CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

LAURENT COPPEY

Théories algébriques et extension de préfaisceaux

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 13, nº 1 (1972), p. 3-40

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1972__13_1_3_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE *Vol. XIII-1*
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

THEORIES ALGEBRIQUES ET EXTENSION DE PREFAISCEAUX

par Laurent COPPEY

INTRODUCTION.

Nous considérons, dans cet article, qu'un type de structures algébriques associé à une catégorie $\mathcal{C}$ est déterminé par la simple donnée d'une «sur-catégorie» $\mathfrak{D}$ de $\mathcal{C}$ (i. e. une catégorie $\mathfrak{D}$ admettant $\mathcal{C}$ pour sous-catégorie et ayant les mêmes objets que $\mathcal{C}$); les flèches de $\mathfrak{D}$ qui ne sont pas dans $\mathcal{C}$ s'interprètent comme des «opérations formelles» ajoutées à $\mathcal{C}$; une $\mathfrak{D}$-algèbre sur un objet X de $\mathcal{C}$ est déterminée par une application de de la classe $\mathfrak{D}_{X_0}$ dans la classe $\mathcal{C}_{X_0}$ satisfaisant trois conditions (*). Ce point de vue englobe celui de l'algèbre au sens des triples: lorsqu'on se donne un triple dans $\mathcal{C}$, la catégorie de Kleisli correspondante joue alors le rôle de $\mathfrak{D}$ (ceci nécessite une interprétation de la catégorie de Kleisli, dans laquelle la multiplication du triple sert à la définition des flèches et non à la composition des flèches). Dans le cas général, il y a toujours un foncteur d'oubli des $\mathfrak{D}$-algèbres vers $\mathcal{C}$; si celui-ci admet un adjoint à gauche, il est automatiquement algébrique.

Les $\mathfrak{D}$-algèbres correspondent en fait à des extensions d'actions naturelles (à gauche ou à droite) de $\mathcal{C}$ sur certaines classes. En ce sens il est possible de définir des $\mathfrak{D}$-algèbres sur des «objets attachés à $\mathcal{C}$» (par exemple, les foncteurs de but $\mathcal{C}$); ce genre d'algèbres est étudié dans le dernier paragraphe.

Conventions et notations.

Diverses catégories sont données par une classe d'objets et une classe naturelle de flèches, la composition des flèches n'étant pas indiquée quand il n'y a pas de doute à son sujet. La flèche neutre associée à un objet X d'une catégorie est notée 1_X, ou parfois simplement «1». Une classe d'objets d'une catégorie Σ est souvent notée Σ_0 .

(*) Voir Conventions et notations.

Soit Σ une catégorie et X un objet de Σ; la classe des flèches de but X est notée Σ_{X_0} et la classe des flèches de source X est notée Σ^{X_0}; la catégorie des flèches au-dessus (resp. au-dessous) de X est notée Σ_X (resp. Σ^X), de sorte que Σ_{X_0} (resp. Σ^{X_0}) est une classe d'objets de Σ_X (resp. de Σ^X).

Nous n'employons pas de symbole particulier pour la composition longitudinale des transformations naturelles, tandis que nous indiquons par un point la composition latérale; les foncteurs sont identifiés aux transformations naturelles identiques qui leur sont associées. La «valeur» d'une transformation naturelle η en un objet X est désignée par η_X. Nous écrivons $\mathcal{C}^{H^\cdot}$ pour la catégorie des transformations naturelles entre foncteurs de $H^\cdot$ vers $\mathcal{C}$.

Soient $\mathfrak{M}_0$ et $\hat{\mathfrak{M}}_0$ deux univers tels que:

$$\mathfrak{M}_0 \in \hat{\mathfrak{M}}_0 \quad \text{et} \quad \mathfrak{M}_0 \subset \hat{\mathfrak{M}}_0 \ ;$$

les catégories pleines d'applications correspondantes sont notées $\mathfrak{M}$ et $\hat{\mathfrak{M}}$; les ensembles éléments de $\mathfrak{M}_0$ sont en principe écrits avec des majuscules italiques, tandis que les éléments de $\hat{\mathfrak{M}}_0$ (qui ne sont pas éléments de $\mathfrak{M}_0$!) sont écrits avec des majuscules de ronde (par exemple: $\mathfrak{M}_0 \in \hat{\mathfrak{M}}$). Les catégories de foncteurs associées aux univers $\mathfrak{M}_0$ et $\hat{\mathfrak{M}}_0$ sont notées $\mathfrak{F}$ et $\hat{\mathfrak{F}}$. Enfin, un préfaisceau sur une catégorie $\mathcal{C}$, à valeurs dans $\hat{\mathfrak{M}}$, est un foncteur F tel que $F(X) \cap F(X') = \emptyset$ si $X \neq X'$.

PLAN.

A. ACTIONS DE CATEGORIES ET PREFAISCEAUX.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie telle que $\mathcal{C}_0 \in \hat{\mathfrak{M}}_0$; les actions (à gauche ou à droite) de $\mathcal{C}$ sur les ensembles de $\hat{\mathfrak{M}}_0$ sont les algèbres de triples dans la catégorie $\hat{\mathfrak{M}}_{\mathcal{C}_0}$ des applications au-dessus de $\mathcal{C}_0$; si $\mathcal{C}$ n'a qu'un objet, on retrouve les actions de monoïde comme algèbres de triples dans la catégorie $\hat{\mathfrak{M}}$. Nous avons tenu à écrire ce paragraphe pour fixer les notations et pour mettre en évidence la seule utilisation des produits fibrés finis dans $\hat{\mathfrak{M}}$, de sorte que le résultat est encore vrai en remplaçant $\hat{\mathfrak{M}}$ par une catégorie $\hat{\mathcal{H}}$ à produits fibrés finis et $\mathcal{C}$ par une «réalisation dans $\hat{\mathcal{H}}$» de l'esquisse des catégories (cf. la notion d'espèce de structures structurée [**1a**]).

La catégorie $\mathcal{C}$ est donc représentée par son schéma usuel:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}_0 \arrow[r, "i"] & \mathcal{C} \arrow[l, bend right, "\alpha"'] \arrow[l, bend left, "\beta"] & \mathcal{C} * \mathcal{C} \arrow[l, "\kappa"'] \end{tikzcd}$$

dans lequel α et β sont les applications «source» et «but», κ l'application «composition» dans $\mathcal{C}$, et i l'application qui à un objet X de $\mathcal{C}$ fait correspondre sa flèche neutre 1_X.

Soit $\pi : \mathcal{E} \to \mathcal{C}_0$ un objet de $\hat{\mathfrak{M}}_{\mathcal{C}_0}$. L'endofoncteur sous-jacent au triple que nous devons décrire sera noté C_α; à l'objet π il fait correspondre l'objet défini comme suit: Soit $(\mathcal{E}_{\pi,\alpha}, p_{\mathcal{E}}, p_{\mathcal{C}})$ le produit fibré du couple (π, α) dans $\hat{\mathfrak{M}}$; on pose par définition $C_\alpha(\pi) = \beta \circ p_{\mathcal{C}}$.

Il est facile de décrire alors complètement le foncteur C_α; nous laissons ce soin au lecteur.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}_{\pi,\alpha} \arrow[r, "p_{\mathcal{C}}"] \arrow[d, "p_{\mathcal{E}}"'] \arrow[dr, "C_\alpha(\pi)"'] & \mathcal{C} \arrow[d, bend right, "\alpha"'] \arrow[d, bend left, "\beta"] \\ \mathcal{E} \arrow[r, "\pi"] & \mathcal{C}_0 \end{tikzcd}$$

Définissons les transformations naturelles

$$\hat{\varepsilon} : 1 \to C_\alpha \quad \text{et} \quad \hat{\mu} : C_\alpha^2 \to C_\alpha$$

qui feront de $\mathbf{C}_\alpha = (C_\alpha, \hat{\varepsilon}, \hat{\mu})$ un triple dans $\hat{\mathfrak{M}}_{\mathcal{C}_0}$. [Ponctuellement, $\hat{\varepsilon}$ correspond à l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}_{\pi,\alpha}$ qui à x associe $(\pi(x), x)$ et $\hat{\mu}$ correspond à l'application de $\mathcal{E}_{C_\alpha(\pi),\alpha}$ dans $\mathcal{E}_{\pi,\alpha}$ qui à $(g', (g, x))$ associe $(g'.g, x)$]. Précisons donc, pour tout objet π de $\hat{\mathfrak{M}}_{\mathcal{C}_0}$, les flèches $\hat{\varepsilon}_\pi$ et $\hat{\mu}_\pi$, uniquement à l'aide des flèches de $\hat{\mathfrak{M}}$ et des produits fibrés finis dans $\hat{\mathfrak{M}}$. Nous posons:

$$\hat{\varepsilon}_\pi = (C_\alpha(\pi), \varepsilon_\pi, \pi), \quad \hat{\mu}_\pi = (C_\alpha(\pi), \mu_\pi, C_\alpha^2(\pi)).$$

Définition de ε_π: en usant du fait que $(\mathcal{E}_{\pi,\alpha}, p_{\mathcal{E}}, p_{\mathcal{C}})$ est un produit fibré, on voit qu'il existe une seule flèche (c'est ε_π) de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{E}_{\pi,\alpha}$ telle que l'on ait:

$$p_{\mathcal{C}} \circ \varepsilon_\pi = i \circ \pi, \quad p_{\mathcal{E}} \circ \varepsilon_\pi = 1_{\mathcal{E}}.$$

On trouve

$$C_\alpha(\pi) \circ \varepsilon_\pi = \beta \circ p_{\mathcal{C}} \circ \varepsilon_\pi = \beta \circ i \circ \pi = \pi$$

et $\hat{\varepsilon}_\pi$ est bien une flèche au-dessus de $\mathcal{C}_0$.

Définition de μ_π: on prend d'abord un produit fibré $(p'_{\mathcal{C}}, p'_{\mathcal{E}})$ du couple $(C_\alpha(\pi), \alpha)$ dans $\hat{\mathfrak{M}}$. On voit alors qu'il existe une flèche et une seule, soit ν_π, de source $\mathcal{E}_{C_\alpha(\pi),\alpha}$ et de but $\mathcal{C} * \mathcal{C}$ telle que

$$\nu_\alpha \circ \nu_\pi = p'_{\mathcal{C}}, \quad \nu_\beta \circ \nu_\pi = p_{\mathcal{C}} \circ p'_{\mathcal{E}},$$

ν_α et ν_β étant les projections canoniques du produit fibré de (α, β). En usant du fait que $(\mathcal{E}_{\pi,\alpha}, p_{\mathcal{E}}, p_{\mathcal{C}})$ est un produit fibré, on trouve une unique

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}_{C_\alpha(\pi),\alpha} \arrow[r, "\nu_\pi"] \arrow[d, "p'_{\mathcal{E}}"] \arrow[d, dashed, bend right, "\mu_\pi"'] \arrow[dr, "p'_{\mathcal{C}}"] \arrow[ddr, "C_\alpha^2(\pi)"] & \mathcal{C} * \mathcal{C} \arrow[d, bend right, "\nu_\alpha"'] \arrow[d, "\kappa"] \arrow[d, bend left, "\nu_\beta"] \\
\mathcal{E}_{\pi,\alpha} \arrow[r, "p_{\mathcal{C}}"] \arrow[d, "p_{\mathcal{E}}"'] \arrow[dr, "C_\alpha(\pi)"'] & \mathcal{C} \arrow[d, bend right, "\alpha"'] \arrow[d, bend left, "\beta"] \\
\mathcal{E} \arrow[r, "\pi"'] & \mathcal{C}_0 \arrow[u, "i"']
\end{tikzcd}$$

flèche (c'est μ_π) de $\mathcal{E}_{C_\alpha(\pi),\alpha}$ vers $\mathcal{E}_{\pi,\alpha}$ telle que

$$p_{\mathcal{E}} \circ \mu_\pi = p_{\mathcal{E}} \circ p'_{\mathcal{E}}, \quad p_{\mathcal{C}} \circ \mu_\pi = \kappa \circ \nu_\pi .$$

On obtient successivement:

$$C_\alpha(\pi) \circ \mu_\pi = \beta \circ \kappa \circ \nu_\pi = \beta \circ v_\alpha \circ \nu_\pi = \\ = \beta \circ p'_{\mathcal{C}} = C_\alpha^2(\pi),$$

et $\hat{\mu}_\pi$ est bien une flèche au-dessus de $\mathcal{C}_0$.

Puisque $\hat{\varepsilon}_\pi$ et $\hat{\mu}_\pi$ ont été définis à partir de la propriété universelle d'un produit fibré dans $\hat{\mathfrak{M}}$, il en résulte que $\hat{\varepsilon}$ et $\hat{\mu}$ sont des transformations naturelles. Les égalités entre $\hat{\varepsilon}$ et $\hat{\mu}$ faisant de $\mathbf{C}_\alpha$ un triple dans $\hat{\mathfrak{M}}_{\mathcal{C}_0}$ reviennent à exprimer (en termes d'égalités entre flèches) que $i(\mathcal{C}_0)$ est une classe d'unités pour κ et que κ est associative.

PROPOSITION 1. *La catégorie des $\mathbf{C}_\alpha$-algèbres au-dessus de $\hat{\mathfrak{M}}_{\mathcal{C}_0}$ est canoniquement isomorphe à la catégorie des préfaisceaux sur $\mathcal{C}$.*

La démonstration est laissée au lecteur. Utilisant cet isomorphisme canonique, la présentation d'un préfaisceau $\hat{F}$ sous forme de $\mathbf{C}_\alpha$-algèbre revient à le regarder comme une «action de $\mathcal{C}$» sur l'ensemble somme des $\hat{F}(X)$, où X parcourt $\mathcal{C}_0$. La proposition précédente est l'analogue de celle qui exprime les actions d'un monoïde fixe comme algèbres d'un triple dans $\hat{\mathfrak{M}}$.

En échangeant les rôles joués par α et β, on obtient un triple $\mathbf{C}_\beta = (C_\beta, \hat{\varepsilon}', \hat{\mu}')$, dans $\hat{\mathfrak{M}}_{\mathcal{C}_0}$, dont les algèbres sont en correspondance biunivoque avec les préfaisceaux sur $\mathcal{C}^*$.

Désormais nous identifions un préfaisceau $\hat{F}$ sur $\mathcal{C}$ avec la $\mathbf{C}_\alpha$-algèbre correspondante, de sorte qu'un préfaisceau se présente sous la forme d'un triplet $\hat{F} = (\pi, F, C_\alpha(\pi))$, dans lequel F est une flèche au-dessus de $\mathcal{C}_0$.

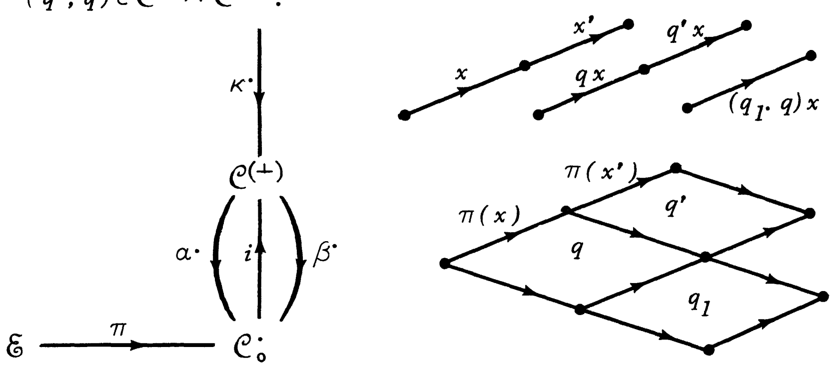
REMARQUES ET EXEMPLES.

