si quelle que soit la famille $(F_i)_{i \in I}$ de de filtres convergents vers x, le filtre $\bigcap_{i \in I} F_i$ converge vers x.

Tout espace topologique est semi-topologique, le filtre $\mathcal{O}_x$ étant le filtre des voisinages de x.

PROPOSITION 3.4. *Si* $\mathbf{X}$ *est un espace semi-topologique,* $\mathbf{X}$ *est aussi un espace pseudo-topologique.*

Démonstration. Si F est un filtre sur X tel que $H \underset{\mathbf{X}}{\to} x$ pour tout ultrafiltre H contenant F, on en déduit que $F \underset{\mathbf{X}}{\to} x$, car F est l'intersection de tous ces ultrafiltres.

COROLLAIRE 3.5. *Tout espace topologique est pseudo-topologique.*

PROPOSITION 3.6. *Soit l'ensemble* J, *les espaces pseudo-topologiques* $\mathbf{X}_j$, *l'ensemble* X *et les applications* $f_j : X \to X_j$. *Si* $\mathbf{X}$ *est l'espace quasi-topologique initial sur* X, *alors* $\mathbf{X}$ *est un espace pseudo-topologique.*

Démonstration. Soit F un filtre sur X tel que $F \underset{\mathbf{X}}{\not\to} x$. Vu la caractérisation explicite de la quasi-topologie initiale, il existe $j \in J$ tel que le filtre $f_j(F) \underset{\mathbf{X}_j}{\not\to} f_j(x)$, ce qui entraîne, $\mathbf{X}_j$ étant pseudo-topologique, l'existence d'un ultrafiltre G_j sur X_j tel que

$$G_j \supset f_j(F) \quad \text{et} \quad G_j \underset{\mathbf{X}_j}{\not\to} f_j(x).$$

Soit G le filtre sur X qui admet pour base les $A \cap \overset{-1}{f_j}(A_j)$, où $A \in F$

et $A_j \in G_j$; c'est un filtre propre, car

$$f_j(A)\cap A_j \in G_j, \quad \text{donc} \quad f_j(A)\cap A_j \neq \emptyset.$$

On a $G \supset F$ et on va voir que x n'est pas sous-limite de G. En effet, si $H \supset G$ est un filtre propre, l'inclusion $f_j(H) \supset f_j(G) \supset G_j$ entraîne $f_j(H) = G_j$, d'où

$$f_j(H) \underset{\mathbf{X}_j}{\not\to} f_j(x) \quad \text{et} \quad H \underset{\mathbf{X}}{\not\to} x.$$

PROPOSITION 3.7. *Si* $\mathbf{X}$ *est un espace quasi-topologique et* $\mathbf{Y}$ *un espace pseudo-topologique,* $\mathbf{Hom}(\mathbf{Y},\mathbf{X})$ *est un espace pseudo-topologique.*

Démonstration. Notons λ la quasi-topologie de la convergence locale de $Hom(\mathbf{Y},\mathbf{X})$ et $\xi : Hom(\mathbf{Y},\mathbf{X})\times X \longrightarrow Y$ l'application d'évaluation. Soit $f \in Hom(\mathbf{Y},\mathbf{X})$ et F un filtre sur $Hom(\mathbf{Y},\mathbf{X})$, tel que $F \underset{\lambda}{\not\to} f$; on veut montrer l'existence d'un ultrafiltre F' sur $Hom(\mathbf{Y},\mathbf{X})$, tel que

$$F' \supset F \quad \text{et} \quad F' \underset{\lambda}{\not\to} f.$$

Soit $G \underset{\mathbf{X}}{\to} x$ tel que $\xi(F\times G) \underset{\mathbf{Y}}{\not\to} f(x)$. Comme $\mathbf{Y}$ est pseudo-topologique, il existe un ultrafiltre H sur $\mathbf{Y}$ tel que

$$H \supset \xi(F\times G) \quad \text{et} \quad H \underset{\mathbf{Y}}{\not\to} f(x).$$

