CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

FRANÇOIS FOLTZ

# Sur la domination des catégories, II et III

*Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques*, tome 12, nº 4 (1971), p. 375-443

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1971__12_4_375_0>

*CAHIERS DE TOPOLOGIE* *Vol. XII, 4*
*ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE*

# SUR LA DOMINATION DES CATEGORIES, II et III

*par François FOLTZ*

## Introduction.

Le présent article est formé des parties II et III d'un travail dont la première partie a été publiée [3] dans le fascicule 1 de ce même volume. Dans cette première partie, on définissait la notion de catégorie $(R, p)$-dominée, où $p$ est un foncteur et $R$ un ensemble de $p$-multimorphismes, et l'on donnait un «plongement universel» d'une catégorie $(R, p)$-dominée dans une catégorie $(\bar{R}, p)$-dominée, où $\bar{R}$ est une partie stable de $R$.

Dans les parties II et III, nous allons construire différentes catégories dominées. Rappelons [1] que, étant donné un foncteur $p$ d'une catégorie $K^{\cdot}$ vers la catégorie $\mathfrak{M}$ des applications, on appelle catégorie $p$-dominée une catégorie $H^{\cdot}$ munie d'un foncteur $\varepsilon$ de $H^{\cdot} \times H^{*}$, où $H^{*}$ est la duale de $H^{\cdot}$, vers $K^{\cdot}$ tel que $p.\varepsilon = Hom_{H^{\cdot}}$; autrement dit, si $(e', e)$ est un couple d'unités de $H^{\cdot}$, l'ensemble $Hom_{H^{\cdot}}(e', e)$ est «fonctoriellement» muni d'une $p$-structure $\varepsilon(e', e)$. En particulier, si $p$ est le foncteur de base d'une catégorie monoïdale **V**, les **V**-catégories sont des catégories $p$-dominées, où $\varepsilon$ vérifie des conditions supplémentaires.

La première catégorie étudiée est celle des applications covariantes $q$-dominées à base fixe $C^{\cdot}$, lorsqu'on s'est donné une domination de la source $K^{\cdot}$ du foncteur $q$. Le problème revient à montrer que le foncteur «transformation naturelle» $\mathfrak{N}(-, C^{\cdot})$, où $C^{\cdot}$ est une petite catégorie, transporte les dominations, en conservant leurs caractéristiques essentielles (domination tensorielle, hyper-domination). On constate qu'une catégorie monoïdale $\mathcal{K}$ sur la catégorie $K^{\cdot}$ induit une catégorie monoïdale $\mathcal{H}$ sur la catégorie $\mathfrak{N}(K^{\cdot}, C^{\cdot})^{\square\square}$ et l'on prouve que $\mathcal{H}$ est fermée si $\mathcal{K}$ l'est. La construction faite permet de montrer que certaines «catégories algébriques», au sens des esquisses (par exemple celle des foncteurs structurés ou des applications covariantes structurées), admettent des «dominations canoniques». Cette même construction conduit aussi à une domination de la catégorie des applications covariantes $q$-dominées, où cette fois la base peut varier.

Dans la partie III, on obtient des dominations de la catégorie des foncteurs $q$-dominés. Celle-ci est en particulier munie d'une structure de catégorie monoïdale fermée lorsque $q$ est le foncteur de base d'une catégorie monoïdale fermée vérifiant les conditions suivantes:

1° $q$ est à limites projectives;

2° $q$ est fidèle ou $q$ est à atomes.

**Notations.**

Les notations sont les mêmes que dans [3]. En particulier une catégorie est notée $C^{\cdot}$, où $C$ est l'ensemble sous-jacent et où $\cdot$ représente la loi de composition; l'ensemble de ses unités est $C_0^{\cdot}$ ; il est souvent identifié à un ensemble d'objets; l'application source est notée $\alpha$, l'application but $\beta$, la duale $C^*$. Un foncteur constant sur une unité $e$ est représenté par le même symbole $e$, une transformation naturelle constante sur un morphisme $x$ sera notée $x$. La catégorie des transformations naturelles entre foncteurs de source $C^{\cdot}$ et de but $\hat{C}^{\cdot}$ est notée $\mathfrak{N}(\hat{C}^{\cdot}, C^{\cdot})^{\square}$.

Si $q = (\mathfrak{M}, \underline{q}, K^{\cdot})$ est un foncteur de $K^{\cdot}$ vers la catégorie $\mathfrak{M}$ des applications associée à un univers, une catégorie $q$-dominée est un couple $E = (\varepsilon, C^{\cdot})$ d'une catégorie $C^{\cdot}$ et d'un foncteur $\varepsilon$ de $C^{\cdot} \times C^*$ vers $K^{\cdot}$ tel que $q.\varepsilon$ soit le foncteur $Hom_{C^{\cdot}}$. Si $\bar{E} = (\bar{\varepsilon}, \bar{C}^{\cdot})$ est une autre catégorie $q$-dominée, un foncteur $q$-dominé de $E$ vers $\bar{E}$ est un triplet

$$\bar{v} = (\bar{E}, (\tau, v), E), \quad \text{où} \quad v = (\bar{C}^{\cdot}, \underline{v}, C^{\cdot})$$

est un foncteur, dit sous-jacent à $\bar{v}$, et où $(\bar{\varepsilon}.(v \times v^*), \tau, \varepsilon)$ est une transformation naturelle se projetant par $q$ sur la transformation naturelle canonique de $Hom_{C^{\cdot}}$ vers $Hom_{\bar{C}^{\cdot}}.(v \times v^*)$. Pour simplifier, on pose

$$\bar{v}(e', e) = \tau((e', e)), \text{ pour tout couple } (e', e) \text{ d'unités de } C^{\cdot}.$$

## II Domination des applications covariantes.

Dans ce paragraphe, le foncteur $q=(\mathfrak{M}, \underline{q}, K^{\cdot})$ de $K^{\cdot}$ vers $\mathfrak{M}$ est un foncteur saturé à $\mathfrak{F}_0$-limites projectives, $\bar{E}=(\bar{\varepsilon}, \bar{C}^{\cdot})$ est une catégorie $q$-dominée et $C^{\cdot}$ une catégorie appartenant à $\mathfrak{F}_0$.

### A. Applications covariantes à base fixe.

On pose $G^{\cdot}=\mathfrak{N}(\bar{C}^{\cdot}, C)^{\square\square}$ et $H^{\cdot}=\mathfrak{N}(K^{\cdot}, C^{\cdot})^{\square\square}$ et on désigne par $p$ le foncteur $(\mathfrak{M}, \underline{p}, H^{\cdot})$, où $\underline{p}$ est la surjection qui à $t$ associe la limite projective canonique de $qt$ dans $\mathfrak{M}$. On identifie $\bar{C}^{\cdot}$ (resp. $K^{\cdot}$) à la sous-catégorie des transformations naturelles constantes dans $G^{\cdot}$ (resp. $H^{\cdot}$).

DEFINITION. On dira que $\tilde{E}=(\tilde{\varepsilon}, \tilde{H}^{\cdot})$ est une catégorie *q-quasi-dominée* si $\tilde{\varepsilon}$ est un foncteur de $\tilde{H}^{\cdot}\times\tilde{H}^{\cdot *}$ vers $K^{\cdot}$ tel que $q \cdot \tilde{\varepsilon}$ soit équivalent au foncteur $Hom_{\tilde{H}^{\cdot}}$.

PROPOSITION 1. *Il existe sur $G^{\cdot}$ une structure de catégorie p-quasi-dominée $\hat{E}=(\hat{\varepsilon}, G^{\cdot})$. De plus, $\bar{\varepsilon}$ s'identifie à une restriction de $\hat{\varepsilon}$.*

PREUVE : Soit $x$ un élément de $C$ ayant $e$ pour source et $e'$ pour but; on lui associe un foncteur $C_x=(C^{\cdot}_e, \underline{c}, C^{\cdot}_{e'})$ comme suit: les unités de $C^{\cdot}_e$ sont les éléments de $C.e$ et les couples $(y', y)$ tels que $\alpha(y)=e$ et $\beta(y)=\alpha(y')$. Les autres éléments de $C_e$ sont les couples de la forme $((y', y), y)$ et $((y', y), y'.y)$ où $(y', y)\in(C_e)^{\cdot}_0$. De plus

$$\alpha((y', y), y)=y, \qquad \alpha((y', y), y'.y)=y'.y,$$

$$\beta((y', y), y)=\beta((y', y), y'.y))=(y', y).$$

Le foncteur $C_x$ associe le couple $((\hat{y}', \hat{y}.x), \hat{y}'.\hat{y}.x)$ à $((\hat{y}', \hat{y}), \hat{y}'.\hat{y})$ et le couple $((\hat{y}', \hat{y}.x), \hat{y}.x)$ à $((\hat{y}', \hat{y}), \hat{y})$.

Soient $v$ et $v'$ deux foncteurs de $C^{\cdot}$ vers $\bar{C}^{\cdot}$. On définit un foncteur ${}^{v'}M_e{}^{v}$ de $C^{\cdot}_e$ vers $K^{\cdot}$ en associant $\bar{\varepsilon}(v'(y'), v(\alpha y'))$ à $((y', y), y)$ et $\bar{\varepsilon}(v'(\beta y'), v(y'))$ à $((y', y), y'.y)$. On désigne par ${}^{v'}L_e{}^{v}=$

$( {}^{v'}M_e{}^{v},\ l_e,\ w(e))$ une limite projective naturalisée dans $q$ se projetant sur une limite canonique et par ${}^{v'}L_x{}^{v}$ la transformation naturelle égale à ${}^{v'}L_e{}^{v} \circ C_x$ . On pose :

$$w(x) = lim_L\ {}^{v'}L_x{}^{v},\ \text{avec}\ L = {}^{v'}L_e{}^{v}.$$

Considérons un couple composable $(x', x)$ de $C^{\cdot}$ . La relation $C_{x'.x} = C_x . C_{x'}$ assure que

$$w(x').w(x) = w(x'.x).$$

et donc, en associant $w(x)$ à $x \in C$, on définit un foncteur $w$ de $C^{\cdot}$ vers $K^{\cdot}$ . L'ensemble $q(w(e))$ est formé des familles $(\sigma_y)_{y \in C.e}$ vérifiant:

a) $\sigma_y \in v'(\beta y).\overline{C}.v(\beta y)$;

b) Si $y'.y$ est défini, l'on a $\sigma_{y'.y}.v(y') = v'(y').\sigma_y$ .

De plus, $q(w(x))$ est l'application qui associe à la famille $(\sigma_y)_{y \in C.e}$ la famille $(\sigma'_{y'})_{y' \in C.e'}$ où $\sigma'_{y'} = \sigma_{y'.x}$ .

Il existe une transformation naturelle $(q.w, d, v'.G.v)$, où $d(e)$ associe à $\overline{t} = (v', \overline{\tau}, v)$ la famille $(\sigma_y)_{y \in C.e}$ définie par $\sigma_y = \overline{\tau}(\beta y)$. Soit $f$ l'application canonique de $v'.G.v$ vers $p(w)$. Considérons un élément $s = (s_e)_{e \in C_0^{\cdot}}$ de $p(w)$, où $s_e = (\sigma^e_y)_{y \in C.e}$. Posons $\overline{\tau}(e) = \sigma^e_e$, pour tout $e$ de $C_0^{\cdot}$ . La relation $q(w(x))(s_{\alpha x}) = s_{\beta x}$ assure que:

$$v'(x).\sigma^e_e = \sigma^e_{x.e}.v(x) = \sigma^{e'}_{e'}.v(x),$$

c'est-à-dire,

$$v'(x).\overline{\tau}(\alpha x) = \overline{\tau}(\beta x).v(x).$$

Ainsi $\overline{t} = (v', \overline{\tau}, v)$ est une transformation naturelle; en posant $f'(s) = \overline{t}$, on définit une application $f'$ de $p(w)$ vers $v'.G.v$ et $f'.f = v'.G.v$. Soit $(d(e).f')(s) = (\overline{\sigma}_y)_{y \in C.e}$; l'on a

$$\overline{\sigma}_y = \overline{\tau}(\beta y) = \sigma^{\beta y}_{\beta y} = \sigma^e_y .$$

Ainsi $f'.f = p(w)$, et $f$ est une bijection.

Posons $\hat{\varepsilon}(v', v) = w$. Désignons par $t = (v, \tau, v''')$ et par $t' = (v'', \tau', v')$ deux transformations naturelles appartenant à $G^{\cdot}$ . Elles permettent de définir une transformation naturelle ${}^{t'}M_e{}^{t} = ({}^{v''}M_e{}^{v'''}, n, {}^{v'}M_e{}^{v})$, où

$n(y) = \bar{\varepsilon}(\tau'(\beta y), \tau(\beta y))$ et $n((y', y)) = \bar{\varepsilon}(\tau'(\beta y'), \tau(\beta y))$,

et un morphisme ${}^{t'}g^{t}(e)$ de $K$ défini par

$$\lim_{\bar{L}} {}^{t'}M_e{}^{t} \boxdot {}^{v'}L_e{}^{v}, \text{ où } \bar{L} = {}^{v''}L_e{}^{v'''}.$$

Comme $t'$ et $t$ sont des transformations naturelles, l'on a : ${}^{t'}g^{t}(e').w(x) = \lim_{\bar{L}'} {}^{t'}M_e^{t} \boxdot {}^{v'}L_x^{v} = w'(x).{}^{t'}g^{t}(e)$, où $\bar{L}' = {}^{v''}L^{v'''}$ et $w' = \hat{\varepsilon}(v'', v''')$. Par suite, le triplet $\hat{\varepsilon}(t', t) = (\hat{\varepsilon}(v'', v'''), {}^{t'}g^{t}, \hat{\varepsilon}(v', v))$ est une transformation naturelle et sa projection par $p$ associe à $s$ la famille

$s' = (s'_e)$, où $s'_e = (\sigma'^{e}_{y})_{y \in C.e}$ et où $\sigma'^{e}_{y} = \tau'(\beta y).\sigma^{e}_{y}.\tau(\beta y)$.

Les propriétés fonctorielles de $\bar{\varepsilon}$ font de $\hat{\varepsilon}$ un foncteur de $G^{\cdot} \times G^{\cdot *}$ vers $H^{\cdot}$ et le foncteur $p.\hat{\varepsilon}$ est équivalent au foncteur $Hom_{G^{\cdot}}$.

Supposons que $v$ et $v'$ sont deux foncteurs constants sur $b$ et $b'$ respectivement: $w(x) = \bar{\varepsilon}(b', b)$, pour tout $x$ de $C$, car $C^{\cdot}_e$ est connexe. Ainsi $\bar{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}.(i \times i^{*})$, si $i = (G^{\cdot}, \underline{\iota}, \bar{C}^{\cdot})$. ■

Si $\bar{C}^{\cdot} = K^{\cdot}$, désignons par $H'^{\cdot}$ la sous-catégorie pleine de $H^{\cdot}$ ayant pour unités les foncteurs $v$ vérifiant:

$qv(e) \cap qv(e') = \emptyset$ pour tout couple d'unités $(e, e')$ de $C^{\cdot}$ tels que $e \neq e'$.

Si $v$ ou $v'$ appartient à $H'^{\cdot}_0$, il en est de même de $\hat{\varepsilon}(v', v)$. Par suite:

COROLLAIRE. *Si $\bar{C}^{\cdot} = K^{\cdot}$, il existe une sous-catégorie $p$-quasi-dominée $\hat{E}' = (\hat{\varepsilon}, H'^{\cdot})$ de $\hat{E}$ définie par $H'^{\cdot}$.*

Nous utiliserons la remarque suivante: Soit $(\bar{F}', \tau, \bar{F})$ une transformation naturelle entre foncteurs de $\tilde{H}^{\cdot}$ vers $\bar{H}^{\cdot}$. Supposons que $\bar{F}$ et $\bar{F}'$ admettent respectivement $F$ et $F'$ pour foncteurs co-adjoints; pour tout $a \in \bar{H}^{\cdot}_0$, le $\bar{F}$-éjecteur correspondant associé à $a$ est noté $(g_a, F(a))$, le $\bar{F}'$-éjecteur associé à $a$ est noté $(g'_a, F'(a))$. Il existe alors une transformation naturelle bien déterminée $(F, \sigma, F')$ telle que, pour toute unité $a$ de $\bar{H}^{\cdot}$, l'on ait:

$$g_a.\bar{F}(\sigma(a)) = g'_a.\tau(F'(a)).$$

Supposons qu'il existe un foncteur $\otimes$ de $K^{\cdot} \times \overline{C}^{\cdot}$ vers $\overline{C}^{\cdot}$. Il lui correspond un foncteur $\bar{\otimes}$ de $H^{\cdot} \times G^{\cdot}$ vers $G^{\cdot}$ défini par:

$$\bar{\otimes} = \mathfrak{N}(\otimes, C^{\cdot}).\psi,$$

où $\psi$ est l'isomorphisme canonique de $\mathfrak{N}(K^{\cdot}, C^{\cdot})^{\square\square} \times \mathfrak{N}(\overline{C}^{\cdot}, C^{\cdot})^{\square\square}$ vers $\mathfrak{N}(K^{\cdot} \times \overline{C}^{\cdot}, C^{\cdot})^{\square\square}$.