1° Tout ce qu'on vient de faire à partir de la catégorie $\hat{\mathfrak{M}}$ des applications a encore un sens dans une catégorie $\hat{\mathcal{H}}$ abstraite, à condition que $\hat{\mathcal{H}}$ soit à produits fibrés naturalisés; cette fois on doit cependant remplacer $\mathcal{C}$ par une $\hat{\mathcal{H}}$-catégorie (c'est-à-dire par l'image d'une réalisation de l'esquisse des catégories dans $\hat{\mathcal{H}}$). Ce cas comprend celui des espèces de structures p-structurées, où p est un foncteur d'oubli de $\hat{\mathcal{H}}$ vers $\hat{\mathfrak{M}}$.

Lorsque $\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathfrak{F}}$, on obtient des catégories doubles opérant (pour une loi de composition) sur une catégorie [1a]. Soit $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp})$ la catégorie double en question; $\mathcal{C}_0^{\cdot}$ est une sous-catégorie de $\mathcal{C}^{(\perp)}$; un objet de $\hat{\mathfrak{F}}_{\mathcal{C}_0^{\cdot}}$ est un foncteur π de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{C}_0^{\cdot(\perp)}$ (pour la loi $\perp$). Une $\mathbf{C}_\alpha$-algèbre sur π est une action à gauche de $\mathcal{C}^{\cdot}$ sur $\mathcal{E}$, compatible avec la loi $\perp$; on a donc essentiellement les deux axiomes suivants:

(i) $(q_1 . q)x = q_1(qx)$ lorsque $q_1 . q$ est défini,

(ii) $(q' \perp q)(x' . x) = q'x' . qx$, lorsque $x' . x$ est défini dans $\mathcal{E}$ et que $(q', q) \in \mathcal{C}^{(\perp)} * \mathcal{C}^{(\perp)}$.



Si on oublie la loi de composition $\perp$ dans $\mathcal{C}$, lorsque $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp})$ est une 2-catégorie, on obtient une espèce de morphismes au-dessus de $\mathcal{C}^{\cdot}$. Les autres axiomes, concernant $\alpha^{\cdot}$, $\beta^{\cdot}$, $\alpha^{(\perp)}$, $\beta^{(\perp)}$, sont apparents sur la figure.

2° Choisissons comme objet π de départ dans $\hat{\mathfrak{M}}_{\mathcal{C}_0}$ l'application β de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}_0$; dans ce cas

$$\mathcal{E}_{\pi,\alpha} = \mathcal{C}_{\beta,\alpha} = \mathcal{C} * \mathcal{C} \quad \text{et} \quad \hat{\kappa}^{\alpha} = (\beta, \kappa, C_\alpha(\beta))$$

est une $\mathbf{C}_\alpha$-algèbre sur β, représentant en fait l'action naturelle à gauche de $\mathcal{C}$ sur elle-même. De même, en prenant pour π l'application α, on obtient la $\mathbf{C}_\beta$-algèbre $\hat{\kappa}^{\beta} = (\alpha, \kappa, C_\beta(\alpha))$ sur α, représentant l'action naturelle à droite de $\mathcal{C}$ sur elle-même.

3° On peut localiser, en chaque objet X de $\mathcal{C}$, la situation précédente. Soit $\mathcal{C}_{X_0}$ la classe des unités de la catégorie $\mathcal{C}_X$; alors $\mathcal{C}$ agit à droite sur $\mathcal{C}_{X_0}$ de façon naturelle (i.e. par composition dans $\mathcal{C}$); à cette action naturelle correspond une $\mathbf{C}_\beta$-algèbre sur $\alpha_{X_0}: \mathcal{C}_{X_0} \to \mathcal{C}_0$, où α_{X_0} est la restriction de α à $\mathcal{C}_{X_0}$. Cette $\mathbf{C}_\beta$-algèbre sera notée $\hat{\kappa}^\beta_X$. De même en partant de $\mathcal{C}^{X_0}$, classe des flèches de source X dans $\mathcal{C}$, on obtient une $\mathbf{C}_\alpha$-algèbre, notée $\hat{\kappa}^\alpha_X$, représentant l'action naturelle à gauche de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}^{X_0}$.

Soit $f: X \to X'$ une flèche de $\mathcal{C}$; il lui correspond un homomorphisme canonique entre $\mathbf{C}_\beta$-algèbres, de source $\hat{\kappa}^\beta_X$ et de but $\hat{\kappa}^\beta_{X'}$, et un homomorphisme canonique entre $\mathbf{C}_\alpha$-algèbres, de source $\hat{\kappa}^\alpha_{X'}$ et de but $\hat{\kappa}^\alpha_X$. Ces correspondances définissent en fait deux foncteurs canoniques, notés Γ_β et Γ^α:

$$\mathcal{C} \xrightarrow{\Gamma_\beta} \mathbf{C}_\beta(\hat{\mathfrak{M}}, \mathcal{C}) \qquad \mathcal{C}^* \xrightarrow{\Gamma^\alpha} \mathbf{C}_\alpha(\hat{\mathfrak{M}}, \mathcal{C})$$

où $\mathbf{C}_\beta(\hat{\mathfrak{M}}, \mathcal{C})$ (resp. $\mathbf{C}_\alpha(\hat{\mathfrak{M}}, \mathcal{C})$) désigne la catégorie des homomorphismes entre $\mathbf{C}_\beta$-algèbres (resp. $\mathbf{C}_\alpha$-algèbres). Les foncteurs Γ_β et Γ^α sont injectifs et pleins.

DEFINITION. Soit $\hat{F} = (\pi, F, C_\beta(\pi))$ une action de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{E}$, présentée sous forme d'une $\mathbf{C}_\beta$-algèbre (il s'agit donc d'une action à droite); $\hat{F}$ sera dite *présentable* s'il existe un objet X de $\mathcal{C}$ et un morphisme λ dans $\mathbf{C}_\beta(\hat{\mathfrak{M}}, \mathcal{C})$ de source $\hat{F}$ et de but $\Gamma_\beta(X)$ tel que, pour tout autre morphisme μ, de source $\hat{F}$ et de but $\Gamma_\beta(Y)$, il existe une flèche $g_\mu: X \to Y$ de $\mathcal{C}$ telle que $\mu = \Gamma_\beta(g_\mu) \circ \lambda$; autrement dit, l'objet X est une Γ_β-structure libre engendrée par $\hat{F}$.

PROPOSITION 2. *Avec les notations précédentes, la projection $p_\mathcal{C}$ de $\mathcal{E}_{\pi,\beta}$ vers $\mathcal{C}$ associée au produit fibré de (π, β) définit un foncteur (d'hypermorphismes); $\hat{F}$ est présentable si, et seulement si, $p_\mathcal{C}$ a une limite inductive dans $\mathcal{C}$.*

4° Puisque les catégories des préfaisceaux sur $\mathcal{C}$ (ou $\mathcal{C}^*$) sont isomorphes à des catégories d'algèbres au-dessus de $\hat{\mathfrak{M}}_{\mathcal{C}_0}$ et que cette catégorie-ci est à limites projectives, on en déduit que les catégories de préfaisceaux sur $\mathcal{C}$ (ou $\mathcal{C}^*$) sont à limites projectives et celles-ci se calculent facilement à partir des limites dans $\hat{\mathfrak{M}}_{\mathcal{C}_0}$, car les foncteurs d'oubli d'algèbres sont à limites projectives. Ceci présente un intérêt dans le cas où $\hat{\mathfrak{M}}$ est remplacée par une catégorie $\hat{\mathfrak{H}}$ à limites projectives. Les résultats généraux d'existence de limites inductives dans une catégorie d'algèbres (Linton [**2a**]) sont alors applicables pour les catégories de préfaisceaux.

5° Etant donné que $\mathfrak{M}_0 \in \hat{\mathfrak{M}}_0$ et $\mathfrak{M}_0 \subset \hat{\mathfrak{M}}_0$, on peut, dans ce qui précède, considérer le cas particulier où $\mathcal{C} = \mathfrak{M}$, qui interviendra de façon évidente dans la suite.

6° Il convient de regarder les foncteurs Γ_β et Γ^α comme des plongements de Yoneda.

B. EXTENSIONS D'ACTIONS DE CATEGORIES.

Dans cette section, nous étudions, du point de vue *algébrique*, ce qui se passe lorsqu'on fait varier la catégorie d'opérateurs $\mathcal{C}$, c'est-à-dire lorsqu'on se donne un foncteur $\tau: \mathcal{C} \to \mathfrak{D}$. Cette situation sera exploitée ultérieurement, en prenant pour τ le foncteur naturel de $\mathcal{C}$ vers la catégorie de Kleisli $K_{\mathbf{T}}(\mathcal{C})$ associée à un triple $\mathbf{T}$ dans $\mathcal{C}$.

Soit $\tau: \mathcal{C} \to \mathfrak{D}$ un foncteur donné dans $\hat{\mathfrak{M}}$ par le schéma suivant, dans lequel les symboles surlignés se rapportent à $\mathfrak{D}$, les symboles τ_0 et $\tau * \tau$ ayant un sens évident:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}_0 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\tau_0"'] & \mathcal{C} \arrow[l, bend right, "\alpha"'] \arrow[l, bend left, "\beta"] \arrow[d, "\tau"] & \mathcal{C} * \mathcal{C} \arrow[l, "K"'] \arrow[d, "\tau * \tau"] \\
\mathfrak{D}_0 \arrow[r, "\bar{i}"] & \mathfrak{D} \arrow[l, bend right, "\bar{\alpha}"'] \arrow[l, bend left, "\bar{\beta}"] & \mathfrak{D} * \mathfrak{D} \arrow[l, "\bar{K}"']
\end{tikzcd}$$

A τ_0 correspondent deux foncteurs naturels:

- τ_0^*, de $\hat{\mathfrak{M}}_{\mathcal{C}_0}$ dans $\hat{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{D}_0}$, défini grâce à la composition par τ_0,
- $\overleftarrow{\tau}_0$, de $\hat{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{D}_0}$ dans $\hat{\mathfrak{M}}_{\mathcal{C}_0}$, foncteur «image réciproque» (produit fibré

par τ_0).

Le foncteur $\overleftarrow{\tau_0}$ est adjoint à droite de τ_0^* et, si τ_0 est injectif, on a

$$\overleftarrow{\tau_0} \circ \tau_0^* \cong 1.$$

PROPOSITION 1. *Il existe une transformation naturelle canonique, $\hat{\eta}$, de $C_\alpha \circ \overleftarrow{\tau_0}$ vers $\overleftarrow{\tau_0} \circ D_\alpha$ telle que $(\overleftarrow{\tau_0}, \hat{\eta})$ définisse un morphisme du triple* $\mathbf{D}_\alpha$ *vers le triple* $\mathbf{C}_\alpha$.

Ce qui est donné au départ, c'est l'objet $\overline{\pi}$. On construit d'une part:

-le produit fibré (π, p) de $(\overline{\pi}, \tau_0)$, ce qui conduit à l'objet $\pi = \overleftarrow{\tau_0}(\overline{\pi})$,

-le produit fibré $(p_{\mathcal{C}}, p_{\mathcal{E}})$ de (π, α), ce qui conduit à l'objet

$$C_\alpha(\pi) = C_\alpha \circ \overleftarrow{\tau_0}(\overline{\pi});$$

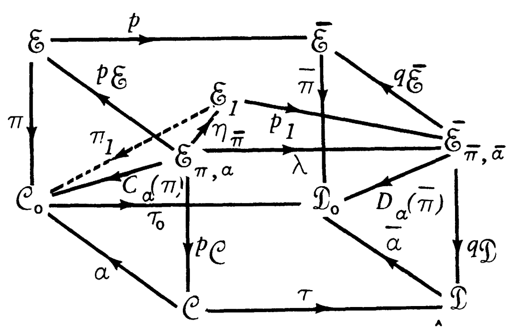
d'autre part:

-le produit fibré $(q_{\mathcal{D}}, q_{\overline{\mathcal{E}}})$ de $(\overline{\pi}, \overline{\alpha})$, ce qui conduit à l'objet

$$D_\alpha(\overline{\pi}) = \overline{\beta} \circ q_{\mathcal{D}},$$

-le produit fibré (π_1, p_1) de $(D_\alpha(\overline{\pi}), \tau_0)$, ce qui conduit à l'objet

$$\pi_1 = \overleftarrow{\tau_0}(D_\alpha(\overline{\pi})).$$



La valeur de la transformation naturelle $\hat{\eta}$ en l'objet $\overline{\pi}$ est donnée par une flèche $\eta_{\overline{\pi}}$ de $\mathcal{E}_{\pi,\alpha}$ vers $\mathcal{E}_1$, telle que $\pi_1 \circ \eta_{\overline{\pi}} = C_\alpha(\pi)$. Indiquons comment on obtient $\eta_{\overline{\pi}}$: considérons le couple $(p \circ p_{\mathcal{E}}, \tau \circ p_{\mathcal{C}})$; on a:

$$\overline{\pi} \circ p \circ p_{\mathcal{E}} = \tau_0 \circ \pi \circ p_{\mathcal{E}} = \tau_0 \circ \alpha \circ p_{\mathcal{C}} = \overline{\alpha} \circ \tau \circ p_{\mathcal{C}},$$

de sorte qu'il existe une flèche unique λ de $\mathcal{E}_{\pi,\alpha}$ vers $\overline{\mathcal{E}}_{\overline{\pi},\overline{\alpha}}$, crochet du couple $(p \circ p_{\mathcal{E}}, \tau \circ p_{\mathcal{C}})$ relativement au produit fibré de $(\overline{\pi}, \overline{\alpha})$. Considérons ensuite le couple $(C_\alpha(\pi), \lambda)$; on a, par définition de C_α,

$$\tau_0 \circ C_\alpha(\pi) = \tau_0 \circ \beta \circ p_{\mathcal{C}} = \overline{\beta} \circ \tau \circ p_{\mathcal{C}}$$

et, par définition de D_α,

$$D_\alpha(\overline{\pi}) \circ \lambda = \overline{\beta} \circ q_{\mathfrak{D}} \circ \lambda = \overline{\beta} \circ \tau \circ p_{\mathcal{C}} \,,$$

en utilisant les propriétés de λ. Ce couple admet donc un crochet, soit $\eta_{\overline{\pi}}$, relativement au produit fibré de $(D_\alpha(\overline{\pi}), \tau_0)$. On aura en particulier

$$\pi_1 \circ \eta_{\overline{\pi}} = C_\alpha(\pi).$$

Le reste de la proposition résulte aussitôt des propriétés universelles de λ et $\eta_{\overline{\pi}}$. (Les calculs, assez longs à vérifier, sont omis.)