Si $A \in F$, $B \in G$ et $C \in H$, posons

$$A_{B,C} = \{ g \in A \mid g(B)\cap C \neq \emptyset \};$$

$A_{B,C}$ est non vide, car $\xi(A\times B)\cap C \in H$, donc $\xi(A\times B)\cap C \neq \emptyset$. D'autre part,

$$A_{B,C}\cap A'_{B',C'} \supset (A\cap A')_{(B\cap B'),(C\cap C')}.$$

Ceci montre que les ensembles $A_{B,C}$ constituent une base d'un filtre propre F'' sur $Hom(\mathbf{Y},\mathbf{X})$. Soit F' un ultrafiltre sur $Hom(\mathbf{Y},\mathbf{X})$ tel que $F' \supset F''$. On a $F' \supset F$, car $F'' \supset F$, et l'on va montrer que $F' \underset{\lambda}{\not\to} f$ ce qui finira la démonstration.

En effet, supposons que $F' \underset{\lambda}{\to} f$. Alors

$$\xi(F'\times G) \underset{\mathbf{Y}}{\to} f(x), \quad \text{donc} \quad H \not\supset \xi(F'\times G),$$

ce qui entraîne l'existence de $A' \in F'$ et $B \in G$, tels que $\xi(A'\times B) \notin H$. Comme H est un ultrafiltre, $C = Y - \xi(A'\times B)$ appartient à H. Choisissant $A \in F$ (par exemple $A = Hom(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$), on a $A_{B,C} \in F'' \subset F'$ et l'on prouve que $A' \cap A_{B,C} = \emptyset$, car, si $g \in A'$, $g(B) \subset \xi(A' \times B)$, d'où $g(B) \cap C = \emptyset$, c'est-à-dire $g \notin A_{B,C}$. Il en résulterait $\emptyset \in F'$, ce qui est absurde, F' étant un filtre propre.

Les résultats qu'on vient d'obtenir montrent que la sous-catégorie pleine $\mathcal{PT}$ de la catégorie $\mathfrak{QT}$, dont les objets sont les espaces pseudo-topologiques, contient la catégorie $\mathcal{T}$ des espaces topologiques, et vérifie les conditions 1 et 2 énoncées dans l'introduction. Comme on a déjà vu que $\mathfrak{Ant}$ était la plus petite sous-catégorie pleine de $\mathfrak{QT}$ vérifiant ces conditions, on en déduit que $\mathfrak{Ant} \subset \mathcal{PT}$, c'est-à-dire:

PROPOSITION 3.8. *Tout espace d'Antoine est un espace pseudo-topologique.*

On peut se demander si réciproquement tout espace pseudo-topologique est un espace d'Antoine. La réponse est négative, comme le montre l'exemple suivant; mais on verra dans le paragraphe suivant que la réciproque est vraie pour les espaces séparés.

EXEMPLE 3.9. Soit $\mathbf{N}$ l'espace semi-topologique dont l'ensemble sous-jacent est l'ensemble des entiers naturels et tel que $\mathcal{O}_n$, pour chaque $n \in \mathbf{N}$, est le filtre de toutes les parties de $\mathbf{N}$ qui contiennent l'ensemble

$$A_{n+1} = \{ m \in \mathbf{N} \mid 1 \leqslant m \leqslant n+1 \}.$$

$\mathbf{N}$ étant semi-topologique, c'est en particulier un espace pseudo-topologique. On va voir que $\mathbf{N}$ n'est pas un espace d'Antoine. Si ω est un ouvert de $\mathbf{N}$ et si $n \in \omega$, le fait que $\mathcal{O}_n \to n$ entraîne que $\omega \in \mathcal{O}_n$, c'est-à-dire $A_{n+1} \subset \omega$, en particulier $n+1 \in \omega$; par induction on déduit que $\omega = \mathbf{N}$. L'espace des ouverts $\Omega \mathbf{N}$ a donc deux éléments, $\emptyset$ et $\mathbf{N}$. L'application canonique $\alpha: \mathbf{N} \longrightarrow \Omega\Omega\mathbf{N}$ applique n sur l'ensemble des ouverts qui contiennent n, c'est-à-dire sur $\{\mathbf{N}\}$; c'est donc une application constante. La quasi-topologie initiale sur $\mathbf{N}$ définie par α est donc celle où tous les filtres convergent vers tous les points; elle est différente de la quasi-topologie considérée. Il suffit alors de tenir compte de 2.3.

