CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

MICHEL SIMONNET

Calcul différentiel dans les espaces non normables

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 13, nº 4 (1972), p. 411-437

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1972__13_4_411_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE *Vol. XIII-4*
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

CALCUL DIFFERENTIEL DANS LES ESPACES NON NORMABLES

par Michel SIMONNET

INTRODUCTION

Cet article propose une notion d'application n-continûment-différentiable (ou C^n) qui généralise la notion traditionnelle et permet de retrouver, entre autres, les principaux résultats de [1] et de [2](textes que le lecteur est déjà sensé connaître).

Les éléments nécessaires à la compréhension de la suite sont exposés dans les chapitres 1,2,3, et on peut aborder alors les chapitres plus importants.

Le chapitre 4 contient le théorème de corrélation. On montre aussi que, si F est un espace affine localement-convexe séparé, si E est un espace affine quasi-topologique et si X est un ouvert de E, alors l'espace $C^n(F,X)$ des applications C^n de X dans F (défini au chapitre 3) est complet pourvu que F le soit aussi. On en déduit comme principale conséquence le théorème 3.

Tous les résultats mentionnés ci-dessus pourraient se révéler utiles même dans la théorie traditionnelle de la différentiabilité entre espaces normés. Le critère pour qu'un filtre sur $C^n(F,X)$ converge dans $C^n(F,X)$ (théorème 3) est de plus grande portée notamment que les critères habituels. Il ne fait intervenir que des conditions de convergence locale.

Dans le chapitre 5 on prouve que, si G, F, E sont des espaces affines admissibles, si F est équable, et si X est un ouvert de E, alors l'application « composition » de $C^{k+p}(G,F) \times C^k(F,X)$ dans $C^k(G,X)$ est C^p. Il en résulte qu'on peut plonger la catégorie des applications C^∞ entre espaces normés dans une catégorie cartésienne fermée.

Le chapitre 6 a pour objet de démontrer que le théorème de Frobenius demeure entièrement exact si (dans l'énoncé du théorème tel qu'il figure dans «Fondements de l'Analyse moderne» de J. Dieudonné) on remplace l'hypothèse: « E et F sont des espaces de Banach» par « E est un espace localement-convexe séparé et F est un espace de Banach».

Dans le chapitre 7 on étudie les espaces pseudo-topologiques (dits de Choquet). On démontre que tous les espaces construits dans le corps du texte sont de Choquet pourvu que les espaces E, F.. qu'on utilise initialement soient de Choquet.

On aborde au chapitre 8 les démonstrations du théorème des fonctions implicites et du théorème de Frobenius. Les problèmes soulevés sont plus généraux que ceux étudiés au chapitre 6.

L'auteur est très obligé envers Madame Andrée Bastiani sans laquelle il n'aurait pas été initié à la recherche mathématique.

SOMMAIRE

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. BASTIANI, Applications différentiables et variétés différentiables de dimension infinie, *Jour. d'Analyse math.*, Jérusalem, 13 (1964), p. 1-114.

[2] A. FROLICHER-W. BUCHER, Calculus in vector spaces without norm, *Lecture Notes in Math.* 30, 1966.

[3] C. H. COOK-H. R. FISCHER, On equicontinuity and continuous convergence, *Math. Ann.* 159 (1965), p. 94-104.

[4] M. SIMONNET, *Exposé de Géométrie différentielle,* Théorie et Applications des Catégories, Paris, 1971.

[5] P. VER EECKE, Connexions d'ordre infini, *Cahiers Topo. et Géo. diff.* 11-3 (1970), p. 1-39.

[6] A. BASTIANI, *Espaces fonctionnels*, Cours multigraphié, Amiens, 1969.

[7] J. A. LESLIE, Some Frobenius theorems in Global Analysis, *Jour. of diff. Geo.* 2 (1968), p. 279-297.

[8] N. BOURBAKI, *Equations différentielles,* Paris, Hermann, 1961.

[9] J. DIEUDONNE, *Fondements de l'Analyse moderne,* livre I, Paris, Gauthier-Villars, 1969.

[10] J. P. PENON, Sur le théorème de Frobenius, *Bull. Soc. Math. France* 98(1970) p. 48-59.

[11] G. CHOQUET, Convergences, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble 23 (1947), p. 57.

[12] A. MACHADO, *Espaces d'Antoine et pseudo-topologies* (à paraître).

GENERALITES

Nous empruntons la terminologie à [1] et [2]. Rappelons en particulier les définitions d'espace vectoriel quasi-topologique, d'espace vectoriel quasi-localement-convexe et d'espace vectoriel admissible.

DEFINITION. Soit (E, π) un espace quasi-topologique (ou «Limesraum» de Kowalsky, voir [2] page 6). On écrira $\mathfrak{A} \downarrow x$ (ou $\mathfrak{A} \pi x$) pour dire que $\mathfrak{A}$ converge vers x dans (E, π), donc appartient à $\pi(x)$. On écrira aussi E au lieu de (E, π).

Soient (E, π) un espace quasi-topologique et U un sous-ensemble de E. Supposons que U appartienne à tout filtre $\mathfrak{A}$ qui converge vers un point de U; nous dirons alors que U est un ouvert de (E, π). Nous désignerons par $\hat{\tau}(\pi)$ l'ensemble des ouverts de (E, π), qui est une topologie dite associée à la pseudo-topologie déduite de π.

DEFINITION. Soit (E, π_E) un espace vectoriel quasi-topologique (voir [1] page 77 et [2] page 12). Nous désignerons par $\tau(\pi_E)$ la topologie localement-convexe telle qu'un système fondamental de voisinages de 0 pour $\tau(\pi_E)$ soit formé des ensembles convexes symétriques absorbants qui appartiennent à tout filtre convergeant vers 0 dans (E, π_E). On dira que (E, π_E) est un *espace vectoriel quasi-localement-convexe* si et seulement si $\tau(\pi_E)$ est séparée. On désignera souvent par E^o l'espace localement-convexe $(E, \tau(\pi_E))$.

DEFINITION. Soit (E, π_E) un espace vectoriel quasi-topologique. Si A est une partie de E, on désignera par A^o son enveloppe convexe et par $\overline{A}$ son adhérence dans E^o. Si $\mathfrak{A}$ est un filtre sur E, on désignera par $\mathfrak{A}^o$ et $\overline{\mathfrak{A}}$ les filtres sur E engendrés par les ensembles A^o et $\overline{A}$, où A appartient à $\mathfrak{A}$. On dira que (E, π_E) est un *espace vectoriel admissible* si et seulement si (E, π_E) est un espace quasi-localement-convexe et si $\mathfrak{A} \downarrow E$ (ce qui signifie $\mathfrak{A}$ converge vers 0 dans E) entraîne $\mathfrak{A}^o \downarrow E$ et $\overline{\mathfrak{A}} \downarrow E$.

DEFINITION. On appelle *espace affine quasi-localement-convexe* (en abrégé *eqlc*), respectivement *espace admissible*, tout espace affine quasi-topologique (voir [1]) dont l'espace vectoriel quasi-topologique associé est un espace vectoriel quasi-localement-convexe, respectivement un espace vectoriel admissible.

Si X' et X sont deux espaces quasi-topologiques, on désignera par $\mathcal{C}_\lambda(X', X)$ l'espace des applications continues de X dans X', muni de la quasi-topologie de la convergence locale: $\mathfrak{F}$ converge vers f dans $\mathcal{C}_\lambda(X', X)$ ssi le filtre $\mathfrak{F}\mathfrak{A}$ engendré par les $F(A) = \bigcup_{g \in F} g(A)$, où $F \in \mathfrak{F}$ et $A \in \mathfrak{A}$ (notations de [1]) converge vers $f(x)$ dans X' lorsque $\mathfrak{A}$ converge vers x dans X. Si X' est un eqlc (respectivement un espace admissible), $\mathcal{C}_\lambda(X', X)$ est aussi un eqlc (respectivement un espace admissible), comme le prouve une démonstration analogue à celle donnée dans [2] pages 87-89.

Soit $(G^\cdot, \pi)$ un groupe quasi-topologique; ceci signifie que $G^\cdot$ est un groupe, que la loi de composition de $G^\cdot$ est continue de $\pi \times \pi$ vers π et que l'application «inverse» dans $G^\cdot$ est continue de π vers π. On dira que $\mathfrak{F}$, filtre sur G, est un *filtre de Cauchy* pour la structure quasi-uniforme droite (resp. gauche) de $(G^\cdot, \pi)$ ssi $\mathfrak{F}.\mathfrak{F}^{-1}\, \pi\, e$ (resp. $\mathfrak{F}^{-1}.\mathfrak{F}\, \pi\, e$), où e désigne l'unité de $G^\cdot$.

La terminologie ci-dessus provient du fait que $G^\cdot$ est canoniquement muni de deux structures quasi-uniformes (au sens de [3]) dites droite et gauche. On dira que la structure quasi-uniforme droite (resp. gauche) de $(G^\cdot, \pi)$ est complète ssi tout filtre de Cauchy converge pour cette structure.

PROPOSITION 1. *Soit $(C'^\cdot, T')$ un groupe topologique séparé et (X, π) un espace quasi-topologique. Si la structure uniforme droite (resp. gauche) de $(C'^\cdot, T')$ est complète, alors il en est de même pour la structure quasi-uniforme droite (resp. gauche) du groupe quasi-topologique canonique $\mathcal{C}_\lambda(C', X)$ (si f et g sont deux éléments de $\mathcal{C}(C', X)$, leur composé $g.f$ dans $\mathcal{C}(C', X)$ est évidemment l'application de X dans C' définie par $x \to g(x).f(x)$).*

Δ. Contentons-nous de le prouver pour la structure quasi-uniforme droite.

a) Soit $\mathfrak{F}$ un filtre sur $\mathcal{C} = \mathcal{C}(C', X)$ tel que $\mathfrak{F}.\mathfrak{F}^{-1}\, \lambda e$ (e unité de $\mathcal{C}$). Démontrons que, si $\mathfrak{A}\, \pi\, x$, alors $\mathfrak{F}\mathfrak{A}$ converge dans C'.