Au morphisme de triples $(\overleftarrow{\tau_0}, \hat{\eta})$ correspond un foncteur canonique τ_α de la catégorie $\mathbf{D}_\alpha(\hat{\mathfrak{M}}, \mathfrak{D})$ vers la catégorie $\mathbf{C}_\alpha(\hat{\mathfrak{M}}, \mathcal{C})$, tel que le carré suivant soit commutatif:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{D}_\alpha(\hat{\mathfrak{M}}, \mathrm{D}) \arrow[r, "\tau_\alpha"] \arrow[d, "\overline{U}"'] & \mathbf{C}_\alpha(\hat{\mathfrak{M}}, \mathcal{C}) \arrow[d, "U"] \\ \hat{\mathfrak{M}}^{\mathfrak{D}_0} \arrow[r, "\overleftarrow{\tau_0}"] & \hat{\mathfrak{M}}^{\mathcal{C}_0} \end{tikzcd}$$

(U et $\overline{U}$ sont les oublis usuels associés à des catégories d'algèbres.)

REMARQUE. Si l'on regarde une $\mathbf{D}_\alpha$-algèbre $\hat{F}$ comme un préfaisceau sur $\mathfrak{D}$, à valeurs dans $\hat{\mathfrak{M}}$, la $\mathbf{C}_\alpha$-algèbre $\tau_\alpha(\hat{F})$ correspond au préfaisceau sur $\mathcal{C}$ obtenu par composition de $\hat{F}$ avec τ et dissociation éventuelle des «fibres» au cas où τ identifierait des objets. L'intérêt de ce qui précède réside dans le fait qu'on peut effectuer les constructions dans une catégorie $\hat{\mathcal{H}}$, à produits fibrés finis, dans laquelle la notion de préfaisceau en tant que «foncteur» n'aurait pas de sens.

L'adjoint à gauche τ_0^* de $\overleftarrow{\tau_0}$ est sans grand intérêt pour la suite. Par contre, nous aurons à considérer l'adjoint à droite $\overrightarrow{\tau_0}$ de $\overleftarrow{\tau_0}$, dont nous allons donner une construction ne faisant intervenir que des produits fibrés finis, des sommes (d'une «certaine taille») et l'objet $\mathbf{1}$ de $\hat{\mathfrak{M}}$, qui permet de de représenter les objets de $\hat{\mathfrak{M}}$. Cette construction serait donc aussi possible, sous certaines conditions, dans une catégorie $\hat{\mathcal{H}}$ ayant le même genre de limites et un objet K représentant les objets de $\hat{\mathfrak{H}}$ (on entend par là un objet K tel que tout objet de $\hat{\mathfrak{H}}$ soit limite inductive d'un certain foncteur appliquant tous les objets sur K; par exemple, si $\hat{\mathfrak{H}} = \hat{\mathfrak{F}}$, on prend

$$K = \begin{tikzcd} & \bullet \arrow[dr] & \\ \bullet \arrow[ur] \arrow[rr] & & \bullet \end{tikzcd}$$

Construction de $\vec{\tau}_0$: Nous procédons en trois petites étapes:

α) *Sections* τ_0 *-locales.* Soit $\pi : \mathfrak{E} \to \mathcal{C}_0$ un objet de $\hat{\mathfrak{M}}_{\mathcal{C}_0}$; à toute flèche $Y : \mathbf{1} \to \mathfrak{D}_0$ correspond un produit fibré (Y^{-1}, τ_Y) du couple (Y, τ_0); la source de Y^{-1} est notée $\tau_0^{-1}(Y)$ pour une raison bien évidente. Une section locale S de π est une flèche de $\tau_0^{-1}(Y)$ vers $\mathfrak{E}$ telle que $\pi \circ S = Y^{-1}$.

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{E} \arrow[dd, "\pi"'] & & \\ & \tau_0^{-1}(Y) \arrow[ul, "S"'] \arrow[dl, "Y^{-1}"] \arrow[r, "\tau_Y"] & \mathbf{1} \arrow[dl, "Y"] \\ \mathcal{C}_0 \arrow[rr, "\tau_0"'] & & \mathfrak{D}_0 \end{tikzcd}$$

β) *Objet «sections* τ_0 *-locales» associé à* π. Soit Γ_Y l'ensemble des sections τ_0-locales S de source $\tau_0^{-1}(Y)$; on appelle objet «sections τ_0-locales» associé à Y une somme de Γ_Y exemplaires de $\mathbf{1}$; notons $\bar{\mathfrak{E}}_Y$ cet objet; considérons Γ_Y exemplaires de la flèche Y; on obtient, par propriété universelle d'une somme, une flèche et une seule, soit $\bar{Y}$, de $\bar{\mathfrak{E}}_Y$ vers $\mathfrak{D}_0$ telle que $\bar{Y} \circ j_S = Y$, pour toute injection canonique j_S de $\mathbf{1}$ vers la somme $\bar{\mathfrak{E}}_Y$.

γ) *Objet image de* π. Soit Δ_0 l'ensemble des flèches de $\mathbf{1}$ vers $\mathfrak{D}_0$; faisons la somme des $\bar{\mathfrak{E}}_Y$ dans $\hat{\mathfrak{M}}$, lorsque Y parcourt Δ_0 ; on obtient un objet $\bar{\mathfrak{E}}$ et une flèche (crochet des $\bar{Y}$) de $\bar{\mathfrak{E}}$ vers $\mathfrak{D}_0$, soit $\bar{\pi}$, telle que $\bar{\pi} \circ \iota_Y = \bar{Y}$, où ι_Y est l'injection canonique de $\bar{\mathfrak{E}}_Y$ dans $\bar{\mathfrak{E}}$; quand on a choisi un foncteur somme naturalisé dans $\hat{\mathfrak{M}}$, on définit ainsi le foncteur $\vec{\tau}_0$: $\vec{\tau}_0(\pi) = \bar{\pi}$; ce foncteur est évidemment un adjoint à droite de $\overleftarrow{\tau}_0$ car il a été construit pour cela.

Nous avons vu qu'à $\overleftarrow{\tau}_0$ correspondait un foncteur canonique τ_α de $\mathbf{D}_\alpha(\hat{\mathfrak{M}}, \mathfrak{D})$ vers $\mathbf{C}_\alpha(\hat{\mathfrak{M}}, \mathcal{C})$. On peut construire un adjoint à droite et un adjoint à gauche de τ_α, en s'inspirant des constructions précédentes (τ_0^* et $\vec{\tau}_0$). Nous ne le faisons pas ici, car le cas qui nous intéressera dans la suite est celui où $\mathcal{C}$ a les mêmes objets que $\mathfrak{D}$.

De plus, il suffira de connaître alors l'adjoint à gauche de τ_α. Dans la fin de ce paragraphe, nous supposons que $\mathcal{C}$ est une sous-catégorie de $\mathfrak{D}$, ayant les mêmes objets que $\mathfrak{D}$. Nous allons donner une description «ponctuelle» de l'adjoint à gauche σ_α de τ_α, c'est-à-dire que cette description fera intervenir les éléments des objets de $\hat{\mathfrak{M}}$. On peut présenter cette construction de σ_α uniquement à l'aide de flèches dans $\hat{\mathfrak{M}}$ et de certaines limites inductives appropriées; nous ne le ferons pas pour alléger le texte.

Terminologie et notations particulières.

- Les catégories $\mathbf{D}_\alpha(\hat{\mathfrak{M}}, \mathfrak{D})$ et $\mathbf{C}_\alpha(\hat{\mathfrak{M}}, \mathcal{C})$ sont simplement notées désormais $\mathfrak{A}_{\mathbf{D}_\alpha}$ et $\mathfrak{A}_{\mathbf{C}_\alpha}$, rappelant ainsi qu'il s'agit de catégories d'algèbres (pour les triples $\mathbf{D}_\alpha$ et $\mathbf{C}_\alpha$) au-dessus d'une même catégorie, $\hat{\mathfrak{M}}_{\mathcal{C}_0}$.

- Si $\hat{\theta} = (\pi, \theta, C_\alpha(\pi))$ est une $\mathbf{C}_\alpha$-algèbre au-dessus de $\pi : \mathcal{E} \to \mathcal{C}_0$, nous dirons aussi que $\hat{\theta}$ définit «une action à gauche de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{E}$»; si $\hat{\overline{\theta}} = (\pi, \overline{\theta}, D_\alpha(\pi))$ est une τ_α-structure au-dessus de $\hat{\theta}$, c'est-à-dire une $\mathbf{D}_\alpha$-algèbre telle que $\tau_\alpha(\hat{\overline{\theta}}) = \hat{\theta}$, nous dirons que $\hat{\overline{\theta}}$ définit une «action de $\mathfrak{D}$ sur $\mathcal{E}$ étendant l'action de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{E}$ définie par $\hat{\theta}$». Aux $\mathbf{C}_\beta$ ou $\mathbf{D}_\beta$-algèbres correspondent les notions d'actions à droite.

- Soit $\hat{\theta} = (\pi, \theta, C_\alpha(\pi))$ une $\mathbf{C}_\alpha$-algèbre sur $\pi : \mathcal{E} \to \mathcal{C}_0$; soit (x, f) un élément de $\mathcal{E}_{\pi,\alpha}$; on écrira souvent $f \underset{\theta}{*} x$ au lieu de $\theta(x, f)$; de même, si $\hat{\theta} = (\pi, \theta, C_\beta(\pi))$ est une $\mathbf{C}_\beta$-algèbre, on écrira $x \underset{\theta}{*} f$ au lieu de: $\theta(x, f)$.

Construction de σ_α.

Soit $\hat{\theta} = (\pi, \theta, C_\alpha(\pi))$ une $\mathbf{C}_\alpha$-algèbre sur $\pi : \mathcal{E} \to \mathcal{C}_0$; considérons dans l'ensemble $\mathcal{E}_{\pi,\overline{\alpha}}$ des couples $(x, f) \in \mathcal{E} \times \mathfrak{D}$ tels que $\pi(x) = \overline{\alpha}(f)$ la relation d'équivalence suivante:

$(x, f) \sim (x', f')$ si et seulement si il existe:

i) une suite $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ d'éléments de $\mathcal{E}$,

ii) une suite $(f_1, f'_1, f_2, f'_2, \ldots, f_n, f'_n)$ d'éléments de $\mathcal{C}$,

iii) une suite $(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ d'éléments de $\mathfrak{D}$, ces divers éléments vérifiant les conditions suivantes, dans lesquelles les composés écrits sont supposés définis:

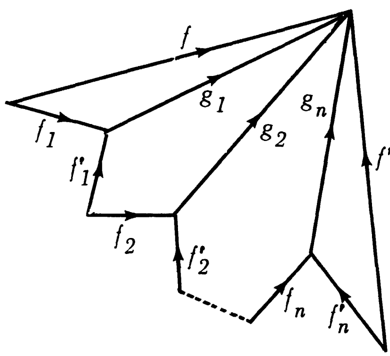
i) $f_i \overset{*}{\theta} x_{i-1} = f'_i \overset{*}{\theta} x_i$ pour tout i de 1 à n,

ii) $g_i \cdot f'_i = g_{i+1} \cdot f_{i+1}$ pour tout i de 1 à $n-1$,

iii) $g_1 \cdot f_1 = g$ et $x_0 = x$, $g_n \cdot f'_n = f'$ et $x_n = x'$.

REMARQUE. Il s'agit en fait de la relation d'équivalence engendrée par la relation élémentaire dont le graphe est formé des couples $((x,f),(y,g))$ tels qu'il existe $f_1 \in \mathcal{C}$ vérifiant:

$$\text{i) } g \cdot f_1 = f, \quad \text{ii) } f_1 \overset{*}{\theta} x = y.$$



Soit $\overline{\mathcal{E}}$ l'ensemble quotient de $\mathcal{E}_{\pi,\alpha}$ par cette relation d'équivalence; la classe d'équivalence de (x,f) sera notée $\langle x,f\rangle$; soit $\overline{\pi}$ l'application canonique de $\overline{\mathcal{E}}$ dans $\mathcal{C}_0$ qui à $\langle x,f\rangle$ fait correspondre $\beta(f)$; la remarque précédente permet de décrire l'objet $\overline{\pi}$ comme but d'un certain conoyau dans $\hat{\mathfrak{M}}_{\mathcal{C}_0}$, évitant ainsi la notion de relation d'équivalence, si on le désire.

La τ_α-structure libre $\hat{\overline{\theta}}$ engendrée par $\hat{\theta}$ est la $\mathbf{D}_\alpha$-algèbre sur $\overline{\pi}$ suivante:

$$\hat{\overline{\theta}} = \sigma_\alpha(\hat{\theta}) = (\overline{\pi}, \overline{\theta}, D_\alpha(\overline{\pi})),$$

où $\overline{\theta}$ est défini par:

$$g \underset{\overline{\theta}}{*} \langle x,f\rangle = \langle x, g.f\rangle,$$

pour tout g tel que $\alpha(g) = \overline{\pi}\langle x,f\rangle \quad (=\beta(f))$.

[La relation d'équivalence décrite plus haut est telle que $\langle x, g.f\rangle$ ne dépend pas du représentant (x,f) choisi dans la classe $\langle x,f\rangle$.]

PROPOSITION 2. *τ_α est un foncteur algébrique, c'est-à-dire que le triple dans $\mathfrak{A}_{\mathbf{C}_\alpha}$ défini par la paire $(\tau_\alpha, \sigma_\alpha)$ conduit à une catégorie d'algèbres qui est canoniquement isomorphe à $\mathfrak{A}_{\mathbf{D}_\alpha}$.*

La démonstration (assez longue) est laissée au lecteur.

REMARQUES. 1° Puisque $\tau_0 = Id_{\mathcal{C}_0}$, le foncteur $\overleftarrow{\tau}_0$ est le foncteur identique, et la transformation naturelle $\hat{\eta}$, de $C_\alpha \overleftarrow{\tau}_0$ vers $\overleftarrow{\tau}_0 D_\alpha$, exprime que C_α est un sous-foncteur de D_α; $(\mathbf{D}_\alpha, (\overleftarrow{\tau}_0, \hat{\eta}), \mathbf{C}_\alpha)$ est un monomorphisme du triple $\mathbf{C}_\alpha$ vers le triple $\mathbf{D}_\alpha$ et τ_α est le foncteur entre catégories d'algèbres associé à ce monomorphisme.

2° Indiquons quelle est l'injection canonique $\hat{j}$ de $\hat{\theta}$ dans

$$\tau_\alpha \sigma_\alpha(\hat{\theta}) = (\overline{\pi}, \overline{\theta} \circ \eta_{\overline{\pi}}, C_\alpha(\overline{\pi})) ;$$

on a $\hat{j} = (\overline{\pi}, j, \pi)$, où j est défini par $j(x) = \langle x, \pi(x) \rangle$; dans la démonstration de la proposition, on doit vérifier avant tout que

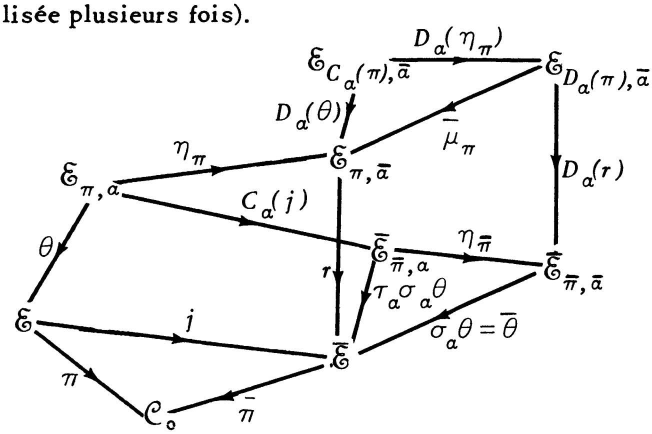
$$j \circ \theta = \overline{\theta} \circ \eta_{\overline{\pi}} \circ C_\alpha(j),$$

de sorte que $\hat{j}$ définit bien un morphisme de $\mathbf{C}_\alpha$-algèbres.