On peut aussi se demander si tout espace quasi-topologique est pseudo-topologique. La réponse est aussi négative:

EXEMPLE 3.10. Soit $\mathbf{R}^2$ l'espace des couples de nombres réels muni de sa topologie canonique et notons aussi $\mathbf{R}^2$ l'ensemble sous-jacent. Si $x \in \mathbf{R}^2$, notons $\mathcal{V}_x$ le filtre des voisinages de x dans $\mathbf{R}^2$; notons $\mathcal{V}$ le filtre des voisinages de 0 dans $\mathbf{R}$.

Soit $\mathbf{E}$ l'espace quasi-topologique dont l'ensemble sous-jacent est $\mathbf{R}^2$, dont les filtres qui convergent vers un point $a \neq \mathbf{0} = (0,0)$ sont ceux qui convergent vers a dans $\mathbf{R}^2$ et dont les filtres qui convergent vers $\mathbf{0} = (0,0)$ sont ceux qui contiennent une intersection finie de filtres du type $\mathcal{V}\mathcal{V}_a$, où $a \neq \mathbf{0}$, en désignant par $\mathcal{V}\mathcal{V}_a$ le filtre image du filtre $\mathcal{V} \times \mathcal{V}_a$ sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^2$ par l'application $\lambda : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ «multiplication par les scalaires».

On va montrer que $\mathbf{E}$ n'est pas un espace pseudo-topologique. Le filtre $\mathcal{V}_\mathbf{0}$ ne converge pas vers $\mathbf{0}$ dans $\mathbf{E}$: en effet, si l'on avait

$$\mathcal{V}_\mathbf{0} \supset \mathcal{V}\mathcal{V}_{a_1} \cap \ldots \cap \mathcal{V}\mathcal{V}_{a_n},$$

on pourrait choisir une droite r passant par $\mathbf{0}$ et ne passant par aucun des points a_i et choisir $A_i \in \mathcal{V}_{a_i}$ tel que $A_i \cap r = \emptyset$; on aurait

$$\mathbf{R}A_1 \cup \ldots \cup \mathbf{R}A_n \in \mathcal{V}\mathcal{V}_{a_1} \cap \ldots \cap \mathcal{V}\mathcal{V}_{a_n} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{R}A_1 \cup \ldots \cup \mathbf{R}A_n \notin \mathcal{V}_\mathbf{0},$$

ce qui est absurde. On va voir que, si F est un ultrafiltre tel que $F \supset \mathcal{V}_\mathbf{0}$, alors $F \underset{\mathbf{E}}{\rightarrow} \mathbf{0}$, ce qui montrera que $\mathbf{E}$ n'est pas pseudo-topologique. Nous pouvons déjà supposer que $F \neq \mathbf{0}^\varepsilon$, ce qui entraîne que $F/_{\mathbf{R}^2 - \{\mathbf{0}\}}$ est un ultrafiltre sur $\mathbf{R}^2 - \{\mathbf{0}\}$. Soit

$$\mathbf{S} = \{ x \in \mathbf{R}^2 \mid \|x\| = 1 \}$$

la sphère unité de $\mathbf{R}^2$; on a l'application

$$\xi : \mathbf{R}^2 - \{\mathbf{0}\} \longrightarrow \mathbf{S}, \quad \text{où} \quad \xi(x) = \frac{x}{\|x\|},$$

d'où un ultrafiltre $\xi(F/_{\mathbf{R}^2 - \{\mathbf{0}\}})$ sur $\mathbf{S}$. Puisque $\mathbf{S}$, avec la topologie induite par celle de $\mathbf{R}^2$, est un espace compact, il existe $a \in \mathbf{S}$ tel que

$$\xi(F/_{\mathbf{R}^2 - \{\mathbf{0}\}}) \rightarrow a.$$

On en déduit facilement que $F \supset \mathcal{V}\mathcal{V}_a$, car $F \supset \mathcal{V}_\mathbf{0}$.

