CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

LAURENT COPPEY

Compléments à l'article « Théories algébriques et extension de préfaisceaux »

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 13, n° 3 (1972), p. 265-273

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1972__13_3_265_0>

© Andrée C. Ehresmann et les auteurs, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

CAHIERS DE TOPOLOGIE *Vol. XIII-3*
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

COMPLEMENTS A L'ARTICLE
THEORIES ALGEBRIQUES ET EXTENSION DE PREFAISCEAUX

par Laurent COPPEY

Nous faisons référence une fois pour toutes à l'article [*], en ce qui concerne les notations, la terminologie et les principales définitions.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et $\mathcal{D}$ une surcatégorie de $\mathcal{C}$; les $\mathcal{D}$-algèbres à droite (resp. à gauche) sur les objets de $\mathcal{C}$ ont été définies comme étant des actions de $\mathcal{D}$ à droite (resp. à gauche) étendant certaines actions naturelles de $\mathcal{C}$. La définition (1) qui suit constitue une généralisation nécessaire pour interpréter la proposition 1-E de [*] dont l'énoncé a une forme inexacte (en général, $\mathcal{D}_F$ n'est pas isomorphe à une surcatégorie de Σ, même lorsque F est injectif).

Sans l'écrire chaque fois, l'expression «à droite» qualifie désormais les «actions» ou «algèbres» envisagées.

Soit $\mathcal{G}$ un graphe multiplicatif présenté par son schéma

$$\mathcal{G} * \mathcal{G} \xrightarrow{\ K\ } \mathcal{G} \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} \mathcal{G}_0$$

dans lequel les symboles ont leur sens usuel. Soit π une application de source $\mathcal{E}$ et de but $\mathcal{G}_0$; une *action de* $\mathcal{G}$ *sur* π est une application θ du produit fibré $\mathcal{E}_{\pi,\beta}$ de π et β vers $\mathcal{E}$ satisfaisant les conditions:

i) $\theta(x, \pi(x)) = x$, pour tout $x \in \mathcal{E}$,

ii) $\pi\theta(x, g) = \alpha(g)$, pour tout $(x, g) \in \mathcal{E}_{\pi,\beta}$,

iii) $\theta(\theta(x, g), g') = \theta(x, g.g')$, si $g.g'$ est défini dans $\mathcal{G}$.

Nous dirons aussi que $\mathcal{G}$ agit sur $\mathcal{E}$, grâce à θ, s'il n'y a pas de doute possible sur π. En général, les actions de $\mathcal{G}$ ne peuvent pas être représentées, dans $\mathfrak{M}_{\mathcal{G}_0}$, par les algèbres d'un triple, contrairement à ce qui a lieu lorsque $\mathcal{G}$ est une catégorie. On peut cependant les interpréter comme

les «algèbres d'un triple non associatif» (la définition précise d'un «triple non associatif» est possible, mais longue à décrire, lorsqu'on remplace l'ensemble des entiers par l'ensemble des entiers non associatifs).

NOTATION ET REMARQUE. Soit θ une action de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{E}$; nous écrirons souvent $x *_{\theta} g$ (ou même $x * g$, s'il n'y a pas de doute sur θ) au lieu de $\theta(x, g)$. L'élément $(x * g) * g'$ peut être défini sans que $g \cdot g'$ le soit; si $(g \cdot g') \cdot g''$ et $g \cdot (g' \cdot g'')$ sont définis dans $\mathcal{G}$, on trouve:

$$x * ((g \cdot g') \cdot g'') = x * (g \cdot (g' \cdot g'')) = ((x * g) * g') * g'',$$

même si $(g \cdot g') \cdot g'' \neq g \cdot (g' \cdot g'')$.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et $\mathcal{G}$ un surgraphe multiplicatif de $\mathcal{C}$, c'est-à-dire que $\mathcal{C}$ est une sous-catégorie de $\mathcal{G}$ et $\mathcal{C}_0 = \mathcal{G}_0$.

DEFINITION 1. Une *$\mathcal{G}$-algèbre sur un objet X de $\mathcal{C}$* est une action θ de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{C}_{X_0}$ telle que:

a) $f *_{\theta} g$ est défini si et seulement si $\alpha(f) = \beta(g)$,

b) si $f *_{\theta} g$ est défini et si $g \in \mathcal{C}$, alors $f *_{\theta} g = f \cdot g$.