Soit U' un voisinage de e', unité de C', dans T'. Il existe un voisinage U'' de e' dans T' tel que $U''=U''^{-1}$ et que $U''^4=U''.U''.U''.U''$ soit inclus dans U'. Comme $(\mathfrak{F}.\mathfrak{F}^{-1})\mathfrak{A}$ converge vers e' dans T', il existe ϕ appartenant à $\mathfrak{F}$ et V appartenant à $\mathfrak{A}$ tels que $(\phi.\phi^{-1})V$ soit inclus dans U''. Soit h un quelconque élément de ϕ; comme h appartient à $\mathcal{C}$, il existe W dans $\mathfrak{A}$ tel que $h(W)$ soit inclus dans $U''.h(x)$. Si U est l'élément $V\cap W$ de $\mathfrak{A}$, alors $(\phi.\phi^{-1})U$ est inclus dans U'' tandis que $h(U)$ l'est dans $U''.h(x)$. Montrons que $\phi(U).\phi(U)^{-1}$ est inclus dans U', d'où l'on déduira que U' appartient à $\mathfrak{F}\mathfrak{A}.(\mathfrak{F}\mathfrak{A})^{-1}$. Soient f'', f' appartenant à ϕ et x'', x' appartenant à U. Compte tenu de

$$f''(x'').f'(x')^{-1} =$$
$$=(f''(x'').h(x'')^{-1}).(h(x'').h(x')^{-1}).(h(x').f'(x')^{-1}),$$

soit de

$$f''(x'').f'(x')^{-1}=(f''.h^{-1})(x'').(h(x'').h(x')^{-1}).(h.f'^{-1})(x').$$

on voit que $f''(x'').f'(x')^{-1}$ appartient à $U''.(U''.U''^{-1}).U''$ donc à U'. Ce qui précède montre que $\mathfrak{F}\mathfrak{A}.(\mathfrak{F}\mathfrak{A})^{-1}$ converge vers e' dans T'. Vu les hypothèses $\mathfrak{F}\mathfrak{A}$ converge dans T'. Notons $y_{\mathfrak{A}}$ sa limite.

b) Notons $f(x)$ la limite du filtre $\mathfrak{F}x^{\varepsilon}$ (notations de [1]), et montrons que si $\mathfrak{A}\pi x$, alors $y_{\mathfrak{A}}=f(x)$.

Soit U' un voisinage de e' dans T' et U'' un voisinage de e' dans T' tels que $U''=U''^{-1}$ et que $U''.U''.U''$ soit inclus dans U'. Comme $\mathfrak{F}\mathfrak{A}$ converge vers $y_{\mathfrak{A}}$ dans T', il existe ϕ_1 appartenant à $\mathfrak{F}$ et V appartenant à $\mathfrak{A}$ tels que $\phi_1(V)$ soit inclus dans $U''.y_{\mathfrak{A}}$. Comme par ailleurs $\mathfrak{F}x^{\varepsilon}$ converge vers $f(x)$ dans T', il existe ϕ_2 appartenant à $\mathfrak{F}$ tel que $\phi_2(\{x\})$ soit inclus dans $U''.f(x)$. Posons $\phi=\phi_1\cap\phi_2$. Alors ϕ est un élément de $\mathfrak{F}$ tel que $\phi(V)$ soit inclus dans $U''.y_{\mathfrak{A}}$ et $\phi(\{x\})$ dans $U''.f(x)$. Soit h un quelconque élément de ϕ. Puisque $h\mathfrak{A}$ converge vers $h(x)$ dans T', il existe W dans $\mathfrak{A}$ tel que $h(W)$ soit inclus dans $U''.h(x)$. Si $U=V\cap W$, étant donné que $\phi(U)$ est inclus dans $U''.y_{\mathfrak{A}}$, on voit que $h(U)$ est inclus dans $U''.y_{\mathfrak{A}}$. Par ailleurs $h(U)$ est inclus dans $U''.h(x)$ donc dans $U''.U''.f(x)$.

Soit x' un élément de U. Puisque $h(x')$ appartient à $U''.y_{\mathfrak{A}}$, l'élément $h(x').y_{\mathfrak{A}}^{-1}$ appartient à U'', ainsi que $y_{\mathfrak{A}}.h(x')^{-1}$ son inverse. Par ailleurs $h(x').f(x)^{-1}$ appartient à $U''.U''$ vu que $h(x')$ appartient à $U''.U''.f(x)$. On en déduit que $y_{\mathfrak{A}}.f(x)^{-1}$ est un élément de $U''.U''.U''$ donc de U'.

Il résulte de ce qui précède que $y_{\mathfrak{A}}.f(x)^{-1}=e'$, soit $y_{\mathfrak{A}}=f(x)$.

c) Soit f l'application de X dans C' définie par $x \to f(x)$. Démontrons que f est un élément de $\mathcal{C}$. Autrement dit prouvons que, si $\mathfrak{A}\,\pi\, x$, alors $f\mathfrak{A}$ converge vers $f(x)$ dans T'.

Soit U' un voisinage de e' dans T' et U'' un voisinage de e' dans T' tel que $U''.U''$ soit inclus dans U' et que $U''=U''^{-1}$. Comme $\mathfrak{F}\mathfrak{A}$ converge vers $f(x)$ dans T', il existe ϕ_1 dans $\mathfrak{F}$ et U dans $\mathfrak{A}$ tels que $\phi_1(U)$ soit inclus dans $U''.f(x)$. Soit alors x' un quelconque élément de U. Comme $\mathfrak{F}x'^{\varepsilon}$ converge vers $f(x')$ dans T', il existe ϕ_2 dans $\mathfrak{F}$ tel que $\phi_2(\{x'\})$ soit inclus dans $U''.f(x')$. Si $\phi=\phi_1\cap\phi_2$, alors $\phi(U)$ est inclus dans $U''.f(x)$ tandis que $\phi(\{x'\})$ est inclus dans $U''.f(x')$. Soit alors h un quelconque élément de ϕ. On voit que $h(x')$ appartient d'une part à $U''.f(x)$ et d'autre part à $U''.f(x')$, en sorte que $h(x').f(x)^{-1}$ et $(h(x').f(x')^{-1})^{-1}=f(x').h(x')^{-1}$ appartiennent à $U''=U''^{-1}$. On en déduit que $f(x').f(x)^{-1}$ appartient à $U''.U''$ donc à U', c'est-à-dire que $f(x')$ appartient à $U'.f(x)$. Ce qui précède montre que $f(U)$ est inclus dans $U'.f(x)$.

Il est alors évident que $f\mathfrak{A}$ converge vers $f(x)$ dans T'.

d) On voit que $\mathfrak{F}$ converge vers f dans $\mathcal{C}$. ∇

REMARQUE. La proposition précédente est en grande partie démontrée dans [1].

Soient E et F deux espaces vectoriels quasi-topologiques. On notera $L_\lambda(F,E)$ l'espace vectoriel quasi-topologique des applications linéaires continues de E dans F muni de la quasi-topologie de la convergence locale. On définit par récurrence l'espace vectoriel quasi-topologique $L_\lambda^{(n)}(F,E)$ en posant

$$L_\lambda^{(n)}(F,E)=L_\lambda(L_\lambda^{(n-1)}(F,E),E) \text{ si } n\geqslant 1.$$

On notera $L^{n}_{\lambda}(F,E)$ l'espace vectoriel quasi-topologique – isomorphe à $L^{(n)}_{\lambda}(F,E)$ – des applications n-linéaires continues de E dans F muni de la quasi-topologie de la convergence locale.

On notera $L(F,E)$ l'espace vectoriel quasi-topologique des applications linéaires continues de E dans F muni de la quasi-topologie définie page 67 de [2]. Rappelons que $\mathfrak{F} \downarrow L(F,E)$ ssi $\mathfrak{F}\mathfrak{B} \downarrow F$ lorsque $\mathfrak{B}$ est un filtre sur E tel que $\mathfrak{W}\mathfrak{B} \downarrow E$, $\mathfrak{W}$ désignant le filtre des voisinages de 0 dans $\mathbf{R}$. On définit par récurrence l'espace vectoriel quasi-topologique $L^{(n)}(F,E)$.

Une application n-linéaire u de E^n dans F est dite *équable* ssi $u(\mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_n)$ converge vers 0 dans F lorsque $\mathfrak{W}\mathfrak{A}_i$ converge vers 0 dans E pour tout i et que l'un au moins des $\mathfrak{A}_i$ converge vers 0. On notera $L^n(F,E)$ l'espace vectoriel quasi-topologique (en général non isomorphe à $L^{(n)}(F,E)$) des applications n-linéaires équables de E dans F muni de la quasi-topologie définie page 67 de [2]. Rappelons que $\mathfrak{F} \downarrow L^n(F,E)$ ssi $\mathfrak{F}(\mathfrak{B}_1 \times \ldots \times \mathfrak{B}_n) \downarrow F$ lorsque $\mathfrak{B}_i$ est un filtre sur E tel que $\mathfrak{W}\mathfrak{B}_i \downarrow E$ pour tout i.

Si F est quasi-localement-convexe (resp. admissible), il en est de même des espaces introduits ci-dessus.

