

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES

MARIO CHARTRELLE

Complétion des catégories monoïdales fermées

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 14, n° 2 (1973), p. 117-142

http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1973__14_2_117_0

© Andrée C. Ehresmann et les auteurs, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

COMPLETION DES CATEGORIES MONOÏDALES FERMEES

par Mario CHARTRELLE

Dans les applications de la Théorie des Catégories à différents domaines des Mathématiques (Algèbre homologique, Topologie algébrique, Analyse fonctionnelle, Géométrie différentielle,...), on a été conduit à considérer des catégories H munies d'un foncteur « produit tensoriel » X de $H \times H$ vers H , d'un objet s de H , et d'un foncteur Hom-interne D , de sorte que le foncteur partiel $X(s, -)$ soit équivalent au foncteur identique et que $X(-, e)$ soit adjoint à $D(-, e)$, pour toute unité e de H . Une telle structure sera appelée ici *catégorie prémonoïdale fermée*. En particulier:

- les catégories monoïdales fermées (resp. fermées symétriques) sont obtenues si de plus le produit tensoriel admet s pour unité et est associatif (resp. et commutatif) à « isomorphismes près » [11];
- les catégories cartésiennes fermées sont obtenues si X est un foncteur produit.

Les morphismes entre catégories prémonoïdales fermées étant les foncteurs (strictement) compatibles avec toute la structure, nous montrons à l'aide du théorème général d'existence de structures libres de [9] qu'une catégorie peut être « universellement » et injectivement plongée dans une catégorie prémonoïdale fermée (resp. monoïdale fermée, monoïdale fermée symétrique, ou cartésienne fermée). Ensuite, adaptant au cas des catégories (pré)monoïdales fermées les méthodes de complétion universelle des catégories de [10] et [2], nous montrons qu'une catégorie (pré)monoïdale fermée peut être « universellement » complétée en une catégorie (pré)monoïdale fermée munie d'un choix de limites projectives et inductives de certains genres, le plongement conservant le produit tensoriel, les Hom-internes et une famille de limites données.

Les notations et la terminologie sont celles de [8] et [9]. Si H est une catégorie, on désigne par H_0 l'ensemble de ses unités, par H_γ l'ensemble de ses inversibles, par H^* sa duale.

Cet article développe le chapitre V de [4] (résumé dans [5]).

1. Catégorie prémonoïdale fermée libre associée à une catégorie.

On dira que $\mathbf{H} = (H', D, d, l, b, s)$ est une *catégorie prémonoïdale fermée* si les conditions suivantes sont vérifiées:

1° H' est une catégorie et D un foncteur de $H' \times H^*$ vers H' , appelé *foncteur Hom interne*;

2° pour toute unité e de H' , le foncteur partiel $D(-, e)$ admet un adjoint et d est une application de $H'_0 \times H'_0$ dans $H'_0 \times H$ qui associe à un couple (e'', e) d'unités un $D(-, e)$ -projecteur $(s_{e''}^e, g_{e''}^e)$ définissant $s_{e''}^e$, comme structure libre associée à e'' . Le foncteur adjoint de $D(-, e)$, naturalisé par d , est dit *produit tensoriel par e* , noté X_e ;

3° s est une unité donnée de H' et l est une application de H'_0 dans H associant à l'unité e un inversible $l(e)$ de H' de source $X_e(s)$ et de but e ;

4° b est une application de $H'_0 \times H'_0 \times H'_0$ dans H associant à un triplet $t = (e'', e, e')$ un inversible k_t de H' de source $D(e'', X_e(e'))$ et de but $D(D(e'', e), e')$ tel que

$$\text{Hom}_{H'}(k_t, s) \circ f_{e'', X_e(e')} = f_{D(e'', e), e'} \circ f_t,$$

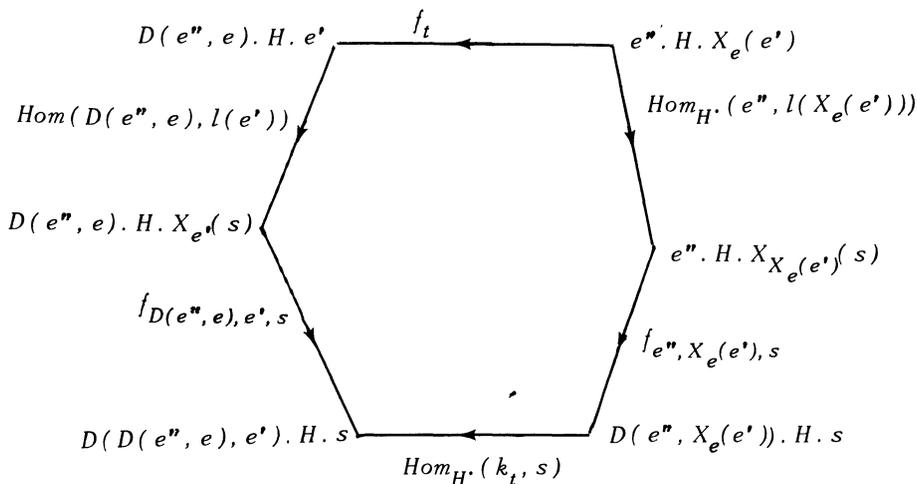
où f_t et $f_{e'', e}$ sont les bijections définies comme suit:

- f_t est la bijection de source $e'' \cdot H \cdot X_e(e')$ et de but $D(e'', e) \cdot H \cdot e'$ telle que $f_t(x) = D(x, e) \cdot g_{e''}^e$;

- $f_{e'', e}$ est la bijection $f_{\hat{t}} \circ \text{Hom}_{H'}(e'', l(e))$, de source $e'' \cdot H \cdot e$, et de but $D(e'', e) \cdot H \cdot s$, où $\hat{t} = (e'', e, s)$.

Ces conditions entraînent qu'il existe un unique foncteur X de la catégorie produit $H' \times H'$ vers H' prolongeant les foncteurs X_e ; on appelle X foncteur *produit tensoriel*.

REMARQUE. La condition 3 signifie que s est une «unité à gauche» pour le produit tensoriel; le foncteur $\text{Hom}_{H'}(-, s)$ sera dit *foncteur de base*. La condition 4 exprime, intuitivement, que la bijection canonique déterminée par l'adjonction entre $D(-, e)$ et X_e «se relève» relativement au foncteur de base en un élément inversible de H' .



EXEMPLE. Une catégorie monoïdale fermée au sens d'Eilenberg-Kelly [11] admet une catégorie prémonoïdale fermée sous-jacente; il en est de même pour une catégorie monoïdale bifermée [14].

On appelle *foncteur prémonoïdal fermé (strict)* un triplet

$$F = (\hat{H}, f, H),$$

vérifiant les conditions suivantes:

1° $H = (H', D, d, l, b, s)$ et $\hat{H} = (\hat{H}', \hat{D}, \hat{d}, \hat{l}, \hat{b}, \hat{s})$ sont des catégories prémonoïdales fermées;

2° f est un foncteur de H' vers \hat{H}' et $f(s) = \hat{s}$;

3° $f \circ D = \hat{D} \circ (f \times f^*)$, où f^* est le foncteur dual de f ; et si f_0 est la restriction de f aux unités, on a

$$\hat{d} \circ (f_0 \times f_0) = (f_0 \times \underline{f}) \circ d \quad \text{et} \quad \hat{l} \circ f_0 = \underline{f} \circ l;$$

4° $\underline{f} \circ b = \hat{b} \circ (f_0 \times f_0 \times f_0)$.

Les conditions 3 et 4 entraînent que, pour toute unité e de H' , on a $f \circ X_e = \hat{X}_{f(e)} \circ f$, où X_e et $\hat{X}_{f(e)}$ sont les foncteurs produits tensoriels par e pour H et par $f(e)$ pour \hat{H} , respectivement.

Nous noterons \mathcal{L}_0 l'ensemble des catégories prémonoïdales fermées H dont l'ensemble sous-jacent H appartient à l'univers \mathcal{U} ; il en

résulte que $\text{Hom}_H(\cdot, s)$ est un foncteur de H' vers la catégorie \mathbb{M}° des applications associée à l'univers \mathcal{U} . Soit \mathcal{F}° la catégorie des foncteurs.

Les foncteurs prémonoïdaux fermés (stricts) entre éléments de \mathcal{L}_\circ forment une catégorie \mathcal{L}° , la loi de composition étant définie par:

$$(\hat{\mathbf{H}}', f', \mathbf{H}') \circ (\hat{\mathbf{H}}, f, \mathbf{H}) = (\hat{\mathbf{H}}', f' \circ f, \mathbf{H}) \quad \text{ssi} \quad \mathbf{H}' = \hat{\mathbf{H}}.$$

On définit un foncteur fidèle:

- $P_{\mathcal{F}}$ de \mathcal{L}° vers \mathcal{F}° en associant f à $F \in \mathcal{L}$,
- $P_{\mathcal{Q}}$ de \mathcal{L}° vers \mathbb{M}° en associant à F l'application \underline{f} de H dans \hat{H} définissant le foncteur f .

Dans la suite, on identifiera les unités de \mathcal{L}° aux éléments de \mathcal{L}_\circ et les unités de \mathcal{F}° aux catégories.