PROPOSITION 2. *Supposons que, pour toute unité $\bar{e}$ de $\overline{C}^{\cdot}$, le foncteur $-\otimes \bar{e}$ soit un foncteur adjoint du foncteur $\bar{\varepsilon}(-, \bar{e})$. Pour toute unité $v$ de $G^{\cdot}$, le foncteur $-\bar{\otimes} v$ est un foncteur adjoint du foncteur $\hat{\varepsilon}(-, v)$ de $G^{\cdot}$ vers $H^{\cdot}$.*

PREUVE: Soient $v$ et $v'$ des foncteurs de $C^{\cdot}$ vers $\overline{C}^{\cdot}$. Nous allons leur associer une transformation naturelle $t = (v', \tau, w \bar{\otimes} v)$, où $w = \hat{\varepsilon}(v', v)$:

Pour toute unité $e$ de $C^{\cdot}$, notons $(g_e, \bar{\varepsilon}(v'(e), v(e)))$ le $-\otimes v(e)$-éjecteur tel que $g_e$ ait pour but $v'(e)$ et posons

$$\tau(e) = g_e.(l_e(e) \otimes v(e)) \text{ (notation de la proposition 1).}$$

Supposons $\alpha x = e$ et $\beta x = e'$; soit $(g'_{e'}, \bar{\varepsilon}(v'(e'), v(e)))$ le $-\otimes v(e)$-éjecteur tel que $g'_{e'}$ ait pour but $v'(e')$. La remarque précédant la proposition entraîne que:

$$g'_{e'}.(\bar{\varepsilon}(v'(e'), v(x)) \otimes v(e)) = g_{e'}.(\bar{\varepsilon}(v'(e'), v(e')) \otimes v(x)).$$

Comme $\bar{\varepsilon}(-, v(e))$ est un foncteur co-adjoint de $-\otimes v(e)$, l'on a:

$$v'(x).g_e = g'_{e'}.(\bar{\varepsilon}(v'(x), v(e)) \otimes v(e)).$$

La définition de $w(x)$ nous assure que $l_{e'}(e').w(x) = l_e(x)$ et que de plus

$$l_e((x, e)) = \bar{\varepsilon}(v'(e'), v(x)).l_e(x) = \bar{\varepsilon}(v'(x), v(e)).l_e(e).$$

La définition du foncteur $\bar{\otimes}$ entraîne que:

$$(\bar{\varepsilon}(v'(e'), v(e')) \otimes v(x)).(l_{e'}(e') \otimes v(e)) =$$

$$(l_{e'}(e') \otimes v(e')).(w(e') \otimes v(x))$$

et

$$w(x) \otimes v(x) = (w(e') \otimes v(x)).(w(x) \otimes v(e)).$$

Des relations précédentes l'on déduit:

$$\begin{aligned} v'(x).g_e.(l_e(e)\otimes v(e)) &= g'_{e'}.(\bar\varepsilon(v'(x),v(e))\otimes v(e)).(l_e(e)\otimes v(e)) \\ &= g'_{e'}.((\bar\varepsilon(v'(e'),v(x)).l_e(x))\otimes v(e)) \\ &= g_{e'}.(\bar\varepsilon(v'(e'),v(e'))\otimes v(x)).(l_e(x)\otimes v(e)) \\ &= g_{e'}.(l_{e'}(e')\otimes v(e')).((w\bar\otimes v)(x)), \end{aligned}$$

ou encore

$$v'(x).\tau(e)=\tau(e').(w\bar\otimes v(x));$$

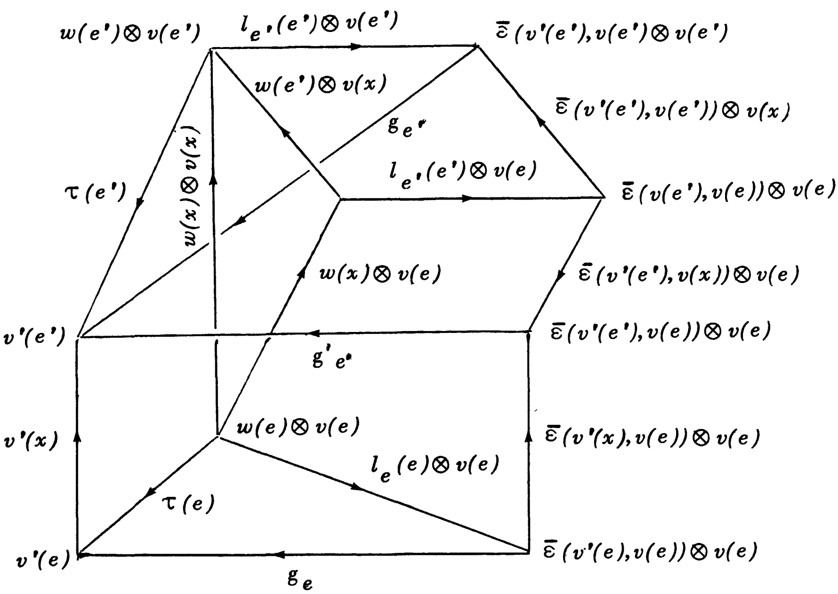
ainsi $t$ est bien une transformation naturelle.

Considérons un foncteur $\tilde w$ de $C^{\cdot}$ vers $K^{\cdot}$ et une transformation naturelle $\tilde t=(v',\tilde\tau,\tilde w\bar\otimes v)$. Pour toute unité $e$ de $C^{\cdot}$, il existe un unique morphisme $k_e$ de source $\tilde w(e)$, de but $\bar\varepsilon(v'(e),v(e))$ et vérifiant: $\tilde\tau(e)=g_e.(k_e\otimes v(e))$. Soit $(y',y)$ un couple composable de $C^{\cdot}$, avec $\alpha y=e$, $\beta y=\bar e$ et $\beta y'=\bar e'$. Désignons par $(\bar g,\bar b)$ le $-\otimes v(\bar e)$-éjecteur tel que $\bar g$ ait pour but $v'(\bar e')$. L'on a:

$$v'(y').g_{\bar e}=\bar g.(\bar\varepsilon(v'(y'),v(\bar e))\otimes v(\bar e)),$$

d'où

$$\begin{aligned} \bar g.((\bar\varepsilon(v'(y'),v(\bar e)).k_{\bar e})\otimes v(\bar e)) &= \bar g.(\bar\varepsilon(v'(y'),v(\bar e))\otimes v(\bar e)).(k_{\bar e}\otimes v(\bar e)) \\ &= v'(y').\tilde\tau(\bar e) \\ &= \tilde\tau(\bar e').(\tilde w(\bar e')\otimes v(y')).(\tilde w(y')\otimes v(\bar e)). \end{aligned}$$



De plus,

$$\tilde\tau(\bar e').(\tilde w(\bar e')\otimes v(y')) = g_{\bar e'}.(k_{\bar e'}\otimes v(\bar e')).(\tilde w(\bar e')\otimes v(y'))$$
$$= g_{\bar e'}.(k_{\bar e'}\otimes v(y'))$$
$$= g_{\bar e'}.(\bar\varepsilon(v'(\bar e'), v(\bar e'))\otimes v(y')).(k_{\bar e'}\otimes v(\bar e))$$
$$= \bar g.(\bar\varepsilon(v'(\bar e'), v(y'))\otimes v(\bar e)).(k_{\bar e'}\otimes v(\bar e)),$$

vu la remarque précédant la proposition.

Il en résulte :

$$v'(y').\tilde\tau(\bar e) = \tilde\tau(\bar e').(\tilde w(\bar e')\otimes v(y')).(\tilde w(y')\otimes v(\bar e))$$
$$= \bar g.((\bar\varepsilon(v'(\bar e'), v(y')).k_{\bar e'}.\tilde w(y'))\otimes v(\bar e));$$

et par suite, comme $(\bar g, \bar b)$ est un $-\otimes v(\bar e)$-ejecteur,

$$\bar\varepsilon(v'(y'), v(\bar e)).k_{\bar e} = \bar\varepsilon(v'(\bar e'), v(y')).k_{\bar e'}.\tilde w(y').$$

Ceci permet d'introduire une transformation naturelle $U_e = ({}^{v'}M^{v}_{e}, u_e, \tilde w(e))$ dont la source est un foncteur constant, définie par :

$$u_e(y) = k_{\bar e}.\tilde w(y)$$
$$u_e((y', y)) = \bar\varepsilon(v'(y'), v(\bar e)).k_{\bar e}.\tilde w(y) = \bar\varepsilon(v'(\bar e'), v(y')).k_{\bar e'}.\tilde w(y'.y).$$

Avec les notations de la proposition 1, posons : $\hat\tau(e) = \lim_{{}^{v'}L^{v}_{e}} U_e$.

Supposons que $\beta z = e$ et $\alpha z = e_1$. L'on a :

$$l_e(y).w(z).\hat\tau(e_1) = l_{e_1}(y.z).\hat\tau(e_1) = k_{\bar e}.\tilde w(y).\tilde w(z)$$
$$= l_e(y).\hat\tau(e).\tilde w(z).$$

Comme $l_e((y', y)) = \bar\varepsilon(v'(y'), v(\bar e)).l_e(y)$, l'on a aussi :

$$l_e((y', y)).w(z).\hat\tau(e_1) = l_e((y', y)).\hat\tau(e).\tilde w(z).$$

On en déduit que $w(z).\hat\tau(e_1) = \hat\tau(e).\tilde w(z)$ et que $\hat t = (w, \hat\tau, \tilde w)$ est une transformation naturelle. Par définition,

$$\tilde\tau(e) = g_e.(k_e\otimes v(e)) = g_e.(l_e(e)\otimes v(e)).(\hat\tau(e)\otimes v(e))$$
$$= \tau(e).(\hat\tau(e)\otimes v(e)).$$

Donc $t.(\hat t\,\bar\otimes\, v) = \tilde t$ est dans $G^{\cdot}$.

Supposons que $\hat t' = (w, \hat\tau', \tilde w)$ vérifie la même équation :

$$t.(\hat{t}'\bar{\otimes}v)=\tilde{t}.$$

Il est clair que :

$$\tilde{\tau}(e)=\tau(e).(\hat{\tau}'(e)\otimes v(e))=g_e.(l_e(e)\otimes v(e)).(\hat{\tau}'(e)\otimes v(e))$$
$$=g_e.((l_e(e).\hat{\tau}'(e))\otimes v(e)).$$

Or $(g_e, \bar{\varepsilon}(v'(e), v(e)))$ est un $-\otimes v(e)$-éjecteur. Puisque $l_e(e).\hat{\tau}'(e)=k_e$, pour toute unité $e$ de $C^\cdot$, on a

$$l_e(y).\hat{\tau}(e)=k_{\bar{e}}.\tilde{w}(y)=l_{\bar{e}}(\bar{e}).\hat{\tau}'(\bar{e}).\tilde{w}(y)$$
$$=l_{\bar{e}}(\bar{e}).w(y).\hat{\tau}'(e)=l_e(y).\hat{\tau}'(e).$$

Comme ${}^{v'}L_e{}^{v}$ est une limite projective naturalisée, $\hat{\tau}(e)$ est égale à $\hat{\tau}'(e)$.

Ainsi $w=\hat{\varepsilon}(v',v)$ est une $-\bar{\otimes}v$-structure co-libre associée à $v'$ et $-\bar{\otimes}v$ admet $\hat{\varepsilon}(-,v)$ pour foncteur co-adjoint. ■

COROLLAIRE. *Si $K^\cdot$ est une catégorie cartésienne fermée, il en est de même de $H^\cdot$.*

En effet, supposons que $\bar{C}^\cdot=K^\cdot$ et que $\otimes$ est un foncteur produit dans $K^\cdot$. Alors $\bar{\otimes}$ est un foncteur produit dans $H^\cdot$. ■

*Cas particuliers :*

1°) Supposons que $\bar{C}^\cdot=K^\cdot$ et que le foncteur $\otimes$ vérifie la propriété suivante :

$q(a_1\otimes a_1')\cap q(a_2\otimes a_2')=\emptyset$, dès que les unités $a_i$ et $a_i'$ de $K^\cdot$ sont telles que $q(a_1)\cap q(a_2)=\emptyset$ et $q(a_1')\cap q(a_2')=\emptyset$. Dans ce cas, $\hat{E}'$ est aussi tensoriellement dominée.

2°) Supposons encore que $\bar{C}^\cdot=K^\cdot$. Si le foncteur $\otimes$ est associatif, il en est de même du foncteur $\bar{\otimes}$. Par suite, il existe un isomorphisme naturel $\hat{\gamma}_{(v',\tilde{v},v)}$ de $\hat{\varepsilon}(v',\tilde{v}\otimes v)$ vers $\hat{\varepsilon}(\hat{\varepsilon}(v',v),\tilde{v})$ correspondant à l'adjonction précédente. Ne supposons plus que $\otimes$ est associatif, mais que $\bar{E}$ est à $\mathfrak{F}_0$-limites projectives [4] et qu'il existe des isomorphismes naturels d'adjonction $\gamma_{(a',\tilde{a},a)}: \bar{\varepsilon}(a',\tilde{a}\otimes a)\to\bar{\varepsilon}(\bar{\varepsilon}(a',a),\tilde{a})$ dans $K^\cdot$. La propriété ci-dessus est encore vraie. En effet, posons :

$$L_e={}^{v'}L_e{}^{v}=(M_e,l_e,w(e)),\quad L_e'={}^{v'}L_e{}^{\tilde{v}\otimes v}=(M_e',l_e',w'(e)),$$

$L''_e = (M''_e, l''_e, w''(e)) = {}^{w}L_e^{\tilde{v}}$ et $\overline{L}_e = (\overline{M}_e, \overline{l}_e, u(e)) = \bar{\varepsilon}(-, \tilde{v}(e)).L_e$.

Montrons qu'il existe un isomorphisme $g(e)$ de $w'(e)$ vers $w''(e)$ et que le triplet $\gamma_{(v', \tilde{v}, v)} = (w'', g, w')$ est une équivalence. Il existe un unique élément $g'(e)$ de source $w''(e)$, de but $w'(e)$ et vérifiant:

$$l'_e(y).g'(e) = \gamma^{-1}_{(v'(e'), \tilde{v}(e'), v(e'))}.\overline{l}_{e'}(e').l''_e(y),$$

où $\alpha(y) = e$ et $\beta(y) = e'$,

$$l'_e((y', y)).g'(e) = \gamma^{-1}_{(v'(e''), \tilde{v}(e'), v(e'))}.\overline{l}_{e'}((y', e')).l''_e(y),$$

où $\beta(y') = e''$ et $\alpha(y') = e'$.

Définissons l'inverse $g(e)$ de $g'(e)$. Il existe une transformation naturelle $(M_{e'}, k, w'(e'))$, où

$$k(y') = \bar{\varepsilon}(\bar{\varepsilon}(v'(e''), v(e'')), \tilde{v}(y')).\gamma_{(v'(e''), \tilde{v}(e''), v(e''))}.l'_e(y'.y),$$

$$k((y'', y')) = \bar{\varepsilon}(\bar{\varepsilon}(v'(e'''), v(e'')), \tilde{v}(y'')).\gamma_{(v'(e'''), \tilde{v}(e''), v(e''))}.l'_e((y'', y'.y)),$$

où $\alpha(y'') = e''$ et $\beta(y'') = e'''$.

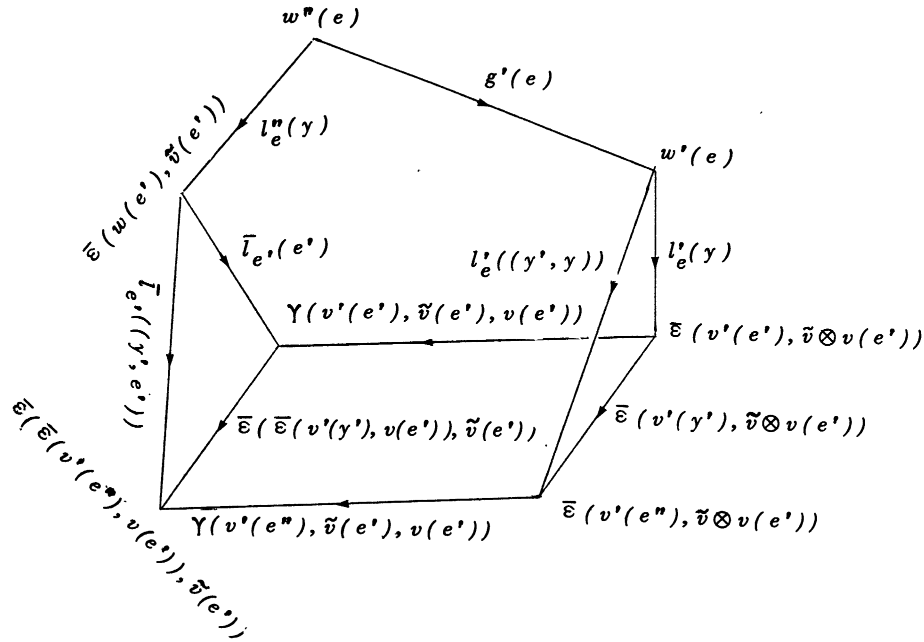
En désignant par $\bar{k}(y)$ le crochet de cette transformation naturelle relativement à $\overline{L}_{e'}$, on détermine une nouvelle transformation naturelle $(M''_e, \bar{k}, w'(e))$. En effet,

$$\bar{\varepsilon}(w(e''), \tilde{v}(y')).\bar{k}(y'.y) = \bar{k}((y', y)) = \bar{\varepsilon}(w(y'), \tilde{v}(e')).\bar{k}(y),$$

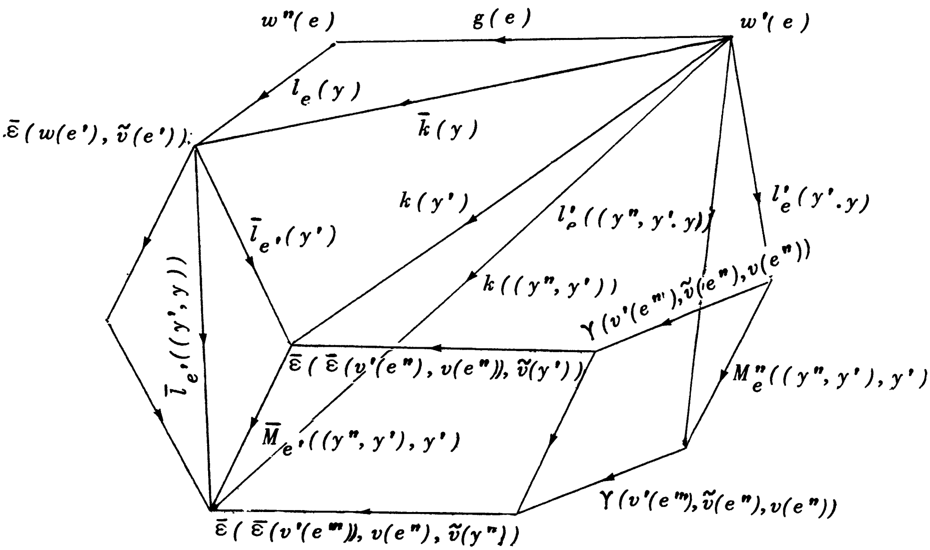
où $\bar{k}((y', y))$ est défini de manière analogue à $\bar{k}(y)$.