THEOREME 1. *Soient F un espace vectoriel topologique séparé complet et E un espace vectoriel quasi-topologique. Alors $L(F,E)$ est complet.*

Δ. Soit $\mathfrak{F}$ un filtre sur $L(F,E)$ tel que $\mathfrak{F}-\mathfrak{F}$ converge vers 0 dans $L(F,E)$. Comme $\mathfrak{F}$ est un filtre de Cauchy sur $L_{\lambda}(F,E)$ complet, il existe un élément f de $L(F,E)$ tel que $\mathfrak{F}-f \downarrow L_{\lambda}(F,E)$. Prouvons que $\mathfrak{F}-f \downarrow L(F,E)$, ou encore prouvons que $(\mathfrak{F}-f)\mathfrak{B} \downarrow F$ quel que soit $\mathfrak{B}$, filtre quasi-borné de E (c'est-à-dire tel que $\mathfrak{W}\mathfrak{B}$ converge vers 0 dans E). Soient V un voisinage de 0 dans F et V' un voisinage symétrique de 0 dans F tels que $V'+V'$ soit inclus dans V. Vu que $(\mathfrak{F}-\mathfrak{F})\mathfrak{B} \downarrow F$, il existe des éléments ϕ de $\mathfrak{F}$ et B de $\mathfrak{B}$ tels que $(\phi-\phi)B$ soit inclus dans V'. Soit b un élément de B. Comme $(\mathfrak{F}-f)b \downarrow F$, il existe un élément $\hat{\phi}$ de $\mathfrak{F}$ tel que $(\hat{\phi}-f)b$ soit inclus dans V'. Si g est un élément de ϕ, alors $(g-f)b$ appartient à V. En effet, il existe h dans $\phi \cap \hat{\phi}$ et $(g-f)b=(g-h)b+(h-f)b$. On voit donc que $(\phi-f)B$ est inclus dans V.

On en déduit immédiatement le théorème cherché. ∇

On démontre par récurrence que $L^{(n)}(F, E)$ est complet pour tout entier n. Comme $L^n(F, E)$ est isomorphe à un sous-espace fermé de $L^{(n)}(F, E)$, il est aussi complet.

Soit f une application d'un ouvert X de l'eqlc E vers l'eqlc F et soit x un point de X. Nous dirons que f est *dérivable en* x dans la direction d'un vecteur v de $\vec{E}$ et admet $Df(x).v$ pour dérivée en x dans la direction de v si et seulement si l'application de $\{t \in \mathbf{R} \mid x+tv \in X\}$ dans $\vec{F}$ définie par:

$$t \to (f(x+tv)-f(x))/t \ -Df(x).v \quad \text{si} \quad t \neq 0 \ , 0 \to 0$$

est continue en 0. Nous dirons que f est *continûment-dérivable en* x si elle est dérivable en x dans toutes les directions et si l'application $Df(x)$ de $\vec{E}$ dans $\vec{F}$ définie par $v \to Df(x).v$, dite dérivée ou différentielle de f en x, est linéaire continue.

Le «théorème fondamental» de [2] demeure vrai en remplaçant le le mot différentiable par le mot continûment-dérivable. On en déduit le corollaire suivant qui sera constamment utilisé par la suite:

COROLLAIRE. *Soit Φ une application d'un ouvert X de l'eqlc E vers l'eqlc F. Supposons Φ continûment-dérivable en tout point d'un segment S inclus dans X, joignant x et $x+h$. Supposons aussi que u soit un élément de $L(\vec{F}, \vec{E})$ tel que $D\Phi(x+th).h-u(h)$ appartienne à un certain ensemble B convexe fermé dans $\vec{E}^o = (\vec{E}, \tau(\pi_{\vec{E}}))$ pour tout élément t de $[0, 1]$. Alors $\Phi(x+h)-\Phi(x)-u(h)$ appartient à B.*

Δ. On commence par noter que la restriction de Φ à S est continue de S vers F, ce qu'on voit à l'aide de la proposition 1.1 de [1] (page 27). On imite alors la démonstration de la section 5-3-1 de [2]. ∇

Il est maintenant évident que les resultats 5-3-4 à 5-3-6 de [2] demeurent vrais si nous y remplaçons le mot différentiable par continûment-dérivable. Notons d'ailleurs que, si $\mathfrak{A}$ est un filtre sur un espace vectoriel quasi-topologique (E, π_E), nous désignerons par $\mathfrak{A}^{o-}$ le filtre engendré par les enveloppes convexes fermées dans $\tau(\pi_E)$ des éléments de $\mathfrak{A}$ (ce qui n'est pas le cas pour Frölicher-Bucher).

1. APPLICATIONS B-DIFFERENTIABLES

DEFINITION 1. Soit r une application d'un voisinage ouvert X de 0 dans l'eqlc vectoriel $\vec{E}$ vers l'eqlc vectoriel $\vec{F}$. On dit que r est *tangente à* 0 *en* 0 ssi $r(0)=0$ et si $\theta r(\mathcal{W}, \mathcal{V}) \downarrow \vec{F}$ lorsque $\mathcal{V}$ converge vers un élément de $\vec{E}$, étant entendu que θr désigne l'application de $\hat{X}=\{(t,v)\in \mathbf{R}\times\vec{E} \mid tv\in X\}$ dans $\vec{F}$ définie par

$$\theta r(t,v)=r(tv)/t \text{ si } t\neq 0 \text{ et } \theta r(t,v)=0 \text{ si } t=0.$$

DEFINITION 2. Soit f une application de l'ouvert X de l'eqlc E dans l'eqlc F, et soit x un élément de X. On dit que f est *différentiable en* x ssi il existe un élément $Df(x)$ de $L(\vec{F},\vec{E})$ tel que l'application $Rf(x)$ de $X-x$ dans $\vec{F}$ définie par $h \to f(x+h)-f(x)-Df(x).h$ soit tangente à 0 en 0.

DEFINITION 3. On dira que f est *B-différentiable sur* X ssi f est différentiable en tout point de X et si l'application $Df: x \to Df(x)$ de X dans $L(\vec{F},\vec{E})$ est continue vers $L_{\lambda}(\vec{F},\vec{E})$. Par itération on obtient la notion d'application n fois B-différentiable.

Si f est une application d'un ouvert X de l'eqlc E dans l'eqlc F, continûment dérivable en tout point x de X, de différentielle $Df(x)$ en x, nous désignerons par Δf l'application de $\tilde{X}=\{(x,t,v)\in X\times\mathbf{R}\times\vec{E} \mid x+tv\in X\}$ vers $\vec{F}$ définie par:

$$\Delta f(x,t,v)=(f(x+tv)-f(x))/t - Df(x).v \quad \text{si } t\neq 0,$$

$$\Delta f(x,t,v)=0 \quad \text{si } t=0.$$

PROPOSITION 2. *Supposons que* E *et* F *soient admissibles. Si* f *est continûment-dérivable en tout point* x *de* X, *de dérivée* $Df(x)$ *en* x, *et si l'application* Df *de* X *dans* $L(\vec{F},\vec{E})$ *définie par* $x \to Df(x)$ *est continue de* X *vers* $L_{\lambda}(\vec{F},\vec{E})$, *alors* Δf *est continue de* $\tilde{X}$ *vers* $\vec{F}$; *en d'autres termes* f *est différentiable sur* X *au sens de* [1] *page 39. On généralise ainsi le théorème prouvé page 43 de* [1].

Δ.a) Démontrons d'abord que f est continue de X vers F, autrement dit prouvons que, si $x_0+\mathfrak{A}$ converge vers x_0 dans E, alors $f(x_0+\mathfrak{A}/X)$ converge vers $f(x_0)$ dans F. Soit ϕ un ensemble convexe appartenant à $\mathfrak{A}^o$, inclus dans $X-x_0$. D'après la proposition 5-3-1 de [2], l'ensemble $f(x_0+\phi)-f(x_0)$ est inclus dans l'enveloppe convexe fermée de $Df(x_0+\phi).\phi$, soit $[Df(x_0+\phi).\phi]^{o-}$, car l'application de $X-x_0$ dans $\vec{F}$ définie par $h\to f(x_0+h)-f(x_0)$ est continûment-dérivable et admet $Df(x_0+h)$ pour dérivée en h. Comme $f(x_0+\mathfrak{A}/X)-f(x_0)$ contient $f(x_0+\mathfrak{A}^o/X)-f(x_0)$, il contient aussi le filtre $[Df(x_0+\mathfrak{A}^o).\mathfrak{A}^o]^{o-}$ d'après ce qui précède. On en déduit qu'il converge vers 0 dans $\vec{F}$.

b) Soit $\mathfrak{A}$ un filtre convergeant dans E vers un point x_0 de X et $\mathfrak{V}$ un filtre convergeant dans $\vec{E}$ vers un vecteur v_0. Prouvons que le filtre $\Delta f(\mathfrak{A},\mathfrak{W},\mathfrak{V})$ converge vers 0 dans $\vec{F}$. Pour tout x appartenant à X désignons par $Rf(x)$ l'application déjà considérée précédemment, de $X-x$ dans $\vec{F}$, définie par:

$$h\to f(x+h)-f(x)-Df(x).h\,.$$

Soient ϕ appartenant à $\mathfrak{A}$, W élément équilibré de $\mathfrak{W}$, et V appartenant à $\mathfrak{V}$, tels que ϕ et $\phi+WV$ soient inclus dans X. Pour tous x,t et v appartenant à ϕ, W et V respectivement, $[DRf(x)](\delta h).h$ appartient à tB si $h=tv$, ceci quel que soit δ élément de $I=[0,1]$. Il est entendu que

$$B=\{[DRf(\hat{x})](f\hat{v}_1).\hat{v}_2 \mid \hat{x}\in\phi\,,\ f\in W\,,\ \hat{v}_1\in V\,,\ \hat{v}_2\in V\}^{o-}$$