PROPOSITION 1. *Soit $F = (\hat{\mathbf{H}}, f, \mathbf{H}) \in \mathcal{L}$ un foncteur prémonoïdal fermé. F est un $P_{\mathcal{Q}}$ -monomorphisme [8] ssi l'application $\underline{f} = P_{\mathcal{Q}}(F)$ est une injection.*

PREUVE. La condition est évidemment nécessaire. Supposons-la vérifiée et soit $G = (\hat{\mathbf{H}}, g, \mathbf{H}') \in \mathcal{L}$; on posera toujours:

$$\mathbf{H} = (H', D, d, l, b, s), \quad \hat{\mathbf{H}} = (\hat{H}', \hat{D}, \hat{d}, \hat{l}, \hat{b}, \hat{s}),$$

$$\mathbf{H}' = (H'', D', d', l', b', s').$$

Soit \underline{g}' une application de H' dans H telle que $\underline{f} \circ \underline{g}' = \underline{g}$. Puisque \underline{f} est une injection, \underline{g}' définit un foncteur g' de H'' vers H' tel que $f \circ g' = g$.

On a:

$$(f_0 \times \underline{f}) \circ d \circ (g'_0 \times g'_0) = \hat{d} \circ (f_0 \times f_0) \circ (g'_0 \times g'_0) = \hat{d} \circ (f_0 \circ g'_0 \times f_0 \circ g'_0),$$

lequel est égal à

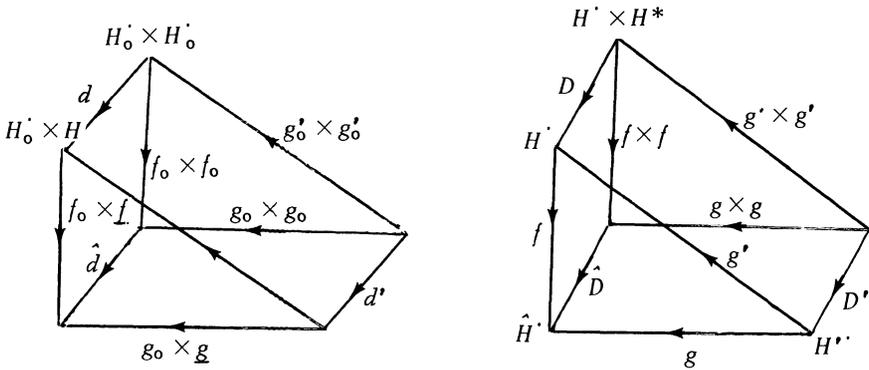
$$(g'_0 \times \underline{g}) \circ d' = (f_0 \times \underline{f}) \circ (g'_0 \times \underline{g}') \circ d'.$$

Comme \underline{f} est injectif, f_0 est injectif ainsi que $f_0 \times \underline{f}$. Donc

$$d \circ (g'_0 \times g'_0) = (g'_0 \times \underline{g}) \circ d'.$$

Pour tout couple (x', x) de morphismes de $\hat{\mathbf{H}}$, on obtient:

$$\begin{aligned} g \circ D'(x', x) &= \hat{D}(g(x'), g(x)) = \hat{D}(f \circ g'(x'), f \circ g'(x)) = \\ &= f \circ D(g'(x'), g'(x)) = f \circ g' \circ D'(x', x). \end{aligned}$$



Il s'ensuit

$$g' \circ D'(x', x) = D(g'(x'), g'(x)), \text{ d'où } g' \circ D' = D \circ (g' \times g'^*).$$

De plus, il est évident que $g'(s') = s$.

Enfin:

$$\underline{g} \circ b' = f \circ g' \circ b' = \hat{b} \circ g_0^3 = \hat{b} \circ f_0^3 \circ g_0^3 = \underline{f} \circ b \circ g_0^3,$$

ce qui entraîne $\underline{g} \circ b' = b \circ g_0^3$.

Ainsi g' définit un foncteur prémonoïdal fermé de \mathbf{H}' vers \mathbf{H} , et $F \circ G' = G$, où $G' = (\mathbf{H}, g', \mathbf{H}')$. Comme $P_{\mathcal{Q}}$ est fidèle, G' est l'unique élément de \mathcal{L} vérifiant cette égalité. Ceci prouve que F est un $P_{\mathcal{Q}}$ -monomorphisme. ∇

Nous désignerons dans la suite par $\hat{\mathcal{U}}$ un univers tel que \mathcal{U} appartienne à $\hat{\mathcal{U}}$ et soit contenu dans $\hat{\mathcal{U}}$. Soit $\hat{\mathcal{L}}^{\circ}$ la catégorie des foncteurs prémonoïdaux fermés associée à $\hat{\mathcal{U}}$ (c'est-à-dire l'ensemble H_1 sous-jacent à un objet \mathbf{H} de $\hat{\mathcal{L}}^{\circ}$, appartient à $\hat{\mathcal{U}}$); soit $\hat{P}_{\mathcal{Q}}$ le foncteur d'oubli de $\hat{\mathcal{L}}^{\circ}$ vers la catégorie $\hat{\mathcal{M}}^{\circ}$ des applications associée à $\hat{\mathcal{U}}$.

En particulier, soit $\hat{\mathbf{H}} = (\hat{H}', \hat{D}, \hat{d}, \hat{l}, \hat{b}, \hat{s})$ une catégorie prémonoïdale fermée et $F = (\hat{\mathbf{H}}, f, \mathbf{H})$ un foncteur prémonoïdal fermé, où f est l'injection canonique vers \hat{H}' d'une sous-catégorie H' . Alors \mathbf{H} est appelé sous-catégorie prémonoïdale fermée de $\hat{\mathbf{H}}$, définie par H . On voit que \mathbf{H} est de la forme $\mathbf{H} = (H', D, d, l, b, s)$, où D, d, l et b sont des restrictions de $\hat{D}, \hat{d}, \hat{l}$ et \hat{b} et où $s = \hat{s}$. Nous caractériserons plus loin les parties H définissant une sous-catégorie prémonoïdale fermée de $\hat{\mathbf{H}}$.

PROPOSITION 2. Soit $\mathbf{H} = (H', D, d, l, b, s)$ une catégorie prémonoïdale fermée et E une partie de H . Il existe une sous-catégorie prémonoïdale fermée \mathbf{H}' de \mathbf{H} engendrée par E ; si E est équipotent à un élément de \mathcal{U} , il en est de même pour l'ensemble sous-jacent à \mathbf{H}' .

PREUVE. Nous allons construire explicitement \mathbf{H}' par récurrence en rendant E successivement stable par les différentes données de \mathbf{H} .

Pour cela, nous définissons par récurrence une suite croissante $(E_i)_{i \in \mathbf{N}}$ de parties de H et une suite croissante $(C_i)_{i \in \mathbf{N}}$ de sous-catégories de H' vérifiant la condition:

(A) $E_0 = E \cup \{s\}$, et C_i est la sous-catégorie de H' engendrée par E_i .

- Supposons E_n et C_n définis pour un certain entier n . Soit T_n l'ensemble des triplets d'unités de C_n . Si $t = (e'', e, e') \in T_n$, si $d(e', e) = (X_e(e'), g_{e'})$ et si f_t est la bijection

de $e'' \cdot H \cdot X_e(e')$ dans $D(e'', e) \cdot H \cdot e'$
associant $D(x, e) \cdot g_{e'}$ à x ,

on pose

$$E_n(t) = \{X_e(e'), g_{e'}, b(t), b(t)^{-1}\} \cup f_t^{-1}(D(e'', e) \cdot C_n \cdot e').$$

Alors E_{n+1} sera l'ensemble réunion

des $E_n(t)$, pour tous les $t \in T_n$,
de $D(C_n \times C_n)$, de C_n , de $l(C_n \circ)$ et de $l(C_n \circ)^{-1}$

(en notant B^{-1} l'ensemble des inverses des éléments de B pour toute partie B du groupoïde des inversibles de H').

C_{n+1} sera la sous-catégorie de H' engendrée par E_{n+1} .

- L'ensemble C réunion des C_n , où $n \in \mathbf{N}$, définit une sous-catégorie C' de H' , car chaque C_n en est une. Par construction, s appartient à C ; de plus, C est aussi la réunion des E_n , pour $n \in \mathbf{N}$.

Soit $(y', y) \in C \times C$; il existe des entiers n et n' tels que y appartienne à C_n et y' à $C_{n'}$; si $p = \sup(n, n')$, on a

$$(y', y) \in C_p \times C_p, \text{ d'où } D(y', y) \in D(C_p \times C_p) \subset C_{p+1} \subset C.$$

Donc il existe un foncteur D' de $C' \times C^*$ vers C' restriction de D .

Soit e et e' des unités de C' ; il existe un entier n tel que e et e' appartiennent à C_n , d'où :

$$X_e(e') \in C_{n+1} \subset C \text{ et } g_e^e \in C_{n+1} \subset C.$$

Si de plus e'' est une unité de C' et y un élément de $D(e'', e) \cdot C \cdot e'$, il existe un entier m tel que

$$y \in C_m \text{ et } t = (e'', e, e') \in T_m,$$

de sorte que $f_t^1(y)$ appartient à $E_m(t)$, qui est inclus dans C . Ainsi $d(e, e')$ est aussi un $D'(-, e)$ -projecteur, noté $d'(e, e')$. Le foncteur adjoint de $D'(-, e)$ associé à d' est une restriction X_e' du foncteur X_e adjoint de $D(-, e)$.

Par ailleurs, la construction de C_{n+1} entraîne que b admet pour restriction une application b' de C_0^3 dans C (ou dans C_γ) et que l a pour restriction une application l' de C' dans C . On vérifie facilement que $b'(t)$ satisfait la condition nécessaire pour que

$$\mathbf{H}' = (C', D', d', l', b', s)$$

soit une sous-catégorie prémonoïdale fermée de \mathbf{H} .