$g(e)$ est le crochet relativement à $L''_e$ de $(M''_e, \bar{k}, w'(e))$. Cet isomorphisme est naturel et définit l'équivalence $\gamma_{(v', \tilde{v}, v)}$. ∎

*Remarques.* 1°) Supposons que $C^{\cdot}$ est sous-jacente à une esquisse $\sigma$ régulière $\mathcal{J}$-projective, où $\mathcal{J} \subset \mathcal{F}_0$, et que $\overline{E}$ est à $\mathcal{J}$-limites projectives [4]. On peut donner des conditions sur $\sigma$ afin que $\hat{\varepsilon}(v', v)$ soit une réalisation de $\sigma$ dans $K^{\cdot}$, si $v$ et $v'$ sont des réalisations de $\sigma$ dans $\overline{C}^{\cdot}$. Si, de plus, $\overline{C}^{\cdot}$ possède certaines propriétés de commutation de limites ([4], [5] et [6]) et si $\overline{E}$ est tensoriellement dominée, la catégorie des réalisations dans $\overline{C}^{\cdot}$ est tensoriellement $\bar{p}$-quasi-dominée, où $\bar{p}$ est une restriction de $p$; en particulier, dans le cas du corollaire précédent, la catégorie des réalisations dans $K^{\cdot}$ devient une catégorie cartésienne fermée. La catégorie des foncteurs $K^{\cdot}$-structurés et la catégorie des applications



w"(e)
g'(e)
w'(e)
l"e(y)
ε̄(w(e'), ṽ(e'))
l̄e'(e')
l'e((y', y))
l'e(y)
l̄e'((y', e'))
Υ(v'(e'), ṽ(e'), v(e'))
ε(v'(e'), ṽ⊗v(e'))
ε̄(ε̄(v'(y'), v(e')), ṽ(e'))
ε̄(v'(y'), ṽ⊗v(e'))
ε̄(ε̄(v'(e"), v(e")), ṽ(e"))
Υ(v'(e"), ṽ(e'), v(e'))
ε̄(v'(e"), ṽ⊗v(e'))

w"(e)
g(e)
w'(e)
le(y)
ε̄(w(e'), ṽ(e'))
k̄(y)
k(y')
l̄e'(y')
l'e((y", y'. y))
l'e(y'.y)
k((y", y'))
l̄e'((y', y))
Υ(v'(e"'), ṽ(e"), v(e"))
ε̄(ε̄(v'(e"), v(e")), ṽ(y'))
M"e((y", y'), y')
M̄e'((y", y'), y')
Υ(v'(e"'), ṽ(e"), v(e"))
ε̄(ε̄(v'(e"')), v(e"), ṽ(y"))

covariantes $K^{\cdot}$-structurées en donnent des exemples ( [7] et [8] ). Nous discuterons ailleurs de cette question (voir Appendice).

2°) Supposons donné un foncteur $q$-dominé $\bar{f}$ vers $\bar{E}$ de $\bar{E}_1 = (\bar{\varepsilon}_1, \bar{C}^{\cdot}_1)$ et un foncteur $g = (C^{\cdot}_1, \underline{g}, C^{\cdot})$ de $\mathcal{F}$. Le couple $(\bar{E}, \bar{C}^{\cdot}_1)$ permet de définir des catégories $H^{\cdot}_1$ et $G^{\cdot}_1$, un foncteur $p_1 = (\mathfrak{M}, \underline{p}_1, H^{\cdot}_1)$ et une catégorie $p_1$-quasi-dominée $\hat{E}_1 = (\hat{\varepsilon}_1, G^{\cdot}_1)$ analogues de $H^{\cdot}$, $G^{\cdot}$, $p$ et $E$. Si $p' = \mathfrak{N}(K^{\cdot}, g)$, l'on a une transformation naturelle canonique $\psi_g = (p.p', \phi, p_1)$ définie par : $\Phi \boxminus \phi(w_1) = \Phi_1 . g$ où $\Phi$ et $\Phi_1$ sont les limites canoniques dans $\mathfrak{M}$ des foncteurs $q.w_1.g$ et $q.w_1$ respectivement.

Il existe aussi une transformation naturelle $_{\bar{f}}\xi_g = (\hat{\varepsilon}.F, \zeta, p'.\hat{\varepsilon}_1)$ définie de la manière suivante : $F = \mathfrak{N}(\bar{f}, g) \times \mathfrak{N}(\bar{f}, g)^*$ ; soient $v'_1$ et $v_1$ deux unités de $G^{\cdot}_1$, $w_1 = \hat{\varepsilon}_1(v'_1, v_1)$, $w = \hat{\varepsilon}(f.v'_1.g, f.v_1.g)$ et $\zeta((v'_1, v_1)) = (w, \rho, w_1.g)$ ; si $e \in C^{\cdot}_0$, si $e_1 = g(e)$ et si $\bar{l}_{e_1}(\cdot)$ sont les projections définissant la limite projective $w_1(e_1)$, l'on a : $l_e(y).\rho(e) = \bar{f}(v'_1 e'_1, v_1 e'_1).\bar{l}_{e_1}(g(y))$ et $l_e((y', y)).\rho(e) = \bar{f}(v'_1 e''_1, v_1 e'_1).\bar{l}_{e_1}((g(y'), g(y)),$ où $\alpha y = e$, $y' \in e''.C.e'$. La transformation naturelle $(p.{_{\bar{f}}\xi_g}) \boxminus \psi_g \hat{\varepsilon}_1$ est équivalente à la transformation naturelle canonique vers $Hom_{G^{\cdot}}.F$ de $Hom_{G^{\cdot}_1}$. De plus, cette propriété est fonctorielle : si $g.g'$ est définie, $\psi_{g.g'} = \psi_{g'} p' \boxminus \psi_g$ ; si $\bar{f}'$ est un foncteur $q$-dominé de $\bar{E}$ vers $\bar{E}_2$, l'on a :

$$_{\bar{f}'.\bar{f}}\xi_{g.g'} = {_{\bar{f}'}\xi_{g'}}.F \boxminus (p''.{_{\bar{f}}\xi_g}), \text{ où } p'' = \mathfrak{N}(K^{\cdot}, g').$$

Supposons dans ce paragraphe que $\bar{C}^{\cdot}$ est égal à $K^{\cdot}$ et posons :

$$\eta' = (T(q), \underline{\iota}, K^{\cdot} \times K^{\cdot}).\bar{\varepsilon} \times \bar{\varepsilon} \text{ et } \eta = (T(q), \underline{\iota}, K^{\cdot}).\bar{\varepsilon}.(\bar{\varepsilon} \times \bar{\varepsilon}^*).\varphi,$$

où $\varphi$ est l'isomorphisme canonique de la catégorie $(K^{\cdot} \times K^{\cdot *}) \times (K^{\cdot} \times K^{\cdot *})$ vers la catégorie $(K^{\cdot} \times K^{\cdot *}) \times (K^{\cdot *} \times K^{\cdot})$ associant $((f'_2, f'_1), (f_2, f_1))$ à $((f'_2, f_2), (f_1, f'_1))$. ( $T(q)$ est la catégorie définie dans [3] ).

DEFINITION 2. On dira que $(\Omega, \bar{E})$ est une catégorie *hyper-q-dominée* [12] si $\Omega = (\eta, \omega, \eta')$ est une transformation naturelle telle que, si $s = (a'_2, a_2, a_1, a'_1)$ est un quadruplet de $K^{\cdot}_0$, la projection $Q(\omega(s))$ dans $\mathfrak{M}$ de $\omega(s)$ soit l'application de $(a'_2.K.a_2) \times (a_1.K.a'_1)$ dans $\bar{\varepsilon}(a'_2, a'_1).K.\bar{\varepsilon}(a_2, a_1)$ qui à $(k', k)$ associe un $\kappa$ tel que $q(\kappa)$ soit l'application : $h \to k'.h.k$.

*Remarque :* Cette définition fait jouer un rôle symétrique à « la multiplication à droite » et « à gauche », mais ne suppose pas l'analogue de l'axiome CC3 de [9].

PROPOSITION 3. *Si $\bar{E}$ est à $\mathcal{F}_0$-limites projectives* [4] *et si $(\Omega, \bar{E})$ est une catégorie hyper-q-dominée, il existe une transformation naturelle $\hat{\Omega}$ telle que $(\hat{\Omega}, \hat{E})$ soit une catégorie hyper-p-quasi-dominée.*

PREUVE : Considérons quatre foncteurs $v_2', v_2, v_1, v_1'$ de $C^{\cdot}$ vers $K^{\cdot}$ et une transformation naturelle $t_1 = (v_1, \tau_1, v_1')$. Posons, pour toute unité $e$ de $C^{\cdot}$,

$$L_e = {}^{v_2}L_e^{\,v_1} = (M_e, l_e, w(e)),\ L'_e = {}^{v_2'}L_e^{\,v_1'} = (M'_e, l'_e, w'(e)),$$

$$L_e^1 = {}^{v_1}L_e^{\,v_2'} = (M_e^1, l_e^1, w^1(e)),\ L_e^2 = {}^{v_2'}L_e^{\,v_2} = (M_e^2, l_e^2, w^2(e)),$$

$$\hat{L}_e = {}^{w'}L_e^{\,w} = (\hat{M}_e, \hat{l}_e, \hat{w}(e)),$$

où $w = \hat{\varepsilon}(v_2, v_1)$, $w' = \hat{\varepsilon}(v_2', v_1')$ et $\hat{w} = \hat{\varepsilon}(w', w)$.

Soit $(y', y)$ un couple composable de $C^{\cdot}$, avec $\beta(y') = e''$, $\beta(y) = e'$ et $\alpha(y) = e$. Utilisons les notations suivantes :

$$s_1 = (v_2'(e'), v_2(e')\ ,\ v_1(e'), v_1'(e'))\ ,\ \omega_1 = \omega(s_1)_{(\tau_1(e'),1)},$$

$$s_2 = (v_2'(e''), v_2(e')\ ,\ v_1(e'), v_1'(e'))\ ,\ \omega_2 = \omega(s_2)_{(\tau_1(e'),1)},$$

$$s_3 = (v_2'(e''), v_2(e'')\ ,\ v_1(e'), v_1'(e'))\ ,\ \omega_3 = \omega(s_3)_{(\tau_1(e'),1)},$$

$$s_4 = (v_2'(e''), v_2(e'')\ ,\ v_1(e''), v_1'(e'))\ ,\ \omega_4 = \omega(s_4)_{(v_1(y').\tau_1(e'),1)},$$

$$s_5 = (v_2'(e''), v_2(e'')\ ,\ v_1(e''), v_1'(e''))\ ,\ \omega_5 = \omega(s_5)_{(\tau_1(e''),1)}.$$

Par hypothèse, on a les relations suivantes :

$$\eta(\ v_2'(y'), v_2(e')\ ,\ v_1(e'), v_1'(e'))\ .\ \omega_1 = \omega_2 . \bar{\varepsilon}(v_2'(y'), v_2(e')),$$

$$\eta(\ v_2'(e''), v_2(y')\ ,\ v_1(e'), v_1'(e'))\ .\ \omega_3 = \omega_2 . \bar{\varepsilon}(v_2'(e''), v_2(y')),$$

$$\eta(\ v_2'(e''), v_2(e'')\ ,\ v_1(y'), v_1'(e')) . \omega_3 = \omega_4 =$$

$$\eta(\ v_2'(e''), v_2(e'')\ ,\ v_1(e''), v_1'(y')) . \omega_5,$$

car $t_1$ est une transformation naturelle. La définition de $L_e^2$ assure que :

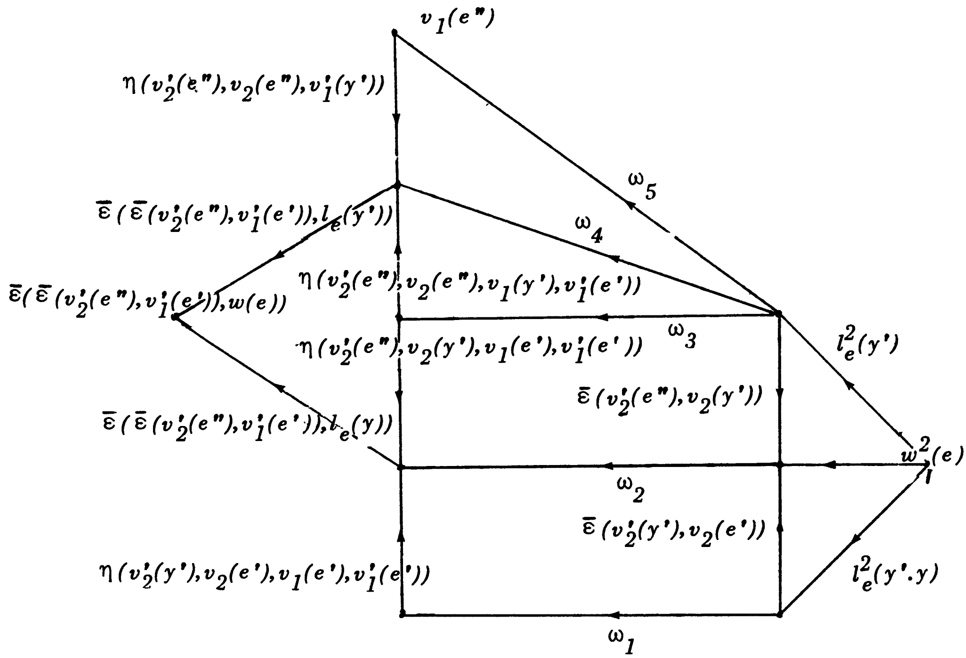
$$\bar{\varepsilon}(v_2'(y'), v_2(e')) . l_e^2(y) = \bar{\varepsilon}(v_2'(e''), v_2(y')) . l_e^2(y'.y).$$

De plus, par définition de $L_e$, l'on a :

$$\bar\varepsilon(\ \bar\varepsilon(v'_2(e''),v'_1(e')),\ l_e(y)).\ \eta(\ v'_2(e''),v_2(y')\ ,\ v_1(e'),v'_1(e'))\ =$$
$$\bar\varepsilon(\ \bar\varepsilon(v'_2(e''),v'_1(e')),\ l_e(y')).\ \eta(\ v'_2(e''),v_2(e'')\ ,\ v_1(y'),v'_1(e'))\ .$$

De ces relations l'on déduit:

$$\bar\varepsilon(\bar\varepsilon(v'_2(e''),v'_1(e')),\ l_e(y)).\ \eta(\ v'_2(y'),v_2(e')\ ,\ v_1(e'),v'_1(e'))\ .\omega_1.\ l^2_e(y)=$$
$$\bar\varepsilon(\bar\varepsilon(v'_2(e''),v'_1(e')),\ l_e(y')).\eta(\ v'_2(e''),v_2(e'')\ ,\ v_1(e''),v'_1(y'))\ .\omega_5.\ l^2_e(y'.y)=$$
$$\zeta_e(y',y).$$




En posant $\zeta_e(y)=\bar\varepsilon(\bar\varepsilon(v'_2(e'),v'_1(e')),l_e(y)).\omega_1.l^2_e(y)$, on définit donc une transformation naturelle $\zeta_e=(\bar\varepsilon(-,w(e)); M'_e, \zeta_e, w^2(e))$ Or, par hypothèse, le foncteur $\bar\varepsilon(-,w(e))$ est à $\mathcal{F}_0$-limites projectives. C'est qu'il existe un unique morphisme $\xi(e)$ de source $w^2(e)$, de but $\bar\varepsilon(w'(e),w(e))$ et vérifiant $\bar\varepsilon(l'_e(y),w(e)).\xi(e)=\zeta_e(y)$, pout tout $y$ de $C.e$.