Remarquons que des espaces quasi-topologiques du type de celui qu'on vient d'étudier, donc «non pseudo-topologiques», ont été employés dans [8].

4. ESPACES SEPARES

Un espace quasi-topologique $\mathbf{X}$ est dit *séparé* si l'une des trois conditions équivalentes suivantes est vérifiée:

I. Si F est un filtre propre sur X tel que $F \underset{\mathbf{X}}{\rightarrow} x$ et $F \underset{\mathbf{X}}{\rightarrow} y$, alors $x = y$;

II. Si $x \neq y$, si $F \underset{\mathbf{X}}{\rightarrow} x$ et $G \underset{\mathbf{X}}{\rightarrow} y$, alors il existe $A \in F$ et $B \in G$ tels que $A \cap B = \emptyset$;

III. La diagonale $\Delta_X = \{(x, y) \in X \times X \mid x = y\}$ est fermée dans $\mathbf{X} \times \mathbf{X}$.

Rappelons que, si $\mathbf{X}$ est un espace quasi-topologique, on note $\hat{\mathbf{X}}$ l'espace quasi-topologique initial déterminé par $\Omega\Omega\mathbf{X}$ et par l'application canonique $\alpha: X \longrightarrow \Omega\Omega\mathbf{X}$.

Si $\mathbf{X}$ est un espace séparé, on va trouver des conditions plus simples que la condition A de 2.5 pour qu'un filtre converge dans $\hat{\mathbf{X}}$. Si $A \subset X$, on note encore A^o l'ensemble des ouverts ω de $\mathbf{X}$ tels que $\omega \supset A$. Il est immédiat que, si $A \subset B$, alors $A^o \supset B^o$. Pour les espaces séparés la réciproque est également vraie.

LEMME 4.1. *Si* $\mathbf{X}$ *est un espace quasi-topologique séparé, si* $A \subset X$ *et* $B \subset X$ *sont tels que* $A^o \supset B^o$, *alors* $A \subset B$.

Démonstration. Si $x \notin B$, on voit que $\{x\}$ est un fermé, donc $X - \{x\}$ est un ouvert et l'on a

$$B \subset X - \{x\}, \quad X - \{x\} \in B^o, \quad X - \{x\} \in A^o, \quad X - \{x\} \supset A, \quad x \notin A.$$

LEMME 4.2. *Si* $\mathbf{X}$ *est un espace quasi-topologique séparé, si* H *est un* *filtre sur* X *et si* $a \in X$, *alors* $H \underset{\mathbf{X}}{\rightrightarrows} a$ *si, et seulement si, la condition* (B) *est vérifiée:*

(B) *Quels que soient l'ouvert* ω *de* $\mathbf{X}$ *avec* $a \in \omega$ *et la famille* $(A_{G,x})_{x \in \omega, G \to x}$ *telle que* $A_{G,x} \in G$, *il existe* $(G_1, x_1), \dots, (G_n, x_n)$ *tels que* $A_{G_1, x_1} \cup \dots \cup A_{G_n, x_n} \in H$.