Montrons que \mathbf{H}' est la sous-catégorie prémonoïdale fermée de \mathbf{H} engendrée par E . Soit $\hat{\mathbf{H}} = (\hat{H}', \hat{D}, \hat{d}, \hat{l}, \hat{b}, s)$ une sous-catégorie prémonoïdale fermée de \mathbf{H} contenant E . Comme \hat{D} , \hat{d} , \hat{l} et \hat{b} sont des restrictions de D , d , l et b , par construction de C_{n+1} on voit que, si C_n est contenu dans \hat{H} , il en est de même pour C_{n+1} . Par conséquent C est contenu dans \hat{H} et \mathbf{H}' est une sous-catégorie prémonoïdale fermée de $\hat{\mathbf{H}}$. Ceci prouve que \mathbf{H}' est la sous-catégorie prémonoïdale fermée de \mathbf{H} engendrée par E . Soit $\tilde{\mathcal{U}}$ l'ensemble des $M \in \mathcal{U}$ équipotents à un $M' \in \mathcal{U}$.

Supposons que E appartienne à $\tilde{\mathcal{U}}$. Alors il en est de même pour sa réunion E_0 avec le singleton $\{s\}$. Supposons que E_n appartienne à $\tilde{\mathcal{U}}$ pour un certain entier n , et montrons que E_{n+1} y appartient aussi. Ceci prouvera par récurrence que tous les E_i appartiennent à $\tilde{\mathcal{U}}$; par suite leur réunion C y appartiendra également, l'ensemble \mathbf{N} des entiers appartenant à tout univers, et $\tilde{\mathcal{U}}$ étant un univers).

Supposons donc que E_n appartienne à $\tilde{\mathcal{U}}$; la sous-catégorie engen-

drée par E_n a son ensemble sous-jacent C_n dans $\tilde{\mathcal{U}}$; il s'ensuit que

$$C_{n^0} \in \tilde{\mathcal{U}} \quad \text{et} \quad T_n = C_{n^0} \times C_{n^0} \times C_{n^0} \in \tilde{\mathcal{U}}.$$

Soit $t = (e'', e, e') \in T_n$; l'ensemble $E_n(t)$ est la réunion d'un ensemble à quatre éléments avec $f_t^{-1}(D(e'', e).C_n.e')$; ce dernier appartient à $\tilde{\mathcal{U}}$, car il est équipotent à la partie $D(e'', e).C_n.e'$ de C_n . On en déduit:

$$E_n(t) \in \tilde{\mathcal{U}}, \quad \text{d'où} \quad \bigcup_{t \in T_n} E_n(t) \in \tilde{\mathcal{U}}.$$

D'autre part l'image par D de $C_n \times C_n$ appartient à $\tilde{\mathcal{U}}$; l'image $l(C_{n^0})$ appartient aussi à $\tilde{\mathcal{U}}$, ainsi que l'ensemble de ses inverses, qui lui est équipotent. Il en résulte $E_{n+1} \in \tilde{\mathcal{U}}$. A fortiori $C \in \tilde{\mathcal{U}}$. ∇

COROLLAIRE 1. *Le foncteur $\hat{P}_{\mathcal{Q}}$ est sous-engendrant pour \mathfrak{M} .*

Ceci est une autre formulation de la dernière assertion de la proposition 1, par définition [9].

COROLLAIRE 2. *Soit $\mathbf{H} = (H', D, d, l, b, s)$ une catégorie prémonoïdale fermée. Une partie C de H définit une sous-catégorie prémonoïdale fermée de \mathbf{H} ssi:*

1° C définit une sous-catégorie C' de H' telle que:

$$\begin{aligned} D(C \times C) \subset C, \quad d(C \times C_0) \subset C \times C, \\ l(C_0) \subset C, \quad b(C_0 \times C_0 \times C_0) \subset C \quad \text{et} \quad s \in C. \end{aligned}$$

2° Soit $t = (e'', e, e')$ un triplet d'unités de C' ; on a:

$$f_t^{-1}(y) \in C, \quad \text{pour tout } y \in D(e'', e).C.e',$$

où f_t^{-1} est la bijection canonique (associée à l'adjonction) de

$$D(e'', e).H.e' \quad \text{sur} \quad e''.H.X_e(e').$$

PROPOSITION 3. *La catégorie \mathcal{L}^0 est à noyaux et le foncteur d'oubli $P_{\mathcal{F}}$ de \mathcal{L}^0 vers \mathcal{F}^0 est compatible avec les noyaux.*

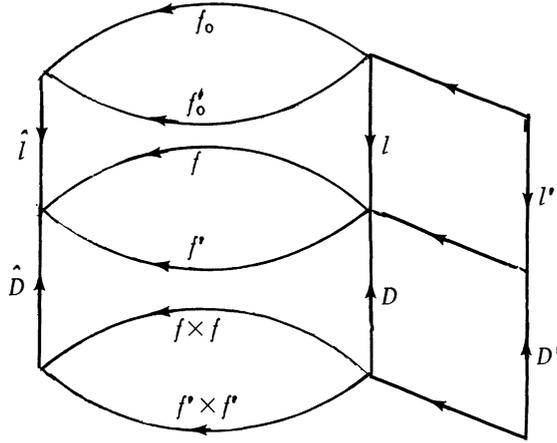
PREUVE. Soit $F = (\hat{\mathbf{H}}, f, \mathbf{H})$ et $F' = (\hat{\mathbf{H}}, f', \mathbf{H})$ deux éléments de \mathcal{L} , où

$$\mathbf{H} = (H', D, d, l, b, s) \quad \text{et} \quad \hat{\mathbf{H}} = (\hat{H}', \hat{D}, \hat{d}, \hat{l}, \hat{b}, \hat{s}).$$

Le noyau du couple (f, f') de foncteurs est la sous-catégorie C' de H' définie par l'ensemble des $x \in H$ tels que $f(x) = f'(x)$. Montrons que C

défini une sous-catégorie prémonoïdale fermée \mathbf{H}' de \mathbf{H} , c'est-à-dire que C vérifie les conditions du corollaire 2. Il en résultera que l'injection canonique de \mathbf{H}' vers \mathbf{H} est un $P_{\mathcal{Q}}$ -monomorphisme, et par suite ce sera le noyau de (F, F') dans \mathcal{Q}^0 .

- Comme $f(s) = \hat{s} = f'(s)$, on a $s \in C$.
- On trouve $D(C \times C) \subset C$, car, si $(y', y) \in C \times C$, alors



$$f(D(y', y)) = \hat{D}(f(y'), f(y)) = \hat{D}(f'(y'), f'(y)),$$

qui est égal à $f'(D(y', y))$.

- De même, $l(C_0)$ est contenu dans C , puisque

$$f(l(e)) = \hat{l}(f(e)) = \hat{l}(f'(e)),$$

qui est égal à $f'(l(e))$, pour toute unité e de C' .

- Supposons que $t = (e'', e, e')$ soit un triplet d'unités de C' . Les égalités

$$(f_0 \times f)(d(e, e')) = \hat{d}(f(e), f(e')) = \hat{d}(f'(e), f'(e')) = (f'_0 \times f')(d(e, e'))$$

entraînent

$$d(e, e') = (X_e(e'), g_{e'}^e) \in C \times C.$$

Soit $y \in D(e', e)$. $C.e'$ et $x = f_i^{-1}(y)$; puisque $y = D(x, e) \cdot g_{e'}^e$, on a

$$\begin{aligned} \hat{D}(f(x), f(e)) \cdot \hat{g}_{f(e')}^{f(e)} &= f(D(x, e)) \cdot f(g_{e'}^e) = f(y) = \\ &= f'(y) = f'(D(x, e)) \cdot f'(g_{e'}^e), \end{aligned}$$

qui est égal à

$$\hat{D}(f'(x), f(e)) \cdot \hat{g}_{f(e')}^{f(e)},$$

d'où $f(x) = f'(x)$, par définition du projecteur $\hat{d}(f(e), f(e'))$. Ainsi x appartient à C . Enfin $b(t)$ appartient à C , car

$$f(b(t)) = \hat{b}(f(e''), f(e), f(e')) = \hat{b}(f'(e''), f'(e), f'(e')) = f'(b(t)).$$

Ainsi C définit une sous-catégorie prémonoïdale fermée de \mathbf{H} . ∇

PROPOSITION 4. \mathcal{L}^0 est à 1-produits, pour tout élément I de \mathcal{U} , et $P_{\mathcal{G}}$ est compatible avec les produits.

PREUVE. Soit $(\mathbf{H}_i)_{i \in I}$ une famille d'objets de \mathcal{L}^0 , où

$$\mathbf{H}_i = (H_i', D_i, d_i, l_i, b_i, s_i).$$

Notons H' la catégorie produit des H_i' et p_i le foncteur projection canonique de H' sur H_i' pour tout i . Par définition du produit de catégories, il existe un unique foncteur D de $H' \times H^*$ vers H' tel que

$$p_i \circ D = D_i \circ (p_i \times p_i^*) \quad \text{pour tout } i \in I,$$

où p_i^* est le foncteur dual de p_i .