3° Pour une démonstration ne faisant pas intervenir les «éléments» des objets de $\hat{\mathfrak{M}}$, indiquons que $\overline{\pi}$ est le but d'un conoyau $\hat{r}$ de la paire:

$$(D_\alpha(\hat{\theta}), \hat{\overline{\mu}}_\pi \circ D_\alpha(\hat{\eta}_{C_\alpha(\pi)})) .$$

4° Nous indiquons dans un diagramme les diverses flèches au-dessus de $\mathcal{C}_0$ qui interviennent dans la construction précédente et les seuls objets π et $\overline{\pi}$ (les symboles sont non chapeautés, conformément à une convention déjà utilisée plusieurs fois).



5° Le foncteur d'oubli naturel $\overline{U}$ de $\mathfrak{A}_{\mathbf{D}_\alpha}$ vers $\hat{\mathfrak{M}}_{\mathcal{C}_0}$ est algébrique et se décompose en deux foncteurs d'oubli, U et τ_α, algébriques tous deux.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{A}_{\mathbf{D}_\alpha} \arrow[rr, shift left, "\tau_\alpha"] \arrow[drr, shift right, "\overline{U}"'] & & \mathfrak{A}_{\mathbf{C}_\alpha} \arrow[ll, shift left, "\sigma_\alpha"] \arrow[d, shift right, "U"'] \\
& & \hat{\mathfrak{M}}_{\mathcal{C}_0} \arrow[u, shift right, "L"'] \arrow[ull, shift right, "\overline{L}"']
\end{tikzcd}$$

Nous désignerons par L (resp. $\overline{L}$) l'adjoint à gauche de U (resp. de $\overline{U}$) tel que:

$$C_\alpha = U \circ L \quad \text{et} \quad D_\alpha = \overline{U} \circ \overline{L} \,.$$

Pour achever ce paragraphe, nous souligons le lien évident entre les constructions précédentes et l'extension de Kan. Telle que nous l'avons faite, il s'agit d'une extension qui n'identifie pas les objets; de plus, celle-ci est présentée sous la forme d'extension de foncteurs d'hypermorphismes (ou, ce qui revient au même, d'actions de catégories), c'est-à-dire que l'on peut éviter de parler de «préfaisceaux» (voir aussi [**1b**]). A ce sujet, indiquons quel est le foncteur d'hypermorphismes correspondant à une $\mathbf{C}_\alpha$-algèbre θ sur l'objet $\pi : \mathcal{E} \to \mathcal{C}_0$; nous reprenons les notations (et la figure) qui ont servi à la définition des transformations naturelles $\hat{\varepsilon}$ et $\hat{\mu}$. On voit que $(p'_{\mathcal{E}}, C_\alpha(\theta))$ est un produit fibré de $(p_{\mathcal{E}}, \theta)$. La partie gauche de la figure représente alors la catégorie d'hypermorphismes au-dessus de $\mathcal{C}$, soit $\mathcal{E}_{\pi,\alpha}$, sous forme de réalisation de l'esquisse des ca-

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}_{C_\alpha(\pi),\alpha} \arrow[rr, "\nu_\pi"] \arrow[d, bend right, "p'_{\mathcal{E}}"'] \arrow[d, "\mu_\pi"] \arrow[d, bend left, "C_\alpha(\theta)"] & & \mathcal{C} * \mathcal{C} \arrow[d, bend right, "\nu_\alpha"'] \arrow[d, "\kappa"] \arrow[d, bend left, "\nu_\beta"] \\
\mathcal{E}_{\pi,\alpha} \arrow[rr, "p_{\mathcal{C}}"] \arrow[d, bend right, "p_{\mathcal{E}}"'] \arrow[d, bend left, "\theta"] & & \mathcal{C} \arrow[d, bend right, "\alpha"'] \arrow[d, bend left, "\beta"] \\
\mathcal{E} \arrow[rr, "\pi"] \arrow[u, "\varepsilon_\pi"] & & \mathcal{C}_0 \arrow[u, "i"]
\end{tikzcd}$$

tégories dans $\hat{\mathfrak{M}}$; $(p_{\mathfrak{E}}, \theta)$ joue le rôle du couple (α, β), $(p'_{\mathfrak{E}}, C_\alpha(\theta))$ celui du couple (v_α, v_β), ε_π celui de i et μ_π celui de κ; la flèche $p_{\mathcal{C}}$ représente le foncteur d'hypermorphismes de $\mathfrak{E}_{\pi,\alpha}$ vers $\mathcal{C}$, et π doit être regardé comme la restriction de $p_{\mathcal{C}}$ aux unités. Ceci achève de montrer que les notions de «foncteur d'hypermorphismes» ou «d'action de catégorie» ont un sens dans une catégorie $\hat{\mathcal{H}}$ à produits fibrés finis, ce qui permet de définir la notion de $\hat{\mathcal{H}}$-préfaisceau.

C. ALGEBRES GENERALES ET ALGEBRES AU SENS DES TRIPLES.

Dans ce paragraphe, nous proposons une définition des structures algébriques d'un certain type au-dessus d'une catégorie $\mathcal{C}$, ou au-dessus de certaines catégories attachées à $\mathcal{C}$; nous montrons que cette définition englobe celle des $\mathbf{T}$-algèbres, où $\mathbf{T}$ est un triple donné dans $\mathcal{C}$. Notre point de vue comporte donc une double généralisation de la notion de $\mathbf{T}$-algèbre:

- on peut définir des $\mathbf{T}$-algèbres sur d'autres objets que ceux de la catégorie $\mathcal{C}$ sous-jacente au triple $\mathbf{T}$,

- on peut considérer que les types d'algèbres au-dessus de $\mathcal{C}$ que nous définissons forment une classe bien plus vaste que les types d'algèbres correspondant aux triples dans $\mathcal{C}$.

α) $\mathfrak{D}$-algèbres.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et $\mathfrak{D}$ une *sur-catégorie* de $\mathcal{C}$, c'est-à-dire une catégorie ayant les mêmes objets que $\mathcal{C}$ et telle que $\mathcal{C}$ soit une sous-catégorie de $\mathfrak{D}$. Nous reprenons les notations des paragraphes précédents. Selon qu'on donne priorité à α ou β, on a les deux diagrammes suivants:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{A}_{\mathbf{C}_\alpha} \arrow[rr, shift right, "\sigma_\alpha"'] \arrow[dr, shift right, "U"'] & & \mathfrak{A}_{\mathbf{D}_\alpha} \arrow[ll, shift right, "\tau_\alpha"'] \arrow[dl, shift right, "\overline{U}"'] \\
\mathcal{C}^* \arrow[ur, "\Gamma^\alpha"] & & \hat{\mathfrak{M}}_{\mathcal{C}_o} \arrow[ul, shift right, "L"'] \arrow[ur, shift right, "\overline{L}"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& \mathfrak{A}_{\mathbf{C}_\beta} \arrow[rr, shift right, "\sigma_\beta"'] \arrow[dr, shift right, "U"'] & & \mathfrak{A}_{\mathbf{D}_\beta} \arrow[ll, shift right, "\tau_\beta"'] \arrow[dl, shift right, "\overline{U}"'] \\
\mathcal{C} \arrow[ur, "\Gamma_\beta"] & & \hat{\mathfrak{M}}_{\mathcal{C}_0} \arrow[ul, shift right, "L"'] \arrow[ur, shift right, "\overline{L}"'] &
\end{tikzcd}$$

DEFINITION. Soit X un objet de $\mathcal{C}$; une *$\mathfrak{D}$-algèbre à gauche* (resp. *à droite) sur X* est une τ_α-structure (resp. une τ_β-structure) au-dessus de $\Gamma^\alpha(X)$ (resp. de $\Gamma_\beta(X)$).

En utlisant la terminologie particulière introduite au paragraphe précédent, on peut dire de façon plus intuitive qu'une $\mathfrak{D}$-algèbre à gauche (resp. à droite) sur X est une action à gauche (resp. à droite) de $\mathfrak{D}$ sur $\mathcal{C}^{X_0}$ (resp. sur $\mathcal{C}_{X_0}$) étendant l'action naturelle à gauche (resp. à droite) de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}^{X_0}$ (resp. sur $\mathcal{C}_{X_0}$).

La catégorie $\tau_\beta^{-1}(\Gamma_\beta(\mathcal{C}))$ est une sous-catégorie pleine de $\mathfrak{A}_{\mathbf{D}_\beta}$ que nous désignons par $\mathfrak{A}_{\mathfrak{D}}$; les objets de $\mathfrak{A}_{\mathfrak{D}}$ sont les $\mathfrak{D}$-algèbres à droite sur les objets de $\mathcal{C}$ et les flèches de $\mathfrak{A}_{\mathfrak{D}}$ sont les homomorphismes entre $\mathfrak{D}$-algèbres à droite; la restriction de τ_α à $\mathfrak{A}_{\mathfrak{D}}$ définit un foncteur d'oubli naturel de $\mathfrak{A}_{\mathfrak{D}}$ vers $\mathcal{C}$, noté $U_{\mathfrak{D}}$.

On définit de même la catégorie ${}_{\mathfrak{D}}\mathfrak{A}$ des homomorphismes entre $\mathfrak{D}$-algèbres à gauche (et son foncteur d'oubli naturel ${}_{\mathfrak{D}}U$ vers $\mathcal{C}$), en considérant la catégorie duale de $\tau_\alpha^{-1}(\Gamma^\alpha(\mathcal{C}^*))$ pour ${}_{\mathfrak{D}}\mathfrak{A}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{A}_{\mathfrak{D}} \arrow[r, hook] \arrow[d, "U_{\mathfrak{D}}"'] & \mathfrak{A}_{\mathbf{D}_\beta} \arrow[d, shift right, "\tau_\beta"'] \\
\mathcal{C} \arrow[r, hook, "\Gamma_\beta"'] & \mathfrak{A}_{\mathbf{C}_\beta} \arrow[u, shift right, "\sigma_\beta"']
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
{}_{\mathfrak{D}}\mathfrak{A} \arrow[r, hook] \arrow[d, "{}_{\mathfrak{D}}U"'] & \mathfrak{A}^*_{\mathbf{D}_\alpha} \arrow[d, shift right, "\tau^*_\alpha"'] \\
\mathcal{C} \arrow[r, hook, "\Gamma^{\alpha *}"'] & \mathfrak{A}^*_{\mathbf{C}_\alpha} \arrow[u, shift right, "\sigma^*_\alpha"']
\end{tikzcd}$$

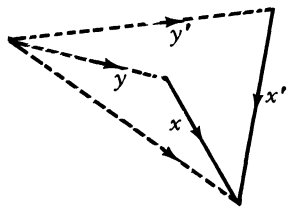
Avant de poursuivre, nous devons remarquer que l'objet sous-jacent à la σ_β-structure libre engendrée par $\Gamma_\beta(X) = \hat{\kappa}_X^\beta$ a une interprétation très simple par rapport au cas général (étudié en **B**). La $\mathbf{C}_\beta$-algèbre $\hat{\kappa}^\beta_X$ sur $\alpha_{X_0} : \mathcal{C}_{X_0} \to \mathcal{C}_0$ représente l'action naturelle à droite de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}_{X_0}$. Désignons par $\overline{\alpha}_{X_0} : \overline{\mathcal{C}}_{X_0} \to \mathcal{C}_0$ l'objet sous-jacent à la $\mathbf{C}_\beta$-algèbre

$$\tau_\beta \sigma_\beta(\hat{\kappa}^\beta_X).$$

PROPOSITION 1. *$\overline{\mathcal{C}}_{X_0}$ est canoniquement isomorphe à $\mathfrak{D}_{X_0}$ et l'injection j de $\mathcal{C}_{X_0}$ dans $\overline{\mathcal{C}}_{X_0}$ s'interprète alors comme étant l'inclusion de $\mathcal{C}_{X_0}$ dans $\mathfrak{D}_{X_0}$.*

DEMONSTRATION. On trouve d'abord qu'un élément de $\overline{\mathcal{C}}_{X_0}$ est une classe d'équivalence de couples $(x,y) \in \mathcal{C}_{X_0} \times \mathfrak{D}$ pour la relation suivante:

$(x,y) \sim (x',y')$ si et seulement si $x.y$ et $x'.y'$ sont définis et égaux dans $\mathfrak{D}$.



L'application qui à $\langle x,y \rangle$ fait correspondre $x.y$ définit une bijection canonique de $\overline{\mathcal{C}}_{X_0}$ sur $\mathfrak{D}_{X_0}$ et le reste est évident.

Moyennant cette identification, on voit que la τ_β-structure libre engendrée par $\hat{\kappa}^\beta_X$ est la $\mathbf{D}_\beta$-algèbre sur $\overline{\alpha}_{X_0} : \mathfrak{D}_{X_0} \to \mathcal{C}_0$ représentant l'action à droite de $\mathfrak{D}$ sur $\mathfrak{D}_{X_0}$; on peut alors, grâce au plongement plein et fidèle Γ_β de $\mathfrak{D}$ dans $\mathfrak{A}_{\mathbf{D}_\beta}$, identifier $\mathfrak{D}$ à la sous-catégorie pleine de la catégorie de $\mathfrak{A}_{\mathbf{D}_\beta}$ ayant pour objets les τ_β-structures libres engendrées par les objets de $\mathcal{C}$.

DEFINITION. Pour une raison qui va être exposée plus loin, nous dirons que $\mathfrak{D}$ est la *catégorie de Kleisli* associée au type de structures algébriques défini par les $\mathfrak{D}$-algèbres à droite.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{A}_{\mathfrak{D}} \arrow[r, two heads] \arrow[d, "U_{\mathfrak{D}}"'] & \mathfrak{A}_{\mathbf{D}_\beta} \\
\mathcal{C} \arrow[r, hook] & \mathfrak{D} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Nous allons examiner maintenant comment les $U_{\mathcal{D}}$-structures se présentent concrètement, compte tenu de la proposition 2 de **B**.

Nous omettons les symboles α_{X_0}, β_{X_0}, $\overline{\alpha}_{X_0}$, etc... des objets de $\mathfrak{M}_{\mathcal{C}_0}$ qui interviennent ici, puisqu'il n'y a aucune confusion possible, et, pour alléger encore, nous notons simplement $\mathfrak{S}_\alpha$ (resp. $\mathfrak{S}_{\bar{\alpha}}$, $\mathfrak{S}_\beta$, $\mathfrak{S}_{\bar{\beta}}$) ce que nous notions auparavant $\mathfrak{S}_{\pi,\alpha}$ (resp. $\mathfrak{S}_{\pi,\bar{\alpha}}$, $\mathfrak{S}_{\pi,\beta}$, $\mathfrak{S}_{\pi,\bar{\beta}}$) s'il n'y a pas de doute sur π.