DEMONSTRATION. On doit voir que la condition (B) est équivalente à la condition (A) de 2.5:

1° (A) $\Longrightarrow$ (B): Si ω est un ouvert de $\mathbf{X}$, avec $a \in \omega$, et si la famille $(A_{G,x})_{x \in \omega, G \to x}$ est telle que $A_{G,x} \in G$, soit F le filtre sur $\Omega \mathbf{X}$ qui admet pour base les

$$(A_{G_1, x_1} \cup \dots \cup A_{G_n, x_n})^{o} = A^{o}_{G_1, x_1} \cap \dots \cap A^{o}_{G_n, x_n}$$

D'après la condition (A), il existe $A \in H$ tel que $A^{o} \in F$, c'est-à-dire il existe $(G_1, x_1), \dots, (G_n, x_n)$ tels que

$$A^{o} \supset (A_{G_1, x_1} \cup \dots \cup A_{G_n, x_n})^{o};$$

ceci entraîne, vu le lemme précédent, $A \subset A_{G_1, x_1} \cup \dots \cup A_{G_n, x_n}$, donc $A_{G_1, x_1} \cup \dots \cup A_{G_n, x_n} \in H$.

2° (B) $\Longrightarrow$ (A): Si ω est un ouvert de $\mathbf{X}$ et F un filtre sur $\Omega \mathbf{X}$ tels que $a \in \omega$ et que, pour tout $x \in \omega$ et tout $G \to x$, il existe $A_{G,x} \in G$ vérifiant $A^{o}_{G,x} \in F$, la condition (B) entraîne l'existence de la famille $(G_1, x_1), \dots, (G_n, x_n)$, telle que $A_{G_1, x_1} \cup \dots \cup A_{G_n, x_n} \in H$, et l'on a

$$(A_{G_1, x_1} \cup \dots \cup A_{G_n, x_n})^{o} = A^{o}_{G_1, x_1} \cap \dots \cap A^{o}_{G_n, x_n} \in F.$$

PROPOSITION 4.3. *Si* $\mathbf{X}$ *est un espace quasi-topologique séparé, si* H *est un filtre sur* X *et si* $a \in X$, *alors* $H \underset{\mathbf{X}}{\rightrightarrows} a$ *si, et seulement si, la condition* (C) *est vérifiée:*

(C) *Quelle que soit la famille* $(A_G)_{G \to a}$ *telle que* $A_G \in G$, *il existe* $G_1, \dots, G_n$ *tels que* $A_{G_1} \cup \dots \cup A_{G_n} \in H$.

DEMONSTRATION. On va voir que la condition (C) est équivalente à la condition (B) du lemme précédent. Il est trivial que (C) $\Longrightarrow$ (B). Supposons donc (B) vérifiée et soit $(A_G)_{G \to a}$ une famille, telle que $A_G \in G$.

Montrons d'abord que, si $x \neq a$ et $F \underset{\mathbf{X}}{\to} x$, il existe $A \in F$ et $B \in H$ tels que $B \cap A = \emptyset$. Pour chaque $y \in X - \{x\}$ et pour chaque $F' \underset{\mathbf{X}}{\to} y$, on peut choisir $B_{y, F'} \in F$ et $B'_{y, F'} \in F'$ tels que $B_{y, F'} \cap B'_{y, F'} = \emptyset$. Comme $X - \{x\}$ est un ouvert et $a \in X - \{x\}$, la condition (B) garantit l'existence de $F'_1 \underset{\mathbf{X}}{\to} y_1, \dots, F'_n \underset{\mathbf{X}}{\to} y_n$ tels que $B = B'_{y_1, F'_1} \cup \dots \cup B'_{y_n, F'_n} \in H$; alors

$$A = B_{y_1, F'_1} \cap \dots \cap B_{y_n, F'_n} \in F \quad \text{et} \quad B \cap A = \emptyset,$$

comme on voulait.

Pour chaque couple (F, x) tel que $x \neq a$ et $F \underset{\mathbf{X}}{\to} x$, il existe des ensembles $A_{F, x} \in F$ et $B_{F, x} \in H$ tels que $A_{F, x} \cap B_{F, x} = \emptyset$; si $G \underset{\mathbf{X}}{\to} a$, prenons $A_{G, a} = A_G$. Compte tenu de (B), il existe

$$G_1 \to a, \dots, G_n \to a, G_{n+1} \to x_1, \dots, G_{n+k} \to x_k,$$

tels que $x_i \neq a$ et que

$$A = A_{G_1} \cup \dots \cup A_{G_n} \cup A_{G_{n+1}, x_1} \cup \dots \cup A_{G_{n+k}, x_k} \in H.$$

On obtient

$$A_{G_1} \cup \dots \cup A_{G_n} \supset A \cap B_{G_{n+1}, x_1} \cap \dots \cap B_{G_{n+k}, x_k},$$

d'où $A_{G_1} \cup \dots \cup A_{G_n} \in H$, ce qui vérifie la condition (C).