Soit e une unité de H' . Si $e = (e_i)_{i \in I}$, on sait que le foncteur $D(-, e)$, produit des foncteurs $D_i(-, e_i)$, admet pour adjoint le foncteur X_e , produit des foncteurs produits tensoriels X_{i, e_i} , naturalisé par l'application $d(-, e)$ associant à $e' = (e'_i)_{i \in I}$ le couple

$$(X_e(e'), g_{e'}^e), \quad \text{où } g_{e'}^e = (g_{e'_i}^{e_i})_{i \in I}.$$

L'application d de $H'_0 \times H'_0$ dans $H'_0 \times H$ correspondante est définie par

$$(p_{i_0} \times \underline{p}_i) \circ d = d_i \circ (p_{i_0} \times p_{i_0}).$$

Notons s l'unité $(s_i)_{i \in I}$ de H' . L'application l de H'_0 dans H , produit de $(l_i)_{i \in I}$ associée à toute unité e de H' un inversible de H' , de source $X_e(s)$ et de but e ; elle vérifie

$$l_i \circ p_{i_0} = \underline{p}_i \circ l \quad \text{pour tout } i \in I.$$

Enfin il existe une application b de $H'_0 \text{ }^3$ dans H , telle que

$$b_i \circ p_{i_0}^3 = \underline{p}_i \circ b, \quad \text{pour tout } i \in I.$$

Au triplet $t = (e'', e, e')$ d'unités de H' elle associe

$$b(t) = (b_i \circ p_i^3(t))_{i \in I},$$

qui est un inversible de H' , de source

$$D(e'', X_e(e')) \text{ et de but } D(D(e'', e), e').$$

Cet inversible vérifie la condition voulue pour que $\mathbf{H} = (H', D, d, l, b, s)$ soit une catégorie prémonoïdale fermée. Ainsi

$$\mathbf{H} \in \mathcal{L}_0 \text{ et } P_i = (\mathbf{H}_i, p_i, \mathbf{H}) \in \mathcal{L} \text{ pour tout } i \in I.$$

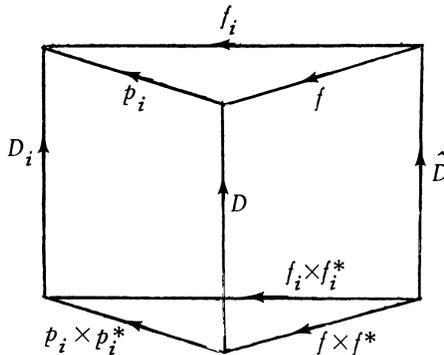
Soit $F_i = (\mathbf{H}_i, f_i, \hat{\mathbf{H}})$ un foncteur prémonoïdal fermé, pour tout $i \in I$, avec $\hat{\mathbf{H}} = (\hat{H}', \hat{D}, \hat{d}, \hat{l}, \hat{b}, \hat{s})$. Il existe un unique foncteur f de \hat{H}' vers H' vérifiant

$$p_i \circ f = f_i \text{ pour tout } i \in I.$$

- Comme $f_i(\hat{s}) = s_i$ pour tout i , on a $f(\hat{s}) = (s_i)_{i \in I} = s$.
- Des égalités

$$p_i \circ f \circ \hat{D} = f_i \circ \hat{D} = D_i \circ (f_i \times f_i^*) = D_i \circ (p_i \circ f \times (p_i \circ f)^*) = p_i \circ D \circ (f \times f^*)$$

pour tout $i \in I$, il résulte $f \circ \hat{D} = D \circ (f \times f^*)$.



- On vérifie de manière analogue que l'on a

$$(f_0 \times \underline{f}) \circ \hat{d} = d \circ (f_0 \times f_0), \quad \underline{f} \circ \hat{l} = l \circ f_0, \quad \underline{f} \circ \hat{b} = b \circ f_0^3.$$

Ainsi $(\mathbf{H}, f, \hat{\mathbf{H}})$ est un foncteur prémonoïdal fermé F vérifiant

$$P_i \circ F = F_i \text{ pour tout } i \in I.$$

Le foncteur $P_{\mathcal{F}}$ de \mathcal{L}^0 vers \mathcal{F}^0 étant fidèle, F est le seul élément de \mathcal{L} vérifiant ces conditions. Donc \mathbf{H} est un produit de $(\mathbf{H}_i)_{i \in I}$. ∇

THEOREME 1. *Le foncteur $P_{\mathcal{F}}$ d'oubli de \mathcal{L}° vers \mathcal{F}° admet un adjoint.*

PREUVE. Les propositions précédentes montrent que les conditions du théorème général d'existence de structures libres [9] sont vérifiées par $P_{\mathcal{F}}$ et par le foncteur analogue relatif à l'univers $\hat{\mathcal{U}}$. Il reste seulement à prouver que, si C' est une catégorie, où $C \in \mathcal{U}$, l'ensemble J des couples

$$(\mathbf{H}, f), \text{ où } \mathbf{H} \in \mathcal{L}_0 \text{ et où } f \text{ est un foncteur de } C' \text{ vers } P_{\mathcal{F}}(\mathbf{H}),$$

appartient à $\hat{\mathcal{U}}$. En effet, J n'est pas vide, la catégorie \mathcal{L}° ayant pour objet final l'unique catégorie prémonoïdale fermée sur la catégorie à un seul élément. Par ailleurs, J est une partie de $\mathcal{L}_0 \times \mathcal{F}$; comme on sait [9] que \mathcal{F} appartient à $\hat{\mathcal{U}}$, il suffit de voir que \mathcal{L}_0 y appartient aussi.

Or, si \mathbf{H} est un élément de \mathcal{L}_0 , on obtient

$$\mathbf{H} = (H', D, d, l, b, s) \in \mathcal{F}_0 \times \mathcal{F} \times \mathcal{M} \times \mathcal{M} \times \mathcal{M} \times H \in \hat{\mathcal{U}},$$

car H, \mathcal{F} et \mathcal{M} appartiennent à l'univers $\hat{\mathcal{U}}$.

La catégorie prémonoïdale fermée libre engendrée par C' est alors construite comme suit. Si $j = (\mathbf{H}, f) \in J$, posons

$$\mathbf{H}_j = \mathbf{H} \text{ et } f_j = f.$$

D'après la proposition 4, il existe un produit $\hat{\mathbf{H}}$ de $(\mathbf{H}_j)_{j \in J}$ dans $\hat{\mathcal{L}}^{\circ}$; notons $P_j = (\mathbf{H}_j, p_j, \hat{\mathbf{H}})$ la projection canonique, pour tout $j \in J$. Il existe un foncteur f de C' vers la catégorie \hat{H}' sous-jacente à $\hat{\mathbf{H}}$ tel que

$$p_j \circ f = f_j \text{ pour tout } j \in J.$$

La sous-catégorie prémonoïdale fermée $\tilde{\mathbf{H}}$ de $\hat{\mathbf{H}}$ engendrée par $f(C)$ est définie par un ensemble équipotent à un élément de $\hat{\mathcal{U}}$, vu la proposition 2, car $f(C)$ appartient à $\tilde{\mathcal{U}}$. Il existe donc une catégorie prémonoïdale fermée $\bar{\mathbf{H}}$ isomorphe à $\tilde{\mathbf{H}}$ et appartenant à \mathcal{L}_0 . Alors $\bar{\mathbf{H}}$ est une $P_{\mathcal{F}}$ -structure libre engendrée par C' . ∇

THEOREME 2. *La catégorie \mathcal{L}° est à C' -limites inductives, pour toute catégorie C' , où $C \in \mathcal{U}$. Le foncteur $P_{\mathcal{Q}}$ est à structures quasi-quotients.*

Ce théorème 2 se déduit de même du théorème général d'existence de limites inductives et de quasi-quotients, donné dans [9].

2. Complétion d'une catégorie prémonoïdale fermée.

On suppose données deux parties \mathcal{I} et \mathcal{J} de l'ensemble \mathcal{F}_0 des catégories dont l'ensemble sous-jacent appartient à \mathcal{U} . De plus \mathcal{I} et \mathcal{J} sont équipotents à des éléments de \mathcal{U} , de sorte que $\mathcal{I} \cup \mathcal{J} \in \widehat{\mathcal{U}}$.

Rappelons [10] qu'on définit une $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ -préesquisse comme étant un triplet (H', μ, ν) , où

1° H' est une catégorie,

2° μ (resp. ν) est une application associant à certains foncteurs ϕ de source dans \mathcal{I} (resp. dans \mathcal{J}) et de but H' un cône projectif $\mu(\phi)$ (resp. inductif $\nu(\phi)$) de base ϕ .

C'est un $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ -type si $\mu(\phi)$ (resp. $\nu(\phi)$) est défini pour tout foncteur ϕ de source dans \mathcal{I} (resp. dans \mathcal{J}) et de but H' et si ce cône est alors une limite naturalisée. Intuitivement, un type est une catégorie à \mathcal{I} -limites projectives et \mathcal{J} -limites inductives, et munie d'un choix de \mathcal{I} -limites projectives et d'un choix de \mathcal{J} -limites inductives.

On associe à l'univers \mathcal{U} la catégorie $\mathcal{S}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}$ des morphismes entre $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ -préesquisses

$$S = (H', \mu, \nu) \text{ telles que } H \in \mathcal{U}.$$

Un tel morphisme est un triplet (S', f, S) , où:

- 1° S et $S' = (H'', \mu', \nu')$ sont des $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ -préesquisses,
- 2° f est un foncteur de H' vers H'' tel que

$$f\mu(\phi) = \mu'(f \circ \phi) \text{ et } f\nu(\phi') = \nu'(f \circ \phi'),$$

dès que $\mu(\phi)$ et $\nu(\phi)$ sont définis.

En associant à une catégorie H' la préesquisse «vide» sur H' (on ne choisit aucun cône), on identifie la catégorie \mathcal{F}^0 des foncteurs à une sous-catégorie pleine de $\mathcal{S}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}$.