Par définition de $L^2_e$, et de $L_{e'}$, l'on a:

$$\zeta_e(y',y)=\bar\varepsilon(\bar\varepsilon(v'_2(e''),v'_1(e'')),w(y')).\ \zeta_{e'}(y').w^2(y),$$

pour tout $y'\in e''.C.e'$.

Cette relation entraîne la suivante:

$$\bar{\varepsilon}(l'_{e'}(y').w'(y), w(e)).\xi(e) = \bar{\varepsilon}(l'_{e'}(y'), w(y)).\xi(e').w^2(y),$$

Comme $\varepsilon(-, w(e)).L'_{e'}$ est une limite projective dans $K^{\cdot}$, on en déduit:

$$\bar{\varepsilon}(w'(y), w(e)).\xi(e) = \bar{\varepsilon}(w'(e'), w(y)).\xi(e').w^2(y).$$

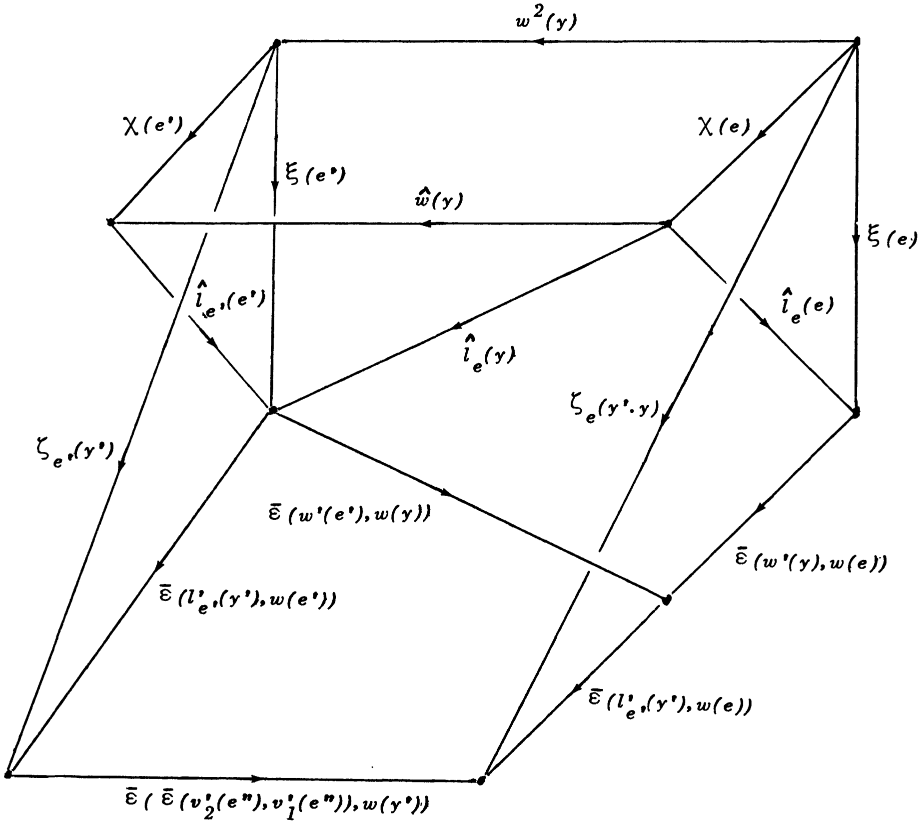
D'où l'existence et l'unicité d'un élément $\chi(e)$ vérifiant:

$$\hat{l}_e(y).\chi(e) = \xi(\beta y).w^2(y), \text{ pour tout } y \text{ de } C.e.$$

Comme $w^2$ est un foncteur,

$$\hat{l}_{e'}(y').\chi(e').w^2(y) = \xi(e'').w^2(y').w^2(y) = \xi(e'').w^2(y'.y)$$
$$= \hat{l}_e(y'.y).\chi(e) = \hat{l}_{e'}(y').\hat{w}(y).\chi(e),$$

si $y \in e'.C.e$ et $y' \in e''.C.e'$. Ainsi $\chi_J = (w, \chi, w^2)$ est une transformation naturelle.



La projection par $p$ de $\chi_1$ est l'application de $v'_2 . H . v_2$ vers $w' . H . w$ (notations de la proposition 1), qui à $t_2 = (v'_2, \tau_2, v_2)$ associe la transformation naturelle $\hat{t} = (w', \hat{\tau}, w)$, définie par:

$$\hat{\tau}(e)((\sigma_y^e)_{y \in C.e}) = (\tau_2(\beta y) . \sigma_y^e . \tau_1(\beta y))_{y \in C.e} .$$

Soient $\bar{t} = (v_2, \bar{\tau}, \bar{v}_2)$ et $\bar{t}' = (\bar{v}'_2, \bar{\tau}', v'_2)$ deux transformations naturelles de $C^\cdot$ vers $K^\cdot$. Surlignons les symboles des éléments définis précédemment pour désigner les éléments analogues mais définis à partir des foncteurs: $\bar{v}'_2$, $\bar{v}_2$, $v_1$ et $v'_1$. Le couple $(\bar{t}, \bar{t}')$ induit des transformations naturelles $R^2 = (\bar{w}^2, \rho^2, w^2)$, $(\bar{w}', \rho', w')$, $(w, \rho, \bar{w})$ et $\hat{R} = (\hat{\bar{w}}, \hat{\rho}, \hat{w})$. On a les relations:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}(\bar{l}'_e(y), \bar{w}(e)) . \bar{\xi}(e) . \rho^2(e) &= \bar{\zeta}_e(y) . \rho^2(e) \\ &= \bar{\varepsilon}(\,\bar{\varepsilon}(\bar{\tau}'(e'), v'_1(e')), \rho(e)) . \zeta_e(y) \\ &= \bar{\varepsilon}(\,\bar{\varepsilon}(\bar{\tau}'(e'), v'_1(e')) . l'_e(y), \rho(e)) . \xi(e) \\ &= \bar{\varepsilon}(\bar{l}'_e(y) . \rho'(e), \rho(e)) . \xi(e) . \end{aligned}$$

On en déduit que, pour toute unité $e$ de $C^\cdot$,

$$\bar{\varepsilon}(\rho'(e), \rho(e)) . \xi(e) = \bar{\xi}(e) . \rho^2(e).$$

D'autre part, pour tout $y$ de $C . e$,

$$\hat{\bar{l}}_e(y) . \hat{\rho}(e) = \bar{\varepsilon}(\rho'(\beta y), \rho(\beta y)) . \hat{l}_e(y).$$

Ainsi $\bar{\chi}(e) . \rho^2(e) = \hat{\rho}(e) . \chi(e)$, ou encore $\bar{\chi}_1 \boxminus R^2 = \hat{R} \boxminus \chi_1$.

Si l'on se fixe la transformation naturelle $t_2$, on définit de manière analogue une transformation naturelle $\chi_2 = (\hat{w}, \chi', w^1)$, qui a des propriétés semblables à celles de $\chi_1$.

On définit $\hat{\Omega} = (\hat{\eta}, \hat{\omega}, \hat{\eta}')$ de la façon suivante:

$$\hat{\omega}(\hat{s})(t_1, 1) = \chi_1 \text{ et } \hat{\omega}(\hat{s})(t_2, 2) = \chi_2 ,$$

où $\hat{s}$ est le quadruplet $((v'_2, v_2), (v_1, v'_1))$.■

$(\hat{\Omega}', \hat{E}')$ est aussi une catégorie hyper-$p$-quasi-dominée, où $\hat{\Omega}'$ est une restriction de $\hat{\Omega}$.

Dans ce paragraphe, nous supposons que $\bar{C}^\cdot = K^\cdot$.

PROPOSITION 4. *Si $a_0$ est une q-structure libre associée à un ensem-*

*$b$, le foncteur $\bar{a}_0$ de $C^{\boldsymbol{\cdot}}$ constant sur $a_0$ est une $p$-structure libre associée à $b$.*

PREUVE : Soient $J$ l'ensemble des composantes de $C^{\boldsymbol{\cdot}}$ et $((\pi_j)_{j \in J}, p(\bar{a}_0))$ un produit naturalisé canonique de $q(a_0)$ dans $\mathfrak{M}$, la diagonale correspondante étant $\delta$. On note $(a_0, g)$ un $q$-projecteur de source $b$ et on pose $\bar{g} = \delta . g$. Considérons un foncteur $v$ de source $C^{\boldsymbol{\cdot}}$ et de but $K^{\boldsymbol{\cdot}}$, ainsi qu'une application $g'$ de source $b$ et de but $p(v)$. Si $(q.v, \sigma, p(v))$ est une limite projective naturalisée canonique dans $\mathfrak{M}$, il existe un unique morphisme $\tau(e)$, pour tout $e$ de $C^{\boldsymbol{\cdot}}_0$, de source $a_0$, de but $v(e)$ et vérifiant

$$q(\tau(e)).g = \sigma(e).g'.$$

L'unicité des $\tau(e)$ assure que $\psi = (v, \tau, \bar{a}_0)$ est une transformation naturelle. De plus, $p(\psi).\delta$ est l'unique morphisme vérifiant

$$\sigma(e).p(\psi).\delta = q(\tau(e)),$$

pour tout $e$ de $C^{\boldsymbol{\cdot}}_0$, et par suite,

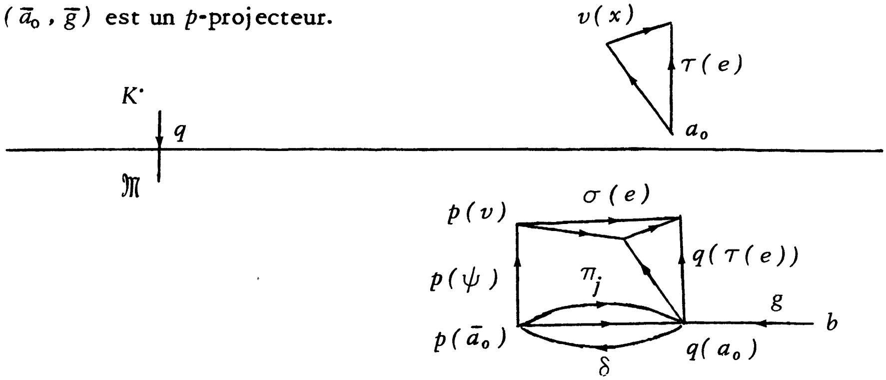
$$\sigma(e).p(\psi).\bar{g} = q(\tau(e)).g = \sigma(e).g'.$$

Ainsi $p(\psi).\bar{g} = g'$.

Soit $\psi' = (v, \tau', \bar{a}_0)$ une transformation naturelle; $p(\psi').\delta$ est l'unique morphisme vérifiant $\sigma(e).p(\psi').\delta = q(\tau'(e))$, pour tout $e$ de $C^{\boldsymbol{\cdot}}_0$. Si l'on suppose que $p(\psi').\bar{g} = g'$, on a

$$\sigma(e).g' = \sigma(e).p(\psi').\delta.g = q(\tau'(e)).g,$$

d'où $\tau(e) = \tau(e')$, pour toute unité $e$ de $C^{\boldsymbol{\cdot}}$, c'est-à-dire $\psi = \psi'$. Ainsi $(\bar{a}_0, \bar{g})$ est un $p$-projecteur.



COROLLAIRE. *Si $q$ admet un adjoint, il en est de même de $p$.*

PROPOSITION 5. *Si $\bar{\varepsilon}(\cdot, a_0)$ est un foncteur équivalent au foncteur identique de $K^\cdot$, le foncteur $\hat{\varepsilon}(\cdot, \bar{a}_0)$ est équivalent au foncteur identique de $H^\cdot$.*

PREUVE: Le foncteur $\hat{\varepsilon}(v, \bar{a}_0) = w$ est équivalent à $v$. En effet, $w(e)$ est la limite projective du foncteur ${}^vM_e^{\bar{a}_0}$ (notation de la proposition 1), pour toute unité $e$ de $C^\cdot$. Comme $\bar{a}_0$ est un foncteur constant, l'image par ${}^vM_e^{\bar{a}_0}$ de $((y', y), y'.y)$ est une unité, avec $\alpha(y) = e$ et $\beta(y) = \alpha(y')$. Ainsi cette limite est équivalente à $\bar{\varepsilon}(v(e), a_0)$. De même, si $x$ appartient à $C$, $w(x)$ est la limite projective de la transformation naturelle ${}^vL_x^{\bar{a}_0}$ ; donc $w(x)$ est équivalent à $\bar{\varepsilon}(v(x), a_0)$. Par suite $w$ est équivalent au foncteur $\bar{\varepsilon}(v(\cdot), a_0)$, qui, par hypothèse, est équivalent à $v$. Cette équivalence est naturelle car les deux précédentes le sont.

Supposons encore que $\bar{C}^\cdot = K^\cdot$ et qu'est définie sur $K^\cdot$ une structure de catégorie monoïdale [9] $\mathcal{K} = (K^\cdot, \otimes, a_0, r, r', s)$. On pose:

$$\bar{\otimes} = \mathfrak{N}(\otimes, C^\cdot).\psi,$$

où $\psi$ est l'isomorphisme canonique de $\mathfrak{N}(K^\cdot, C^\cdot)^{\square\square} \times \mathfrak{N}(K^\cdot, C^\cdot)^{\square\square}$ vers $\mathfrak{N}(K^\cdot \times K^\cdot, C^\cdot)^{\square\square}$.

Soient $v, v', v''$, trois foncteurs de $C^\cdot$ vers $K^\cdot$ et $e, e', e''$ trois unités de $C^\cdot$. On désigne par:

$\bar{a}_0$ le foncteur de source $C^\cdot$ et constant sur $a_0$ ;

$\bar{r}(v)$ l'équivalence naturelle $(v, \rho, \bar{a}_0 \bar{\otimes} v)$, où $\rho(e) = r(v(e))$;

$\bar{r}'(v)$ l'équivalence naturelle $(v, \rho', v \bar{\otimes} \bar{a}_0)$, où $\rho'(e) = r'(v(e))$;

$\bar{s}(v'', v', v)$ l'équivalence naturelle $(v'' \bar{\otimes}(v' \bar{\otimes} v), \sigma, (v'' \bar{\otimes} v') \bar{\otimes} v)$, où $\sigma(e'', e', e) = s(v''(e''), v'(e'), v(e))$.

PROPOSITION 6. *$\mathcal{K}$ induit une structure monoïdale $\mathcal{H} = (H^\cdot, \bar{\otimes}, \bar{a}_0, \bar{r}, \bar{r}', \bar{s})$ sur $H^\cdot = \mathfrak{N}(K^\cdot, C^\cdot)^{\square\square}$.*

La preuve est immédiate. ■

Supposons que $\mathcal{K}$ est monoïdale fermée [9] et que le foncteur de base est $q$.

PROPOSITION 7. $\mathcal{H}$ *est monoïdale fermée.*

C'est une conséquence de la proposition 2. ■

APPLICATIONS:

La remarque 1 suivant la proposition 2 nous permet de donner quelques exemples de catégories cartésiennes fermées et hyper-dominées; il suffit de prendre pour $C^{\cdot}$ les catégories associées aux esquisses définissant ces catégories:

1° La catégorie des applications simpliciales entre objets simpliciaux [10] .

2° La catégorie $\mathcal{G}^{(2)}$ des homomorphismes entre graphes orientés doubles, munie du foncteur $p$ qui associe à un homomorphisme de graphes orientés doubles sa restriction aux sommets communs aux deux lois. Si $v' = ( [G']^{\perp}, [G'] )$ et $v = ( [G]^{\perp}, [G] )$ sont des graphes orientés doubles et si $\hat{\mathcal{E}}(v', v) = ( [\hat{G}]^{\perp}, [\hat{G}] )$, l'ensemble $\hat{G}$ est formé des quadruplets $s = (({}^j f^i)_{\substack{i \leq 2 \\ j \leq 2}}, (f^i)_{i \leq 2}, ({}^j f)_{j \leq 2}, f)$ vérifiant les conditions:

a) ${}^j f^i$ appartient à $v'.\mathcal{G}^{(2)}.v$,

b) $f^i$ appartient à $[G']^{\perp}.\mathcal{G}.[G]^{\perp}$ et ${}^j f$ à $[G'].\mathcal{G}.[G]$.

c) $f$ est une application de $G$ vers $G'$.

d) De plus, si on pose

$$\alpha = \delta(1),\ \beta = \delta(2),\ \alpha^{\perp} = \gamma(1) \text{ et } \beta^{\perp} = \gamma(2),$$

où $\alpha$, $\beta$ et $\alpha^{\perp}$, $\beta^{\perp}$ sont les applications source et but de $[G]$ et de $[G]^{\perp}$ respectivement, on a

$$\delta(j).(f^i) = \delta(j).({}^j f^i), \quad \delta(j).f = \delta(j).({}^j f),$$

$$\gamma(i).({}^j f) = \gamma(i).({}^j f^i), \quad \gamma(i).f = \gamma(i).(f^i).$$

La structure de $\hat{\mathcal{E}}(v', v)$ est donnée par:

$$\delta(i)(s) = (({}^i f^k)_{\substack{k \leq 2 \\ j \leq 2}}, ({}^i f^k)_{k \leq 2}, ({}^i f)_{k \leq 2}, {}^i f),$$

$$\gamma(j)(s) = (({}^k f^j)_{\substack{i \leq 2 \\ k \leq 2}}, (f^j)_{k \leq 2}, ({}^k f^j)_{k \leq 2}, f^j).$$

3° La sous-catégorie pleine $\mathcal{G}^{[2]}$ de $\mathcal{G}^{(2)}$ ayant pour objets les deux-graphes orientés (i.e. les $v = ([G]^{\perp}, [G])$ tels que les sommets de $[G]^{\perp}$ soient aussi des sommets de $[G]$), munie du foncteur $p$ restriction du foncteur considéré ci-dessus. Si $v'$ et $v$ sont des deux-graphes orientés, $\hat{G}$ est formé des triplets $(({}^1f^i)_{i \leqslant 2}, ({}^jf)_{j \leqslant 2}, f) = s$ tels que:

a) ${}^1f^i$ appartient à $v'. \mathcal{G}^{[2]}. v$ et ${}^jf$ à $[G']^{\perp}. \mathcal{G}. [G]^{\perp}$,

b) $f$ est une application de $G$ vers $G'$,

c) De plus, $\delta(i).f = \delta(i).({}^1f^i) = \delta(i).({}^jf)$, $\gamma(j).f = \gamma(j).({}^jf)$, pour $j = 1, 2$.