Les $U_{\mathcal{D}}$-structures au-dessus de X se présentent donc comme des actions à droite de $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{C}_{X_0}$ étendant l'action naturelle $\hat{\kappa}^\beta_X$ de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}_{X_0}$. Il y en a autant que d'applications $\theta: \mathcal{C}_{X_0,\bar{\beta}} \to \mathcal{C}_{X_0}$ définissant une $\mathbf{D}_\beta$-algèbre au-dessus de $\hat{\kappa}^\beta_X$. D'après la proposition 2 de **B**, ces $U_{\mathcal{D}}$-structures sont en correspondance biunivoque avec les algèbres sur $\hat{\kappa}^\beta_X$ relatives au triple dans $\mathfrak{A}_{\mathbf{C}_\beta}$ défini par $(\tau_\beta, \sigma_\beta)$.

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{C}_{X_0,\beta} \arrow[dl, "\kappa^\beta_X"'] \arrow[dr, hook] & \\ \mathcal{C}_{X_0} & & \mathcal{C}_{X_0,\bar{\beta}} \arrow[ll, "\theta"] \end{tikzcd}$$

PROPOSITION 2. *Les algèbres sur* $\hat{\kappa}^\beta_X$ *relatives au triple défini par* $(\tau_\beta, \sigma_\beta)$ *sont en correspondance biunivoque avec les applications* θ' *de* $\mathcal{D}_{X_0}$ *dans* $\mathcal{C}_{X_0}$ *satisfaisant les conditions suivantes:*

i) $\alpha\, \theta'(g) = \alpha(g)$, *pour tout* $g \in \mathcal{D}_{X_0}$.

ii) $\theta'(f) = f$, *pour tout* $f \in \mathcal{C}_{X_0}$.

iii) $\theta'(\theta'(g).g_1) = \theta'(g.g_1)$, *pour tout* g, $g_1 \in \mathcal{D}_{X_0}$.

Indiquons seulement quelle est la bijection ξ entre les applications θ (définissant les $\mathbf{D}_\beta$-algèbres au-dessus de $\hat{\kappa}^\beta_X$) et les applications θ' vérifiant *i*, *ii* et *iii*.

- Soit $\theta': \mathcal{D}_{X_0} \to \mathcal{C}_{X_0}$ une telle application et soit $(f, g) \in \mathcal{C}_{X_0,\beta}$; on définit $\theta = \xi(\theta')$ par l'égalité

$$\theta(f, g) = \theta'(f.g);$$

si $g \in \mathcal{C}$, on a $\theta(f, g) = f.g$ d'après *ii* et

$$\theta(\theta(f, g), g_1) = \theta'(\theta'(f.g).g_1) = \theta'(f.g.g_1) = \theta(f, g.g_1)$$

d'après *iii*, de sorte que θ définit bien une action de $\mathfrak{D}$ sur $\mathcal{C}_{X_0}$ étendant l'action naturelle de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}_{X_0}$.

- Inversement, soit θ une telle action; l'application $\theta' = \xi^{-1}(\theta)$ est définie par:

$$\theta'(g) = \theta(1_X, g).$$

Les conditions *i* et *ii* sont faciles à vérifier. En ce qui concerne *iii*, voici le calcul qu'il faut faire:

$$\begin{aligned} \theta'(\theta'(g).g_1) &= \theta(1_X, \theta(1_X, g).g_1) \text{ par définition de } \theta' \\ &= \theta(\theta(1_X, \theta(1_X, g)), g_1) \text{ car } \theta \text{ est une action} \\ &= \theta(\theta(1_X, g), g_1) \text{ car } \theta(1_X, g) \in \mathcal{C}_{X_0} \\ &= \theta(1_X, g.g_1) \text{ car } \theta \text{ est une action} \\ &= \theta'(g.g_1) \text{ par définition de } \theta'. \end{aligned}$$

C. q. f. d.

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que ξ est bien une bijection.

Pour terminer, nous caractérisons les homomorphismes entre $\mathfrak{D}$-algèbres par la

PROPOSITION 3. *Soit* λ *une flèche dans* $\mathcal{C}$ *de source* X *et de but* Y*; supposons données des* $\mathfrak{D}$*-algèbres (à droite) sur* X *et* Y *sous la forme d'applications* θ'_X *et* θ'_Y *satisfaisant à i, ii et iii; la flèche* λ *définit un homomorphisme de* θ'_X *vers* θ'_Y *si et seulement si*

$$\lambda.\theta'_X(g) = \theta'_Y(\lambda.g) \quad \textit{pour tout} \quad g \in \mathfrak{D}_{X_0} .$$

Démonstration laissée au lecteur.

β) Premiers exemples.

Ces exemples nécessitent une construction préalable, qui leur est commune, et que nous décrivons d'abord.

On part d'un foncteur F d'une catégorie $\mathcal{C}$ vers une catégorie Σ et on construit une catégorie, notée $\mathcal{C}(F)$, de la façon suivante:

- les objets de $\mathcal{C}(F)$ sont ceux de $\mathcal{C}$;
- soient X et Y deux objets de $\mathcal{C}$; par définition $Hom_{\mathcal{C}(F)}(Y, X)$ est la réunion disjointe de $Hom_{\mathcal{C}}(Y, X)$ et de $Hom_{\Sigma}(FY, FX)$;

- en ce qui concerne la composition des flèches dans $\mathcal{C}(F)$, elle est donnée par la règle suivante: soient X, Y et Z trois objets de $\mathcal{C}$; soit $f \in Hom_{\mathcal{C}(F)}(Y, X)$ et $g \in Hom_{\mathcal{C}(F)}(Z, Y)$; alors le composé $g.f$ est défini comme étant la flèche de $Hom_{\mathcal{C}(F)}(Z, X)$ composée de:

g et f dans $\mathcal{C}$, si g et f appartiennent à $\mathcal{C}$,

g et f dans Σ, si g et f appartiennent à Σ,

$F(g)$ et f dans Σ, si $g \in \mathcal{C}$ et $f \in \Sigma$,

g et $F(f)$ dans Σ, si $g \in \Sigma$ et $f \in \mathcal{C}$.

REMARQUES. 1° Les flèches neutres de $\mathcal{C}$ sont les flèches neutres de $\mathcal{C}(F)$, tandis que les flèches neutres de Σ ne sont plus neutres dans la catégorie $\mathcal{C}(F)$.

2° Intuitivement, on a ajouté à chaque *Hom* dans $\mathcal{C}$ le *Hom* correspondant (par F) dans Σ; les composés dans $\mathcal{C}$ et Σ restent inchangés; quant aux «composés mixtes», ils s'effectuent dans Σ; le foncteur F s'étend de façon évidente en un foncteur $\overline{F}$ de $\mathcal{C}(F)$ vers Σ; nous dirons que $\mathcal{C}(F)$ est une *sur-catégorie* (cf. paragraphe **C**-α) *absorbante de* $\mathcal{C}$.

3° Soient $F: \mathcal{C} \to \Sigma$ et $F': \mathcal{C} \to \Sigma'$ deux foncteurs; s'il existe un foncteur G de Σ vers Σ' pleinement fidèle tel que $G \circ F = F'$, les sur-catégories $\mathcal{C}(F)$ et $\mathcal{C}(F')$ sont canoniquement isomorphes.

4° Si F est l'inclusion ι d'une catégorie $\mathcal{C}$ dans une sur-catégorie $\mathfrak{D}$, la catégorie $\mathfrak{D}$ est un quotient strict de $\mathcal{C}(\iota)$ (intuitivement, chaque flèche de $\mathcal{C}$ est «comptée» deux fois dans $\mathcal{C}(\iota)$ et on doit «identifier» les deux exemplaires pour retrouver $\mathfrak{D}$).

5° Si F est le foncteur identique de $\mathcal{C}$, soit $1_{\mathcal{C}}$, chaque flèche f de $\mathcal{C}$ «apparait deux fois» comme flèche dans $\mathcal{C}(1_{\mathcal{C}})$, soit f_0 et f_1. La composition dans $\mathcal{C}(1_{\mathcal{C}})$ satisfait les règles suivantes:

$$g_0 \cdot f_0 = (g.f)_0, \quad g_1 \cdot f_1 = (g.f)_1,$$

$$g_1 \cdot f_0 = g_0 \cdot f_1 = (g.f)_1 .$$

On peut dire que $\mathcal{C}(1_{\mathcal{C}})$ est $\mathbf{Z}_2$-graduée (pour la loi multiplicative de $\mathbf{Z}_2$).

Venons-en aux premiers exemples de $\mathfrak{D}$-algèbres (à droite). Prenons pour $\mathcal{C}$ la catégorie $\mathfrak{M}$ et pour $\mathfrak{D}$ une sur-catégorie absorbante $\mathfrak{M}(F)$ de $\mathfrak{M}$.

(I-1) Si F est le foncteur constant de $\mathfrak{M}$ sur une catégorie à un seul objet (et une seule flèche), la catégorie des $\mathfrak{M}(F)$-algèbres est canoniquement isomorphe à la catégorie des ensembles pointés. On pourrait aussi prendre pour F le foncteur canonique de $\mathfrak{M}$ vers le groupoïde des couples de $\mathfrak{M}_0$ (cf. remarque 3).

(I-2) Si F est le foncteur identique de $\mathfrak{M}$, une $\mathfrak{M}(F)$-algèbre sur un ensemble E consiste en la donnée d'un endomorphisme idempotent e de E, un $\mathfrak{M}(F)$-homomorphisme de (E, e) vers (E', e') étant déterminé par une application f de E vers E' telle que $f \circ e = e' \circ f$.

Reprenons la construction générale du paragraphe, dans le cas où F est un foncteur fidèle. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et $\mathcal{C}(F)$ une sur-catégorie absorbante de $\mathcal{C}$; considérons la relation d'équivalence bicompatible $\bar{r}$ sur $\mathcal{C}(F)$ engendrée par la relation élémentaire r qui identifie dans chaque $Hom_{\mathcal{C}(F)}(Y, X)$ les flèches de $\mathcal{C}$ avec leurs images par F dans Σ (cf. remarque 4). Soit $\mathcal{C}_{F+}$ la catégorie quotient strict de $\mathcal{C}(F)$ par $\bar{r}$ et $\tilde{r}$ le foncteur canonique de $\mathcal{C}(F)$ vers $\mathcal{C}_{F+}$. Puisque F est fidèle et que $\bar{r}$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(F) \arrow[r, "\tilde{r}"] \arrow[dr, "\bar{F}"] & \mathcal{C}_{F+} \arrow[d, "\bar{\bar{F}}"] \\
\mathcal{C} \arrow[u, hook] \arrow[r, "F"] & \Sigma
\end{tikzcd}$$

n'identifie pas d'objets, le foncteur composé de $\tilde{r}$ et de l'inclusion de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}(F)$ est un foncteur injectif; on peut donc identifier $\mathcal{C}(F)$ à une sur-catégorie de $\mathcal{C}$. Il existe un foncteur unique $\bar{\bar{F}}$, de $\mathcal{C}_{F+}$ vers Σ, tel que $\bar{\bar{F}} \circ \tilde{r} = \bar{F}$; ce foncteur $\bar{\bar{F}}$ est pleinement fidèle et la correspondance $F \to \bar{\bar{F}}$ définit une projection. Intuitivement, on a «ajouté» dans chacun des $Hom_{\mathcal{C}}(Y, X)$ les flèches de $Hom_{\Sigma}(FY, FX)$ qui ne sont pas images de flèches de $\mathcal{C}$ par F.

Reprenons les exemples dans le cas où $\mathcal{C} = \mathfrak{M}$.

(I-3) Si F est un foncteur $Hom(\,.\,, K)$ de $\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{M}$, les $\mathfrak{M}_{F+}$-algèbres sur un ensemble E sont en correspondance biunivoque avec les décompositions de E en produit de K-facteurs (cf. [**3**]).

Les exemples (I-1) et (I-3) rentrent dans le cas général du paragraphe suivant.

γ) $\mathbf{T}$-algèbres comme exemples de $\mathfrak{T}$-algèbres.

Si $\mathbf{T}$ est un triple dans la catégorie $\mathcal{C}$, on peut interpréter la catégorie de Kleisli $K_{\mathbf{T}}(\mathcal{C})$ comme une sur-catégorie de $\mathcal{C}$, lorsque l'endofoncteur T sous-jacent au triple est fidèle. Dans ce cas, la catégorie des $K_{\mathbf{T}}(\mathcal{C})$-algèbres au-dessus de $\mathcal{C}$, à notre sens, est canoniquement isomorphe à la catégorie des $\mathbf{T}$-algèbres, au sens habituel. Ce résultat est contenu «en gros» dans l'article de Linton [**2b**], mais notre point de vue nécessite une description différente de celle qu'on donne d'habitude de la catégorie de Kleisli.

a) CATEGORIE DE KLEISLI.

Soit $\mathbf{T} = (T, \varepsilon, \mu)$ un triple dans la catégorie $\mathcal{C}$; on suppose T fidèle. La catégorie de Kleisli $K_{\mathbf{T}}(\mathcal{C})$ associée à $\mathbf{T}$ est généralement présentée comme suit:

1° Ses objets sont ceux de $\mathcal{C}$;

2° Ses morphismes sont donnés par l'égalité:

$$Hom_{K_{\mathbf{T}}(\mathcal{C})}(Y, X) = Hom_{\mathcal{C}}(TY, X);$$

3° Notons par un rond la composition dans $K_{\mathbf{T}}(\mathcal{C})$ et par un point la composition dans $\mathcal{C}$. Alors la composition dans $K_{\mathbf{T}}(\mathcal{C})$ est définie par la formule: $g \circ f = \mu_Z . T(g) . f$, où Z est le but de g dans $K_{\mathbf{T}}(\mathcal{C})$.

Le foncteur d'oubli naturel de $K_{\mathbf{T}}(\mathcal{C})$ vers $\mathcal{C}$, soit U_0, est défini par:

$$U_0(f) = \mu_Y . T(f), \text{ où } Y \text{ est le but de } f \text{ dans } K_{\mathbf{T}}(\mathcal{C}),$$

et l'adjoint à gauche F_0 de U_0 est déterminé par:

$$F_0(g) = \varepsilon_Z . g = T(g) . \varepsilon_X ,$$

X et Z étant les objets source et but de g dans $\mathcal{C}$.

Voici une autre présentation de $K_{\mathbf{T}}(\mathcal{C})$. Partons de la catégorie $\sqsubset_\varepsilon \mathcal{C}$ des trios de $\mathcal{C}$ de la forme

$$(\varepsilon_Y, f, \varepsilon_X), \quad \text{où } TX = \alpha(f) \text{ et } TY = \beta(f),$$

la composition étant celle (usuelle) des trios (notée par un point). Notons $\sqsubset\!\!:_\varepsilon \mathcal{C}$ la sous-catégorie de $\sqsubset_\varepsilon \mathcal{C}$ formée des trios $(\varepsilon_Y, f, \varepsilon_X)$ tels qu'il existe f_1, de X vers Y, satisfaisant $T(f_1) = f$. [Puisque T a été supposé fidèle, cette sous-catégorie $\boxdot_{\varepsilon}\mathcal{C}$ s'identifie canoniquement à la catégorie des quatuors de $\mathcal{C}$ de la forme $(\varepsilon_Y, Tf_1, f_1, \varepsilon_X)$, qui est elle-même isomorphe à $\mathcal{C}$].