On note q' le foncteur de $\mathcal{S}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}$ vers \mathcal{F}^0 , qui associe f au morphisme (S', f, S) . Ce foncteur admet pour restriction le foncteur d'oubli q , vers \mathcal{F}^0 , de la sous-catégorie pleine $\mathcal{F}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}$ de $\mathcal{S}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}$ ayant pour objets les $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ -types.

On appellera *catégorie prémonoïdale fermée avec $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ -cônes* un

triplet $\mathbf{S} = (\mathbf{H}, \mu, \nu)$, où

1° \mathbf{H} est une catégorie prémonoïdale fermée,

2° $S = (H', \mu, \nu)$ est une $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ -préesquisse sur la catégorie H' sous-jacente à \mathbf{H} .

Si de plus S est un $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ -type, on dira que \mathbf{S} est une *catégorie prémonoïdale fermée avec $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ -limites*.

Un morphisme entre catégories prémonoïdales fermées avec $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ -cônes sera un triplet $(\mathbf{S}', f, \mathbf{S})$, où

1° $\mathbf{S} = (\mathbf{H}, \mu, \nu)$ et $\mathbf{S}' = (\mathbf{H}', \mu', \nu')$ sont des catégories prémonoïdales fermées, avec $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ -cônes,

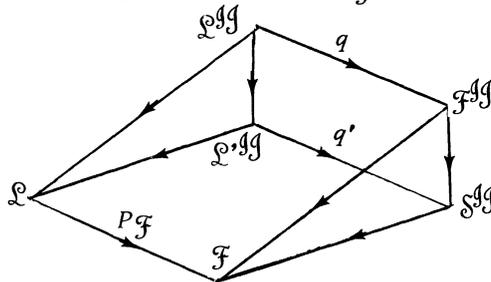
2° $(\mathbf{H}', f, \mathbf{H})$ est un foncteur prémonoïdal fermé,

3° $((H', \mu', \nu'), f, (H, \mu, \nu))$ est un morphisme entre $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ -préesquisses.

A l'univers \mathcal{U} , on associe la catégorie $\mathcal{L}^{\mathcal{I}, \mathcal{J}}$ des morphismes entre catégories prémonoïdales fermées avec $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ -cônes, et sa sous-catégorie pleine $\mathcal{L}^{\mathcal{I}, \mathcal{J}}$ ayant pour objets les catégories prémonoïdales fermées avec $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ -limites.

Le but de ce chapitre sera de montrer que le foncteur injection de $\mathcal{L}^{\mathcal{I}, \mathcal{J}}$ vers $\mathcal{L}^{\mathcal{I}, \mathcal{J}}$ admet un adjoint; autrement dit, on peut «universellement» associer à une catégorie prémonoïdale fermée avec $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ -cônes une catégorie prémonoïdale fermée avec $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ -limites, de sorte que les cônes distingués deviennent des cônes-limites; il en résultera un théorème de complétion d'une catégorie prémonoïdale fermée, avec conservation d'un choix de certaines limites.

La catégorie $\mathcal{L}^{\mathcal{I}, \mathcal{J}}$ s'identifie à la catégorie produit fibré des foncteurs $(P\mathcal{F}, q')$, et $\mathcal{L}^{\mathcal{I}, \mathcal{J}}$ au produit fibré de $(P\mathcal{F}, q)$. Le foncteur d'oubli



$P_{\mathcal{G}}$ de \mathcal{L}° vers \mathcal{F}° étant à «petites» limites projectives (d'après le chapitre précédent), de même que les foncteurs q et q' (voir [9]), il s'ensuit:

PROPOSITION 1. $\mathcal{L}^{\mathcal{G}}$ est une catégorie à C' -limites projectives, pour toute catégorie C' telle que C appartienne à \mathcal{U} , et $\mathcal{L}^{\mathcal{G}}$ est stable pour ces limites. Les foncteurs d'oubli de $\mathcal{L}^{\mathcal{G}}$ et de $\mathcal{L}^{\mathcal{G}}$ vers \mathcal{F}° sont compatibles avec ces limites.

Nous désignerons par p le foncteur d'oubli de $\mathcal{L}^{\mathcal{G}}$ vers la catégorie \mathfrak{M}° des applications, qui associe à $\mathbf{F} = (\mathbf{S}', f, \mathbf{S})$ l'application \underline{f} définissant le foncteur f . Si \underline{f} est une injection, le foncteur prémonoïdal fermé F sous-jacent à \mathbf{F} est un $P_{\mathcal{L}}$ -monomorphisme (Proposition 1-1) et, vu [10], le morphisme entre $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ -types sous-jacent à \mathbf{F} est un q -monomorphisme. Par suite, les p -monomorphismes sont les éléments \mathbf{F} de $\mathcal{L}^{\mathcal{G}}$ tels que $p(\mathbf{F})$ soit une injection. En particulier, si \underline{f} est l'injection canonique d'une sous-catégorie, on dira que \mathbf{S} est une sous-catégorie prémonoïdale fermée avec $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ -limites de \mathbf{S}' , ou, en abrégé, une sous-structure de \mathbf{S}' .

Nous noterons $\hat{\mathcal{L}}^{\mathcal{G}}$, $\hat{\mathcal{L}}^{\mathcal{G}}$ et \hat{p} les catégories et le foncteur associés de même à l'univers «plus grand» $\hat{\mathcal{U}}$.

PROPOSITION 2. Soit \mathbf{S} un objet de $\hat{\mathcal{L}}^{\mathcal{G}}$ et E une partie de $\hat{p}(\mathbf{S})$. Il existe une sous-structure, \mathbf{S}' , de \mathbf{S} engendrée par E ; si E est équipotent à un élément de \mathcal{U} , il en est de même pour $\hat{p}(\mathbf{S}')$.

PREUVE. On va construire \mathbf{S}' par une méthode analogue à celle utilisée dans [10] pour construire le sous-type engendré.

Nous désignons toujours par $\hat{\mathcal{U}}$ l'ensemble des éléments de $\hat{\mathcal{U}}$ équipotents à un élément de \mathcal{U} . Le plus petit ordinal régulier strictement supérieur à tous les ordinaux \bar{l} , où $l \in \mathcal{I} \cup \mathcal{J}$ sera noté λ (on représente par \bar{l} le plus petit ordinal équipotent à l'ensemble l). Comme $\mathcal{I} \cup \mathcal{J}$ est équipotent à un élément de \mathcal{U} , cet ordinal λ est strictement inférieur à l'ordinal inaccessible associé à l'univers \mathcal{U} . C'est-à-dire $\lambda \in \mathcal{U}$.

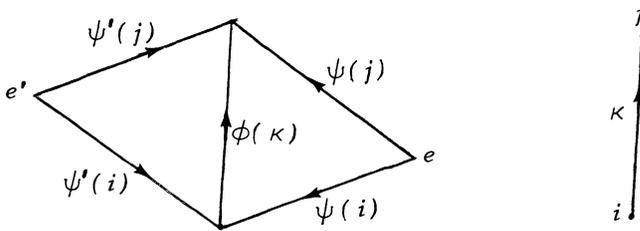
Si $\psi = (\phi, t, e^{\wedge})$ est un cône (i.e. une transformation naturelle d'un foncteur de I' vers H' , constant sur e , vers ϕ), on posera:

$$\beta\psi = \phi, \quad \alpha\psi = e^{\wedge}, \quad \psi(i) = t(i) \text{ pour tout } i \in I'_0.$$

Si ψ est un cône-limite et ψ' un cône de même base ϕ , l'unique b tel que

$$\psi'(i) = \psi(i) \cdot b \quad \text{pour tout } i \in I_0$$

est noté $\overleftarrow{\lim}_{\psi} \psi'$. On adopte des notations duales pour les cônes inductifs.



Enfin, $\mathbf{H} = (H', D, d, l, b, s)$, $\mathbf{S} = (\mathbf{H}, \mu, \nu)$.

1° Ces notations étant précisées, nous allons construire par récurrence transfinie une suite transfinie croissante $(C_\xi)_{\xi \leq \lambda}$ de sous-catégories de H' telle que tous les C_ξ appartiennent à $\tilde{\mathcal{U}}$, lorsque $E \in \tilde{\mathcal{U}}$.

a) C_0 sera l'ensemble définissant la sous-catégorie prémonoïdale fermée de \mathbf{H} engendrée par E ; d'après la proposition 2-1, $E \in \tilde{\mathcal{U}}$ entraîne: $C_0 \in \tilde{\mathcal{U}}$.

b) Si ζ est un ordinal limite tel que $\zeta \leq \lambda$ et si C_ξ est défini pour tout $\xi < \zeta$, on pose: $C_\zeta = \bigcup_{\xi < \zeta} C_\xi$. On a $C_\zeta \in \tilde{\mathcal{U}}$, car $\zeta \in \tilde{\mathcal{U}}$.

c) Soit ζ un ordinal ayant un prédécesseur $\xi < \lambda$, et supposons C_ξ défini. Notons Σ_ξ (resp. Σ'_ξ) l'ensemble des foncteurs ϕ de $I' \in \mathcal{J}$ (resp. $I' \in \mathcal{J}$) vers H' , prenant leurs valeurs dans C_ξ . Si $\phi \in \Sigma_\xi$ a pour source I' , on posera:

$$\Delta_\xi(\phi) = \{ \mu(\phi)(i) \mid i \in I'_0 \} \cup \{ \overleftarrow{\lim}_{\mu(\phi)} \psi \mid \beta\psi = \phi, \psi(I'_0) \subset C_\xi \}.$$

Si $\phi \in \Sigma'_\xi$ a pour source I' , posons:

$$\Delta'_\xi(\phi) = \{ \nu(\phi)(i) \mid i \in I'_0 \} \cup \{ \overrightarrow{\lim}_{\nu(\phi)} \psi \mid \alpha\psi = \phi, \psi(I'_0) \subset C_\xi \}.$$

Soit

$$E_\xi = \left(\bigcup_{\phi \in \Sigma_\xi} \Delta_\xi(\phi) \right) \cup \left(\bigcup_{\phi \in \Sigma'_\xi} \Delta'_\xi(\phi) \right),$$

et C_ζ définit la sous-catégorie prémonoïdale fermée de \mathbf{H} engendrée par E_ξ . Montrons que E_ξ appartient à $\tilde{\mathcal{U}}$ si C_ξ y appartient, de sorte que

C_ζ y appartiendra aussi (proposition 2-1).