REMARQUE: Soit θ une $\mathcal{G}$-algèbre sur X; soit θ' l'application de $\mathcal{G}_{X_0}$ dans $\mathcal{C}_{X_0}$ définie par $\theta'(g) = \theta(1_{X_0}, g)$; l'application θ' satisfait les trois conditions suivantes:

α) $\alpha\theta'(g) = \alpha(g)$, pour tout $g \in \mathcal{G}_{X_0}$,

β) $\theta'(g) = g$ si $g \in \mathcal{C}$,

γ) si $g \cdot g'$ et $\theta'(g) \cdot g'$ sont définis dans $\mathcal{G}$, alors

$$\theta'(g \cdot g') = \theta'(\theta'(g) \cdot g').$$

La correspondance ξ qui à θ fait correspondre θ' est une bijection si $\mathcal{G}$ est une catégorie (proposition 2-C de [*]); mais si $\mathcal{G}$ est seulement un graphe multiplicatif, ξ n'est en général ni surjective, ni injective.

DEFINITION 2. Soit θ une $\mathcal{G}$-algèbre sur X et θ' une $\mathcal{G}$-algèbre sur X'; un *morphisme* λ de θ vers θ' est défini par une flèche dans $\mathcal{C}$ de X vers X', notée aussi λ, telle que

$$\lambda \cdot (f *_{\theta} g) = (\lambda \cdot f) *_{\theta'} g, \quad \text{lorsque } f *_{\theta} g \text{ est défini.}$$

La catégorie des morphismes entre $\mathcal{G}$-algèbres ainsi obtenue est désignée par $\mathfrak{A}_{\mathcal{G}}$ et son foncteur d'oubli (évident) vers $\mathcal{C}$ est noté $U_{\mathcal{G}}$.

DEFINITION 3. Soit U un foncteur d'une catégorie $\mathfrak{A}$ vers $\mathcal{C}$; nous dirons que U *est quasi-algébrique* (resp. *pré-algébrique*) s'il existe un surgraphe (resp. une surcatégorie) $\mathcal{G}$ de $\mathcal{C}$ et un isomorphisme de catégories γ de $\mathfrak{A}_{\mathcal{G}}$ vers $\mathfrak{A}$ tel que $U \circ \gamma = U_{\mathcal{G}}$.

PROPOSITION 1. *Si U est un foncteur quasi-algébrique ou pré-algébrique admettant un adjoint à gauche, alors U est un foncteur algébrique (au sens des triples).*

La démonstration a été donnée dans le cas des foncteurs pré-algébriques (cf. proposition 1-D de [*]); elle est en tout point semblable pour les foncteurs quasi-algébriques; cependant la forme à retenir pour une $\mathcal{G}$-algèbre ne peut pas être celle des applications θ' satisfaisant α, β, γ.

L'énoncé suivant est un complément de la proposition 1-D de [*] et de la précédente.

PROPOSITION 2. *Soit $\mathcal{D}$ une surcatégorie de $\mathcal{C}$; si l'inclusion $(\mathcal{D}, \iota, \mathcal{C})$ admet un adjoint à droite R, le foncteur d'oubli $U_{\mathcal{D}}$ des $\mathcal{D}$-algèbres vers $\mathcal{C}$ est algébrique.*

Il suffit de remarquer que R est fidèle; dans ce cas, on sait que $\mathcal{D}$ est isomorphe à la catégorie de Kleisli associée au triple $\mathbf{T} = (T, \varepsilon, \mu)$ défini par (ι, R), d'après la proposition 4-C de [*]; on en déduit que $U_{\mathcal{D}}$ est canoniquement isomorphe au foncteur d'oubli des $\mathbf{T}$-algèbres vers $\mathcal{C}$ (proposition 5-C de [*]). Il est intéressant de savoir comment est définie la $\mathcal{D}$-algèbre libre ξ engendrée par un objet X de $\mathcal{C}$; c'est une $\mathcal{D}$-algèbre sur $TX = RX$; l'action de $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{C}_{RX_0}$ correspondante est donnée par la formule:

$$f \underset{\xi}{*} g = \mu_X \cdot R(f \cdot g) \cdot \varepsilon_Z$$

dans laquelle $Z = \alpha(g)$ et $\alpha(f) = \beta(g)$.

Un foncteur quasi-algébrique est toujours isomorphe à une restriction d'un foncteur pré-algébrique; on peut même choisir ce dernier «minimum» en un sens que nous allons préciser.