La structure de $\hat{\varepsilon}(v', v)$ est donnée par:

$\delta(i) = (({}^1f^i)_{j \leqslant 2}, ({}^1f^i)_{j \leqslant 2}, {}^1f^i)$ et $\gamma(j) = (({}^1f^i)_{i \leqslant 2}, ({}^jf)_{i \leqslant 2}, {}^jf)$.

4° La catégorie des foncteurs doubles $\mathcal{F}^{(2)}$, munie du foncteur $p$ associant à un foncteur double sa restriction aux sommets (i.e. aux unités communes aux deux lois). Soient $v' = (G'^{\perp}, G'^{\cdot})$ et $v = (G^{\perp}, G^{\cdot})$ deux catégories doubles. Si $(\hat{G}^{\perp}, \hat{G}^{\cdot}) = \hat{\varepsilon}(v', v)$, l'ensemble $\hat{G}$ est formé des quadruplets $\bar{s} = (({}^jf^i)_{\substack{i \leqslant 2\\ j \leqslant 2}}, (t^i)_{i \leqslant 2}, ({}^jt)_{j \leqslant 2}, f)$ vérifiant:

a) ${}^jf^i$ appartient à $v'. \mathcal{F}^{(2)}. v$,

b) $t^i$ appartient à $G'^{\perp}. \mathcal{F}. (G_0^{\cdot})^{\perp}$ et définit une transformation naturelle de ${}^1f^i$ vers ${}^2f^i$,

c) ${}^jt$ appartient à $G'^{\cdot}. \mathcal{F}. (G_0)^{\cdot}$ et définit une transformation naturelle de ${}^jf^1$ vers ${}^jf^2$,

d) $f$ est une application de $G_0^{\cdot} \cap G_0^{\perp}$ vers $G'$ telle que:

$$f(\beta^{\perp}e) \perp \tau^1(e) = \tau^2(e) \perp f(\alpha^{\perp}e), \text{ pour tout } e \text{ de } G_0^{\cdot},$$

où $t^i = ({}^2f^i, \tau^i, {}^1f^i)$,

$$f(\beta\bar{e}). {}^1\tau(\bar{e}) = {}^2\tau(\bar{e}). f(\alpha\bar{e}), \quad \text{pour tout } \bar{e} \text{ de } G_0^{\perp},$$

où ${}^jt = ({}^jf^2, {}^j\tau, {}^jf^1)$.

Soient $\bar{s}'$ et $\bar{s}''$ deux autres éléments de $\hat{G}$, notés avec les mêmes lettres que $\bar{s}$ mais avec l'indice ' ou ". Alors:

$\bar{s}' \perp \bar{s}$ est défini et égal à $\bar{s}''$ ssi:

a) ${}^jf^2 = {}^jf'^1$ et $t^2 = t'^1$, b) ${}^jt'' = {}^jt' \perp {}^jt$ et $f'' = f' \perp f$;

$\bar{s}'.\bar{s}$ est défini et égal à $\bar{s}''$ ssi :

a) ${}^2f^i = {}^1f'^i$ et ${}^2t = {}^1t'$ ; b) $t''^i = t'^i . t^i$ et $f'' = f'.f$.

5°) La catégorie des deux-foncteurs (i.e. des foncteurs doubles entre deux-catégories) $\mathcal{F}^{[2]}$ Si $v'$ et $v$ sont des deux-foncteurs et $(\hat{G}, \hat{G}^\cdot) = \hat{\varepsilon}(v', v)$, l'ensemble $\hat{G}$ est formé des triplets $(f', \tau, f)$, où $f'$ et $f$ sont des deux-foncteurs de $v$ vers $v'$ et $\tau$ est une application de $G_0^\cdot$ vers $G'$ tels que:

$$\tau(\beta x).(\gamma(j)f(x)) = (\gamma(j)f'(x)).\tau(\alpha x),$$

$$(\gamma(j)\tau(\beta x)).f(x) = f'(x).(\gamma(j)\tau(\alpha x)),$$

pour tout $x$ de $G$. La structure de $\hat{\varepsilon}(v', v)$ est donnée par:

$(f'_1, \tau'_1, f_1).(f', \tau, f)$ est défini et égal à $(f'_1, \tau'', f)$ ssi $f_1 = f'$ et $\tau'' = \tau'_1 . \tau$ ;

$(f'_1, \tau', f_1) \perp (f', \tau, f)$ est défini et égal à $(f', \tau' \perp \tau, f)$ ssi $f'_1 = f'$ et $f_1 = f$.

Reprenons les notations des propositions précédentes. En particulier $q$ est un foncteur de $K^\cdot$ vers $\mathfrak{M}$ saturé à $\mathcal{F}_0$-limites projectives, $\bar{E} = (\bar{\varepsilon}, \bar{C}^\cdot)$ une catégorie $q$-dominée et $C^\cdot$ une catégorie.

PROPOSITION 8. *La catégorie* $G^\cdot = \mathfrak{N}(\bar{C}^\cdot, C^\cdot)$ *est munie d'une structure de catégorie $q$-dominée* $\mathfrak{N}'_q(\bar{E}, C^\cdot) = (\nu'', G^\cdot)$, *qui est tensoriellement dominée si* $\bar{E}$ *l'est.*

PREUVE : Soit $\Lambda$ un foncteur $\{C^\cdot\}$-limite projective dans $K^\cdot$ tel que, pour tout foncteur de la forme $w = \hat{\varepsilon}(v', v)$, la projection par $q$ de $\Lambda(w)$ soit l'ensemble des transformations naturelles de $v$ vers $v'$ ; un tel foncteur existe puisque $q$ est saturé. Alors $\nu''$ est pris par définition égal à $\Lambda . \hat{\varepsilon}$.

Si $\bar{E}$ est tensoriellement $q$-dominée, désignons par $-\tilde{\otimes} v$ le sous-foncteur de $-\otimes v$ de source $K^\cdot$ et de but $G^\cdot$. Comme $\Lambda$ est un foncteur co-adjoint du foncteur injection de $K^\cdot$ vers $H^\cdot$, le foncteur $\Lambda . \hat{\varepsilon}(\cdot, v) = \nu''(\cdot, v)$ est un foncteur co-adjoint du foncteur $-\tilde{\otimes} v$. ∎

COROLLAIRE. *Supposons que* $\bar{C}^\cdot = K^\cdot$. *La catégorie* $H^{\cdot\cdot}$ *(du corollaire,* *proposition 1) définit une sous-catégorie q-dominée* $(\nu^{**}, H'^{\cdot})$ *de* $\mathfrak{N}'_q(E, C^{\cdot})$.

Désignons par $C^{\cdot\wedge}$ la catégorie subdivision [10] de $C^{\cdot}$, c'est-à-dire la catégorie des couples définissant l'ordre sur $C$ tel que $\alpha y < y$, $\beta y < y$, $y < y$ pour tout $y$ de $C$. Son ensemble sous-jacent est la réunion de la diagonale $\Delta C$ de $C$, des couples $(y, \alpha y)$ et des couples $(\beta y, y)$, où $y \in C$. Si $\alpha y = e$ et $\beta y = e'$,

$\alpha((y,e)) = (e,e)$, $\alpha((e',y)) = (e',e')$ et $\beta((y,e)) = (y,y) = \beta((e',y))$.

Au couple de foncteurs $(v', v)$ de $C^{\cdot}$ vers $\overline{C^{\cdot}}$, on associe le foncteur ${}^{v'}N^{v} = (K^{\cdot}, \underline{N}, C^{\cdot\wedge})$ déterminé par

$$\underline{N}((e', y)) = \bar{\varepsilon}(v'(e'), v(y)) \text{ et } \underline{N}((y, e)) = \bar{\varepsilon}(v'(y), v(e)).$$

Posons $\Lambda(w) = (w, \lambda, \nu''(v', v))$, où $w = \hat{\varepsilon}(v', v)$, et, avec les notations de la proposition 1,

$$o((e, e)) = l_e(e).\lambda(e) \text{ et } o((y, y)) = \bar{\varepsilon}(v'(y), v(e)).o((e, e)).$$

PROPOSITION 9. ${}^{v'}O^{v} = ({}^{v'}N^{v}, o, \nu''(v', v))$ *est une limite projective naturalisée dans* $K^{\cdot}$.

PREUVE : ${}^{v'}O^{v}$ est bien une transformation naturelle :

$$o(y, y)) = \underline{N}((y, e)).\, o((e, e)),$$

$$\begin{aligned} \underline{N}((y, e)).\, l_e(e) &= \bar{\varepsilon}(v'(y), v(e)).\, l_e(e) \\ &= \bar{\varepsilon}(v'(e'), v(y)).\, l_e(y) \\ &= \underline{N}((e', y)).\, l_{e'}(e').\, w(y) \end{aligned}$$

et $w(y).\lambda(e) = \lambda(e')$, pour $y \in e'.C.e$. Si $({}^{v'}N^{v}, \bar{o}, a)$ est une transformation naturelle de source un foncteur constant, le triplet $\hat{O}_e = ({}^{v'}M^{v}_{e}, \hat{o}, a)$ en est aussi une, avec

$$\hat{o}(y) = \bar{o}((\beta y, \beta y)) \text{ et } \hat{o}((y', y)) = \bar{o}((y', y')).$$

Posons : $\bar{\lambda}(e) = \lim_L \hat{O}_e$, où $L = {}^{v'}L^{v}_{e}$. La définition de $w$ assure que $(w, \bar{\lambda}, a)$ est une transformation naturelle. Par suite, il existe un unique élément $k$ vérifiant $\bar{\lambda}(e) = \lambda(e).k$, pour tout $e$ de $C_0^{\cdot}$. La proposition en résulte. ■

Soit $R$ un ensemble de $q$-multimorphismes stable [3].

PROPOSITION 11. *Supposons qu'il existe un foncteur $(R, q)$-produit tensoriel. Si $\bar{E}$ est une catégorie $(R, q)$-dominée, il en est de même de $\mathfrak{N}'_q(\bar{E}, C^\cdot)$.*

PREUVE : Considérons trois foncteurs $v$, $v'$ et $v''$ de $C^\cdot$ vers $\bar{C}^\cdot$ et posons :

$$v' \, O \, v = (N, o, a), \quad v'' \, O \, v' = (N', o', a'), \quad v'' \, O \, v = (N'', o'', a'') = O''$$

et $\bar{O} = j.O''$, où $j$ est le foncteur injection de $K^\cdot$ vers $T(R)$ [3]. Soient $f$ le $(R, q)$-produit tensoriel naturalisé canonique de $(a, a')$ et $(k^s)_{s \in \Sigma}$ la famille de morphismes de $K^\cdot$ associée à $\bar{E}$. Supposons donné un couple d'unités $(e', e)$ de $C^\cdot$, un élément $y$ de $e'.C.e$, deux transmations naturelles $t = (v', \tau, v)$ et $t' = (v'', \tau', v')$ et posons :

$$s = (v''(e), v'(e), v(e)), \quad s' = (v''(e'), v'(e), v(e)),$$

$$s'' = (v''(e'), v'(e'), v(e)), \quad s''' = (v''(e'), v'(e'), v(e')).$$

On a les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
\bar{\varepsilon}(v''(e'), \tau(e)).o'((y, y)) &= k^{s'}.(o'((y, y)) \otimes o((e, e))).f_{(t, 1)} \\
&= \bar{\varepsilon}(v''(e'), \tau(e)).\ \bar{\varepsilon}(v''(e'), v'(y)).o'((e', e')) \\
&= \bar{\varepsilon}(v''(e'), \tau(e').v(y)).o'((e', e')) \\
&= k^{s''}.(o'(e', e') \otimes o((y, y))).f_{(t, 1)} \\
&= \bar{\varepsilon}(v''(e'), v(y)).\ \bar{\varepsilon}(v''(e'), \tau(e')).o'((e', e')) \\
&= N''((e', y)).k^{s'''}.(o'((e', e')) \otimes o((e', e'))).f_{(t, 1)} \\
&= \bar{\varepsilon}(v''(e'), \tau(e)).\ \bar{\varepsilon}(v''(y), v'(e)).o'((e, e)) \\
&= N''((y, e)).k^{s}.(o'((e, e)) \otimes o((e, e))).f_{(t, 1)}.
\end{aligned}$$

De même, l'on a :

$$\begin{aligned}
\bar{\varepsilon}(\tau'(e'), v(e)).o((y, y)) &= k^{s''}.(o'((e', e')) \otimes o((y, y))).f_{(t', 2)} \\
&= \bar{\varepsilon}(\tau'(e'), v(e)).\ \bar{\varepsilon}(v'(y), v(e)).o((e, e)) \\
&= \bar{\varepsilon}(v''(y).\tau'(e), v(e)).o((e, e)) \\
&= k^{s'}.(o'((y, y)) \otimes o((e, e))).f_{(t', 2)}
\end{aligned}$$

$$= \bar{\varepsilon}(v''(y), v(e)).\ \bar{\varepsilon}(\tau'(e), v(e)).o((e,e))$$
$$= N''((y,e)).k^{s}.(o'((e,e))\otimes o((e,e))).f_{(t',2)}$$
$$= \bar{\varepsilon}(\tau'(e'), v(e)).\ \bar{\varepsilon}(v'(e'), v(y)).o((e',e'))$$
$$= \bar{\varepsilon}(v''(e'), v(y)).\ \bar{\varepsilon}(\tau'(e'), v(e')).o((e',e'))$$
$$= N''((e',y)).k^{s'''}.(o'((e',e'))\otimes o((e',e'))).f_{(t',2)}.$$

Ces relations permettent de définir dans $\mathfrak{N}(T(R), C^{\cdot\wedge})$ une transformation naturelle $\hat{N} = (j.N'', \hat{n}, (a, a'))$ en posant :

$$\hat{n}((e,e)) = k^{s}.(o'((e,e))\otimes o((e,e))).f,$$
$$\hat{n}((y,y)) = k^{s'}.(o'((y,y))\otimes o((e,e))).f$$
$$= k^{s''}.(o'((e',e'))\otimes o((y,y))).f$$

Par hypothèse, $j$ admet un adjoint; il est compatible avec les limites projectives. Le $q$-multimorphisme $g = (g_z) = \lim_{\bar{O}} \hat{N}$ est un élément de $R$ et vérifie :

$$g_{(t,1)} = \nu''(v'', t) \quad \text{et} \quad g_{(t',2)} = \nu''(t', v).$$

On en déduit que $\mathfrak{N}'_q(\bar{E}, C)$ est une catégorie $(R, q)$-dominée. ■

Supposons que $\bar{C}^{\cdot} = K^{\cdot}$. Avec les mêmes conditions $(\nu''', H'')$ est une catégorie $(R, q)$-dominée.

**B. Applications covariantes à bases variables.**

Supposons à nouveau $\bar{C}^{\cdot} = K^{\cdot}$ et désignons par $\bar{A}(q)$ la catégorie des applications covariantes $q$-dominées [1], ayant pour unités les couples $(v, C^{\cdot})$ tels que $\alpha(v) = C^{\cdot} \in \mathfrak{F}_0$ ; autrement dit, $v$ est un foncteur de $C^{\cdot}$ vers $K^{\cdot}$ tel que $q.v$ vérifie la condition : $q.v(e) \cap q.v(e') = \emptyset$ si, et seulement si, $e \neq e'$, où $e$ et $e'$ sont des unités de $C^{\cdot}$ ; on identifie le couple $(v, C^{\cdot})$ à $v$ et l'on pose $\underline{P}(v) = \bigcup_{e \in C^{\cdot}_0} q.v(e)$. Si $A = (v', \zeta, \phi, v)$ est un élément de $\bar{A}(q)$, on désigne par $\underline{P}(A)$ l'application de $\underline{P}(v)$ vers $\underline{P}(v')$ qui, à $m \in q.v(e)$, associe $q\zeta(e)(m)$. Le triplet $P = (\mathfrak{M}, \underline{P}, \bar{A}(q))$ est un foncteur.