En effet, si $\phi \in \Sigma_\xi$ a pour source I' , on construit une surjection d'une partie Γ_ϕ de $I \cup C_{\xi'}^I$ sur $\Delta_\xi(\phi)$ en associant

$$\mu(\phi)(i) \text{ à } i \in I' \text{ et } \lim_{\leftarrow \mu(\phi)} \psi \text{ à } (\psi(i))_{i \in I'}$$

lorsque ψ est un cône de base ϕ à valeurs dans C_ξ . Puisque I et C_ξ appartiennent à $\tilde{\mathcal{U}}$, l'ensemble Γ_ϕ y appartient aussi, et $\Delta_\xi(\phi) \in \tilde{\mathcal{U}}$. - Par ailleurs, l'application associant ϕ à $(\phi(\kappa))_{\kappa \in I} \in C_\xi^I$ est une surjection d'une partie de la réunion des C_ξ^I , où $I \in \mathcal{I}$, sur Σ_ξ ; comme C_ξ^I et I appartiennent à $\tilde{\mathcal{U}}$, il s'ensuit $\Sigma_\xi \in \tilde{\mathcal{U}}$. On montrerait de même que $\Delta'_\xi(\phi)$, pour tout $\phi \in \Sigma'_\xi$, et Σ'_ξ appartiennent à $\tilde{\mathcal{U}}$. Donc $E_\xi \in \tilde{\mathcal{U}}$.

3° Nous avons ainsi défini par récurrence transfinie une sous-catégorie C'_λ de H' ; nous la noterons C' . Montrons que C' définit une sous-structure de \mathbf{S} .

a) s appartient à C_0 , et a fortiori à C . Comme C_ξ définit une sous-catégorie prémonoïdale fermée de \mathbf{H} pour tout ordinal $\xi < \lambda$ ayant un prédécesseur, un raisonnement analogue à celui utilisé pour prouver la proposition 2-1 montre que C définit une sous-catégorie prémonoïdale fermée $\mathbf{H}' = (C', D', d', l', b', s)$ de \mathbf{H} .

b) Montrons que C est « saturé pour μ ». En effet, soit $\tilde{\phi}$ un foncteur de $I' \in \mathcal{I}$ vers C' , et soit ϕ son composé avec l'injection de C' vers H' . La limite projective naturalisée $\mu(\phi)$ est définie. Pour tout $\kappa \in I'$, il existe un ordinal $\xi_\kappa < \lambda$ tel que $\phi(\kappa) \in C_{\xi_\kappa}$; on a

$$\xi < \lambda, \text{ où } \xi = \sup_{\kappa \in I'} \xi_\kappa,$$

car λ est un ordinal régulier strictement plus grand que \bar{I} et que les ξ_κ . Ainsi ϕ prend ses valeurs dans C_ξ . On en déduit:

$$\phi \in \Sigma_\xi, \text{ et par suite } \Delta_\xi(\phi) \subset C_{\xi+1} \subset C.$$

En particulier, $\mu(\phi)$ prend ses valeurs dans C , de sorte qu'il existe un cône $\mu'(\tilde{\phi})$ restriction de $\mu(\phi)$ à C .

Soit $\tilde{\psi}$ un cône de base $\tilde{\phi}$ prenant ses valeurs dans C ; il admet

pour restriction un cône ψ de but ϕ . Pour toute unité i de I' il existe un ordinal ξ'_i tel que:

$$\xi < \xi'_i < \lambda \text{ et } \psi(i) \in C_{\xi'_i}.$$

Si $\xi' = \sup_{i \in I'_0} \xi'_i$, on trouve:

$$\xi' < \lambda \text{ et } \psi(I'_0) \subset C_{\xi'},$$

d'où

$$b = \lim_{\leftarrow \mu(\phi)} \psi \in \Delta_{\xi'}(\phi) \subset C_{\xi'+1} \subset C.$$

Il s'ensuit que b est aussi l'unique élément de C tel que

$$\tilde{\psi}(i) = \mu(\phi)(i) \cdot b \text{ pour tout } i \in I'_0,$$

i.e. $b = \lim_{\leftarrow \mu'(\tilde{\phi})} \tilde{\psi}$. Ceci prouve que $\mu'(\tilde{\phi})$ est un cône-limite.

c) On voit d'une manière analogue que, si $\tilde{\phi}$ est un foncteur de $I' \in \mathcal{J}$ vers C' , il admet pour limite inductive naturalisée le cône $\nu'(\tilde{\phi})$ restriction à C' du cône-limite $\nu(\phi)$, où ϕ est le composé de $\tilde{\phi}$ avec l'injection canonique de C' vers H' .

d) On définit ainsi sur C' une application \mathcal{J} -limite projective naturalisée μ' et une application \mathcal{J} -limite inductive naturalisée ν' , telles que (H', μ', ν') soit une sous-structure S' de S .

Il résulte aisément de la construction de S' que S' est la sous-structure de S engendrée par E , ce qui achève la preuve. ∇

COROLLAIRE. Le foncteur \hat{p} de $\hat{\mathcal{L}}^{\mathcal{J}}$ vers $\hat{\mathcal{M}}^0$ est sous-engendrant pour \mathcal{M} .

THEOREME 1. Le foncteur d'oubli de $\mathcal{L}^{\mathcal{J}}$ vers \mathcal{L}^0 admet un adjoint, de même que le foncteur injection de $\mathcal{L}^{\mathcal{J}}$ vers $\mathcal{L}^{\mathcal{J}}$. La catégorie $\mathcal{L}^{\mathcal{J}}$ est à C' -limites inductives, pour toute catégorie C' telle que C appartienne à \mathcal{U} . Enfin le foncteur p est à structures quasi-quotients [2].

Comme dans les théorèmes 1 et 2 du chapitre 1, les propositions 1 et 2 montrent que les catégories et foncteurs indiqués vérifient les hypothèses du théorème général d'existence de structures libres, et des théorèmes d'existence de limites inductives et de structures quasi-quotients de [9]; il reste seulement à prouver que $\mathcal{L}^{\mathcal{J}}$ appartient à $\hat{\mathcal{U}}$, ce qui résulte du fait que \mathcal{L} y appartient (théorème 1-1) ainsi que $\mathcal{F}^{\mathcal{J}}$ (d'après [9]).

A l'aide du théorème de transitivité de structures libres, on obtient:

COROLLAIRE. Les foncteurs d'oubli de $\mathcal{L}\mathcal{G}$ vers \mathcal{F}^0 , vers $\mathcal{F}\mathcal{G}$ et vers $\mathcal{S}\mathcal{G}$ admettent des adjoints.

Si $\mathbf{S} = (\mathbf{H}, \mu, \nu)$ est une catégorie prémonoïdale fermée avec $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ -cônes, une structure libre engendrée par \mathbf{S} relativement au foncteur insertion de $\mathcal{L}\mathcal{G}$ vers $\mathcal{L}'\mathcal{G}$ est appelée *catégorie prémonoïdale fermée $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ -complétion de \mathbf{S}* (resp. de \mathbf{H} si μ et ν sont vides, i. e. si aucun cône n'est choisi sur \mathbf{H} , auquel cas c'est aussi une structure libre relativement au foncteur d'oubli de $\mathcal{L}\mathcal{G}$ vers \mathcal{L}^0 , engendrée par \mathbf{H}).

3. Complétion des catégories monoïdales fermées.

Nous allons étendre les résultats des paragraphes précédents au cas où les catégories prémonoïdales fermées considérées sont munies de structures plus précises.

Une *catégorie monoïdale fermée* (non normalisée) peut être identifiée (voir [11]) à un élément $\mathbf{H} = (H', D, d, l, b, s, a, r)$, où:

1° (H', D, d, l, b, s) est une catégorie prémonoïdale fermée, de foncteur produit tensoriel X .

2° a est une application de $H'_0 \times H'_0 \times H'_0$ dans H définissant une équivalence, dite *isomorphisme d'associativité*, du foncteur $X(X(-, -), -)$:

$$(f'', f', f) \rightarrow X(X(f'', f'), f) \text{ de } H'^3 \text{ vers } H',$$

vers le foncteur $X(-, X(-, -))$ associant $X(f'', X(f', f))$ à (f'', f', f) .

3° r est une application de H'_0 dans H définissant une équivalence du foncteur X_s vers le foncteur identique de H' , dite *isomorphisme d'unitarité à droite*.

4° où, enfin, les axiomes usuels de cohérence entre l , r et a sont vérifiés.