Désignons par $\sqsubset_{\mu}\mathcal{C}$ la sous-classe de $\sqsubset_{\varepsilon}\mathcal{C}$ formée des trios du type $(\varepsilon_X, \mu_X, \varepsilon_{TX})$.

PROPOSITION 4. *La sous-classe de* $\sqsubset_{\varepsilon}\mathcal{C}$ *formée des éléments*

$$t_{\mu}.t_{\varepsilon}, \quad \text{où} \quad t_{\mu} \in \sqsubset_{\mu}\mathcal{C} \quad \text{et} \quad t_{\varepsilon} \in \boxdot_{\varepsilon}\mathcal{C},$$

définit une sous-catégorie de $\sqsubset_{\varepsilon}\mathcal{C}$, *canoniquement isomorphe à la catégorie de Kleisli* $K_{\mathbf{T}}(\mathcal{C})$.

DEMONSTRATION. Soit $(t_n, t_{n-1}, \dots, t_1)$ une suite de n éléments composables dans $\sqsubset_{\varepsilon}\mathcal{C}$, chacun d'entre eux étant dans $\boxdot_{\varepsilon}\mathcal{C}$ ou dans $\sqsubset_{\mu}\mathcal{C}$. Supposons que le couple (t_{i+1}, t_i) soit tel que

$$t_i \in \sqsubset_{\mu}\mathcal{C} \quad \text{et} \quad t_{i+1} \in \boxdot_{\varepsilon}\mathcal{C};$$

alors on peut écrire

$$t_{i+1} \circ t_i = t''_{i+1} \circ t'_i, \quad \text{où} \quad t''_{i+1} \in \sqsubset_{\mu}\mathcal{C} \quad \text{et} \quad t'_i \in \boxdot_{\varepsilon}\mathcal{C}.$$

En effet, soit

$$t_i = (\varepsilon_X, \mu_X, \varepsilon_{TX}) \quad \text{et} \quad t_{i+1} = (\varepsilon_Y, f, \varepsilon_X);$$

il suffit de prendre

$$t'_i = (\varepsilon_{TY}, Tf, \varepsilon_{TX}) \quad \text{et} \quad t''_{i+1} = (\varepsilon_Y, \mu_Y, \varepsilon_{TY}).$$

Ceci prouve déjà que $t = t_n \circ t_{n-1} \circ \dots \circ t_1$ peut s'écrire sous la forme: $t''_n \circ \dots \circ t''_{p+1} \circ t'_p \circ \dots \circ t'_1$, les t''_i étant dans $\sqsubset_{\mu}\mathcal{C}$ et les t'_i dans $\boxdot_{\varepsilon}\mathcal{C}$; on peut supposer qu'il n'y a qu'un élément du type t'' puisqu'un composé $t''_{j+1} \circ t''_j$ peut s'écrire aussi $t''_{j+1} \circ t'_j$, avec $t'_j \in \boxdot_{\varepsilon}\mathcal{C}$; en effet, soit

$$\varepsilon_X = \beta(t''_j) \quad \text{et} \quad \alpha(t''_{j+1}) = \varepsilon_{TY};$$

on a $X = TY$, puisque $\beta(t''_j) = \alpha(t''_{j+1})$, et comme

$$\mu_Y.\mu_X = \mu_Y.\mu_{TY} = \mu_Y.T(\mu_Y),$$

on peut remplacer t''_j par $t'_j = (\varepsilon_{TY}, T(\mu_Y), \varepsilon_{T2Y})$. On peut aussi supposer qu'il n'y a qu'un élément du type t', puisque $\boxdot_{\varepsilon}\mathcal{C}$ définit une sous-catégorie de $\sqsubset_{\varepsilon}\mathcal{C}$. Ajoutons qu'un élément $t' = (\varepsilon_Y, T(f_1), \varepsilon_X)$ peut s'écrire sous la forme d'un composé $t'' \circ t'_1$, avec

$$t'' \in \sqsubset_{\mu}\mathcal{C} \quad \text{et} \quad t'_1 \in \sqsubset_{\varepsilon}\mathcal{C},$$

car on a toujours

$$(\varepsilon_Y, T(f_1), \varepsilon_X) = (\varepsilon_Y, \mu_Y, \varepsilon_{TY}) \circ (\varepsilon_{TY}, T(T(f_1).\, \varepsilon_X), \varepsilon_X).$$

En résumé, n'importe quel élément de la catégorie $\tilde{\Sigma}$ engendrée par

$$\Sigma = (\sqsubset_{\varepsilon}\mathcal{C}) \cup (\sqsubset_{\mu}\mathcal{C})$$

peut s'écrire sous la forme $t'' \circ t'$, avec

$$t'' \in \sqsubset_{\mu}\mathcal{C} \quad \text{et} \quad t' \in \sqsubset_{\varepsilon}\mathcal{C}$$

Ceci achève de prouver la première partie de la proposition.

Montrons que $K_{\mathbf{T}}(\mathcal{C})$ et $\tilde{\Sigma}$ sont canoniquement isomorphes. Pour cela, on définit deux foncteurs inverses l'un de l'autre:

$$\tilde{\Sigma} \underset{\phi}{\overset{\psi}{\rightleftarrows}} K_{\mathbf{T}}(\mathcal{C})\ ;$$

soit $t = (\varepsilon_Y, f, \varepsilon_X) \in \tilde{\Sigma}$; on pose $\psi(t) = f.\, \varepsilon_X$; on montre que ψ est un foncteur à l'aide de la première partie de la proposition. Soit $f \in K_{\mathbf{T}}(\mathcal{C})$, de source X et de but Y; dans $\mathcal{C}$, on a $\alpha(f) = X$ et $\beta(f) = TY$; on pose

$$\phi(f) = (\varepsilon_Y, \mu_Y.\, T(f), \varepsilon_X).$$

Le reste de la démonstration n'est que vérifications.

Désormais, la catégorie $K_{\mathbf{T}}(\mathcal{C})$ est identifiée avec $\tilde{\Sigma}$.

b) $K_{\mathbf{T}}(\mathcal{C})$-ALGEBRES ET $\mathbf{T}$-ALGEBRES.

Comme T est fidèle, on peut identifier $\mathcal{C}$ à la sous-catégorie $\sqsubset_{\varepsilon}\mathcal{C}$ de $K_{\mathbf{T}}(\mathcal{C})$; celle-ci devient alors une sur-catégorie de $\mathcal{C}$.

Notation: Nous allons donner la préférence à $\mathcal{C}$; les flèches de $K_{\mathbf{T}}(\mathcal{C})$ qui ne sont pas dans $\mathcal{C}$ sont appelées *flèches formelles*; la composition est maintenant notée par un point; au trio $(\varepsilon_X, \mu_X, \varepsilon_{TX})$ correspond une flèche formelle de TX vers X, notée $\hat{\mu}_X$. Cette flèche formelle est inverse à gauche de $\varepsilon_X : X \to TX$. Toute flèche formelle de source Y et de but X peut s'écrire, d'après a, sous la forme $\hat{\mu}_X.\, f$, où $f \in \mathcal{C}$, et correspond au trio $(\varepsilon_X, \mu_X.\, T(f), \varepsilon_Y)$.

REMARQUE. Il ne faut pas confondre les flèches μ_X et $\hat{\mu}_X$, dans $K_{\mathbf{T}}(\mathcal{C})$ regardée comme sur-catégorie de $\mathcal{C}$. L'endofoncteur T de $\mathcal{C}$ se prolonge en un endofoncteur $\hat{T}$ de $K_{\mathbf{T}}(\mathcal{C})$ en posant $\hat{T}(\hat{\mu}_X) = \mu_X$. Enfin, l'égalité $\mu_X . \mu_{TX} = \mu_X . T(\mu_X)$ entraîne l'égalité

$$\hat{\mu}_X . \hat{\mu}_{TX} = \hat{\mu}_X . \mu_X ,$$

et $\hat{\mu}$ est une transformation naturelle de $\hat{T}$ vers 1.

PROPOSITION 5. *La catégorie des $K_{\mathbf{T}}(\mathcal{C})$-algèbres (au sens du paragraphe* $\mathbf{C}$-α*) et la catégorie des* $\mathbf{T}$*-algèbres (au sens usuel) sont canoniquement isomorphes.*

DEMONSTRATION. Soit θ une $K_{\mathbf{T}}(\mathcal{C})$-algèbre (à notre sens) sur l'objet X; on peut supposer que θ est une application de $K_{\mathbf{T}}(\mathcal{C})_{X_0}$ dans $\mathcal{C}_{X_0}$ satisfaisant les trois conditions *i*, *ii* et *iii* de la proposition 2 ($\mathbf{C}$-α). Posons $\bar{\theta} = \theta(\hat{\mu}_X)$; alors $\bar{\theta}$ est une flèche dans $\mathcal{C}$ de source TX et de but X (condition *i*); ensuite:

$$\bar{\theta} . \varepsilon_X = \theta(\hat{\mu}_X) . \varepsilon_X = \theta(\hat{\mu}_X . \varepsilon_X) = \theta(1_X) = 1_X ;$$

enfin:

$$\begin{aligned} \bar{\theta} . \mu_X &= \theta(\hat{\mu}_X) . \mu_X = \theta(\hat{\mu}_X . \mu_X) \quad \text{(conditions } ii \text{ et } iii\text{)} \\ &= \theta(\hat{\mu}_X . \hat{\mu}_{TX}) \quad \text{(remarque précédente)} \\ &= \theta(\theta(\hat{\mu}_X) . \hat{\mu}_{TX}) \quad \text{(condition } iii\text{)} \\ &= \theta(\bar{\theta} . \hat{\mu}_{TX}) ; \end{aligned}$$

mais

$$\bar{\theta} . \hat{\mu}_{TX} = \hat{\mu}_X . \hat{T}(\bar{\theta}) = \hat{\mu}_X . T(\bar{\theta}) ,$$

car $\hat{\mu}$ est une transformation naturelle de $\hat{T}$ vers 1 et $\hat{T}$ prolonge T. Finalement:

$$\begin{aligned} \bar{\theta} . \mu_X = \theta(\hat{\mu}_X . T(\bar{\theta})) &= \theta(\hat{\mu}_X) . T(\bar{\theta}) \quad \text{(conditions } ii \text{ et } iii\text{)} \\ &= \bar{\theta} . T(\bar{\theta}) ; \end{aligned}$$

on reconnait donc en $\bar{\theta}$ une $\mathbf{T}$-algèbre sur X.

Réciproquement, soit $\bar{\theta}$ une $\mathbf{T}$-algèbre sur X; considérons une flèche de $K_{\mathbf{T}}(\mathcal{C})$ de but X; elle peut s'écrire $\hat{\mu}_X . f$; définissons alors l'application θ par

$$\theta(\hat{\mu}_X . f) = \overline{\theta} . f;$$

les conditions *i* et *ii* sont trivialement satisfaites par θ; quant à la condition *iii*, elle se démontre facilement lorsqu'on sait écrire sous forme réduite $(\hat{\mu}_X . f)$ la composée de deux flèches formelles. Nous laissons ce soin au lecteur.

La correspondance entre les θ et les $\overline{\theta}$ est évidemment une bijection. Celle-ci se prolonge en une bijection pour les homomorphismes, grâce à la proposition 3 de (**C** - α) , ce qui achève la démonstration.

Pour toute sur-catégorie $\mathfrak{D}$ de $\mathcal{C}$, l'appellation «catégorie de Kleisli associée au type de structures algébriques défini par les $\mathfrak{D}$-algèbres» est maintenant justifiée.

Les premiers exemples de $\mathfrak{D}$-algèbres (cf. paragraphe β) peuvent être considérés comme des cas particuliers de l'exemple que constituènt les **T**-algèbres; cependant la sur-catégorie $\mathfrak{D}$ de $\mathfrak{M}$ qui a été utilisée dans ces exemples n'est pas la catégorie de Kleisli associée au triple correspondant; ceci montre que plusieurs sur-catégories de $\mathcal{C}$ peuvent définir des catégories d'algèbres isomorphes (à notre sens).

D. FONCTEURS D'OUBLI DES $\mathfrak{D}$-ALGEBRES.

α) Caractérisation des foncteurs d'oubli ayant un adjoint à gauche.

Les notations sont toujours celles du paragraphe (**C** - α); en particulier, une $\mathfrak{D}$-algèbre (à droite) sur X est donnée comme une application θ satisfaisant les conditions de la proposition 2 (**C** - α) et les homomorphismes entre $\mathfrak{D}$-algèbres sont des flèches (dans $\mathcal{C}$) satisfaisant la condition de la proposition 3 (**C** - α).

Soit donc $\mathfrak{D}$ une sur-catégorie de $\mathcal{C}$ et $U_{\mathfrak{D}}$ le foncteur d'oubli naturel de $\mathcal{A}_{\mathfrak{D}}$ vers $\mathcal{C}$.

PROPOSITION 1. *Si $U_{\mathfrak{D}}$ admet un adjoint à gauche $F_{\mathfrak{D}}$, alors $U_{\mathfrak{D}}$ est un foncteur algébrique (au sens ordinaire).*

DEMONSTRATION. Soit $\mathbf{T} = (T, \varepsilon, \mu)$ le triple dans $\mathcal{C}$ déduit de la paire d'adjoints $(U_{\mathfrak{D}}, F_{\mathfrak{D}})$. Notons E le foncteur de comparaison d'Eilenberg-Moore de source $\mathfrak{A}_{\mathfrak{D}}$ et de but $\mathfrak{A}_{\mathbf{T}}$, catégorie des $\mathbf{T}$-algèbres; notons enfin $\overline{\delta}$ la transformation naturelle de $F_{\mathfrak{D}} U_{\mathfrak{D}}$ vers 1 définie par l'adjonction $(U_{\mathfrak{D}}, F_{\mathfrak{D}})$ et posons $\delta = U_{\mathfrak{D}} \overline{\delta}$.

Nous démontrons directement que E est un isomorphisme de catégories, plutôt que de vérifier les conditions équivalentes de J. Beck indiquées dans [**2c**] . Soit θ une $\mathfrak{D}$-algèbre sur X; la $\mathbf{T}$-algèbre $E(\theta)$ est définie par

$$E(\theta) = U_{\mathfrak{D}}(\overline{\delta}_\theta) = \delta_\theta .$$

Réciproquement, soit A une $\mathbf{T}$-algèbre sur X; posons $\xi = F_{\mathfrak{D}}(X)$; en tant que $\mathfrak{D}$-algèbre, ξ est une application de $\mathfrak{D}_{TX_0}$ dans $\mathcal{C}_{TX_0}$ satisfaisant les conditions de la proposition 2 de ($\mathbf{C}$-α). Considérons alors l'application θ de $\mathfrak{D}_{X_0}$ dans $\mathcal{C}_{X_0}$ suivante:

$$\theta(g) = A . \xi(\varepsilon_X . g) .$$

Vérifions les conditions i, ii et iii pour θ.