On en déduit que $\Delta f(x,t,v)=1/t\ [Rf(x)(tv)-Rf(x)(0)]$ appartient à B, à l'aide de la proposition 5-3-1 de [2]. D'après ce qui précède $\Delta f(\phi,W,V)$ est inclus dans B, donc dans $([Df(\phi+WV)-Df(\phi)].V)^{o-}$. Ceci montre que $\Delta f(\mathfrak{A},\mathfrak{W},\mathfrak{V})$ contient $([Df(\mathfrak{A}+\mathfrak{W}\mathfrak{V}/X)-Df(\mathfrak{A})].\mathfrak{V})^{o-}$, donc converge vers 0 dans $\vec{F}$.

c) Soit $\mathfrak{A}$ un filtre convergeant dans E vers un point x_0, et $\mathfrak{V}$ un filtre convergeant dans $\vec{E}$ vers un vecteur v_0, et soit $t_0\neq 0$ un nombre réel tel que $x_0+t_0v_0$ appartienne à X. Prouvons que $\Delta f(\mathfrak{A},t_0+\mathfrak{W},\mathfrak{V})$ converge vers l'élément $\Delta f(x_0,t_0,v_0)$ dans $\vec{F}$. Le filtre $\mathfrak{A}\times(t_0+\mathfrak{W})\times\mathfrak{V}$ induit un filtre sur $\widetilde{X}^*=\{(x,t,v)\in\widetilde{X} \mid t\neq 0\}$. En effet, il existe ϕ appartenant à $\mathfrak{A}$, un élément t_0+W de $t_0+\mathfrak{W}$ ne contenant pas 0, et V appartenant à $\mathfrak{V}$, tels que $\phi+(t_0+W)V$ soit inclus dans X; on voit facilement que $\phi\times(t_0+W)\times V$ est inclus dans $\widetilde{X}^*$. Comme $\Delta f/\widetilde{X}^*$ est continue vers $\vec{F}$, $\Delta f(\mathfrak{A}\times(t_0+\mathfrak{W})\times\mathfrak{V}/\widetilde{X}^*)$ converge dans $\vec{F}$ vers $\Delta f(x_0, t_0, v_0)$. Il en est donc de même de $\Delta f(\mathfrak{A}, t_0+\mathfrak{W}, \mathfrak{V})$. ∇

Nous désignerons par Δ^n la catégorie des applications n fois B-différentiables entre ouverts d'espaces admissibles, associée à un univers donné.

PROPOSITION 3. *Soit* $((E', \pi_{E'}, U'), f, (E, \pi_E, U))$ *un élément de* Δ^n. *Si* $(F', \pi_{F'})$ *et* (F, π_F) *sont des sous-espaces quasi-localement-convexes de* $(E', \pi_{E'})$ *et* (E, π_E) *tels que* $f(U\cap F)$ *soit inclus dans* $U'\cap F'$, *et si* F' *est fermé dans* $(E', \pi_{E'})$, *alors* $((F', \pi_{F'}, U'\cap F'), f', (F, \pi_F, U\cap F))$ *est un élément de* Δ^n, *où* f' *est la restriction de* f *à* $(U'\cap F', U\cap F)$.

Δ.a) Prouvons d'abord la proposition lorsque $n=1$.

Soient x un point de $U\cap F$ et v un vecteur de $\vec{F}$. Désignons par $\Delta f_{(x,v)}$ l'application $t \to \Delta f(x,t,v)$ de $U_{(x,v)} = \{ t \in \mathbf{R} \mid x+tv \in U \}$ dans $\vec{E'}$. C'est une application de $U_{(x,v)}$ vers $\vec{E'}$ continue en 0. On en déduit que $Df(x).v$ est la limite de $f(x+tv)-f(x)/t$ lorsque t tend vers 0 dans $U_{(x,v)}/\{0\}$, donc appartient à $\vec{F'}$. D'après ce qui précède, $Df(x)$ applique $\vec{F}$ dans $\vec{F'}$ quel que soit le point x de $U\cap F$. On en déduit immédiatement que $((F', \pi_{F'}, U'\cap F'), f', (F, \pi_F, U\cap F))$ appartient à Δ^1.

b) Prouvons maintenant la proposition lorsque $n>1$.

Quel que soit $p\leq n$, désignons par G^p le sous-espace vectoriel quasi-topologique de $L^p_\lambda(\vec{E'}, \vec{E})$ des applications p-linéaires continues de $\vec{E}$ vers $\vec{E'}$ qui envoient $\vec{F}^p$ dans $\vec{F'}$. Alors G^p est fermé dans $L^p_\lambda(\vec{E'}, \vec{E})$. Démontrons par récurrence que $D^p f$ applique $U\cap F$ dans G^p pour tout $p\leq n$. Soit donc $p<n$, et supposons que $D^p f$ envoie $U\cap F$ dans G^p. On sait que $(L^p_\lambda(\vec{E'}, \vec{E}), D^p f, (E, \pi_E, U))$ appartient à Δ^1. La partie a) montre que $D(D^p f)(x)$ applique $\vec{F}$ dans G^p pour tout élément x de $U\cap F$, en sorte que $D^{p+1}f(x)$ envoie $\vec{F}^{p+1}$ dans $\vec{F'}$. On

en déduit que $D^{p+1}f$ applique $U \cap F$ dans G^{p+1}. Quel que soit $p \leqslant n$, désignons par θ_p l'application canonique de G^p dans $L^p_\lambda(\vec{F'}, \vec{F})$. On démontre facilement que $((F', \pi_{F'}, U' \cap F'), f', (F, \pi_F, U \cap F))$ appartient à Δ^n et que $\theta_p\,[D^p f(x)]$ est sa dérivée $p^{\text{ième}}$ en x quel que soit x élément de $U \cap F$ et pour tout $p \leqslant n$. ∇

PROPOSITION 4. *Soit Φ un élément de Δ^n de $(E, \pi_E, U) \times (F, \pi_F, V)$ vers (G, π_G). Alors $(\mathcal{C}_\lambda(G, V), \psi, (E, \pi_E, U))$ appartient à Δ^n, si ψ est l'application de U dans $\mathcal{C}$ définie par $u \to \Phi_u$, où Φ_u associe $\Phi(u, v)$ à v et $\mathcal{C} = \mathcal{C}_\lambda(G, V)$.*

Δ.a) Prouvons d'abord la proposition lorsque $n = 1$.

Pour tout point u_0 de U et tout vecteur u de $\vec{E}$, désignons par $D\psi(u_0).u$ l'élément de $\mathcal{C}(\vec{G}, V)$ dont l'application sous-jacente est définie par $v_0 \to [D\Phi(u_0, v_0)].(u, 0)$. L'application $D\psi(u_0)$ de $\vec{E}$ dans $\mathcal{C}_\lambda(\vec{G}, V)$ associant $D\psi(u_0).u$ à u est linéaire quasi-continue de $(\vec{E}, \pi_{\vec{E}})$ vers $\mathcal{C}_\lambda(\vec{G}, V)$, ce qu'on voit aisément à l'aide du théorème 1-2 page 31 de [1] .

On introduit l'application $\Delta\psi$ comme précédemment, et on montre à l'aide du théorème ci-dessus mentionné que $\Delta\psi$ est sous-jacente à une application continue. Ceci prouve que $(\mathcal{C}_\lambda(G, V), \psi, (E, \pi_E, U))$ appartient à Δ^1.

b) Prouvons maintenant la proposition lorsque $n > 1$.

Démontrons par récurrence que $(\mathcal{C}_\lambda(G, V), \psi, (E, \pi_E, U))$ appartient à Δ^p pour tout $p \leqslant n$, et que, quel que soit l'élément u_0 de U, $D^p\psi(u_0)$ est donné par

$$[D^p\psi(u_0).(u_1, \dots, u_p)](v_0) = D^p\Phi(u_0, v_0).((u_1, 0), \dots, (u_p, 0))$$

pour tout $(u_1, \dots, u_p)$ appartenant à $\vec{E}^p$ et tout point v_0 de V.

Supposons l'assertion vraie à l'ordre $p < n$ et démontrons-la à l'ordre $p+1$. Puisque $D^p\Phi$ est un élément de Δ^1 de $(E, \pi_E, U) \times (F, \pi_F, V)$ vers $L^p_\lambda(\vec{G}, \vec{E} \times \vec{F})$, on sait que $(\mathcal{C}_\lambda[L^p_\lambda(\vec{G}, \vec{E} \times \vec{F}), V], \theta, (E, \pi_E, U))$ appartient à Δ^1, d'après la partie a), si $\theta(u_0) = (D^p\Phi)_{u_0}$ Désignons par $\overline{\theta'}$ l'application linéaire continue de $\mathcal{C}_\lambda(L^p_\lambda(\vec{G}, \vec{E} \times \vec{F}), V)$ vers $L^p_\lambda(\mathcal{C}_\lambda(\vec{G}, V), \vec{E})$ définie par $f \to T$, où T est donné par:

$$[T(u_1, \dots, u_p)](v) = [f(v)]((u_1, 0), \dots, (u_p, 0)).$$

Soit θ' son application sous-jacente. $(L^p_\chi(\mathcal{C}_\lambda(\vec{G}, V), \vec{E}), D^p\psi, (E, \pi_E, U))$ appartient à Δ^1 puisque $D^p\psi = \theta' \cdot \theta$. On en déduit facilement l'assertion cherchée à l'ordre $p+1$. ∇

COROLLAIRE. *Soit* Φ *un élément de* Δ^n *de* $(E, \pi_E, U) \times (\vec{F}, \pi_{\vec{F}})^p$ *vers* $(\vec{G}, \pi_{\vec{G}})$, *tel que* Φ_u *appartienne à* $L^p_\chi(\vec{G}, \vec{F})$ *pour tout point* u *de* U. *Alors* $(L^p_\chi(\vec{G}, \vec{F}), \psi, (E, \pi_E, U))$ *appartient à* Δ^n *si* ψ *est définie par* $u \to \Phi_u$.

Δ. C'est une conséquence immédiate des deux propositions précédentes. ∇

Ce corollaire est essentiel pour prouver l'un des principaux résultats de ce texte, à savoir le « théorème de corrélation » (chapitre 4).