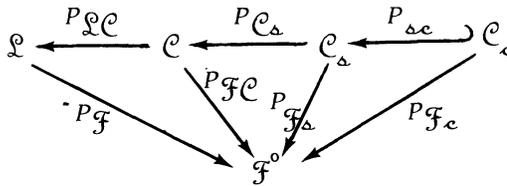
Une *catégorie monoïdale fermée symétrique* [11] est représentée par un couple (\mathbf{H}, c) , où \mathbf{H} est une catégorie monoïdale fermée et c une application de H'_0 dans H définissant une équivalence, dite *isomorphisme de commutativité*, du foncteur X sur le foncteur $X \circ \sigma$, en notant σ le foncteur « symétrie »: $(f, f') \rightarrow (f', f)$ de $H' \times H'$ sur lui-même.

Enfin, une *catégorie cartésienne fermée* est [11] une catégorie monoïdale fermée symétrique dont le foncteur produit tensoriel X est un foncteur produit.

Nous désignerons par:

- \mathcal{C} la catégorie des foncteurs monoïdaux fermés stricts entre catégories monoïdales fermées dont l'ensemble sous-jacent appartient à l'univers \mathcal{U} ,
- \mathcal{C}_Δ la catégorie des foncteurs monoïdaux fermés symétriques stricts entre les catégories monoïdales fermées symétriques dont l'ensemble sous-jacent appartient à \mathcal{U} ,
- \mathcal{C}_c la sous-catégorie pleine de \mathcal{C}_Δ dont les objets sont les catégories cartésiennes fermées,
- $P_{\mathcal{C}}$, P_c et P_Δ les foncteurs d'oubli de \mathcal{C} , \mathcal{C}_c et \mathcal{C}_Δ vers la catégorie \mathfrak{M}^0 des applications.

De plus, on utilisera les foncteurs d'oubli canoniques dessinés dans le diagramme (1) suivant:



Soit encore $\hat{\mathcal{U}}$ un univers contenant \mathcal{U} et auquel \mathcal{U} appartient; les catégories et foncteurs définis de même à partir de $\hat{\mathcal{U}}$ sont notés par des symboles identiques, mais surmontés d'un $\hat{}$.

PROPOSITION 1. Les foncteurs $\hat{P}_{\mathcal{C}}$, \hat{P}_Δ et \hat{P}_c sont sous-engendrants pour \mathfrak{M} .

PREUVE. 1° Soit \mathbf{H} une catégorie monoïdale fermée (resp. fermée symétrique) et E une partie de l'ensemble sous-jacent H . On construit par récurrence une suite $(C'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de sous-catégories de H' dont la réunion C définit la sous-catégorie monoïdale fermée (resp. fermée symétrique) \mathbf{H}' de \mathbf{H} engendrée par E . La méthode est analogue à celle utilisée pour prouver

la proposition 2-1, la seule différence étant que, pour passer de C_n à C_{n+1} il faut de plus « saturer » C_n relativement aux isomorphismes d'associativité et d'unitarité à droite (resp. et de commutativité) donnés sur \mathbf{H} ; les axiomes de cohérence seront alors bien vérifiés par \mathbf{H}' , car ils le sont par \mathbf{H} . Si E est équipotent à un élément de \mathcal{U} , on voit comme dans la proposition 2-1 que C l'est aussi.

2° Soit \mathbf{H} une catégorie cartésienne fermée, H' la catégorie sous-jacente, X le foncteur produit et s l'élément final de \mathbf{H} . Une sous-catégorie C' de H' définit une sous-catégorie cartésienne fermée de \mathbf{H} ssi elle définit une sous-catégorie monoïdale fermée symétrique de \mathbf{H} et si, pour toute unité e de C' , la diagonale $\delta(e) : e \rightarrow X(e, e)$ et l'unique morphisme $u(e)$ de e vers s appartiennent à C (car, d'après [15], une catégorie monoïdale symétriquement diagonalisée est cartésienne). On en déduit une construction par récurrence de la sous-catégorie cartésienne fermée \mathbf{H}' de \mathbf{H} engendrée par une partie E de H : elle est définie par la réunion d'une suite de sous-catégories C'_n de H' obtenue par le même procédé que ci-dessus, mais en saturant de plus C'_n relativement aux applications δ et u de H'_0 dans H . ∇

THEOREME 1. 1° Les foncteurs d'oubli dessinés dans le diagramme (1) admettent des adjoints.

2° Les catégories \mathcal{C} , \mathcal{C}_Δ et \mathcal{C}_c sont à J' -limites projectives et inductives, pour toute catégorie J' telle que $J \in \mathcal{U}$.

3° Les foncteurs $P_{\mathcal{C}}$, P_Δ et P_c sont à structures quasi-quotients.

PREUVE. Comme dans le paragraphe 1, on montre d'abord que les foncteurs du diagramme (1) sont à noyaux et à I -produits, si I appartient à \mathcal{U} ; ensuite on utilise le théorème général d'existence de structures libres. ∇

Si C' est une catégorie, une structure libre engendrée par C' relativement au foncteur $P_{\mathcal{C}}$ (resp. $P_{\mathcal{C}_\Delta}$, $P_{\mathcal{C}_c}$) est appelée *catégorie prémonoïdale fermée* (resp. *monoïdale fermée*, *monoïdale fermée symétrique*, *cartésienne fermée*) librement associée à C' .

PROPOSITION 2. Une catégorie C' s'identifie à une sous-catégorie de la catégorie prémonoïdale fermée (resp. monoïdale fermée, resp. monoïdale

fermée symétrique. resp. cartésienne fermée) librement associée à C' .

PREUVE. On suppose que C appartient à l'univers \mathcal{U} .

1° Il existe une catégorie cartésienne fermée \mathbf{H} , objet de \mathcal{C}_c , et un foncteur injectif F de C' vers $H' = P\mathcal{F}_c(\mathbf{H})$. En effet, soit \hat{C} la catégorie des transformations naturelles entre foncteurs de la duale de C' vers la catégorie \mathcal{M}^0 des applications, et soit Y le plongement de Yoneda de C' vers \hat{C} . On sait (voir par exemple [12]) que \hat{C} est canoniquement munie d'une structure de catégorie cartésienne fermée $\hat{\mathbf{C}}$. D'après la proposition 1, l'ensemble C' sous-jacent à la sous-catégorie cartésienne fermée \mathbf{C}' de $\hat{\mathbf{C}}$ engendrée par $Y(C)$ est équipotent à un élément H de \mathcal{U} . Si g est une bijection de C' sur H , la catégorie cartésienne fermée \mathbf{H} , image de \mathbf{C}' par g , est un objet de \mathcal{C}_c et g définit un isomorphisme G de \mathbf{C}' sur \mathbf{H} . Comme Y est injectif, on peut prendre pour F le foncteur injectif $G \circ Y'$, où Y' est le foncteur de C' vers C'' restriction de Y .

2° Désignons par \mathcal{Z} l'une des catégories \mathcal{L}^0 , \mathcal{C} , \mathcal{C}_Δ ou \mathcal{C}_c , par \mathcal{z} son foncteur d'oubli vers \mathcal{F}^0 et par \mathcal{z}' le foncteur d'oubli de \mathcal{C}_c vers \mathcal{Z} . Soit (\mathbf{K}, j) un \mathcal{z} -projecteur de source C' . Si \mathbf{H}' est l'image par \mathcal{z}' de la catégorie cartésienne fermée \mathbf{H} construite dans 1°, la définition d'un projecteur assure l'existence d'un unique morphisme \mathbf{F}' de \mathcal{Z} , de source \mathbf{K} et de but \mathbf{H}' tel que $\mathcal{z}(\mathbf{F}') \cdot j = F$. Puisque F est injectif, cette égalité entraîne que j est injectif, ce qui achève la preuve. ∇

REMARQUE. La catégorie cartésienne fermée librement associée à une catégorie a été explicitement construite par Lambek [14].

Nous allons maintenant préciser les résultats du paragraphe 2 dont nous reprenons les hypothèses et les notations. Nous désignons en particulier par q et q' les foncteurs d'oubli vers \mathcal{F}^0 de la catégorie $\mathcal{F}^{\mathcal{A}\mathcal{B}}$ des morphismes entre $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -types et de la catégorie $\mathcal{S}^{\mathcal{A}\mathcal{B}}$ des morphismes entre $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -préesquisses.

La lettre \mathcal{Z} représentera l'une des catégories \mathcal{C} , \mathcal{C}_Δ ou \mathcal{C}_c , et $P\mathcal{F}_\mathcal{Z}$ le foncteur d'oubli de \mathcal{Z} vers \mathcal{F}^0 . On notera $\mathcal{Z}^{\mathcal{A}\mathcal{B}}$ la catégorie produit fibrée de $(P\mathcal{F}_\mathcal{Z}, q)$ et $\mathcal{Z}^{\mathcal{A}\mathcal{B}}$ la catégorie produit fibrée de $(P\mathcal{F}_\mathcal{Z}, q')$.

Les objets de $\mathcal{Z}^{\mathcal{A}\mathcal{G}}$ sont appelés:

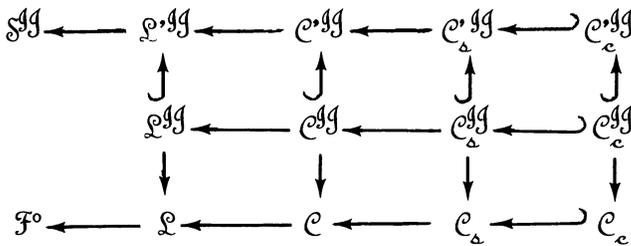
- catégories monoïdales fermées avec $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ -limites, si $\mathcal{Z} = \mathcal{C}$,
- catégories monoïdales fermées symétriques avec $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ -limites, si $\mathcal{Z} = \mathcal{C}_\Delta$,
- catégories cartésiennes fermées avec $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ -limites, si $\mathcal{Z} = \mathcal{C}_c$.