Soit $\mathcal{G}$ un surgraphe multiplicatif de $\mathcal{C}$ et soit $L(\mathcal{G})$ la catégorie libre des chemins propres de $\mathcal{G}$. Considérons la relation $\rho_{\mathcal{C}}$ dans $L(\mathcal{G})$ dont le graphe sous-jacent est l'ensemble $A_{\mathcal{C}}$ des couples $((f', f), f' \cdot f)$, avec f et f' éléments de $\mathcal{C}$. Cette relation satisfait les conditions de la proposition 5 de [Eh, a] (p. 92) et par conséquent, il existe une catégorie quotient strict de $L(\mathcal{G})$ par la relation d'équivalence compatible $r_{\mathcal{C}}$ engendrée par $\rho_{\mathcal{C}}$, dont l'ensemble sous-jacent est isomorphe à l'ensemble des chemins $\rho_{\mathcal{C}}$-réduits de $L(\mathcal{G})$; cette catégorie quotient est notée $\mathcal{C}(\mathcal{G})$. Il est facile de voir que le foncteur naturel de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}(\mathcal{G})$ est injectif et sa restriction aux unités bijective, de sorte qu'on peut choisir $\mathcal{C}(\mathcal{G})$ comme surcatégorie de $\mathcal{C}$; nous notons τ l'application naturelle de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{C}(\mathcal{G})$ dont la restriction à $\mathcal{C}$ est l'inclusion de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}(\mathcal{G})$; τ définit en fait un homomorphisme entre les graphes orientés sous-jacents.

PROPOSITION 3. *Il y a une bijection naturelle entre les $\mathcal{G}$-algèbres sur X et les $\mathcal{C}(\mathcal{G})$-algèbres sur X satisfaisant la condition suivante:*

$$f*(\tau(g) \cdot \tau(g')) = f*\tau(g \cdot g'), \quad \textit{lorsque } g \cdot g' \textit{ est défini dans } \mathcal{G};$$

cette bijection s'étend en un foncteur I injectif et plein de $\mathfrak{A}_{\mathcal{G}}$ vers $\mathfrak{A}_{\mathcal{C}(\mathcal{G})}$ satisfaisant $U_{\mathcal{C}(\mathcal{G})} \circ I = U_{\mathcal{G}}$.

DEMONSTRATION. Soit $\overline{\theta}$ une $\mathcal{C}(\mathcal{G})$-algèbre sur X satisfaisant la condition de l'énoncé. Soit $f \in \mathcal{C}_{X_0}$ et $g \in \mathcal{G}$ avec $\beta(g) = \alpha(f)$; on définit une action θ de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{C}_{X_0}$ par l'égalité $f *_{\theta} g = f *_{\overline{\theta}} \tau(g)$.

Réciproquement, soit θ une $\mathcal{G}$-algèbre sur X. Soit $\overline{c} \in \mathcal{C}(\mathcal{G})$ et $f \in \mathcal{C}_{X_0}$, avec $\alpha(f) = \beta(\overline{c})$; un représentant c de $\overline{c}$ est un chemin dans $\mathcal{G}$; notons-le $(g_n, g_{n-1}, \ldots, g_1)$ et posons

$$E(f, c) = (\ldots((f *_{\theta} g_n) *_{\theta} g_{n-1}) *_{\theta} \ldots) *_{\theta} g_1 ;$$

si c' est un autre représentant de $\overline{c}$, on sait [Eh, a] qu'il existe une suite $c_1, c_2, \ldots, c_p$ de chemins dans $\mathcal{G}$ telle que

$c_1 = c$, $c_p = c'$ et tout couple (c_{i+1}, c_i) ou (c_i, c_{i+1}) est de la forme

$$((g^i_n, g^i_{n-1}, \ldots, g^i_1), (g^i_n, g^i_{n-1}, \ldots, g^i_{j+2}, b, g^i_{j-1}, \ldots, g^i_1)),$$

où $((g^i_{j+1}, g^i_j), b) \in A_{\mathcal{C}}$;

on a alors:

$$\begin{aligned} E(f, c_i) &= (\dots((f * g_n^i) * g_{n-1}^i)\dots) * g_{j+1}^i) * g_j^i)\dots) * g_1^i \\ &= (\dots((f * g_n^i) * g_{n-1}^i)\dots) \cdot g_{j+1}^i \cdot g_j^i)\dots) * g_1^i \\ &\qquad\qquad (\text{car } g_j^i,\ g_{j+1}^i \in \mathcal{C}) \\ &= (\dots((f * g_n^i) * g_{n-1}^i)\dots) * h)\dots) * g_1^i \quad (\text{car } h \in \mathcal{C}) \\ &= E(f, c_{i+1}); \end{aligned}$$

donc $E(f, c) = E(f, c')$; l'expression $E(f, c)$ étant indépendante du représentant c choisi dans $\overline{c}$, on peut définir l'action $\overline{\theta}$ de $\mathcal{C}(\mathcal{G})$ sur $\mathcal{C}_{X_0}$ par l'égalité

$$f \underset{\overline{\theta}}{*} \overline{c} = E(f, c);$$

il est facile de vérifier que cette action définit en fait une $\mathcal{C}(\mathcal{G})$-algèbre sur X satisfaisant la condition de l'énoncé. Les correspondances ainsi définies entre ces $\mathcal{C}(\mathcal{G})$-algèbres $\overline{\theta}$ et les $\mathcal{G}$-algèbres θ sur X sont bien inverses l'une de l'autre. Le reste de la démonstration est simple.

Si $\mathcal{D}'$ est une surcatégorie de $\mathcal{C}$ et si τ' est une application de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{D}'$ dont la restriction à $\mathcal{C}$ soit l'inclusion de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{D}'$, il existe un unique foncteur de $\mathcal{C}(\mathcal{G})$ vers $\mathcal{D}'$, soit ϕ, tel que $\tau' = \phi \circ \tau$. C'est en ce sens qu'on peut dire que le foncteur $U_{\mathcal{C}(\mathcal{G})}$ est le foncteur pré-algébrique «minimum» admettant $U_{\mathcal{G}}$ comme sous-foncteur.

Retour à la proposition 1-E de [*].

Soit F un foncteur injectif de $\mathcal{C}$ vers une catégorie Σ et soit $\mathcal{D}$ une surcatégorie de $\mathcal{C}$; soit $\mathcal{D}_F$ la somme fibrée de F et de $(\mathcal{D}, \iota, \mathcal{C})$ dans la catégorie *des néofoncteurs*; le néofoncteur canonique de Σ vers $\mathcal{D}_F$ est injectif et sa restriction aux unités est une bijection, de sorte qu'on peut regarder $\mathcal{D}_F$ comme un surgraphe multiplicatif de Σ; alors, compte tenu de l'extension donnée plus haut de la notion de $\mathcal{D}$-algèbre, l'énoncé de la proposition 1-E est exact.

Complétion $H^{\cdot}$-projective d'une catégorie.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie telle que $\mathcal{C}_0 \in \hat{\mathfrak{M}}$: la catégorie $\mathfrak{A}_{\mathbf{C}_\beta}$ a été définie dans [*] et le plongement de $\mathcal{C}$ dans $\mathfrak{A}_{\mathbf{C}_\beta}$ était désigné par Γ_β.

Soit $H^{\cdot}$ une «petite» catégorie (petite par rapport à $\mathcal{C}$, de façon que la catégorie $\mathcal{C}^{H^{\cdot}} = \mathfrak{N}(\mathcal{C}, H^{\cdot})$ ait encore son ensemble de morphismes élément de $\hat{\mathfrak{N}}$; si $H^{\cdot}$ est de même «taille» que $\mathcal{C}$, il convient d'introduire un univers $\hat{\hat{\mathfrak{N}}}$ d'ordre supérieur à celui de $\hat{\mathfrak{N}}$).

Considérons les objets suivants de $\mathfrak{A}_{\mathbf{C}_\beta}$:

1° ceux qui sont images par Γ_β des objets de $\mathcal{C}$; on note A_X l'objet $\Gamma_\beta(X)$; A_X «est» l'action naturelle à droite de $\mathcal{C}$ sur la classe $\mathcal{C}_X$ des flèches, dans $\mathcal{C}$, de but X;

2° pour tout foncteur ϕ, de $H^{\cdot}$ vers $\mathcal{C}$, on note A_ϕ l'action naturelle à droite de $\mathcal{C}$ sur la classe $\mathcal{C}_\phi$ des transformations naturelles de source un foncteur constant et de but ϕ.