2. APPLICATIONS DIFFERENTIABLES EN UN POINT

Nous allons définir par récurrence la notion d'application n-différentiable en un point.

DEFINITION 4. Soit f une application d'un ouvert X de l'eqlc E vers l'eqlc F, et soit x un point de X. On dira que f est *n-différentiable en x* (où $n > 1$) et que $D^{(n)}f(x)$ est sa *$n^{ième}$-différentielle en x* ssi:

a) f est $(n-1)$-différentiable en tout point d'un voisinage ouvert Y de x inclus dans X,

b) l'application $D^{(n-1)}f$ de Y dans $L^{(n-1)}(\vec{F}, \vec{E})$ définie par $y \to D^{(n-1)}f(y)$ est différentiable en x,

c) la différentielle de $D^{(n-1)}f$ en x est $D^{(n)}f(x)$ (élément de $L^{(n)}(\vec{F}, \vec{E})$).

Désormais tous les espaces quasi-localement-convexes que nous utiliserons seront supposés admissibles. Il ne sera plus question que d'applications tangentes à 0 en 0 d'un espace vectoriel admissible $\vec{E}$ vers un espace vectoriel admissible $\vec{F}$ (donc définies sur $\vec{E}$ tout entier).

De même il ne sera plus question que d'applications n-différentiables en x de l'espace admissible E vers F. Notons toutefois que nous faisons ces deux dernières restrictions uniquement par commodité.

Les résultats 3-1-3 à 3-1-6 et 3-1-8 donc 3-3-1 de [2] sont vrais dans notre terminologie. Voilà qui assure que, si f de E dans F est différentiable en x et g de F dans G différentiable en $f(x)$, alors $g \cdot f$ est différentiable en x. On démontre que, si f est une application linéaire continue de $\vec{E}$ vers $\vec{F}$, elle est différentiable en tout point x de $\vec{E}$, et que $Df(x) = f$. Nous allons l'utiliser dans un instant.

PROPOSITION 5. *Soit f une application n-différentiable en x de E vers F. L'application n-linéaire $D^n f(x)$ canoniquement associée à $D^{(n)} f(x)$ est symétrique.*

Δ .a) Prouvons d'abord la proposition lorsque $n = 2$.

Si (u, v) appartient à $\vec{E} \times \vec{E}$, désignons par $\vec{E}(u, v)$ le sous-espace vectoriel admissible de $\vec{E}$ engendré par u et v, et par $E(u, v)$ l'espace affine admissible $x + \vec{E}(u, v)$. Soit alors g l'application de $Y \cap E(u, v)$ dans F restriction de f (pour les notations, voir le début de ce chapitre). Elle est différentiable en tout point de $Y \cap E(u, v)$ vers F^o, et sa différentielle Dg est différentiable en x vers $L(\vec{F^o}, \vec{E}(u, v))$ car $Dg = j \cdot Df \cdot i$, où i désigne l'injection de $Y \cap E(u, v)$ dans Y et j l'application canonique de $L(\vec{F}, \vec{E})$ vers $L(\vec{F^o}, \vec{E}(u, v))$. g est deux fois différentiable en x au sens de [2] vers F^o. En effet, d'après la proposition 2-7 de [1] (située page 16), Dg est différentiable en x au sens de [2] vers $L(\vec{F^o}, \vec{E}(u, v))$; par ailleurs g est différentiable vers F^o en tout point de $Y \cap E(u, v)$ d'après la même proposition. La proposition 9-1-3 de [2] nous permet d'affirmer que, si $D^2 g$ désigne l'application bilinéaire canoniquement associée à $D^{(2)} g$, nous avons l'égalité $D^2 g(u, v) = D^2 g(v, u)$. On en déduit

$$D^2 f(u, v) = D^2 f(v, u).$$

b) Par le même raisonnement que celui des sections 9-2-1 et 9-2-2 de [2], on prouve la proposition lorsque $n > 2$. ∇

Soit f une application n-différentiable en x de E vers F. Pour tout $p \leqslant n$, désignons par $D^p f(x)$ l'application p-linéaire canoniquement associée à $D^{(p)} f(x)$. D'après ce qui précède c'est une application p-linéaire équable de $\vec{E}$ vers $\vec{F}$.

Les considérations ci-dessus permettent de poser la définition suivante:

DEFINITION 5. Soit f une application d'un ouvert X d'un eqlc E vers l'eqlc F, et soit x un point de X. On dira que f est *n-différentiable en x* et que $D^n f(x)$ et sa $n^{ième}$ *différentielle en* x ssi:

a) f est $(n-1)$-différentiable en tout point d'un voisinage ouvert Y de x inclus dans X,

b) l'application $D^{n-1}f$ de Y vers $L^{n-1}(\vec{F}, \vec{E})$ définie par $y \to D^{n-1} f(y)$ est différentiable en x,

c) $D^n f(x)$ est canoniquement associée à $D(D^{n-1}f)(x)$.

CONVENTION. Lorsque $n = 1$, on pose $D^{n-1} f = f / Y$.

Nous avons déjà indiqué qu'une application linéaire continue de E dans F était différentiable en tout point de E. Ajoutons: si u est une application bilinéaire continue de $E_1 \times E_2$ dans E_3, elle est différentiable en tout point de $E_1 \times E_2$ (voir section 4-2-3 de [2]); elle est même indéfiniment différentiable en tout point de $E_1 \times E_2$ pourvu qu'elle soit équable.

Le lecteur vérifiera que les résultats 4-3-1 à 4-4-5 de [2] sont vrais dans notre terminologie. Il en est de même du résultat 9-2-5 qui entraîne 9-2-6 comme nous allons le démontrer.

PROPOSITION 6. *Si f est une application n-différentiable en x de E vers F, et g une application n-différentiable en $f(x)$ de F vers G, alors $g \cdot f$ est n-différentiable en x.*

Δ. Si p et n sont des entiers non nuls tels $p \leqslant n$, convenons de désigner par $P(n,p)$ l'ensemble des p-uplets $a = (a_1, \dots, a_p)$ [où $a_i = (a_{i1}, \dots, a_{ik_i})$ est une sous-suite de $(1, \dots, n)$ pour tout $i = 1, \dots, p$] tels que $a_{11} < \dots < a_{p1}$ et que $(a_{11}, \dots, a_{1k_1}, \dots, a_{p1}, \dots, a_{pk_p})$ soit une permutation de $\{1, \dots, n\}$.

Prouvons par récurrence (le cas où $n=1$ ayant été précédemment examiné) que, si f de E vers F est n-différentiable en x et si g de F vers G est n-différentiable en $f(x)$, alors $g\cdot f$ est n-différentiable en x et que

$$D^n(g.f)(x)=\Sigma D^p g(f(x)).\,[D^{k_1}f(x).\pi_{a_1},\dots,D^{k_p}f(x).\pi_{a_p}],$$

où π_{a_i} désigne la projection de $\vec{E}$ sur $\vec{E}^{k_i}$:

$$(h_1,\dots,h_n)\to(h_{a_{i1}},\dots,h_{a_{ik_i}}),$$

étant compris que la somme est étendue à l'ensemble réunion des $P(n,p)$ avec $p=1,\dots,n$.

Supposons l'assertion ci-dessus vraie à l'ordre $n-1$ (avec $n>1$). Elle est encore vraie à l'ordre n. En effet, soit Y un voisinage ouvert de x dans E tel que, pour tout y appartenant à Y, f soit $(n-1)$-différentiable en y et que g soit $(n-1)$-différentiable en $f(y)$. D'après l'hypothèse de récurrence, $g\cdot f$ est $(n-1)$-différentiable en tout point de Y et:

$$D^{n-1}(g.f)=\Sigma\psi(a_1,\dots,a_p).\,[(D^p g).f,D^{k_1}f,\dots,D^{k_p}f],$$

où $\psi(a_1,\dots,a_p)$ désigne l'application multilinéaire continue, de $L^p(\vec{G},\vec{E})\times L^{k_1}(\vec{F},\vec{E})\times\dots\times L^{k_p}(\vec{F},\vec{E})$ vers $L^{n-1}(\vec{G},\vec{E})$, définie par:

$$(u,v_1,\dots,v_p)\to u.\,[v_i.\pi_{a_i}],$$

étant compris que la somme est étendue à l'ensemble réunion des $P((n-1),p)$ avec $p=1,\dots,(n-1)$. Ceci montre que $D^{n-1}(g.f)$ de Y vers $L^{n-1}(\vec{G},\vec{E})$ est différentiable en x. On en déduit que $g\cdot f$ est n-différentiable en x. Enfin on voit grâce au même raisonnement que celui utilisé page 12 de [5] que $D^n(g.f)(x)$ est donné par la formule ci-dessus. ∇

Si f est une application de E vers F continue en x, nous désignerons par $R^0 f(x)$ l'application de $\vec{E}$ vers $\vec{F}$ définie par:

$$h\to f(x+h)-f(x).$$

Si maintenant f est une application de E vers F n-différentiable en x, nous désignerons par $R^k f(x)$, pour tout $1<k<n$, l'application de $\vec{E}$ vers $\vec{F}$ définie par:

$$h \longrightarrow [f(x+h)-f(x)]-(1/1!\ Df(x).h)-\dots-(1/k!\ D^k f(x).h^{(k)}).$$

Il est entendu que, si p est un entier non nul arbitraire, nous notons $h^{(p)}$ le p-uplet $(h,\dots,h)$.