Les objets de $\mathcal{Z}^{\mathcal{A}\mathcal{G}}$ seront nommés de même, en remplaçant limites par cônes. Soit $\hat{\mathcal{Z}}^{\mathcal{A}\mathcal{G}}$ et $\hat{\mathcal{Z}}^{\mathcal{A}\mathcal{G}}$ les catégories analogues associées à $\hat{\mathcal{U}}$.

Par un procédé semblable à celui utilisé plus haut, on déduit du paragraphe 2 le théorème suivant:

THEOREME 2. 1° Le foncteur d'oubli $\hat{\rho}_{\mathcal{Z}}$ de $\hat{\mathcal{Z}}^{\mathcal{A}\mathcal{G}}$ vers $\hat{\mathcal{M}}$ est sous-engendrant pour \mathcal{M} .

2° Tous les foncteurs d'oubli dessinés dans le diagramme ci-dessous admettent des adjoints.



3° La catégorie $\mathcal{Z}^{\mathcal{A}\mathcal{G}}$ est à J -limites projectives et inductives pour toute catégorie J telle que J appartienne à \mathcal{U} , et son foncteur d'oubli vers \mathcal{M}^0 est à structures quasi-quotients.

PROPOSITION 3. Soit $S = (C', \mu, \nu)$ une $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ -pré-squisse telle que C appartienne à \mathcal{U} , que ν soit vide et que tous les cônes $\mu(\phi)$ soient des cônes-limites. Si (\hat{S}, j) est un projecteur de source S , relativement au foncteur d'oubli de $\mathcal{Z}^{\mathcal{A}\mathcal{G}}$ vers $\mathcal{A}\mathcal{G}$, alors j est injectif.

PREUVE. Soit \hat{C} une catégorie cartésienne fermée dont la catégorie sous-jacente est la catégorie \hat{C} des transformations naturelles de la duale de C' vers \mathcal{M}^0 et soit Y le plongement de Yoneda de C' vers \hat{C} . La catégorie \hat{C} étant à \mathcal{F}_0 -limites projectives et inductives et Y étant un foncteur injectif, compatible avec les limites projectives, on peut choisir [10]

sur \hat{C} un $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ -type $\hat{S} = (\hat{C}, \hat{\mu}, \hat{\nu})$ de sorte que Y définisse un morphisme de S vers \hat{S} . Comme $\hat{S} = (\hat{C}, \hat{\mu}, \hat{\nu})$ est une catégorie cartésienne fermée avec $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ -limites, le théorème 1 entraîne que $Y(C)$ engendre une sous-structure de \hat{S} isomorphe à un objet S' de $\mathcal{C}_{\mathcal{I}, \mathcal{J}}$. De Y on déduit un morphisme injectif F de S vers le $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ -type sous-jacent à S' . La preuve se termine comme celle de la proposition 2. ∇

COROLLAIRE. *Le foncteur d'oubli de $\mathcal{Z}_{\mathcal{I}, \mathcal{J}}$ vers \mathcal{F}^0 admet un adjoint; une catégorie s'identifie à une sous-catégorie de la structure libre qu'elle engendre relativement à ce foncteur.*

Intuitivement, la proposition 3 signifie que sans sortir de l'univers on peut plonger « universellement » et injectivement une catégorie C' dans une catégorie prémonoïdale fermée (resp. monoïdale fermée, resp. monoïdale fermée symétrique, resp. cartésienne fermée) avec $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ -limites, de sorte que le plongement conserve certaines \mathcal{I} -limites projectives données.

Si S est un objet de $\mathcal{C}_{\mathcal{I}, \mathcal{J}}$, une structure libre engendrée par S relativement au foncteur injection de $\mathcal{C}_{\mathcal{I}, \mathcal{J}}$ vers $\mathcal{C}_{\mathcal{I}, \mathcal{J}}$ sera appelé *catégorie monoïdale fermée symétrique $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ -complétion de S* .

PROPOSITION 4. *Soit $S = (C, \mu, \nu)$ une catégorie monoïdale fermée symétrique telle que tous les cônes $\mu(\phi)$ et $\nu(\phi')$ soient des cônes-limites. Alors S s'identifie à une sous-catégorie monoïdale fermée symétrique de sa $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ -complétion.*

PREUVE. S'il existe une catégorie monoïdale fermée symétrique avec $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ -limites $\bar{S} = (\bar{C}, \bar{\mu}, \bar{\nu})$ et un foncteur monoïdal fermé symétrique y de C vers \bar{C} , compatible avec les limites projectives et inductives et injectif, on fait un raisonnement analogue à celui de la proposition 3 (en y remplaçant Y par y). Or Day a montré dans [7] qu'on obtient un tel y de la manière suivante: On construit, par la « méthode d'itération » d'Appelgate-Tierney [1] une complétion de Lambek \bar{C} de C' (a fortiori \bar{C} est à \mathcal{I} -limites projectives et à \mathcal{J} -limites inductives) et un foncteur injectif y de C' vers \bar{C} compatible avec les limites projectives et inductives. La structure de C permet de munir \bar{C} d'une structure de catégorie monoïdale fermée symé-

trique, de sorte que γ définisse un foncteur monoïdal fermé symétrique γ de \mathbf{C} vers $\bar{\mathbf{C}}$. ∇

Intuitivement, la proposition 4 signifie qu'une catégorie monoïdale fermée symétrique \mathbf{C} peut être universellement et injectivement plongée dans une catégorie monoïdale fermée symétrique avec $(\mathcal{J}, \mathcal{J})$ -limites, de sorte que le plongement préserve à la fois la structure monoïdale fermée symétrique de \mathbf{C} et certaines \mathcal{J} -limites projectives et \mathcal{J} -limites inductives données sur \mathbf{C} .

COMPLEMENTS.

1° En s'inspirant de la construction explicite du type d'une pré-esquisse faite dans [2] on peut donner des constructions explicites (par récurrence transfinie) des diverses structures libres dont l'existence a été prouvée dans ce paragraphe.

2° Des résultats analogues à ceux de ce paragraphe sont obtenus si l'on remplace les catégories monoïdales fermées par des catégories monoïdales bifermées au sens de [14], ce qui redonne en particulier le théorème d'existence d'une catégorie monoïdale bifermée librement associée à une catégorie (indiqué par Lambek dans [14]).

3° Variot a montré dans sa thèse [15] qu'il existe une esquisse projective dont les réalisations dans la catégorie des applications sont les catégories monoïdales fermées symétriques, et l'on sait qu'il existe aussi une esquisse projective dont les réalisations sont les $(\mathcal{J}, \mathcal{J})$ -types (Burroni [3]). Partant de ces deux résultats, on peut construire des esquisses projectives telles que les catégories

$$\mathcal{Z}, \mathcal{Z}^{\mathcal{J}\mathcal{J}}, \mathcal{Z}^{\mathcal{J}\mathcal{J}}, \text{ pour } \mathcal{Z} = \mathcal{L}, \mathcal{C}, \mathcal{C}_c \text{ ou } \mathcal{C}_\Delta,$$

soient les catégories des morphismes entre réalisations de ces esquisses dans \mathfrak{M} . Les théorèmes de cet article pourraient alors se déduire des théorèmes généraux (voir [10] et [13]) sur les catégories de structures projectivement esquissées et sur leurs foncteurs « d'omission ».

Bibliographie.

1. APPELGATE - TIERNEY, Iterated cotriples, *Lecture/Notes in Math.* 137, Springer (1970).
2. BASTIANI-EHRESMANN, Categories of sketched structures, *Cahiers Topo. et Géo. diff.* XIII-2, Paris (1972).
3. A. BURRONI, Esquisses des catégories à limites et des quasi-topologies, *Esquisses Mathématiques* 5, Paris (1970).
4. M. CHARTRELLE, Quasi-topologies. Enrichissement de catégories. *Thèse 3^{ème} cycle*, Paris (1971).
5. M. CHARTRELLE, *C. R. A. S.* Paris, 274 (1972), p. 710.
6. B. DAY, On closed categories of functors, *Lecture Notes* 137 (1970).
7. B. DAY, Note on monoidal localisation, *Bull. Austral. Math. Soc.* 8 (1973).
8. C. EHRESMANN, *Algèbre, 1^{ère} Partie*, C. D. U., Paris, 1968.
9. C. EHRESMANN, Construction de structures libres, *Lecture Notes* 92 (1969).
10. C. EHRESMANN, Esquisses et types des structures algébriques, *Bule. Inst. Politec. Iași XIV* (1968).
11. EILENBERG - KELLY, Closed categories, *Proc. Conf. on Categorical Algebra*, La Jolla 1965, Springer (1966).
12. GABRIEL - ZISMAN, *Calculus of fractions and Homotopy Theory*, Springer, 1967.
13. C. LAIR, Foncteurs d'omission de structures algébriques, *Cahiers Topo. et Géo. diff.* XII-2, Paris (1971).
14. J. LAMBEK, Deductive systems and categories II, *Lecture Notes* 86 (1969).
15. P. VARIOT, 2-catégories représentables et catégories fermées, *Esquisses Mathématiques* 19, Paris, 1973 (extrait d'une Thèse de 3^{ème} cycle, Paris 1972).

Département de Mathématiques
 Faculté des Sciences
 33 rue Saint-Leu
 80039 AMIENS