Nous désignons par $\overline{\mathcal{C}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{A}_{\mathbf{C}_\beta}$ ayant pour objets les A_X, pour $X \in \mathcal{C}_0$, et les A_ϕ, pour $\phi \in (\mathcal{C}^{H^{\cdot}})_0$.

L'image de $\mathcal{C}$ par Γ_β est contenue dans $\overline{\mathcal{C}}$; on désigne alors par ι le foncteur $(\overline{\mathcal{C}}, \underline{\Gamma}_\beta, \mathcal{C})$. De même, soit $\iota_{H^{\cdot}}$ le plongement naturel de $\mathcal{C}^{H^{\cdot}}$ dans $\mathfrak{A}_{\mathbf{C}_\beta}$.

LEMME 1. *Pour tout foncteur ϕ de $H^{\cdot}$ vers $\mathcal{C}$, le foncteur $\iota \circ \phi$ admet A_ϕ pour limite projective dans $\overline{\mathcal{C}}$; cette limite est susceptible d'être canoniquement naturalisée.*

DEMONSTRATION. Soit ϕ un foncteur de $H^{\cdot}$ vers $\mathcal{C}$. Soit $t: \hat{X} \to \phi$ un élément de $\mathcal{C}_\phi$; pour tout $e \in H^{\cdot}_0$, $t(e): X \to \phi(e)$ est un élément de l'ensemble $\mathcal{C}_{\phi(e)}$; l'application (évaluation en e) E_e ainsi définie, de $\mathcal{C}_\phi$ vers $\mathcal{C}_{\phi(e)}$ est sous-jacente à un morphisme p_e de A_ϕ vers $A_{\phi(e)}$ dans $\overline{\mathcal{C}}$. L'application qui à e fait correspondre p_e définit une transformation naturelle p du foncteur constant de $H^{\cdot}$ vers $\overline{\mathcal{C}}$ sur A_ϕ, soit $\hat{A}_\phi$, vers le foncteur $\iota \circ \phi$; il est facile de vérifier maintenant que A_ϕ est une limite projective de $\iota \circ \phi$ dans $\overline{\mathcal{C}}$ et que p en est une naturalisation.

LEMME 2. *Si $\phi: H^{\cdot} \to \mathcal{C}$ a une limite projective P dans $\mathcal{C}$, alors A_P est une limite projective de $\iota \circ \phi$ dans $\overline{\mathcal{C}}$; autrement dit, le foncteur ι est compatible avec les limites projectives existant dans $\mathcal{C}$.*

DEMONSTRATION. Il suffit de remarquer que les objets A_P et A_ϕ sont isomorphes dans $\overline{\mathcal{C}}$.

La catégorie $\mathcal{C}_1$.

La catégorie $\overline{\mathcal{C}}$ est une bonne approche pour la complétion $H^{\cdot}$-projective de $\mathcal{C}$, mais si ses objets sont convenables (c'est-à-dire nécessaires), elle possède cependant «trop» de flèches. Nous allons définir une certaine sous-catégorie $\mathcal{C}_1$ de $\overline{\mathcal{C}}$ qui sera adaptée au problème de la $H^{\cdot}$-complétion projective.

Soit q une transformation naturelle de source un foncteur constant de $H^{\cdot}$ vers $\overline{\mathcal{C}}$ et de but un foncteur du genre $\iota \circ \phi$. Si les flèches $q(e)$ appartiennent toutes à une sous-classe $\mathcal{C}'$ de $\overline{\mathcal{C}}$, nous dirons que q est un ($\mathcal{C}$-)cône à valeurs dans $\mathcal{C}'$.

Première étape de la construction de $\mathcal{C}_1$: Considérons la classe $\tilde{\mathcal{C}}_1^1$ des flèches de $\overline{\mathcal{C}}$ qui sont des projections naturalisées (Lemme 1) ou des flèches de $\iota(\mathcal{C})$ dans $\overline{\mathcal{C}}$; soit $\mathcal{C}_1^1$ la sous-catégorie de $\overline{\mathcal{C}}$ engendrée par cette classe $\tilde{\mathcal{C}}_1^1$.

Deuxième étape: Soit $\tilde{\mathcal{C}}_1^2$ la classe des flèches de $\overline{\mathcal{C}}$ qui sont:

- ou bien des flèches de $\mathcal{C}_1^1$,
- ou bien des crochets (dans $\overline{\mathcal{C}}$) de $\mathcal{C}$-cônes à valeurs dans $\mathcal{C}_1^1$,

et soit $\mathcal{C}_1^2$ la sous-catégorie de $\overline{\mathcal{C}}$ engendrée par $\tilde{\mathcal{C}}_1^2$.