COROLLAIRE 4.4. *Si* $\mathbf{X}$ *est un espace quasi-topologique séparé, alors* $\mathbf{X}$ *est un espace d'Antoine si, et seulement si, quel que soit le couple* (H, a) *vérifiant la condition (C) de la proposition précédente, on a* $H \underset{\mathbf{X}}{\to} a$.

DEMONSTRATION. Il suffit de se rappeler (voir la preuve de 2.6) que $\mathbf{X}$ est un espace d'Antoine si, et seulement si, $1_X : \hat{\mathbf{X}} \longrightarrow \mathbf{X}$ est continue.

PROPOSITION 4.5. *Si* $\mathbf{X}$ *est un espace quasi-topologique séparé,* $\mathbf{X}$ *est un espace d'Antoine si, et seulement si,* $\mathbf{X}$ *est pseudo-topologique.*

DEMONSTRATION. On a déjà montré (3.8) que tout espace d'Antoine (même non séparé) est un espace pseudo-topologique. Supposons donc que $\mathbf{X}$ est un espace pseudo-topologique séparé. Soit (H, a) un couple formé d'un filtre H sur X et d'un point $a \in X$, vérifiant la condition (C) de la proposition 4.3. Soit F un ultrafiltre sur X tel que $F \supset H$. Si F ne converge pas vers a dans $\mathbf{X}$, pour tout $G \underset{\mathbf{X}}{\to} a$ on a $F \not\supset G$, et il existe donc

$A_G \in G$ tel que $A_G \notin F$; il s'ensuit, F étant un ultrafiltre, $X - A_G \in F$. D'après la condition (C), il existe $G_1, \ldots, G_n$ tels que

$$A_{G_1} \cup \ldots \cup A_{G_n} \in H \subset F;$$

on en déduit que

$$\emptyset = (A_{G_1} \cup \ldots \cup A_{G_n}) \cap (X - A_{G_1}) \cap \ldots \cap (X - A_{G_n}) \in F,$$

ce qui est absurde. Ceci prouve que, si F est un ultrafiltre et si $F \supset H$, $F \underset{\mathbf{X}}{\to} a$. Comme $\mathbf{X}$ est un espace pseudo-topologique, on voit que $H \underset{\mathbf{X}}{\to} a$, ce qui termine la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] ARENS R.F., A topology for spaces of transformations, *Annals of Math.* 47 (1946), pp. 480→495.

[2] BOURBAKI N. *Topologie Générale, Chap. X,* A.S.I. 1084, Hermann, Paris 1961.

[3] KOWALSKY H.J., Limesräume und Komplettierung, *Math. Nach.* 12 (1954), pp. 301→340.

[4] FISCHER H.R., Limesräume, *Math. Ann.* 137 (1959), pp. 269→303.

[5] BASTIANI A., Applications différentiables et variétés différentiables de dimension infinie, *Journ. Analyse Math.* 13 (1964), pp. 1→114.

[6] ANTOINE P., Etude élémentaire des catégories d'ensembles structurés, *Bull. Soc. Math. Belge,* XVIII 2 et 4 (1966).

[7] CHOQUET G., Convergences, *Ann. Univ. Grenoble,* 23 (1947-48).

[8] MACHADO A., Quasi-variétés complexes, *Cahiers de Top. et Géom. Diff.* *XI-3*, 1970.

[9] ANTOINE P., Notions de compacité et quasi-topologie, *Cahiers de Top. et Géom. Diff. XIV-3,* 1973.

Rua Coronel Ribeiro Viana 27, 4°, Dir.
LISBOA 3. PORTUGAL