PROPOSITION 12. *La catégorie $\bar{A}(q)$ est munie d'une structure de catégorie $P$-dominée $(\mu, \bar{A}(q))$.*

PREUVE : Si $C^{\cdot}$ appartient à $\mathcal{F}_0$, posons

$$\mathcal{N}_q(\bar{E}, C^{\cdot}) = (\nu''_{C^{\cdot}}, \mathcal{N}(K^{\cdot}, C^{\cdot})^{\square\square}).$$

Soient $v$ et $v'$ deux unités de $\bar{A}(q)$, où $\alpha(v) = C^{\cdot}$ et $\alpha(v') = C^{\cdot\cdot}$. Désignons par $w = \mu(v', v)$ un foncteur équivalent au foncteur $\nu''_{C^{\cdot}}(\cdot, v).\mathcal{N}(v', C^{\cdot})$ avec :

$$q w(\phi) = \{v'\} \times (q\, \nu''_{C^{\cdot}}(v'.\phi, v)) \times \{\phi\} \times \{v\}, \text{ où } \phi \in C^{\cdot\cdot}.\mathcal{F}.C^{\cdot}.$$

Un tel foncteur existe, puisque $q$ est un foncteur saturé; de plus,

$$P(w) = \{v'\} \times (\bigcup_{\phi \in C^{\cdot\cdot}.\mathcal{F}.C^{\cdot}} ((v'.\phi) \square\square \mathcal{N}(K^{\cdot}, C^{\cdot}) \square\square v) \times \{\phi\} \times \{v\}$$
$$= v'.\bar{A}(q).v.$$

Soient $A = (v, \zeta_1, \phi_1, v_1)$ et $A' = (v'_1, \zeta'_1, \phi'_1, v')$ deux éléments de $\bar{\bar{A}}(q)$. Posons $\tilde{\Phi} = \mathcal{N}(\phi'_1, \phi_1)$ et $w' = \mu(v'_1, v_1)$. Désignons par $\phi$ un foncteur de $C^{\cdot}$ vers $C^{\cdot\cdot}$, par $O = (N, o, a)$ et par $O' = (N', o', a')$ respectivement la limite projective naturalisée définissant $\nu''_{C^{\cdot}}(v'.\phi, v)$ et $\nu''_{C^{\cdot\cdot}}(v'_1.\phi'_1.\phi.\phi_1, v_1)$ ( proposition 9 ) et par $y_1$ un élément de $C^{\cdot}_1 = \alpha(v_1)$. Posons :

$$\alpha(y_1) = e_1,\ \beta(y_1) = e'_1,\ \phi_1(y_1) = y,\ \alpha(y) = e,\ \beta(y) = e',$$

ainsi que

$$\rho((y_1, y_1)) = \bar{\varepsilon}(\zeta'_1(\phi(e')), \zeta_1(e_1)).o((y, y)) \ ;$$

comme $(v'_1.\phi'_1, \zeta'_1, v')$ et $(v.\phi_1, \zeta_1, v_1)$ sont des transformations naturelles, l'on a :

$$\bar{\varepsilon}(\zeta'_1\phi(e'), \zeta_1(e_1)).\bar{\varepsilon}(v'\phi(y), v(e)) =$$
$$\bar{\varepsilon}(v'_1\phi'_1\phi(y), v_1(e_1)).\bar{\varepsilon}(\zeta'_1\phi(e), \zeta_1(e_1)),$$
$$\bar{\varepsilon}(\zeta'_1\phi(e'), \zeta_1(e_1)).\bar{\varepsilon}(v'.\phi(e'), v(y)) =$$
$$\bar{\varepsilon}(v'_1\phi'_1\phi(e'), v_1(y_1)).\bar{\varepsilon}(\zeta'_1\phi(e'), \zeta_1(e'_1)),$$

Ainsi $R = (N', \rho, a)$ est une transformation naturelle dont la source est un foncteur constant. On designe par $\tilde{\zeta}(\phi)$ un morphisme de source $w(\phi)$, de but $w'(\phi_1.\phi.\phi_1)$ et isomorphe à $Lim_{O'}R$. Il est presque immédiat que le triplet $(w'.\tilde{\Phi}, \tilde{\zeta}, w)$ définit une transformation naturelle. Ainsi

$\mu(A', A)=(w', \tilde{\zeta}, \tilde{\phi}, w)$ appartient à $\bar{A}(q)$ et $\underline{P}(\mu(A', A))$ est l'application qui à $(v', \zeta, \phi, v)$ associe $(v'_1, \zeta'_1 \zeta \zeta_1, \phi'_1 . \phi . \phi_1, v_1)$.

Considérons deux autres éléments $A_1 = (v_1, \zeta_2, \phi_2, v_2)$ et $A'_1 = (v'_2, \zeta'_2, \phi'_2, v'_1)$ de $\bar{A}(q)$. Soit $e_2$ une unité de $\alpha(\phi_2)$ telle que $\phi_2(e_2) = e_1$. La relation

$$\bar{\varepsilon}(\zeta'_2 \zeta'_1 \phi(e'), \zeta_1 \zeta_2(e_2)) =$$

$$\bar{\varepsilon}(\zeta'_2 \phi'_1 \phi(e'), \zeta_2(e_2)) . \bar{\varepsilon}(\zeta'_1 \phi(e), \zeta_1(e_1))$$

assure que $\mu(A'_1 . A', A . A_1) = \mu(A'_1, A_1) . \mu(A', A)$; donc $\mu$ est un foncteur de $\bar{A}(q) \times \bar{A}(q)^*$ vers $\bar{A}(q)$ ■

REMARQUE : Dans la suite, on appellera limite projective naturalisée définissant $w(\phi)$ le composé $O \boxdot \gamma(\phi)$, où $\gamma(\phi)$ est l'isomorphisme de $a$ vers $\nu''_{C^\cdot}(v' . \phi, v)$.

PROPOSITION 13. *Supposons que $\bar{E}$ soit tensoriellement q-dominée* [9]. *Si le foncteur produit tensoriel est associatif ou si $\bar{E}$ est à $\mathfrak{F}_0$-limites projectives, $(\mu, \bar{A}(q))$ est tensoriellement P-dominée.*

PREUVE : Il existe un foncteur $\otimes$ de $K^\cdot \times K^\cdot$ vers $K^\cdot$, tel que $- \otimes a$ soit un foncteur adjoint de $\bar{\varepsilon}(\cdot, a)$, pour toute unité $a$ de $K^\cdot$. A deux unités $v$ et $\tilde{v}$ de $\bar{A}(q)$ on associe un foncteur $v \bar{\otimes} \tilde{v}$ équivalent au foncteur $\otimes . (v \times \tilde{v})$ et tel que :

$$q(v \bar{\otimes} \tilde{v})((e, \tilde{e})) = \{qv(e)\} \times q(v(e) \otimes \tilde{v}(\tilde{e})) \times \{q\tilde{v}(\tilde{e})\},$$

pour toute unité $(e, \tilde{e})$ de $\alpha(v) \times \alpha(\tilde{v})$. Un tel foncteur existe, puisque $q$ est saturé; c'est une unité de $\bar{A}(q)$. A deux éléments $A = (v', \zeta, \phi, v)$ et $\tilde{A} = (\tilde{v}', \tilde{\zeta}, \tilde{\phi}, \tilde{v})$ de $\bar{A}(q)$, on associe l'élément :

$$A \bar{\otimes} \tilde{A} = (v' \bar{\otimes} \tilde{v}', \zeta \bar{\otimes} \tilde{\zeta}, \phi \times \tilde{\phi}, v \bar{\otimes} \tilde{v})$$

où $\zeta \bar{\otimes} \tilde{\zeta}((e, \tilde{e}))$ est un morphisme de $v \bar{\otimes} \tilde{v}((e, \tilde{e}))$ vers $v' \bar{\otimes} \tilde{v}'((\phi(e), \tilde{\phi}(\tilde{e}))$ isomorphe à $\zeta(e) \otimes \tilde{\zeta}(\tilde{e})$.

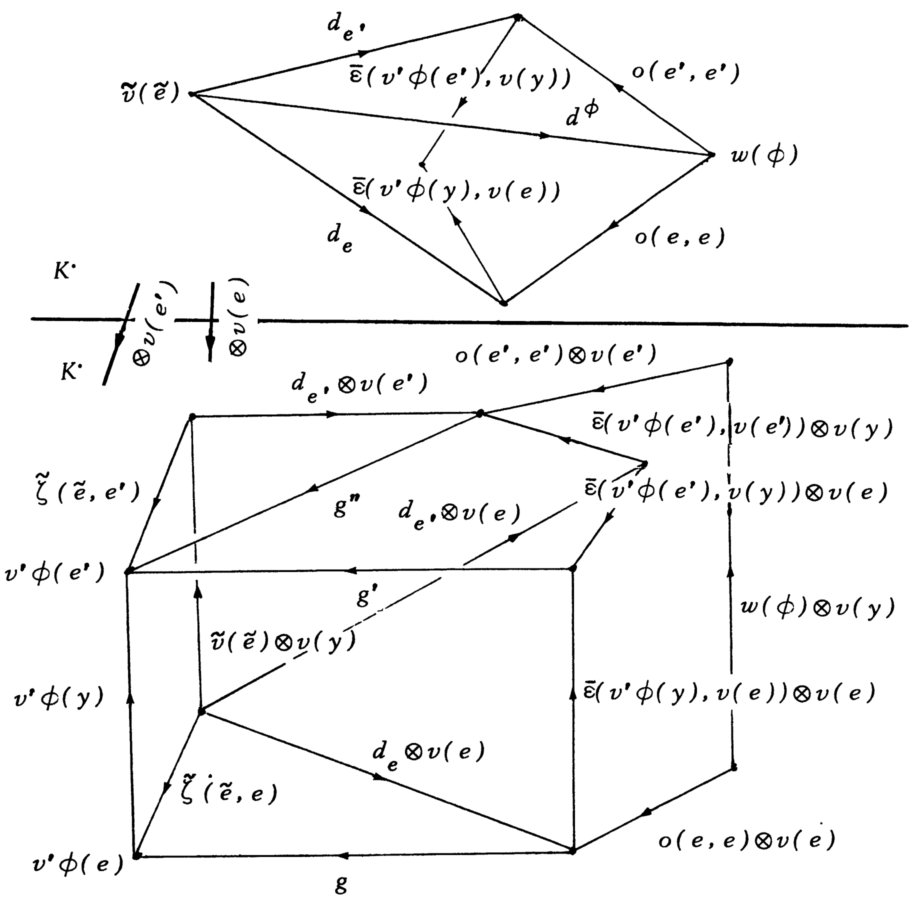
Ceci définit un foncteur $\bar{\otimes}$ de $\bar{A}(q) \times \bar{A}(q)$ vers $\bar{A}(q)$. Montrons que $\mu(\cdot, v)$ est un foncteur co-adjoint du foncteur $-\bar{\otimes} v$ de $\bar{A}(q)$ vers $\bar{A}(q)$. Soient $C^\cdot$ la source de $v$, $C''$ la source d'une unité $v'$ de $\bar{A}(q)$ et $w = \mu(v', v)$. Il existe un élément $A = (v', \xi, \theta, w \bar{\otimes} v)$ de $\bar{A}(q)$ défini par :

- $\theta$ est le foncteur évaluation de $\mathcal{N}(C^{\prime\cdot}, C^{\cdot})^{\square\square} \times C^{\cdot}$ vers $C^{\prime\cdot}$,

- $\xi((\phi, e))$ est équivalent au produit $g.(o(e,e)\otimes v(e))$, où $(g, \bar{\varepsilon}(v'(e), v(e)))$ est un $\cdot\otimes v(e)$-éjecteur et $O=(N, o, a)$ est la limite projective définissant $w(\phi)$.

Montrons que $(A, w)$ est un $\cdot\bar{\otimes}v$-éjecteur. Si $\tilde{A}=(v', \tilde{\zeta}, \tilde{\phi}, \tilde{v}\bar{\otimes}v)$ est un élément de $\bar{A}(q)$, il existe un unique foncteur $\bar{\phi}$ de $\tilde{C}^{\cdot} = \alpha(\tilde{v})$ vers $\mathcal{N}(C^{\prime\cdot}, C^{\cdot})$ vérifiant $\theta.(\bar{\phi}\times C^{\cdot}) = \tilde{\phi}$.

Soient $\tilde{e}$ une unité de $\tilde{C}^{\cdot}$ et $y$ un élément de $C$ de source $e$, de but $e'$. Posons $\phi = \bar{\phi}(\tilde{e})$ et désignons par $(g', \bar{\varepsilon}(v'\phi(e'), v(e)))$ un $\cdot\otimes v(e)$-éjecteur de but $v'\phi(e')$, et par $(g'', \bar{\varepsilon}(v'\phi(e'), v(e')))$ un $\cdot\otimes v(e')$-éjecteur de but $v'\phi(e')$.



Il existe un unique élément $d_e$ (resp. $d_{e'}$) de source $\tilde{v}(\tilde{e})$ et de but $\bar{\varepsilon}(v'\phi(e),v(e))$ (resp. $\bar{\varepsilon}(v'\phi(e'),v(e'))$) vérifiant :

$$g.(d_e \otimes v(e)) = \tilde{\tilde{\zeta}}((\tilde{e},e)) \quad (\text{resp. } g''.(d_{e'} \otimes v(e')) = \tilde{\tilde{\zeta}}((\tilde{e},e'))).$$

On a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} g'.((\bar{\varepsilon}(v'\phi(y),v(e)).d_e)\otimes v(e)) &= v'\phi(y).g.(d_e \otimes v(e)) \\ &= v'\phi(y).\tilde{\tilde{\zeta}}((\tilde{e},e)) \\ &= \tilde{\tilde{\zeta}}((\tilde{e},e')).(\tilde{v}(\tilde{e})\otimes v(y)) \\ &= g''.(d_{e'}\otimes v(y)) \\ &= g''.(\bar{\varepsilon}(v'\phi(e'),v(e'))\otimes v(y)).(d_{e'}\otimes v(e)) \\ &= g'.((\bar{\varepsilon}(v'\phi(e'),v(y)).d_{e'})\otimes v(e)), \end{aligned}$$

d'après la remarque précédant la proposition 2.. On en déduit que :

$$\bar{\varepsilon}(v'\phi(y),v(e)).d_e = \bar{\varepsilon}(v'\phi(e'),v(y)).d_{e'}..$$

Par suite, il existe un unique élément $d^{\phi}$ vérifiant $o(e,e).d^{\phi} = d_e$, pour toute unité $e$ de $C^{\cdot}$, et un élément $\bar{\zeta}(\tilde{e})$ de source $\tilde{v}(\tilde{e})$, de but $w(\phi)$ et isomorphe à $d^{\phi}$. Soit $\tilde{x}$ un élément de $\tilde{C}$, de source $\tilde{e}_1$ et de but $\tilde{e}$; posons $\bar{\phi}(\tilde{x}) = (\phi,\tau,\phi_1)$ et désignons par $(\bar{g}, \bar{\varepsilon}(v'\phi_1(e),v(e)))$ un $-\otimes v(e)$-éjecteur de but $v'\phi_1(e)$. Il existe un unique élément $\bar{d}_e$ de $\tilde{v}(\tilde{e}_1)$ vers $\bar{\varepsilon}(v'\phi_1(e),v(e))$ vérifiant $\bar{g}.(\bar{d}_e \otimes v(e)) = \tilde{\tilde{\zeta}}((\tilde{e}_1,e))$. De plus,

$$\begin{aligned} g.((d_e.\tilde{v}(\tilde{x}))\otimes v(e)) &= \tilde{\tilde{\zeta}}((\tilde{e},e)).(\tilde{v}(\tilde{x})\otimes v(e)) \\ &= v'\tilde{\phi}(x,e).\tilde{\tilde{\zeta}}((\tilde{e}_1,e)) \\ &= v'\theta(\bar{\phi}(\tilde{x}),e)).\tilde{\tilde{\zeta}}((\tilde{e}_1,e)) \\ &= v'(\tau(e)).\bar{g}.(\bar{d}_e \otimes v(e)) \\ &= g.((\bar{\varepsilon}(v'\tau(e),v(e)).\bar{d}_e)\otimes v(e)). \end{aligned}$$

Donc $\bar{\varepsilon}(v'\tau(e),v(e)).\bar{d}_e = d_e.\tilde{v}(\tilde{x})$. Ceci étant valable pour toute unité de $C^{\cdot}$, on en déduit que : $d^{\phi}.\tilde{v}(\tilde{x}) = \nu''_C.(v'\bar{\phi}(\tilde{x}),v).d^{\phi_1}$, ou encore $w\bar{\phi}(\tilde{x}).\bar{\zeta}(\tilde{e}_1) = \bar{\zeta}(\tilde{e}).\tilde{v}(\tilde{x})$. Ainsi $(w.\bar{\phi},\bar{\zeta},v)$ est une transformation naturelle, $\bar{A} = (w,\bar{\zeta},\bar{\phi},\tilde{v})$ appartient à $\bar{A}(q)$ et $A.(\bar{A}\bar{\otimes}v) = \tilde{A}$, par construction. De plus, $\bar{\phi}$ a été déterminé de manière unique à partir de $\tilde{\phi}$ et la famille $(d_e)_{e \in C_0^{\cdot}}$ à partir de $\bar{\phi}$ et de $\tilde{\zeta}$. Il en résulte que $\bar{A}$ est l'unique élément de source $\tilde{v}$, de but $w$, vérifiant la dernière équation. Ainsi $\mu(\cdot, v)$ est un foncteur co-adjoint du foncteur $\cdot \bar{\otimes} v$ et la proposition en résulte si le foncteur $\bar{\otimes}$ est associatif.