PROPOSITION 7 *(formule de Taylor). Soient f une application de E dans F, x un point de E et h un vecteur de $\vec{E}$. Désignons par S le segment joignant x et $x+h$. Si f est n-différentiable en tout point de S, alors $R^{n-1}f(x).h$ appartient à $1/n!\ B$, où B est l'enveloppe convexe fermée dans F^o de $\{D^n f(x+th).h^{(n)} \mid 0\leqslant t\leqslant 1\}$.*

Δ.a) Si $n=1$, la proposition résulte immédiatement de la section 5-3-1 de [2].

b) Supposons désormais $n>1$. Par hypothèse f est $(n-1)$-différentiable en tout point d'un voisinage ouvert de S dans E. Nous désignerons par θ l'application de Y vers $\vec{F}$ définie par $y \rightarrow R^{n-1} f(y).((x+h)-y)$. C'est une application différentiable en tout point $x+th$ de S; sa dérivée en ce point est donnée par

$$D\,\theta(x+th).k=-(1-t)^{n-1}/(n-1)!\ D^n f(x+th).(k,h^{(n-1)}).$$

La section 5-3-1 de [2] nous apprend que, pour tous t' et t'' éléments de $[0,1]$ tels que $t'\leqslant t''$, $\theta(x+t''h)-\theta(x+t'h)$ appartient à l'ensemble

$$-(t''-t')/(n-1)!\ \mathrm{Sup}\,\{(1-t)^{n-1} \mid t'\leqslant t\leqslant t''\}.B\,.$$

Soit $(t_i)_{i\leqslant p}$ une subdivision de $I=[0,1]$ telle que $t_1=0$ et $t_p=1$. D'après ce qui précède,

$$\theta(x+h)-\theta(x)=\sum_{i\leqslant p-1}\theta(x+t_{i+1}h)-\theta(x+t_i h)$$

appartient à l'ensemble

$$\Big[\sum_{i\leqslant p-1}-1/(n-1)!\ (t_{i+1}-t_i).\mathrm{Sup}\,\{(1-t_i)^{n-1} \mid t_i\leqslant t\leqslant t_{i+1}\}\Big].B,$$

que nous noterons $r((t_i)_{i\leqslant p}).B$ pour la commodité. Or, pour tout $\varepsilon>0$, il existe une subdivision (t_i) de I de la forme ci-dessus, telle que

$$r((t_i))\leqslant\Big(\int_0^1 -1/(n-1)!\ (1-t)^{n-1}\,dt\Big)+\varepsilon=-1/n!+\varepsilon.$$

On en déduit que $\theta(x+h)-\theta(x)/(-1/n!+\varepsilon)$ appartient à B quel que soit $\varepsilon>0$ en sorte que $\theta(x+h)-\theta(x)/(-1/n!)$ appartient aussi à B. Il est alors immédiat que $R^{n-1}f(x).h=-[\theta(x+h)-\theta(x)]$ est un élément de $1/n!.B$. ∇

Soit f une application d'un ouvert Z de l'eqlc $E\times F$ dans l'eqlc G. Supposons f partiellement continûment-dérivable en un point (x,y) de Z. Nous désignerons par $D_1f(x,y)$ et $D_2f(x,y)$ respectivement les dérivées partielles de f en (x,y) suivant E et F. Si f est partiellement continûment dérivable en tout point de Z, on introduit canoniquement les applications D_1f et D_2f de Z vers $L(\vec{G},\vec{E})$ et $L(\vec{G},\vec{F})$ respectivement.

PROPOSITION 8. *Reprenons les hypothèses ci-dessus. Supposons f partiellement continûment-dérivable en tout point de Z et D_2f (resp. D_1f) continue au point (x,y) de Z vers $L_\lambda(\vec{G},\vec{E})$ (resp. $L_\lambda(\vec{G},\vec{F})$); alors f est continûment-dérivable en (x,y).*

Δ. La démonstration est analogue à celle de la section 8-2-1 de [2]. ∇

COROLLAIRE. *Si f est partiellement continûment-dérivable en tout point de Z et si D_2f et D_1f sont continues de Z vers les eqlc $L(\vec{G},\vec{E})$ et $L(\vec{G},\vec{F})$, alors f est une application C^1 au sens indiqué ci-dessous.*

3. APPLICATIONS C^n

DEFINITION 6. Soit f une application d'un ouvert X de l'eqlc E dans l'eqlc F. On dira que f est une *application* C^n ssi f est n-différentiable en tout point de X et si, pour tout $k\leqslant n$, $D^{(k)}f$ est continue de X vers $L^{(k)}(\vec{F},\vec{E})$.

Cela revient à dire que f est n-différentiable en tout point de X et que, pour tout $k\leqslant n$, D^kf est continue de X vers $L^k(\vec{F},\vec{E})$.

REMARQUE. Si E et F sont des espaces affines de Banach, f est une application C^n ssi c'est une application C^n au sens traditionnel (voir [6], page 271). En particulier l'application $x \to 1/x$ de $\mathbf{R}/\{0\}$ dans $\mathbf{R}$ est une application C^n, alors qu'elle ne l'est pas au sens de [2] et [5].

On peut munir l'ensemble $C^n(F,X)$ des applications C^n d'un ouvert X de l'eqlc E dans l'eqlc F d'une structure d'eqlc. Un filtre $\mathcal{F}$ converge vers f dans $C^n(F,X)$ ssi $D^{(k)}\mathcal{F}$ converge vers $D^{(k)}f$ dans $\mathcal{C}_\lambda(L^{(k)}(\vec{F},\vec{E}),X)$ pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$. Alors $D^k\mathcal{F}$ converge vers $D^k f$ dans $\mathcal{C}_\lambda(L^k(\vec{F},\vec{E}),X)$.

CONVENTION. Il est entendu que $C^0(F,X) = \mathcal{C}(F,X)$, et que, si f appartient à $\mathcal{C}(F,X)$, alors $D^0 f = f$.

Les résultats 10-4-1 à 10-4-7 de [2] sont vrais dans notre terminologie. Notons toutefois qu'une application multilinéaire continue n'est pas C^∞, si elle n'est pas équable. La démonstration de la proposition 10-4-7 de [2] ressemble à celle de la proposition 6 de notre texte. Retenons surtout que le *composé d'applications C^n est une application C^n.*

4. THEOREME DE CORRELATION

Si $\vec{E}$ est un eqlc vectoriel, convenons d'écrire $\vec{E}^*$ l'eqlc vectoriel équable associé (voir [2]). Un filtre $\mathcal{A}$ sur $\vec{E}$ converge vers 0 dans E^* ssi il existe un filtre $\mathcal{A}'$ convergeant vers 0 dans $\vec{E}$ tel que $\mathcal{W}\mathcal{A}'$ soit inclus dans $\mathcal{A}$. A un eqlc E on associe canoniquement un eqlc, noté E^*, de même ensemble sous-jacent, dont l'espace des vecteurs libres est $\vec{E}^*$, si $\vec{E}$ désigne l'espace des vecteurs libres de E. Alors E équable signifie $E = E^*$.

Nous allons donner plusieurs lemmes dont nous aurons besoin pour démontrer le théorème de corrélation visé.

LEMME 1. *Si f de E vers F est différentiable en x, alors f est continue en x de E^* vers F^*.*

Δ. La démonstration est analogue à celle de la section 3-1-3 de [2]. ∇

LEMME 2. *Soit f une application de E vers F deux fois B-différentiable. Soient maintenant x un point de E et v un vecteur de $\overrightarrow{E}$. L'application $\hat{f}$ de* **R** *dans $\overrightarrow{F}$ définie par: $t \to \Delta f(x, t, v)$ (voir [1]) est différentiable en 0.*

Δ. Désignons par $\Delta^2 f$ l'application de $E \times \mathbf{R} \times \overrightarrow{E}$ dans $\overrightarrow{F}$ définie par:

$$\Delta^2 f(x', t', v') = ((f(x'+t'v') - f(x'))/t'^2 - 1/1!\ (1/t')Df(x').v' - 1/2!\ D^2 f(x').(v', v') \text{ si } t' \neq 0,$$

$$\Delta^2 f(x', t', v') = 0 \text{ si } t' = 0.$$

C'est une application continue de $E \times \mathbf{R} \times \overrightarrow{E}$ vers $\overrightarrow{F}$ (voir [1] page 56). Soit $D\hat{f}(0)$ l'application linéaire continue de **R** dans $\overrightarrow{F}$ définie par: $D\hat{f}(0).1 = 1/2!\ D^2 f(x).(v, v)$. Comme $\Delta \hat{f}(0, t, 1)$ est égal pour tout élément t de **R** à $\Delta^2 f(x, t, v)$, le filtre $\Delta \hat{f}(0, \mathfrak{W}, 1)$ converge vers 0 dans $\overrightarrow{F}$. On en déduit que $\hat{f}$ est dérivable en 0 dans la direction de 1, donc différentiable en 0 (voir [2] page 45). ∇

LEMME 3. *Soient E, F, G trois eqlc et g une application deux fois B-différentiable de G vers $L_\lambda(\overrightarrow{F}, \overrightarrow{E})$ dont la différentielle Dg est continue non seulement vers $L_\lambda(L_\lambda(\overrightarrow{F}, \overrightarrow{E}), \overrightarrow{G})$, mais encore vers $L_\lambda(L(\overrightarrow{F}, \overrightarrow{E}), \overrightarrow{G})$. Alors g est B-différentiable de G vers $L(\overrightarrow{F}, \overrightarrow{E})$.*

Δ. Soient x un point de G et v un vecteur de $\overrightarrow{G}$. L'application de **R** dans $L(\overrightarrow{F}, \overrightarrow{E})$ définie par $t \to \Delta g(x, t, v)$ est différentiable en 0 (lemme 2) donc continue en 0 de **R** vers $L^*_\lambda(\overrightarrow{F}, \overrightarrow{E})$ (lemme 1) et vers $L(\overrightarrow{F}, \overrightarrow{E})$ moins fin. On en déduit que g est dérivable en x dans la direction de v. La proposition 2 montre que g est B-différentiable vers $L(\overrightarrow{F}, \overrightarrow{E})$. ∇

Ce lemme est essentiel pour démontrer le théorème cherché.