Par récurrence, on définit, pour tout ordinal μ, la catégorie $\mathcal{C}_1^\mu$ (si μ a un prédécesseur $\mu-1$, on procède comme pour passer de $\mathcal{C}_1^1$ à $\mathcal{C}_1^2$; si μ est limite, on pose $\mathcal{C}_1^\mu = \bigcup_{\nu<\mu} \mathcal{C}_1^\nu$).

Soit Λ un ordinal régulier supérieur à l'ordinal initial associé à à $|H|$ et posons $\mathcal{C}_1^\Lambda = \mathcal{C}_1$; soit ι_1 la «restriction» de ι à $\mathcal{C}_1$:

$$\iota_1 = (\mathcal{C}_1, \underline{\iota}, \mathcal{C}).$$

LEMME 3. *Pour tout foncteur* ϕ *de* $H^{\cdot}$ *vers* $\mathcal{C}$, A_ϕ *est une limite projective dans* $\mathcal{C}_1$ *de* $\iota_1 \circ \phi$.

On sait, d'après le lemme 1, que A_ϕ est une limite projective dans $\overline{\mathcal{C}}$ de $\iota \circ \phi$. Il suffit alors de remarquer que:

1° les projections naturalisées $p_e : A_\phi \to A_{\phi(e)}$ sont bien dans $\mathcal{C}_1$ (elles sont déjà dans $\mathcal{C}_1^1$),

2° le crochet d'un $\mathcal{C}$-cône q à valeurs dans $\mathcal{C}_1$ est encore dans $\mathcal{C}_1$. En effet, les $q(e)$ sont dans des $\mathcal{C}_1^{\mu(e)}$ et il suffit de se placer dans la

catégorie $\mathcal{C}_1^{\sup_{e\in H_0'}\mu(e)}$ pour voir que le crochet en question est dans la catégorie $\mathcal{C}_1^{\sup_{e\in H_0'}\mu(e)+1}$, c'est-à-dire dans $\mathcal{C}_1^{\Lambda}=\mathcal{C}_1$, d'après le choix de Λ.

LEMME 4. *Soit $(\mathcal{D}, \varinjlim)$ une catégorie à H'-limites projectives naturalisées et soit j un foncteur de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$ compatible avec les limites projectives existant dans $\mathcal{C}$. Il existe un unique foncteur de $\mathcal{C}_1$ vers $\mathcal{D}$, soit k, qui est compatible avec les limites projectives des foncteurs du genre $\iota_1\circ\phi$ et qui vérifie $k\circ\iota_1=j$.*

On pose $k_0=j$ et on définit k_μ par récurrence. Le foncteur cherché n'est rien d'autre que la limite $k_\Lambda=k$. Lorsque k_μ est défini, on voit que $k_{\mu+1}$ est déterminé de la manière suivante:

- si $f\in\mathcal{C}_1^{\mu}$, on pose $k_{\mu+1}(f)=k_\mu(f)$;
- si f est un crochet de $\mathcal{C}$-cône à valeurs dans $\mathcal{C}_1^{\mu}$, soit $f=[f_e]_{e\in H_0'}$, on pose $k_{\mu+1}(f)=[k_\mu(f_e)]_{e\in H_0'}$;

$k_{\mu+1}$ est ainsi défini sur la classe $\tilde{\mathcal{C}}_1^{\mu+1}$ et par conséquent sur la catégorie $\mathcal{C}_1^{\mu+1}$.

REMARQUES. 1° Le foncteur ι_1 est toujours compatible avec les limites projectives; il suffit en effet de voir que l'isomorphisme canonique γ de A_P vers A_ϕ, où P est une limite projective de ϕ dans $\mathcal{C}$, est une flèche de $\mathcal{C}_1$; or il est évident que $\gamma\in\mathcal{C}_1^2$ ainsi que γ^{-1}, donc a fortiori $\gamma\in\mathcal{C}_1$.