Sinon, on notera $\gamma_{(a', a, \tilde{a})}: \bar{\varepsilon}(a', \tilde{a} \otimes a) \to \bar{\varepsilon}(\bar{\varepsilon}(a', a), \tilde{a})$ les isomorphismes d'adjonction de $\bar{E}$. Désignons par $\Phi$ l'isomorphisme canonique de $\mathfrak{N}(C^{\cdot\cdot}, \tilde{C}^{\cdot} \times C^{\cdot})^{\square\square}$ vers $\mathfrak{N}(\mathfrak{N}(C^{\cdot\cdot}, C^{\cdot})^{\square\square}, \tilde{C}^{\cdot})^{\square\square}$, par $\psi = (\phi^2, \tau, \phi^1)$ un élément de $\mathfrak{N}(C^{\cdot\cdot}, \tilde{C}^{\cdot} \times C^{\cdot})$, par $\check{\psi} = (\check{\phi}^2, \check{\tau}, \check{\phi}^1)$ l'image de $\psi$ par $\Phi$, par $x$ un élément de $C$ de source $e^1$ et de but $e^2$, par $\tilde{x}$ un élément de $\tilde{C}$ de source $\tilde{e}^1$, de but $\tilde{e}^2$. Posons $w = \mu(v', v)$, $w_1 = \mu(v', \tilde{v} \otimes v)$ et $w_2 = \mu(w, \tilde{v})$ et notons respectivement $(N_j^i, o_j^i, w_j(\phi^i))$ et $(\bar{N}_j^i, \bar{o}_j^i, w \cdot \check{\phi}^i(\tilde{e}^j))$ la limite projective naturalisée définissant $w_j(\phi^i)$ et $w \cdot \check{\phi}^i(\tilde{e}_j)$, où $i = 1, 2$ et où $j = 1, 2$. Soient:

$$b = ((\tilde{x}, x), (\tilde{x}, x)), \quad \bar{e}^1 = \phi^1(\tilde{e}^1, e^1),$$

$$\bar{e}' = \phi^1(\tilde{e}^1, e^2), \quad \bar{e}^2 = \phi^1(\tilde{e}^2, e^2),$$

$$\bar{x}^1 = \phi^1(\tilde{e}^1, x), \quad \bar{x}^2 = \phi^1(\tilde{x}, e^2), \quad \bar{x} = \phi^1(\tilde{x}, x),$$

$$\gamma_1 = \gamma_{(v'(\bar{e}^1), v(e^1), \tilde{v}(\tilde{e}^1))}, \quad \gamma_3 = \gamma_{(v'(\bar{e}^2), v(e^1), \tilde{v}(\tilde{e}^1))},$$

$$\gamma_2 = \gamma_{(v'(\bar{e}^2), v(e^2), \tilde{v}(\tilde{e}^2))}, \quad \gamma' = \gamma_{(v'(\bar{e}'), v(e^1), \tilde{v}(\tilde{e}^1))}.$$

Il existe un élément $\zeta(\check{\phi}^1)$ dans $K^{\cdot}$ de source $w_2(\check{\phi}^1)$, de but $w_1(\phi^1)$, vérifiant, pour tout $(\tilde{x}, x)$ de $\tilde{C} \times C$, la relation :

$$o_1^1(b) \cdot \zeta(\check{\phi}^1) = \gamma_3^{-1} \cdot \bar{\varepsilon}(\bar{o}_2^1(x, x), \tilde{v}(\tilde{e}^1)) \cdot o_2^1(\tilde{x}, \tilde{x}).$$

En effet, on a la relation suivante :

$$\begin{aligned} B &= \bar{\varepsilon}(v'(\bar{x}), \tilde{v} \otimes v(\tilde{e}^1, e^1)) \cdot \gamma_1^{-1} \cdot \bar{\varepsilon}(\bar{o}_1^1(e^1, e^1), \tilde{v}(\tilde{e}^1)) \cdot o_2^1(\tilde{e}^1, \tilde{e}^1) \\ &= \bar{\varepsilon}(v'(\bar{x}^2), \tilde{v} \otimes v(\tilde{e}^1, e^1)) \cdot \gamma'^{-1} \cdot \bar{\varepsilon}(\bar{o}_1^1(x, x), \tilde{v}(\tilde{e}^1)) \cdot o_2^1(\tilde{e}^1, \tilde{e}^1). \end{aligned}$$

Or, par naturalité des $\gamma$,

$$\gamma_3 \cdot \bar{\varepsilon}(v'(\bar{x}^2), \tilde{v} \otimes v(\tilde{e}^1, e^1)) = \bar{\varepsilon}(\bar{\varepsilon}(v'(\bar{x}^2), v(e^1)), \tilde{v}(\tilde{e}^1)) \cdot \gamma'.$$

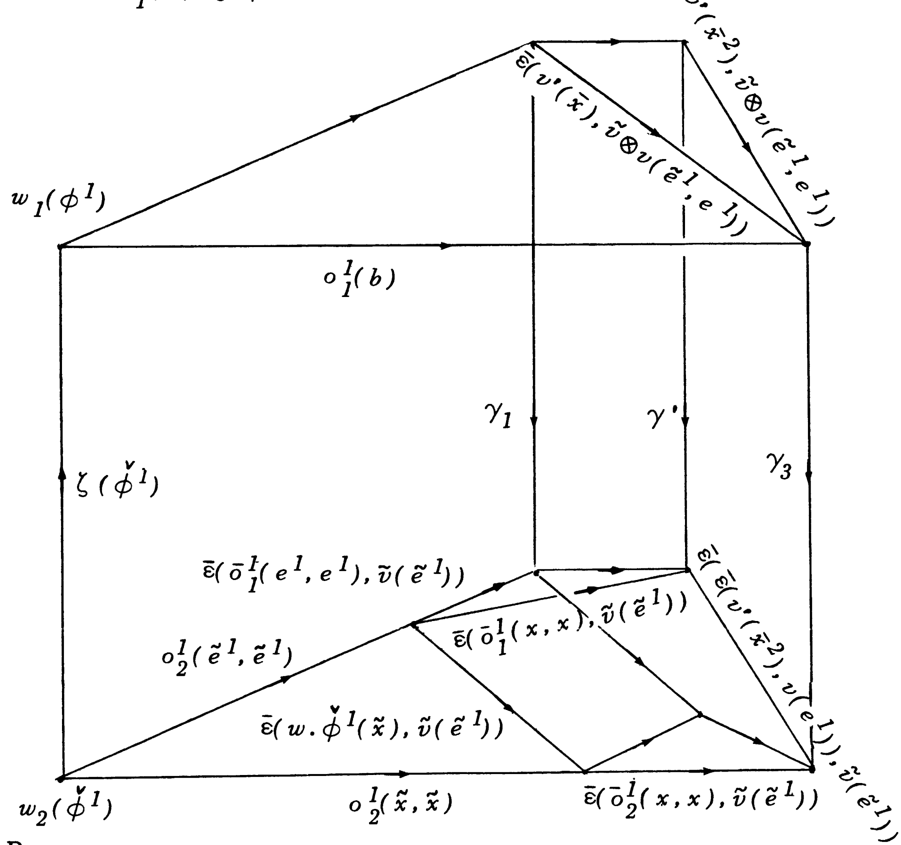
Comme l'on a des transformations naturelles :

$$\bar{\varepsilon}(\bar{\varepsilon}(v'(\bar{x}^2), v(e^1)) \cdot \bar{o}_1^1(x; x), \tilde{v}(\tilde{e}^1)) \cdot o_2^1(\tilde{e}^1, \tilde{e}^1) =$$

$$= \bar{\varepsilon}(\bar{o}_2^1(x,x).(w.\check{\phi}^1(\tilde{x})), \tilde{v}(\tilde{e}^1)).o_2^1(\tilde{e}^1,\tilde{e}^1)$$

$$= \bar{\varepsilon}(\bar{o}_2^1(x,x), \tilde{v}(\tilde{e}^1)).o_2^1(\tilde{x},\tilde{x}).$$

Ainsi $B = o_1^1(b).\zeta(\check{\phi}^1)$.




Posons :

$$B' = \bar{\varepsilon}(v'(\bar{e}^2), \tilde{v}\otimes v(\tilde{x},x)).\gamma_2^{-1}.\ \bar{\varepsilon}(\bar{o}_2^1(e^2,e^2), \tilde{v}(\tilde{e}^2)).o_2^1(\tilde{e}^2,\tilde{e}^2).$$

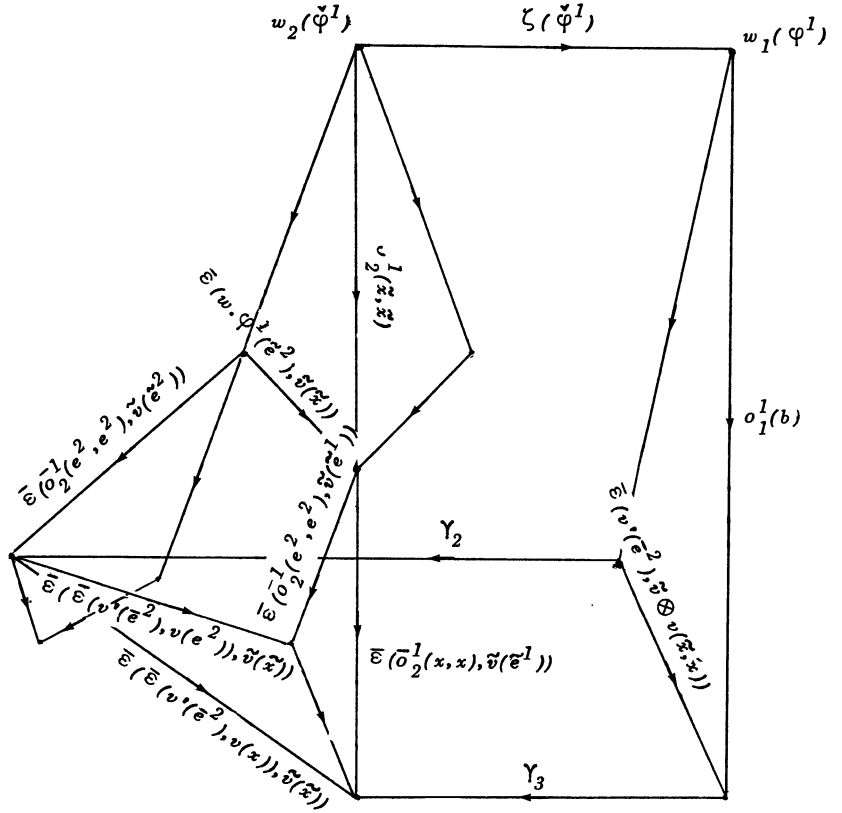
L'on a :

$$\bar{\varepsilon}(v'(\bar{e}^2), \tilde{v}\otimes v(\tilde{x},x)).\gamma_2^{-1} = \gamma_3^{-1}.\ \bar{\varepsilon}(\bar{\varepsilon}(v'(\bar{e}^2), v(x)), \tilde{v}(\tilde{x})),$$

ainsi que :

$$\bar{\varepsilon}(\bar{\varepsilon}(v'(\bar{e}^2), v(e^2)), \tilde{v}(\tilde{x})).\ \bar{\varepsilon}(\bar{o}_2^1(e^2,e^2), \tilde{v}(\tilde{e}^2)) =$$
$$\bar{\varepsilon}(\bar{o}_2^1(e^2,e^2), \tilde{v}(\tilde{e}^1)).\ \bar{\varepsilon}(w.\check{\phi}^1(\tilde{e}^2), \tilde{v}(\tilde{x}))).$$

Par suite, $B' = o_1^1(b).\zeta(\check{\phi}^1) = B$.




On définit de manière analogue $\zeta(\check\phi^2)$. Par définition du foncteur $\mu$, on a les trois relations suivantes :

a°) $o_1^2(b).w_1(\psi) = \bar\varepsilon(v'\tau(\tilde e^2, e^2), \tilde v \otimes v(\tilde e^1, e^1)).o_1^1(b)$,

b°) $o_2^2(\tilde x, \tilde x).w_2(\check\psi) = \bar\varepsilon(w.\check\tau(\tilde e^2), v(e^1)).\bar o_2^1(x,x)$,

c°) $\bar o_2^2(x,x).w(\check\tau(e^2)) = \varepsilon(v'\tau(\tilde e^2,e^2), v(e^1)).\bar o_2^1(x,x)$.

La naturalité des morphismes d'adjonction assure que :

$\bar\varepsilon(\bar\varepsilon(v'\tau(\tilde e^2,e^2),v(e^1)),\tilde v(\tilde e^1)).\gamma_3 = \gamma_4 . \bar\varepsilon(v'\tau(\tilde e^2,e^2),\tilde v\otimes v(\tilde e^1,e^1))$,

où $\gamma_4 = \gamma_{(v'\phi^2(\tilde e^2,e^2),v(e^1),\tilde v(\tilde e^1))}$. On déduit de ces relations que:

$$w_1(\psi).\zeta(\check\phi^1) = \zeta(\check\phi^2).w_2(\check\psi).$$

Ainsi le triplet $(w_1 . \Phi^{-1}, \zeta, w_2)$ est une transformation naturelle et $\Gamma'_{(v',v,v)} = (w_1, \zeta, \Phi^{-1}, w_2)$ appartient à $\bar{A}_1(q)$. Montrons que $\Gamma'_{(v',v,v)}$ admet un inverse $\Gamma_{(v',v,v)}$. Il suffit de prouver que $\zeta(\check{\phi}^1)$ est inversible. Par hypothèse, $\vec{E}$ est à limites projectives; $\bar{\varepsilon}(\cdot, v(e)).(\bar{N}^1_2, \bar{o}^1_2, w.\check{\phi}^1(\tilde{e}^2))$ est donc une limite projective naturalisée et il existe un unique élément $\sigma(\tilde{x}, \tilde{x})$ de $K$ de source $w_1(\phi^1)$, de but $\bar{\varepsilon}(w.\check{\phi}^1(\tilde{e}^2), \tilde{v}(\tilde{e}^1))$ et vérifiant pour tout $x$ de $C$:

$$\bar{\varepsilon}(\bar{o}^1_2(x,x), \tilde{v}(\tilde{e}^1)).\sigma(\tilde{x}, \tilde{x}) = \gamma_3 . o^1_1((\tilde{x}, x), (\tilde{x}, x)).$$

En effet, on a les relations :

$$\begin{aligned} &\bar{\varepsilon}(\bar{\varepsilon}(v'(\bar{x}^3), v(e^1)), \tilde{v}(\tilde{e}^1)).\gamma''. o^1_1(b'') = \gamma_3 . o^1_1(b) \\ &= \bar{\varepsilon}(\bar{\varepsilon}(v'(\bar{e}^2), v(x)), \tilde{v}(\tilde{e}^1)).\gamma'''. o^1_1(b'''), \end{aligned}$$

où $b'' = ((\tilde{x}, e^1), (\tilde{x}, e^1))$, $b''' = ((\tilde{x}, e^2), (\tilde{x}, e^2))$, où $\bar{e}^2 = \phi^1(\tilde{e}^2, e^1)$, où $\bar{x}^3 = \phi^1(\tilde{e}^2, x)$, $\gamma'' = \gamma_{(v'(e''), v(\dot{e}^1), \tilde{v}(\tilde{e}^1))}$ et $\gamma''' = \gamma_{(v'(e), v(e^2), \tilde{v}(\tilde{e}^1))}$.