THEOREME DE CORRELATION. *Soit f une application n fois B-différentiable de l'eqlc E vers l'eqlc F telle que $D^{(n-1)}f$ appartienne à $C^1(L^{(n-1)}(\overrightarrow{F}, \overrightarrow{E}), E)$. Supposons de plus que $D^k f$ prenne ses valeurs* *dans l'ensemble* $L^k(\vec{F},\vec{E})$ *des applications k-linéaires équables de* $\vec{E}$ *vers* $\vec{F}$, *pour tout* $k \leqslant (n-1)$. *Alors* f *appartient à* $C^n(F,E)$.

Δ. Lorsque $n=1$ ou $n=2$ la proposition est évidente. Lorsque $n=3$, la proposition résulte du lemme 3. Nous allons maintenant prouver la proposition lorsque $n>3$. Supposons le théorème vrai à l'ordre $(n-1)$ et démontrons-le à l'ordre n. Signalons que, pour abréger, nous noterons $L_\lambda^{(p)}L^{(q)}$ et $L^{(q)}L_\lambda^{(p)}$, pour tous entiers p et q non nuls, les espaces vectoriels admissibles que nous devrions désigner par:

$$L_\lambda^{(p)}(L^{(q)}(\vec{F},\vec{E}),\vec{E}) \text{ et } L^{(q)}(L_\lambda^{(p)}(\vec{F},\vec{E}),\vec{E}).$$

a) L'application $D^{(n-2)}f$ est deux fois B-différentiable vers $L_\lambda^{(n-2)}$, et sa différentielle $D^{(n-1)}f$ est continue vers $L_\lambda L L_\lambda^{(n-3)}$. D'après le lemme 3, $D^{(n-2)}f$ est B-différentiable, donc continue vers $L L_\lambda^{(n-3)}$. Prouvons que $D^{(n-2)}f$ est alors continue vers $L_\lambda^{(n-3)}L$.

Soit $\mathfrak{X}$ un filtre convergeant dans E vers un élément x. D'après ce qui précède, $D^{(n-2)}f(\mathfrak{X})$ converge vers $D^{(n-2)}f(x)$ dans $L L_\lambda^{(n-3)}$. En d'autres termes, $[D^{(n-2)}f(\mathfrak{X})-D^{(n-2)}f(x)].\mathfrak{B}.\mathfrak{V}_1.\dots.\mathfrak{V}_{n-3}$ converge vers 0 dans $\vec{F}$, lorsque $\mathfrak{B}$ est un filtre quasi-borné de $\vec{E}$ (c'est-à-dire tel que $\mathfrak{V}\mathfrak{B}\downarrow\vec{E}$), et lorsque $\mathfrak{V}_1,\dots,\mathfrak{V}_{n-3}$ sont des filtres convergents de $\vec{E}$. Comme

$$[D^{(n-2)}f(\mathfrak{X})-D^{(n-2)}f(x)].\mathfrak{V}_1.\dots.\mathfrak{V}_{n-3}.\mathfrak{B}$$

converge aussi vers 0 dans $\vec{F}$ vu que $D^{n-2}f$ est symétrique (voir [1] proposition 2-3 page 55), le filtre $D^{(n-2)}f(\mathfrak{X})$ converge vers $D^{(n-2)}f(x)$ dans $L_\lambda^{(n-3)}L$.

b) Soit Φ l'application de $E\times\vec{E}^{(n-2)-1}$ dans $L(\vec{F},\vec{E})$ définie par

$$(x,v_1,\dots,v_{n-3}) \to D^{(n-2)}f(x).v_1.\dots.v_{n-3}.$$

Φ est B-différentiable vers $L_\lambda(\vec{F},\vec{E})$. Sa différentielle $D\Phi$ est telle que $[D\Phi(x,v_1,\dots,v_{n-3})].(h,h_1,\dots,h_{n-3})$, dérivée de Φ en $(x,v_1,\dots,v_{n-3})$ dans la direction de $(h,h_1,\dots,h_{n-3})$, soit l'élément

$$[D^{(n-1)}f(x).h].v_1.\dots.v_{n-3} + \sum_{i=1}^{i=n-3} D^{(n-2)}f(x).v_1.\dots.h_i.\dots.v_{n-3}.$$

Comme $D\Phi$ est B-différentiable vers $L_\lambda(L_\lambda(\vec{F},\vec{E}),\vec{E}^{(n-2)})$ en vertu de ce qui précède, Φ est deux fois B-différentiable vers $L_\lambda(\vec{F},\vec{E})$. Compte tenu de la partie a) de la démonstration, on voit aisément que $D\Phi$ est continue vers $L_\lambda(L(\vec{F},\vec{E}),\vec{E}^{(n-2)})$. D'après le lemme 3, Φ est B-différentiable vers $L(\vec{F},\vec{E})$. Ceci dit, notons que pour tout point x de E l'application de $\vec{E}^{(n-3)}$ dans $L(\vec{F},\vec{E})$:

$$(v_1,\dots,v_{n-3}) \to D^{(n-2)}f(x).v_1.\dots.v_{n-3}$$

est un élément $\psi(x)$ de l'espace $L_\lambda^{n-3}(L(\vec{F},\vec{E}),\vec{E})$. Soit ψ l'application $x \to \psi(x)$ de E dans $L_\lambda^{n-3}(L(\vec{F},\vec{E}),\vec{E})$. Alors d'après le corollaire de la proposition 4, $(L_\lambda^{n-3}(L(\vec{F},\vec{E}),\vec{E}),\psi,E)$ appartient à Δ^1 (c'est-à-dire est B-différentiable). On en déduit immédiatement que $(L_\lambda^{(n-3)}L, D^{(n-2)}f, E)$ appartient à Δ^1.

c) On montre grâce à un raisonnement tout-à-fait analogue à celui des parties a) et b) que, si $D^{(n-2)}f$ est B-différentiable, vers $L_\lambda^{((n-2)-k)}L^{(k)}$, alors $D^{(n-2)}f$ est continue et B-différentiable vers $L_\lambda^{((n-2)-(k+1))}L^{(k+1)}$. Ainsi prouve-t-on par récurrence que $D^{(n-2)}f$ est B-différentiable vers $L^{(n-2)}$; c'est évidemment une application C^1 vers $L^{(n-2)}$.

d) Vu qu'on a supposé le théorème vrai à l'ordre $(n-1)$, f appartient $C^{n-1}(F,E)$ donc à $C^n(F,E)$. ∇

Supposons E équable mais pas forcément F pour démontrer la proposition suivante qui est une généralisation du théorème de corrélation dans ce cas.

PROPOSITION 9. *Soit f une application n fois B-différentiable de E vers F (où $n \geqslant 3$) telle que $D^{(n-1)}f$ soit B-différentiable vers $L_\lambda^{(2)}L^{(n-3)}$. Alors f appartient à $C^{(n-2)}(F,E)$ et $D^{(n-2)}f$ est B-différentiable vers $L^{(n-2)}$.*

Δ.a) Démontrons d'abord la proposition lorsque $n=3$. Par hypothèse Df est deux fois B-différentiable vers L_λ. D'après le lemme 1, sa différentielle $D^{(2)}f$ est continue vers LL_λ donc vers $L_\lambda L$. Alors Df est B-différentiable vers L (lemme 3). Df est continue vers L d'après ce qui précède, en sorte que f appartient à $C^{1}(F,E)$ et bien sûr à $C^{2}(F,E)$.

b) Prouvons-la maintenant lorsque $n>3$. Supposons-la vraie à l'ordre $(n-1)$ et démontrons-la à l'ordre n. L'application $D^{(n-2)}f$ est deux fois B-différentiable vers $L_{\lambda}L_{\lambda}^{(n-3)}$ et sa différentielle $D^{(n-1)}f$ est continue vers $LL_{\lambda}^{(n-2)}$ (voir lemme 1), donc vers $L_{\lambda}LL_{\lambda}^{(n-3)}$. D'après le lemme 3, $D^{(n-2)}f$ est B-différentiable vers $LL_{\lambda}^{(n-3)}$ donc vers $L_{\lambda}^{(n-3)}L$. Supposons que $D^{(n-2)}f$ soit B-différentiable vers $L_{\lambda}^{(k)}L^{((n-2)-k)}$ (où $1\leqslant k\leqslant n-2$), et prouvons que $D^{(n-2)}f$ est B-différentiable vers $L_{\lambda}^{(k-1)}L^{((n-2)-(k-1))}$. Or $D^{(n-2)}f$ est deux fois B-différentiable vers $L_{\lambda}^{(k)}L^{((n-2)-k)}$, puisque $D^{(n-1)}f$ est évidemment B-différentiable vers $L_{\lambda}^{(k+1)}L^{((n-2)-k)}$. L'application $D^{(n-1)}f$ est continue vers $LL_{\lambda}L^{(n-3)}$ (voir lemme 1), et a fortiori vers $L_{\lambda}L^{(n-2)}$. On en déduit qu'elle est continue vers l'espace vectoriel admissible $L_{\lambda}LL_{\lambda}^{(k-1)}L^{((n-2)-k)}$. D'après le lemme 3, $D^{(n-2)}f$ est B-différentiable vers $LL_{\lambda}^{(k-1)}L^{((n-2)-k)}$, donc vers l'espace vectoriel admissible $L_{\lambda}^{(k-1)}L^{((n-2)-(k-1))}$. On a ainsi démontré par récurrence que $D^{(n-2)}f$ est B-différentiable vers $L^{(n-2)}$, donc vers $L_{\lambda}^{(2)}L^{((n-1)-3)}$. Comme nous avons supposé vraie la proposition à l'ordre $(n-1)$, l'application f appartient à $C^{(n-3)}(F,E)$ et $D^{(n-3)}f$ est B-différentiable vers $L^{(n-3)}$. On en déduit immédiatement que f est un élément de $C^{(n-2)}(F,E)$. ∇

Le théorème de corrélation, joint au théorème 2-4 page 58 de [1], lequel est vrai en supposant simplement E et F admissibles, permet de reconnaître facilement qu'une application est C^{n}, y compris si E et F sont des espaces affines normés.