2° L'image par $\iota_{H'}$ de $\mathcal{C}^{H'}$ est aussi dans $\mathcal{C}_1$; en effet, soit $t:\phi\to\psi$ une transformation naturelle de ϕ vers ψ; soit p_e les projections naturelles de A_ϕ vers $A_{\phi(e)}$; les flèches $\iota(t(e)).p_e$ sont dans $\mathcal{C}_1^1$ (composés de flèches de $\tilde{\mathcal{C}}_1^1$) et $\iota(t)$ est alors dans $\tilde{\mathcal{C}}_1^2$, puisque c'est le crochet de la famille $(\iota(t(e)).p_e)_{e\in H_0'}$. [On a bien $q_e.\iota(t)=\iota(t(e)).p_e$ pour tout $e\in H_0'$, si q_e est la projection naturelle de A_ψ vers $A_{\psi(e)}$, car, pour tout $\xi\in A_\phi$, on a:

$$q_e.\iota(t)(\xi)=q_e(t.\xi)=(t.\xi)(e)=t(e).\xi(e)=$$
$$=t(e).p_e(\xi)=(\iota(t(e)).p_e)(\xi).\ ]$$

H'-complétion projective de $\mathcal{C}$.

Pour trouver une H'-complétion projective de $\mathcal{C}$, il suffit d'itérer

le procédé qui a permis de passer de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}_1$. Pour tout ordinal μ, on définit $\mathcal{C}_\mu$

- comme réunion des $\mathcal{C}_\nu$, $\nu < \mu$, si μ est limite,
- comme étant la catégorie $(\mathcal{C}_{\mu-1})_1$, si μ a un prédécesseur.

THEOREME. *$\mathcal{C}_\Lambda$ est une $H^\cdot$-complétion projective de $\mathcal{C}$.*

La démonstration utilise les divers lemmes qui ont été établis jusqu'à maintenant. Il s'agit d'une complétion à équivalence naturelle près.

REMARQUES. 1° Si la classe $\mathcal{C}_\phi$ est vide, pour certains foncteurs, alors A_ϕ est un objet initial dans $\mathcal{C}_1^1$ et le raisonnement (non mentionné) du Lemme 1 n'est plus exact, de sorte que A_ϕ n'est pas une limite projective de $\iota \circ \phi$ dans $\overline{\mathcal{C}}$. Pour éviter cette difficulté, il convient de partir d'une catégorie $\mathcal{C}$ ayant un objet initial, de sorte que $\mathcal{C}_\phi$ ne peut pas être vide. Si I est un objet initial, A_I est aussi un objet initial de $\overline{\mathcal{C}}$, et même de $\mathcal{C}_1$ donc de $\mathcal{C}^\Lambda$.

2° Tout ce qui vient d'être dit est encore vrai avec une classe $\mathcal{J}$ de «petites catégories $H^\cdot$». La complétion $\mathcal{C}_\Lambda$ sera de «même taille» que $\mathcal{C}$ si la classe $\mathcal{J}$ est encore «petite par rapport à $\mathcal{C}$». Dans ce cas, la catégorie $\overline{\mathcal{C}}$ doit être remplacée par la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{A}_{\mathbf{C}_\beta}$ ayant pour objets les A_X, où $X \in \mathcal{C}_0$, et les A_ϕ, où $\alpha(\phi) \in \mathcal{J}$. A partir de là, les catégories $\mathcal{C}_1^1$, $\mathcal{C}_1^\mu$, etc..., $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, ..., $\mathcal{C}_\mu$, $\mathcal{C}_\Lambda$ se définissent comme dans le cas où $\mathcal{J} = \{ H^\cdot \}$.

3° Les complétions inductives de $\mathcal{C}$ s'obtiennent en remplaçant $\mathfrak{A}_{\mathbf{C}_\beta}$ par $\mathfrak{A}_{\mathbf{C}_\alpha}$, Γ_β par Γ_α et les classes $\mathcal{C}_\phi$ par leurs analogues $\mathcal{C}^\phi$.

4° Les résultats précédents ne sont pas nouveaux; la méthode nous paraît cependant assez différente de celle indiquée dans [Eh, b].

Références.

[*] L. COPPEY, Théories algébriques et extension de préfaisceaux, *Cahiers Topo. Géo. diff. XIII-1*, Paris (1972).

[Eh] C. EHRESMANN, a) *Algèbre 1^e partie*, C. D. U., Paris, 1968.

b) Sur l'existence de structures libres et de foncteurs adjoints, *Cahiers Topo. Géo. diff. IX-1-2*, Paris (1967).