- Condition i: $\alpha\, \theta(g) = \alpha(\xi(\varepsilon_X . g)) = \alpha(g)$.
- Condition ii: soit $g \in \mathcal{C}$; alors

$$\varepsilon_X . g \in \mathcal{C} \quad \text{et} \quad \xi(\varepsilon_X . g) = \varepsilon_X . g ,$$

puisque ξ satisfait ii; donc

$$\theta(g) = A .\, \varepsilon_X . g = g .$$

- Condition iii: soient g et $g_1 \in \mathfrak{D}$ tels que $g . g_1$ soit défini; on a:

$$\theta(g . g_1) = A . \xi(\varepsilon_X . g . g_1) = A . \xi(\xi(\varepsilon_X . g) . g_1),$$

car ξ satisfait iii; d'autre part

$$\begin{aligned}\theta(\theta(g) . g_1) &= A . \xi(\varepsilon_X . A . \xi(\varepsilon_X . g) . g_1)\\ &= A . \xi(T(A) .\, \varepsilon_{TX} . \xi(\varepsilon_X . g) . g_1) ;\end{aligned}$$

mais $T(A)$ définissant un homomorphisme de la $\mathfrak{D}$-algèbre $F_{\mathfrak{D}}(TX) = \tilde{\xi}$ vers la $\mathfrak{D}$-algèbre $F_{\mathfrak{D}}(X) = \xi$, il vient, d'après la proposition 3 de ($\mathbf{C}$-α),

$$\xi(T(A) .\, \varepsilon_{TX} . \xi(\varepsilon_X . g) . g_1) = T(A) . \tilde{\xi}(\varepsilon_{TX} . \xi(\varepsilon_X . g) . g_1),$$

d'où

$$\theta(\theta(g).g_1) = A.T(A).\tilde{\xi}(\varepsilon_{TX}.\xi(\varepsilon_X.g).g_1)$$
$$= A.\mu_X.\tilde{\xi}(\varepsilon_{TX}.\xi(\varepsilon_X.g).g_1),$$

car A est une $\mathbf{T}$-algèbre;

$$\mu_X = U_{\mathfrak{T}}\overline{\delta}F_{\mathfrak{T}}(X) = \delta F_{\mathfrak{T}}(X)$$

définissant aussi un homomorphisme de $\tilde{\xi}$ vers ξ, on peut écrire, encore d'après 3 ($\mathbf{C}$-α):

$$\theta(\theta(g).g_1) = A.\xi(\mu_X.\varepsilon_{TX}.\xi(\varepsilon_X.g).g_1)$$
$$= A.\xi(\xi(\varepsilon_X.g).g_1)$$

et on a bien $\theta(g.g_1) = \theta(\theta(g).g_1)$.

En résumé, θ est une $\mathfrak{T}$-algèbre sur X; posons $\theta = E'(A)$; remarquons alors que A définit un homomorphisme de ξ vers θ, car, si h est un élément de $\mathfrak{T}_{TX_0}$, on a:

$$\theta(A.h) = A.\xi(\varepsilon_X.A.h) = A.\xi(T(A).\varepsilon_{TX}.h) =$$
$$= A.T(A).\tilde{\xi}(\varepsilon_{TX}.h) = A.\mu_X.\tilde{\xi}(\varepsilon_{TX}.h) =$$
$$= A.\xi(\mu_X.\varepsilon_{TX}.h) = A.\xi(h).$$

Il est aisé de vérifier que E' se prolonge en un foncteur de $\mathfrak{A}_{\mathbf{T}}$ vers $\mathfrak{A}_{\mathfrak{T}}$, inverse de E.

REMARQUES. 1° Cette proposition et la proposition 5 du paragraphe $\mathbf{C}$ établissent le rapport exact entre les $\mathbf{T}$-algèbres et les $\mathfrak{T}$-algèbres.

2° Deux sur-catégories $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$ de $\mathcal{C}$ distinctes peuvent conduire à des catégories de $\mathfrak{T}$-algèbres et $\mathfrak{T}'$-algèbres isomorphes. Plus précisément, soit $\mathfrak{T}$ une sur-catégorie de $\mathcal{C}$ telle que $U_{\mathfrak{T}}: \mathfrak{A}_{\mathfrak{T}} \to \mathcal{C}$ admette un adjoint à gauche; il existe alors un foncteur naturel ψ de $\mathfrak{T}$ vers $K_{\mathbf{T}}(\mathcal{C})$, prolongeant l'inclusion de $\mathcal{C}$ dans $K_{\mathbf{T}}(\mathcal{C})$; soit $g \in \mathfrak{T}$ avec $\beta(g) = X$ et soit toujours ξ la $\mathfrak{T}$-algèbre libre (sur TX) engendrée par X; ψ est défini par:

$$\psi(g) = \hat{\mu}_X.\xi(\varepsilon_X.g)$$

[si $g \in \mathcal{C}$, on a bien

$$\psi(g) = \hat{\mu}_X.\varepsilon_X.g = g \ ].$$

Dans cette égalité, il faut faire attention au fait que le composé $\varepsilon_X.g$ est effectué dans $\mathcal{D}$, lorsque $\mathcal{C}$ est regardée comme une sous-catégorie de $\hat{\mathcal{D}}$, tandis que $\hat{\mu}_X . \xi(\ )$ est effectué dans $K_{\mathbf{T}}(\mathcal{C})$, lorsque $\mathcal{C}$ est regardée comme une sous-catégorie de $K_{\mathbf{T}}(\mathcal{C})$.

β) Foncteur fondamental.

Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux sur-catégories de $\mathcal{C}$ et soit ψ un foncteur de $\mathcal{D}$ vers $\mathcal{D}'$ prolongeant l'inclusion de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{D}'$; la proposition suivante permet de comparer les $\mathcal{D}$-algèbres et les $\mathcal{D}'$-algèbres.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[rr, "\psi"] & & \mathcal{D}' \\ & \mathcal{C} \arrow[ul, hook] \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

PROPOSITION 2. *Il existe un foncteur canonique de $\mathfrak{A}_{\mathcal{D}'}$ vers $\mathfrak{A}_{\mathcal{D}}$, soit ψ^*, tel que: $U_{\mathcal{D}} \circ \psi^* = U_{\mathcal{D}'}$.*

DEMONSTRATION. Soit θ' une $\mathcal{D}'$-algèbre sur X, donnée comme une application de $\mathcal{D}'_{X_0}$ dans $\mathcal{C}_{X_0}$; on définit une application θ de $\mathcal{D}_{X_0}$ dans $\mathcal{C}_{X_0}$ par l'égalité:

$$\theta(g) = \theta'(\psi(g)), \quad \text{pour tout} \quad g \in \mathcal{D}_{X_0}.$$

Si $g \in \mathcal{C}$, on a:

$$\begin{aligned} \theta'(\psi(g)) &= \theta'(g) \quad (\text{car } \psi \text{ prolonge l'inclusion}) \\ &= g \quad\quad (\text{car } \theta' \text{ satisfait } ii); \end{aligned}$$

donc θ satisfait aussi *ii*.

Soient g_1, $g \in \mathcal{D}$ et supposons $g . g_1$ défini; il vient:

$$\begin{aligned} \theta(\theta(g). g_1) &= \theta'(\psi(\theta'(\psi(g)). g_1)) \\ &= \theta'(\psi(\theta'(\psi(g))). \psi(g_1)) \\ &= \theta'(\theta'(\psi(g)). \psi(g_1)) \ (\text{car } \theta'(\psi(g)) \in \mathcal{C} \text{ et } \psi \text{ prolonge l'inclusion } \mathcal{C} \subset \mathcal{D}) \\ &= \theta'(\psi(g). \psi(g_1)) \ (\text{car } \theta' \text{ satisfait } iii) \\ &= \theta'(\psi(g . g_1)) \ (\text{car } \psi \text{ est un foncteur}) \\ &= \theta(g . g_1) \ (\text{par définition de } \theta), \end{aligned}$$

de sorte que θ définit une $\mathcal{D}$-algèbre sur X; l'application qui à θ' fait correspondre θ se prolonge en un foncteur ψ^* de $\mathfrak{A}_{\mathcal{D}'}$ vers $\mathfrak{A}_{\mathcal{D}}$ satisfaisant la condition indiquée dans l'énoncé.

Les foncteurs tels que ψ^* forment une catégorie notée $A_{\mathcal{C}}$. La correspondance entre ψ et ψ^* est fonctorielle. Soit alors F un foncteur fidèle de $\mathcal{C}$ dans Σ; on a défini en (**C** - β) la sur-catégorie $\mathcal{C}_{F+}$, comme quotient strict de $\mathcal{C}(F)$. Cette sur-catégorie a la propriété universelle suivante: *Pour tout foncteur G d'une sur-catégorie $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}$ vers Σ, prolongeant F, il existe un unique foncteur $\overline{G}$ de $\mathcal{D}$ vers $\mathcal{C}_{F+}$ tel que l'on ait* $\overline{F} \circ \overline{G} = G$.

$$\begin{tikzcd} & \Sigma & \\ \mathcal{C} \arrow[ur, "F"] \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathcal{C}_{F+} \arrow[ul, "\overline{F}"'] \\ & \mathcal{D} \arrow[uu, "G"] \arrow[ur, "\overline{G}"'] & \end{tikzcd}$$

Soit $\hat{\mathfrak{F}}^{\mathcal{C}}$ la catégorie des foncteurs au-dessous de $\mathcal{C}$; soit $\hat{\mathfrak{F}}'^{\mathcal{C}}$ la sous-catégorie pleine de $\hat{\mathfrak{F}}^{\mathcal{C}}$ dont les objets sont les inclusions de $\mathcal{C}$ dans ses sur-catégories; la propriété universelle indiquée plus haut signifie encore que $\hat{\mathfrak{F}}^{\mathcal{C}}$ est à $\hat{\mathfrak{F}}'^{\mathcal{C}}$-éjections. En utilisant cette remarque et la proposition 2 (**D** - β), on voit qu'on peut faire correspondre à tout foncteur au-dessous de $\mathcal{C}$ un foncteur entre catégories d'algèbres (à notre sens) au-dessus de $\mathcal{C}$; cette correspondance définit un foncteur contravariant de $\hat{\mathfrak{F}}^{\mathcal{C}}$ dans $A_{\mathcal{C}}$, que nous appelons *foncteur fondamental.*

γ) Limites.

Soit $U_{\mathcal{D}}$ le foncteur d'oubli des $\mathcal{D}$-algèbres vers $\mathcal{C}$, où $\mathcal{D}$ est une sur-catégorie de $\mathcal{C}$. Si $U_{\mathcal{D}}$ admet un adjoint à gauche, on sait que $U_{\mathcal{D}}$ est compatible avec les limites projectives, et mieux, que toute limite projective dans $\mathcal{C}$ se «relève» dans $\mathfrak{A}_{\mathcal{D}}$, parce que $\mathfrak{A}_{\mathcal{D}}$ est alors isomorphe à une catégorie de **T**-algèbres (proposition 1 de **D** - α). Même si $U_{\mathcal{D}}$ n'a pas d'adjoint à gauche, cette propriété est encore vraie:

PROPOSITION 3. *Soit ϕ un foncteur d'une catégorie H' vers $\mathfrak{A}_{\mathcal{D}}$ tel que $U_{\mathcal{D}} \circ \phi$ admette une limite projective P; alors ϕ admet une limite projective θ, qui est une $U_{\mathcal{D}}$-algèbre sur P.*

DEMONSTRATION. Pour toute unité e de $H^{\cdot}$, nous posons:

$$X^e = U_{\mathfrak{T}} \circ \phi(e)$$

et nous désignons par p_e la projection canonique de P vers X^e; la $\mathfrak{T}$-algèbre $\phi(e)$ sur X^e est présentée sous forme d'application de $\mathfrak{T}_{X_0^e}$ vers $\mathcal{C}_{X_0^e}$, soit θ_e. Nous définissons θ, de $\mathfrak{T}_P$ vers $\mathcal{C}_P$, de la manière suivante: Soit $g \in \mathfrak{T}_P$; la famille $(\theta_e(p_e \cdot g))_{e \in H_0^{\cdot}}$ est ϕ-compatible dans $\mathcal{C}$; il existe donc une flèche unique $\hat{g}$ dans $\mathcal{C}$, «crochet des $\theta_e(p_e \cdot g)$» telle que:

$$p_e \cdot \hat{g} = \theta_e(p_e \cdot g), \quad \text{pour tout } e \in H_0^{\cdot} ;$$

par définition, on pose $\theta(g) = \hat{g}$. Il est facile de vérifier que θ définit une $\mathfrak{T}$-algèbre sur P, limite inductive de ϕ; la définition même de θ montre que les p_e définissent des morphismes de $\mathfrak{T}$-algèbres, de θ vers θ_e.

En ce qui concerne les limites inductives dans $\mathcal{A}_{\mathfrak{T}}$, nous indiquons seulement qu'il faut des conditions supplémentaires pour qu'elles existent, lorsque $\mathcal{C}$ en est déjà pourvue (par exemple: existence de certains produits fibrés finis dans $\mathfrak{D}$, commutation des limites inductives dans $\mathcal{C}$ avec ces produits fibrés finis et une autre condition portant encore sur les produits fibrés dans $\mathcal{C}$). Nous ne traiterons pas de cette question ici.

E. $\mathfrak{T}$-ALGEBRES SUR DES OBJETS ATTACHES A LA CATEGORIE DE BASE.

Soit toujours $\mathcal{C}$ une catégorie et $\mathfrak{T}$ une sur-catégorie de $\mathcal{C}$. Considérons encore un foncteur F de $\mathcal{C}$ vers une catégorie Σ; on suppose que F est injectif sur les objets; un objet de Σ s'appellera *objet attaché à $\mathcal{C}$ par F*. Dans ce paragraphe, nous montrons qu'on peut définir des $\mathfrak{T}$-algèbres sur les objets attachés à $\mathcal{C}$ et des morphismes entre eux (de deux sortes en général) et nous étudions les principales propriétés des foncteurs d'oubli correspondants.

Soit C un objet de Σ; désignons par $\Sigma_C^{\mathcal{C}}$ la classe des flèches dans Σ, de source dans $F(\mathcal{C})$ et de but C; alors $\mathcal{C}$ opère à droite sur $\Sigma_C^{\mathcal{C}}$ de façon évidente et ceci définit une $\mathbf{C}_\beta$-algèbre $\hat{\kappa}_C^\beta$ dans $\hat{\mathfrak{M}}_{\mathcal{C}_0}$ sur l'objet $\alpha_C : \Sigma_C^{\mathcal{C}} \to \mathcal{C}_0$ ($\alpha_C(g)$ est l'unique objet X de $\mathcal{C}$ tel que l'on ait $F(X) = \alpha(g)$; ici intervient l'hypothèse que F est injectif sur les objets). L'application qui à C fait correspondre $\hat{\kappa}_C^{\beta}$ se prolonge en un foncteur $\Gamma_{\beta,F}$ de Σ vers $\mathfrak{A}_{\mathbf{C}_\beta}$.

REMARQUES. 1° Si F est pleinement fidèle, on peut écrire, à un isomorphisme fonctoriel près: $\Gamma_{\beta,F} \circ F = \Gamma_\beta$.