Si X' et X sont deux espaces quasi-topologiques, nous désignerons par $\mathcal{C}_{\sigma}(X',X)$ l'espace des applications continues de X dans X' muni de la quasi-topologie de la convergence simple. Rappelon qu'un filtre $\mathfrak{F}$ sur $\mathcal{C}(X',X)$ converge dans $\mathcal{C}_{\sigma}(X',X)$ vers un élément f ssi $\mathfrak{F}x$ converge vers $f(x)$ pour tout x de X.

PROPOSITION 10. *Soit* $\mathfrak{F}$ *un filtre sur* $C^n(F,X)$ *tel que* $D^{(n)}\mathfrak{F}$ *converge vers* $T^{(n)}$ *dans* $\mathcal{C}_\lambda(L^{(n)}(\vec{F},\vec{E}),X)$ *et que* $D^{(k)}\mathfrak{F}$ *converge vers* $T^{(k)}$ *dans* $\mathcal{C}_\sigma(L^{(k)}(\vec{F},\vec{E}),X)$ *pour tout* $k\leqslant n$. *Alors* $D^{(k)}\mathfrak{F}$ *converge vers* $T^{(k)}$ *dans* $\mathcal{C}_\lambda(L^{(k)}(\vec{F},\vec{E}),X)$.

Δ.a) Démontrons que $D^{(n-1)}\mathfrak{F}$ converge vers $T^{(n-1)}$ dans l'espace $\mathcal{C}_\lambda(L^{(n-1)}(\vec{F},\vec{E}),X)$. Soit donc $x+\mathfrak{X}$ un filtre convergeant vers un élément x dans X, et prouvons que $D^{(n-1)}\mathfrak{F}(x+\mathfrak{X}^\circ)-T^{(n-1)}(x)$ donc $D^{(n-1)}\mathfrak{F}(x+\mathfrak{X})-T^{(n-1)}(x)$ converge vers 0 dans $L^{(n-1)}(\vec{F},\vec{E})$. Soient ϕ et U respectivement des éléments de $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{X}^\circ$. On suppose U convexe. Si f et h appartiennent respectivement à ϕ et U, d'après [2] 5-3-1, $D^{(n-1)}f(x+h)-D^{(n-1)}f(x)$ appartient à l'enveloppe convexe fermée B de $D^{(n)}\phi(x+U).U$ dans $L^{(n-1)}(F,E)^\circ$. Il s'ensuit que $D^{(n-1)}f(x+h)-T^{(n-1)}(x)$ appartient à $B+D^{(n-1)}\phi(x)-T^{(n-1)}(x)$. On en déduit que le filtre $D^{(n-1)}\mathfrak{F}(x+\mathfrak{X}^\circ)-T^{(n-1)}(x)$ contient le filtre $[D^{(n)}\mathfrak{F}(x+\mathfrak{X}^\circ).\mathfrak{X}^\circ]^{\bar{\sigma}}+[D^{(n-1)}\mathfrak{F}(x)-T^{(n-1)}(x)]$, et par suite converge vers 0 dans $L^{(n-1)}(\vec{F},\vec{E})$.

b) Par récurrence, on prouve que $D^{(k)}\mathfrak{F}$ converge vers $T^{(k)}$ dans l'espace $\mathcal{C}_\lambda(L^{(k)}(\vec{F},\vec{E}),X)$ pour tout $k\leqslant n$.

c) Nous verrons dans un instant que, si F est un espace affine localement-convexe séparé, alors $T^{(0)}$ appartient à $C^n(F,X)$. ∇

Grâce à la proposition ci-dessus, on pourrait facilement redémontrer le théorème de densité de [5] page 15.

Soient maintenant F un espace affine localement-convexe séparé complet, E un espace affine admissible et X un ouvert de E. Soit alors x et v des éléments de X et $\vec{E}$ respectivement. Nous désignerons par A l'ensemble $\{t\in\mathbf{R} \mid x+tv\in X\}$. Soit n un entier positif. Si f est un élément de $C^n(F,X)$, pour tout entier positif k strictement inférieur à n, nous désignerons par f_k l'application de A dans $L^{(k)}(\vec{F},\vec{E})$ définie par $f_k(0)=0$ et par

$$f_k(t)=[D^{(k)}f(x+tv)-D^{(k)}f(x)]/t-D^{(k+1)}f(x).v \text{ si } t\neq 0.$$

Soit $\mathfrak{F}$ un filtre convergeant vers 0 dans $C^n(F,X)$. Pour tout entier positif k strictement inférieur à n, désignons par $\mathfrak{F}_k$ le filtre image de $\mathfrak{F}$ par l'application $f \to f_k$ de $C^n(F,X)$ dans $\mathcal{C}(L^{(k)}(\vec{F},\vec{E}),A)$. Prouvons que $\mathfrak{F}_k$ converge vers 0 dans $\mathcal{C}_\lambda(L^{(k)}(\vec{F},\vec{E}),A)$. On sait que, pour tout f de $C^n(F,X)$ et pour tout t de A, l'élément $f_k(t)$ appartient à l'enveloppe convexe fermée de l'ensemble

$$\{ [D^{(k+1)}f(x+\delta t v) - D^{(k+1)}f(x)].v \mid \delta \in [0,1] \}$$

dans la topologie localement-convexe sous-jacente à $L^{(k)}(\vec{F},\vec{E})$. On en déduit, $\mathfrak{W}$ désignant toujours le filtre des voisinages de 0 dans $\mathbf{R}$, que $\mathfrak{F}_k\mathfrak{W}$ contient $([D^{(k+1)}\mathfrak{F}(x+\mathfrak{W}v) - D^{(k+1)}\mathfrak{F}(x)].v)^{\circ-}$, en sorte que $\mathfrak{F}_k\mathfrak{W}$ converge vers 0 dans $L^{(k)}(\vec{F},\vec{E})$. Il est par ailleurs évident que $\mathfrak{F}_k(t+\mathfrak{W})$ converge vers 0 dans $L^{(k)}(\vec{F},\vec{E})$ pour tout $t \neq 0$ de A. Ceci montre bien que $\mathfrak{F}_k$ converge vers 0 dans $\mathcal{C}_\lambda(L^{(k)}(\vec{F},\vec{E}),A)$.

THEOREME 2. *Reprenons les hypothèses ci-dessus.* $C^n(F,X)$ *est complet.*

Δ. Soit $\mathfrak{F}$ un filtre de Cauchy sur $C^n(F,X)$. Pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$, $D^{(k)}\mathfrak{F}$ est un filtre de Cauchy sur $\mathcal{C}_\lambda(L^{(k)}(\vec{F},\vec{E}),X)$. Il existe un élément $T^{(k)}$ de $\mathcal{C}(L^{(k)}(\vec{F},\vec{E}),X)$ tel que $D^{(k)}\mathfrak{F} - T^{(k)}$ converge vers 0 dans $\mathcal{C}_\lambda(L^{(k)}(\vec{F},\vec{E}),X)$, puisque $\mathcal{C}_\lambda(L^{(k)}(\vec{F},\vec{E}),X)$ est complet (comme le montre une démonstration analogue à celle de la proposition 1). Soient x et v des éléments de X et $\vec{E}$. Pour tout entier k positif et strictement inférieur à n, le filtre $\mathfrak{F}_k - \mathfrak{F}_k$ converge vers 0 dans l'espace $\mathcal{C}_\lambda(L^{(k)}(\vec{F},\vec{E}),A)$, d'après ce qui précède (où $\mathfrak{F}_k$ est défini comme ci-dessus). Il existe donc un élément f_k de $\mathcal{C}(L^{(k)}(\vec{F},\vec{E}),A)$ tel que $\mathfrak{F}_k - f_k$ converge vers 0 dans $\mathcal{C}_\lambda(L^{(k)}(\vec{F},\vec{E}),A)$. De toute évidence $f_k(0)=0$ et $f_k(t)$ est égal à

$$[T^{(k)}(x+tv) - T^{(k)}(x)]/t - T^{(k+1)}(x)v \quad \text{si } t \neq 0,$$

puisque $f_k(t)$ est la limite de $\mathfrak{F}_k(t)$. Comme f_k est une application continue en 0 de A vers $L^{(k)}(\vec{F},\vec{E})$, on en déduit que $T^{(k)}$ est dérivable en x dans la direction de v et admet pour dérivée en ce point et dans cette direction l'élément $T^{(k+1)}(x).v$. Ceci montre que $T^{(0)}$ est une application C^n. D'ailleurs $\mathfrak{F} - T^{(0)}$ converge vers 0, dans $C^n(F,X)$. ∇

THEOREME 3. *Soient* F *un espace affine localement-convexe séparé,* E *un espace affine admissible et* X *un ouvert de* E. *Désignons par* γ *l'application de* $C^n(F, X)$ *dans* $\prod_{0 \leqslant k \leqslant n} \mathcal{C}(L^{(k)}(\vec{F}, \vec{E}), X)$ *définie par* $f \to (D^{(k)} f)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ *Alors l'image de* γ *est fermée dans l'espace affine quasi-topologique*

$$\prod_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \mathcal{C}_\sigma (L^{(k)}(\vec{F}, \vec{E}), X) \times \mathcal{C}_\lambda (L^{(n)}(\vec{F}, \vec{E}), X).$$

Δ. Compte tenu de la proposition 10, ce théorème résulte du fait que $\vec{F}$ peut être plongé dans son complété. ∇

(A SUIVRE)