2° Le foncteur $\Gamma_{\beta,F}$ est injectif, mais non plein, en général, même si F est plein.

DEFINITION. En reprenant les notations du paragraphe ($\mathbf{C}$-α), une *$\mathfrak{D}$-algèbre sur un objet C de Σ* est, par définition, une τ_β-structure au-dessus de $\hat{\kappa}_C^{\beta} = \Gamma_{\beta,F}(C)$, c'est-à-dire une action à droite de $\mathfrak{D}$ sur $\Sigma_C^{\mathcal{C}}$ étendant l'action naturelle à droite de $\mathcal{C}$.

Quant aux morphismes, il y en a de deux sortes:

1° Ceux correspondant au produit fibré des foncteurs τ_β et $\Gamma_{\beta,F}$ et appelés *réels*: Soit $\overline{\theta}$ une $\mathfrak{D}$-algèbre sur C et $\overline{\theta}'$ une $\mathfrak{D}$-algèbre sur C'; un morphisme réel de $\overline{\theta}$ vers $\overline{\theta}'$ est une flèche f de C vers C', dans Σ, telle que $\Gamma_{\beta,F}(f)$ définisse un homomorphisme entre les algèbres $\overline{\theta}$ et $\overline{\theta}'$, regardées comme algèbres du triple défini par la paire $(\tau_\beta, \sigma_\beta)$.

2° Ceux correspondant aux homomorphismes existant dans $\mathfrak{A}_{\mathbf{C}_\beta}$, mais ne provenant pas de flèches de Σ par le foncteur $\Gamma_{\beta,F}$; ils seront dits *formels*.

Notations: La catégorie des homomorphismes réels entre $\mathfrak{D}$-algèbres sur les objets de Σ est désignée par $\mathfrak{A}_{\mathfrak{D}}^{\Sigma}$, son foncteur d'oubli vers Σ est noté $U_{\mathfrak{D}}^{\Sigma}$. La sous-catégorie pleine de $\mathfrak{A}_{\mathbf{C}_\beta}$ engendrée par $\Gamma_{\beta,F}(\Sigma)$ est désignée par $\overline{\Sigma}$; la catégorie des homomorphismes (réels et formels) entre $\mathfrak{D}$-algèbres notée $\overline{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{D}}^{\Sigma}$ est une catégorie au-dessus de $\overline{\Sigma}$, l'oubli naturel étant $\overline{U}_{\mathfrak{D}}^{\Sigma}$. Nous identifions Σ et $\Gamma_{\beta,F}(\Sigma)$, de sorte que $U_{\mathfrak{D}}^{\Sigma}$ est un sous-foncteur de $\overline{U}_{\mathfrak{D}}^{\Sigma}$.

$$
\begin{tikzcd}
\mathfrak{A}_{\mathfrak{D}} \arrow[d, "U_{\mathfrak{D}}"'] & \mathfrak{A}_{\mathfrak{D}}^{\Sigma} \arrow[r, hook] \arrow[d, "U_{\mathfrak{D}}^{\Sigma}"'] & \overline{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{D}}^{\Sigma} \arrow[r, hook, two heads] \arrow[d, "\overline{U}_{\mathfrak{D}}^{\Sigma}"'] & \mathfrak{A}_{\mathbf{D}_\beta} \arrow[d, shift right, "\tau_\beta"'] \\
\mathcal{C} \arrow[r, "F"] & \Sigma \arrow[r, hook] & \overline{\Sigma} \arrow[r, hook, two heads] & \mathfrak{A}_{\mathbf{C}_\beta} \arrow[u, shift right, "\sigma_\beta"']
\end{tikzcd}
$$

La proposition suivante montre que le foncteur $U_{\mathfrak{T}}^{\Sigma}$ est de même nature que le foncteur $U_{\mathfrak{T}}$; en particulier, dès que $U_{\mathfrak{T}}^{\Sigma}$ admet un adjoint à gauche, c'est un foncteur algébrique (cf. paragraphe (**D** - α)).

PROPOSITION 1. *Soit $\mathfrak{T}_F$ la catégorie somme fibrée de F et de l'inclusion de $\mathcal{C}$ dans $\mathfrak{T}$; alors $\mathfrak{T}_F$ peut être regardée comme une sur-catégorie de Σ et la catégorie des $\mathfrak{T}_F$-algèbres au-dessus de Σ est canoniquement isomorphe à la catégorie $\mathfrak{A}_{\mathfrak{T}}^{\Sigma}$.*

La démonstration, assez longue, utilise la description explicite de $\mathfrak{T}_F$ comme quotient d'une catégorie libre; nous laissons ce soin au lecteur, indiquant seulement que l'isomorphisme entre $\mathfrak{A}_{\mathfrak{T}_F}$ et $\mathfrak{A}_{\mathfrak{T}}^{\Sigma}$ ne fait intervenir que des classes d'équivalence de chemins de longueur 1 ou 2. Bien faire attention aussi au fait que les propositions 2 et 3 de (**C** - α) ne sont plus valables ici, mais seulement la proposition 2 de **B**.

Voici une autre proposition qui caractérise la catégorie $\mathfrak{A}_{\mathfrak{T}}^{\Sigma}$ lorsque F admet un adjoint à droite.

PROPOSITION 2. *Supposons que F ait un adjoint à droite G; alors la catégorie $\mathfrak{A}_{\mathfrak{T}}^{\Sigma}$ est un produit fibré des foncteurs $U_{\mathfrak{T}}$ et G.*

DEMONSTRATION. Les algèbres intervenant ici sont présentées comme des actions à droite de $\mathfrak{T}$, ou de $\mathcal{C}$, sur certaines classes. Considérons un couple (Y, θ) formé d'un objet Y de Σ et d'une $\mathfrak{T}$-algèbre θ sur GY. Au couple (Y, θ) nous allons faire correspondre une action $\overline{\theta}$ de $\mathfrak{T}$ sur $\Sigma_Y^{\mathcal{C}}$ étendant l'action naturelle de $\mathcal{C}$ (à travers F); désignons par i et η les transformations naturelles de 1 vers GF et de FG vers 1, respectivement, faisant de G un adjoint à droite de F.

$$\begin{tikzcd}
Z_1 \arrow[r, dashed, "d"] \arrow[dr, "(G(g).i_Z)^*_\theta d"'] & Z \arrow[r, "i_Z"] & GFZ \arrow[dl, "G(g)"] \\
& GY &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
FZ_1 \arrow[r, dashed, "d"] \arrow[d] & FZ \arrow[d, "g"] \\
FGY \arrow[r, "\eta_Y"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Soit $g \in \Sigma_Y^{\mathcal{C}}$, de source FZ, et soit d une flèche de $\mathfrak{T}$ de source Z_1 et but Z; l'action $\overline{\theta}$ est définie par l'égalité suivante:

$$g \overset{*}{\underset{\overline{\theta}}{}} d = \eta_Y . F((G(g).i_Z)^{*}_{\theta} d) .$$

Si $d \in \mathcal{C}$, on doit vérifier que $g \overset{*}{\underset{\overline{\theta}}{}} d = g . F(d)$; or, dans ce cas, on a:

$$\eta_Y . F((G(g).i_Z)^{*}_{\theta} d) = \eta_Y . F(G(g).i_Z . d) =$$

$$= g . \eta_{FZ} . F(i_Z) . F(d) = g . F(d) ,$$

car $\eta_{FZ} . F(i_Z) = 1_{FZ}$.

On doit vérifier aussi que, si $d . d_1$ est défini dans $\mathfrak{D}$, alors

$$(g \overset{*}{\underset{\overline{\theta}}{}} d) \overset{*}{\underset{\overline{\theta}}{}} d_1 = g \overset{*}{\underset{\overline{\theta}}{}} (d . d_1) ;$$

c'est une simple manipulation de transformations naturelles et l'hypothèse que θ est une action qui entraînent cette dernière égalité.

Réciproquement, si $\overline{\theta}$ est une action de $\mathfrak{D}$ sur $\Sigma^{\mathcal{C}}_{Y}$ étendant l'action naturelle de $\mathcal{C}$, on peut faire correspondre à $\overline{\theta}$ le couple (Y, θ), où θ est une $\mathfrak{D}$-algèbre sur GY définie par:

$$f \overset{*}{_\theta} d = G((\eta_Y . F(f)) \overset{*}{\underset{\overline{\theta}}{}} d) . i_{Z_1} ,$$

f étant une flèche dans $\mathcal{C}$, de Z vers GY. La correspondance entre les $\overline{\theta}$ et les (Y, θ) est évidemment une bijection; celle-ci s'étend d'une façon très simple en un isomorphisme de $\mathfrak{A}^{\Sigma}_{\mathfrak{D}}$ sur le produit fibré ordinaire des foncteurs G et $U_{\mathfrak{D}}$; grâce à cet isomorphisme, le foncteur U^{Σ}_{D} représente une des projections du produit fibré; l'autre projection $\tilde{G}$, foncteur de $\mathfrak{A}^{\Sigma}_{\mathfrak{D}}$ vers $\mathfrak{A}_{\mathfrak{D}}$, est justement définie par la dernière égalité écrite.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{A}_{\mathfrak{D}} \arrow[d, "U_{\mathfrak{D}}"'] & \mathfrak{A}^{\Sigma}_{\mathfrak{D}} \arrow[l, "\tilde{G}"'] \arrow[d, "U^{\Sigma}_{\mathfrak{D}}"] \\
\mathcal{C} \arrow[r, shift left, "F"] & \Sigma \arrow[l, shift left, "G"]
\end{tikzcd}$$

EXEMPLE. Soit $H^{\cdot}$ une catégorie et soit $\mathcal{C}^{H^{\cdot}}$ la catégorie des transformations naturelles entre foncteurs de $H^{\cdot}$ vers $\mathcal{C}$; prenons pour F le foncteur canonique Δ de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}^{H^{\cdot}}$; il est injectif (et pleinement fidèle si $H^{\cdot}$ est connexe). Si $\mathfrak{D}$ est une sur-catégorie de $\mathcal{C}$, on sait définir, par la méthode précédente, les $\mathfrak{D}$-algèbres sur les foncteurs vers $\mathcal{C}$. On retrouve, comme cas particulier, les $\mathfrak{D}$-algèbres sur les objets de $\mathcal{C}$, en considérant les foncteurs constants; les morphismes réels entre $\mathfrak{D}$-algèbres sur foncteurs correspondent à certaines transformations naturelles: il peut y avoir des morphismes formels. Si $\mathcal{C}$ est à $H^\cdot$-limites projectives, le foncteur Δ admet un adjoint à droite $\underleftarrow{Lim}$, dès qu'on a choisi des limites projectives précises pour les foncteurs de $H^\cdot$ vers $\mathcal{C}$, et une structure de $\mathfrak{D}$-algèbre sur un foncteur ϕ s'identifie canoniquement (d'après la proposition 2 de **E**) à un couple (ϕ, θ), où θ est une $\mathfrak{D}$-algèbre sur $\underleftarrow{Lim}\,\phi$.

Signalons pour terminer qu'on peut de la même façon définir des $\mathfrak{D}$-algèbres sur les transformations naturelles entre foncteurs vers $\mathfrak{D}$, toujours par le même procédé.

Nous réserverons pour un autre article l'étude plus complète des structures algébriques sur des objets attachés à une catégorie, et en particulier le cas des foncteurs, qui conduit à des problèmes de complétion de foncteurs. Citons simplement le résultat suivant, concernant la complétion projective d'une catégorie $\mathcal{C}$ ayant un objet initial.

Soit $H^\cdot$ une catégorie; soit $\overline{\Delta}$ le plongement de $\mathcal{C}$ dans $\overline{\mathcal{C}}^{H^\cdot}$, composé de Δ et de «l'inclusion» de $\mathcal{C}^{H^\cdot}$ dans $\overline{\mathcal{C}}^{H^\cdot}$. Ce plongement a les propriétés suivantes:

1° Il est injectif (et pleinement fidèle si $H^\cdot$ est connexe);

2° Si ϕ est un foncteur de $H^\cdot$ vers $\mathcal{C}$, l'action naturelle $\hat{\kappa}^{\beta}_{\phi}$ de $\mathcal{C}$ sur la classe $\mathcal{C}_\phi$ des transformations naturelles de source dans $\Delta(\mathcal{C})$ et de but ϕ est une limite projective de $\overline{\Delta}\circ\phi$ dans $\overline{\mathcal{C}}^{H^\cdot}$, relative à $\mathcal{C}$ (i. e. la propriété universelle de limite projective est vraie seulement vis-à-vis des cônes formés de flèches à images dans $\Delta(\mathcal{C})$).

3° Si ψ admet P pour limite projective dans $\mathcal{C}$, alors $\overline{\Delta}(P)$ est une limite projective de $\overline{\Delta}\circ\psi$ dans $\overline{\mathcal{C}}^{H^\cdot}$ (évidemment isomorphe à $\hat{\kappa}^{\beta}_{\overline{\Delta}\circ\psi}$); autrement dit, $\overline{\Delta}$ préserve les limites projectives existant dans $\mathcal{C}$.

4° S'il existe un foncteur J de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$ ayant les propriétés 1, 2, 3, en particulier si $\mathcal{C}'$ est à $H^\cdot$-limites projectives et si J est compatible avec les limites projectives, il existe un foncteur K, défini à une équivalence naturelle près, tel que $K\circ\overline{\Delta} = J$.

Le passage de $\mathcal{C}$ à $\overline{\mathcal{C}}^{H^\cdot}$ représente donc la première étape de la construction d'une complétion $H^\cdot$-projective de $\mathcal{C}$ dans laquelle $\mathcal{C}$ se plonge injectivement. (Il suffit d'itérer la construction précédente un «nombre de fois» suffisant, par exemple $|H|$ fois, en désigant par $|H|$ l'ordinal régulier suivant immédiatement l'ordinal associé à H).

REMARQUE. Si $\mathcal{C}$ n'admet pas d'objet initial, il se peut que la classe $\mathcal{C}_\phi$ soit vide pour certains foncteurs ϕ de $H^\cdot$ vers $\mathcal{C}$. Dans ce cas, l'application canonique $(\mathcal{C}_0, \alpha_\phi, \mathcal{C}_\phi)$ n'est rien d'autre que $(\mathcal{C}_0, \emptyset, \emptyset)$ et la catégorie $\overline{\mathcal{C}}^{H^\cdot}$ n'est pas la catégorie convenable pour la première étape de la construction d'une complétion projective. Il convient d'ajouter à $\mathcal{C}$ (si c'est nécessaire) un objet initial.

BIBLIOGRAPHIE

1. C. EHRESMANN: a) Catégories structurées d'opérateurs, *C.R.A.S. Paris*, t. 256 (1963).
b) Expansion des systèmes de structures dominés, *C.R.A.S. Paris*, t. 262 (1966).

2. F. E. J. LINTON, *Lecture Notes* n° 80, Springer (1969):
a) Coequalizers in categories of algebras,
b) An outline of functorial semantics,
c) Applied functorial semantics.

3. L. COPPEY, Décompositions algébriques de structures en produits, *Esquisses Mathématiques* n° 14, Paris (1971).

Département de Mathématiques, Tour 45,
Université Paris VII,
2 Place Jussieu,
PARIS 5