De plus , il est clair que:

$$\begin{aligned} &\bar{\varepsilon}(\bar{o}^1_2(x,x), \tilde{v}(\tilde{e}^1)).\ \bar{\varepsilon}(w.\check{\phi}^1(\tilde{x}), \tilde{v}(\tilde{e}^1)).\sigma(\tilde{e}^1, \tilde{e}^1) = \\ &\bar{\varepsilon}(\bar{\varepsilon}(v'(\bar{x}^2), v(e^1)), \tilde{v}(\tilde{e}^1)).\ \bar{\varepsilon}(\bar{o}^1_1(x,x), \tilde{v}(\tilde{e}^1)).\sigma(\tilde{e}^1, \tilde{e}^1) = \\ &\bar{\varepsilon}(\bar{\varepsilon}(v'(\bar{x}^2), v(e^1)), \tilde{v}(\tilde{e}^1)).\gamma'. o^1_1((\tilde{e}^1, x), (\tilde{e}^1, x)) = \\ &\quad \gamma_3 . o^1_1((\tilde{x}, x), (\tilde{x}, x)) = \bar{\varepsilon}(\bar{o}^1_2(x,x), \tilde{v}(\tilde{e}^1)).\sigma(\tilde{x}, \tilde{x}). \end{aligned}$$

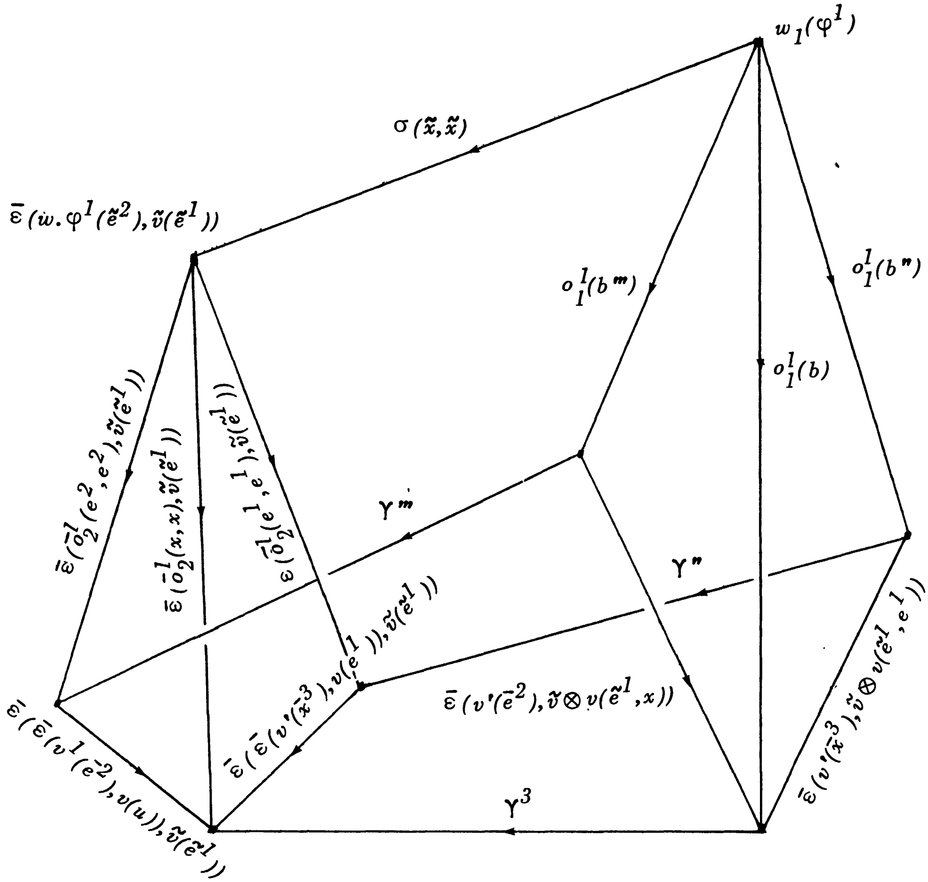
De même :

$$\begin{aligned} &\bar{\varepsilon}(\bar{o}^1_2(x,x), \tilde{v}(\tilde{e}^1)).\ \bar{\varepsilon}(w.\check{\phi}^1(\tilde{e}^2), \tilde{v}(\tilde{x})).\sigma(\tilde{e}^2, \tilde{e}^2) = \\ &\bar{\varepsilon}(\bar{\varepsilon}(v'(\bar{e}^2), v(e^1)), \tilde{v}(\tilde{x})).\ \bar{\varepsilon}(\bar{o}^1_2(x,x), \tilde{v}(\tilde{e}^2)).\sigma(\tilde{e}^2, \tilde{e}^2) = \\ &\bar{\varepsilon}(\bar{\varepsilon}(v'(\bar{e}^2), v(e^1)), \tilde{v}(\tilde{x})).\bar{\gamma}. o^1_1((\tilde{e}^2, x), (\tilde{e}^2, x)) = \\ &\gamma_3 . \bar{\varepsilon}(v'(\bar{e}^2), \tilde{v} \otimes v(\tilde{x}, e^1)). o^1_1((\tilde{e}^2, x), (\tilde{e}^2, x)) = \\ &\quad \gamma_3 . o^1_1((\tilde{x}, x), (\tilde{x}, x)) = \bar{\varepsilon}(\bar{o}^1_2(x,x), \tilde{v}(\tilde{e}^1)).\sigma(\tilde{x}, \tilde{x}) \end{aligned}$$

où $\bar{\gamma} = \gamma_{(v'(\bar{e}^2), v(e^1), \tilde{v}(\tilde{e}^2))}$. Ainsi le triplet $(N^1_2, \sigma, w_1(\phi^1))$ est une transformation naturelle et l'élément $\bar{\zeta}(\phi^1)$, vérifiant

$$o^1_2(\tilde{x}, \tilde{x}).\ \bar{\zeta}(\phi^1) = \sigma(\tilde{x}, \tilde{x})$$

pour tout $\tilde{x}$ de $\tilde{C}$, est l'inverse de $\zeta(\check{\phi}^1)$.



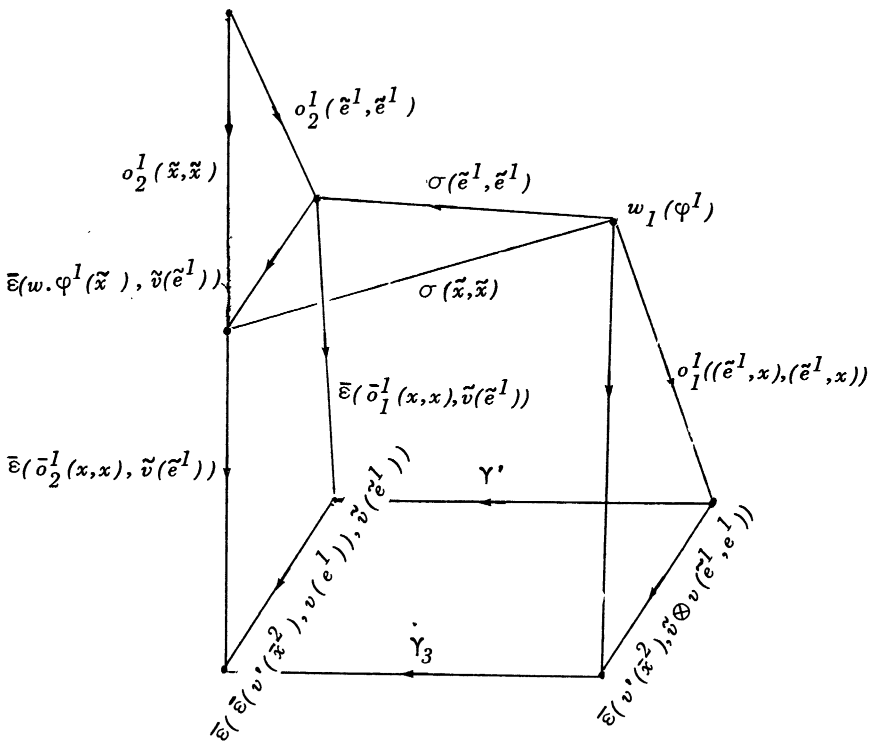

En effet,

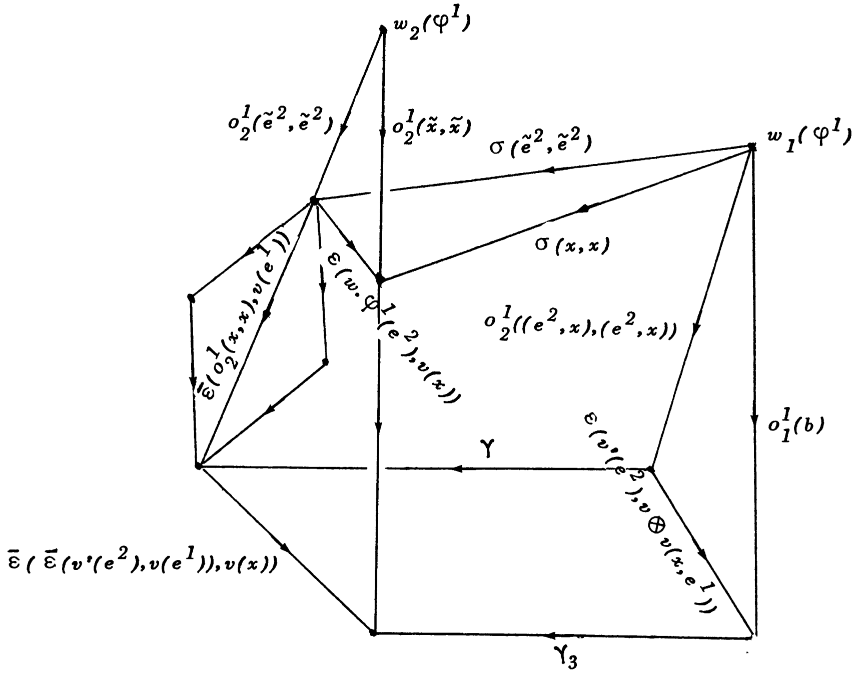
$$\bar{\varepsilon}(\bar{o}_2^1(x,x),\tilde{v}(\tilde{e}^1)).o_2^1(\tilde{x},\tilde{x}).\bar{\zeta}(\phi^1).\zeta(\check{\phi}^1)=$$
$$\bar{\varepsilon}(\bar{o}_2^1(x,x),\tilde{v}(\tilde{e}^1)).\sigma(\tilde{x},\tilde{x}).\zeta(\check{\phi}^1)=$$
$$\gamma_3.o_1^1(b).\zeta(\check{\phi}^1)=\bar{\varepsilon}(\bar{o}_2^1(x,x),\tilde{v}(\tilde{e}^1)).o_2^1(\tilde{x},\tilde{x}),$$

pour tout $\tilde{x}$ de $\tilde{C}$. Donc $o_2^1(\tilde{x},\tilde{x})=o_2^1(\tilde{x},\tilde{x}).\bar{\zeta}(\phi^1).\zeta(\check{\phi}^1)$. Cette équation est valable pour tout $\tilde{x}$ de $\tilde{C}$. Ainsi $\bar{\zeta}(\phi^1).\zeta(\check{\phi}^1)=w_2(\check{\phi}^1)$.

De même :

$$o_1^1(b).\zeta(\check{\phi}^1).\bar{\zeta}(\phi^1)=\gamma_3^{-1}.\bar{\varepsilon}(\bar{o}_2^1(x,x),\tilde{v}(\tilde{e}^1)).o_2^1(\tilde{x},\tilde{x}).\bar{\zeta}(\phi^1)$$
$$=\gamma_3^{-1}.\bar{\varepsilon}(\bar{o}_2^1(x,x),\tilde{v}(\tilde{e}^1)).\sigma(\tilde{x},\tilde{x})=o_1^1(b).$$


$o_2^1(\tilde{e}^1, \tilde{e}^1)$
$o_2^1(\tilde{x}, \tilde{x})$
$\sigma(\tilde{e}^1, \tilde{e}^1)$
$w_1(\varphi^1)$
$\bar{\varepsilon}(w.\varphi^1(\tilde{x}), \tilde{v}(\tilde{e}^1))$
$\sigma(\tilde{x}, \tilde{x})$
$o_1^1((\tilde{e}^1, x), (\tilde{e}^1, x))$
$\bar{\varepsilon}(\bar{o}_1^1(x,x), \tilde{v}(\tilde{e}^1))$
$\bar{\varepsilon}(\bar{o}_2^1(x,x), \tilde{v}(\tilde{e}^1))$
$\gamma'$
$\bar{\varepsilon}(\bar{\varepsilon}(v'(\tilde{x}^2), v(e^1)), \tilde{v}(\tilde{e}^1))$
$\dot{\gamma}_3$
$\bar{\varepsilon}(v'(\tilde{x}^2), \tilde{v} \oplus v(\tilde{e}^1, e^1))$


$w_2(\varphi^1)$
$o_2^1(\tilde{e}^2, \tilde{e}^2)$
$o_2^1(\tilde{x}, \tilde{x})$
$\sigma(\tilde{e}^2, \tilde{e}^2)$
$w_1(\varphi^1)$
$\sigma(x, x)$
$\bar{\varepsilon}(o_2^1(x,x), v(e^1))$
$\varepsilon(w.\varphi^1(e^2), v(x))$
$o_2^1((e^2, x), (e^2, x))$
$o_1^1(b)$
$\gamma$
$\varepsilon(v'(e^2), v \oplus v(x, e^1))$
$\bar{\varepsilon}(\bar{\varepsilon}(v'(e^2), v(e^1)), v(x))$
$\gamma_3$

Par suite,

$$\zeta(\check{\phi}^1).\bar{\zeta}(\phi^1)=w_1(\phi^1) \text{ et } (\zeta(\check{\phi}^{-1}))^{-1}=\bar{\zeta}(\phi^1).$$

La naturalité des $\Gamma_{(v',v,\tilde{v})}$ se déduit de la naturalité des $\gamma_{(a',a,\tilde{a})}$ et du fait que le foncteur $\mu$ est défini au moyen de limites projectives. ■

PROPOSITION 14. *Si $(\Omega,\bar{E})$ est une catégorie hyper-q-dominée et si $\bar{E}$ est à $\mathcal{F}_0$-limites projectives, il existe une transformation naturelle $\bar{\Omega}$ telle que $(\bar{\Omega},(\mu,\bar{A}(q)))$ soit une catégorie hyper-P-dominée.*

PREUVE : Considérons quatre unités $\bar{v}_2, v_2, \bar{v}_1$ et $v_1$ de $\bar{A}(q)$ et notons $\bar{C}_2^\cdot, C_2^\cdot, \bar{C}_1^\cdot$ et $C_1^\cdot$ respectivement leur source. Soient $(v_1, \zeta_1, \phi_1, \bar{v}_1)$ un élément de $\bar{A}(q)$ et $\hat{\phi}$ le foncteur canonique de $\mathfrak{N}(\bar{C}_2^\cdot, C_2^\cdot)^{\square\square}$ vers $\mathfrak{N}(\mathfrak{N}(\bar{C}_2^\cdot,\bar{C}_1^\cdot)^{\square\square},\mathfrak{N}(C_2^\cdot,C_1^\cdot)^{\square\square})^{\square\square}$, qui à un foncteur $\phi_2$ associe le foncteur qui fait correspondre à $\psi$ la transformation naturelle $\phi_2\cdot\psi\cdot\phi_1$ et à une transformation naturelle $\psi_2=(\phi_2',\zeta_2,\phi_2)$ associe la transformation naturelle $(\hat{\phi}(\phi_2'),\theta,\hat{\phi}(\phi_2))$, où $\theta(\phi)=\psi_2\cdot\phi\cdot\phi_1$. Posons

$$\mu(v_2,v_1)=w,\ \ \mu(\bar{v}_2,v_2)=w_2,\ \ \mu(\bar{v}_2,\bar{v}_1)=\bar{w} \text{ et } \mu(\bar{w},w)=\hat{w}.$$

Il s'agit de définir une transformation naturelle $(\hat{w}.\hat{\phi},\hat{\zeta},w_2)$ correspondant à la loi de composition de $\bar{A}(q)$. Supposons donnés un foncteur $\phi$ de $C_1^\cdot$ vers $C_2$ et un foncteur $\phi_2$ de $C_2^\cdot$ vers $\bar{C}_2^\cdot$; posons

$$\bar{\phi}=\hat{\phi}(\phi_2)(\phi)=\phi_2\cdot\phi\cdot\phi_1.$$

Nous allons définir un morphisme $\rho(\phi)$ de $w_2(\phi_2)$ vers $\bar{\varepsilon}(\bar{w}(\bar{\phi}), w(\phi))$. Désignons par $(\bar{N},\bar{o},\bar{a})$, par $(N,o,a)$ et par $(N_2,o_2,a_2)$ les limites projectives naturalisées définissant respectivement $\bar{w}(\bar{\phi})$, $w(\phi)$ et $w_2(\phi_2)$. Soient $\bar{y}_1$ un élément de $\bar{C}_1$ de source $\bar{e}_1^1$ et de but $\bar{e}_1^2$. Posons $y_1=\phi_1(\bar{y}_1)$, $y_2=\phi(y_1)$, $\bar{y}_2=\phi_2(y_2)$, $\phi_1(\bar{e}_1^i)=e_1^i$, $\phi(e_1^i)=e_2^i$, $\phi_2(e_2^i)=\bar{e}_2^i$ et:

$$s^i=(\bar{e}_2^i, e_2^i, e_1^i, \bar{e}_1^i) \quad , \quad \tilde{s}=(\bar{e}_2^2, e_2^1, e_1^1, \bar{e}_1^1),$$

$$\bar{s}=(\bar{e}_2^2, e_2^2, e_1^1, \bar{e}_1^1) \quad , \quad s=(\bar{e}_2^2, e_2^2, e_1^2, \bar{e}_1^1),$$

$$\omega^i=\omega(s^i)_{(\zeta_1(\bar{e}_1^i),1)} \quad , \quad \tilde{\omega}=\omega(\tilde{s})_{(\zeta_1(\bar{e}_1^1),1)},$$

$$\bar{\omega}=\omega(\bar{s})_{(\zeta_1(\bar{e}_1^1),1)} \quad , \quad \hat{\omega}=\omega(\hat{s})_{(v_1(y_1).\zeta_1(\bar{e}_1^1),1)},$$

où $\Omega=(\eta,\omega,\eta')$.

Comme $(\Omega,\bar{E})$ est une catégorie hyper-$q$-dominée, on a les relations :

$$\bar\varepsilon(\bar\varepsilon(\bar v_2(\bar y_2),\bar v_1(\bar e_1^1)),\bar\varepsilon(v_2(e_2^1),v_1(e_1^1))).\omega^1=\tilde\omega.\bar\varepsilon(\bar v_2(\bar y_2),v_2(e_2^1));$$

$$\bar\varepsilon(\bar\varepsilon(\bar v_2(\bar e_2^2),\bar v_1(\bar e_1^1)),\bar\varepsilon(v_2(y_2),v_1(e_1^1))).\bar\omega=\tilde\omega.\bar\varepsilon(\bar v_2(\bar e_2^2),v_2(y_2));$$

$$\bar\varepsilon(\bar\varepsilon(\bar v_2(\bar e_2^2),\bar v_1(\bar e_1^1)),\bar\varepsilon((v_2(e_2^2),v_1(y_1))).\bar\omega=\hat\omega=$$

$$\bar\varepsilon(\bar\varepsilon(\bar v_2(\bar e_2^2),\bar v_1(\bar y_1)),\bar\varepsilon(v_2(e_2^2),v_1(e_1^2))).\omega^2.$$

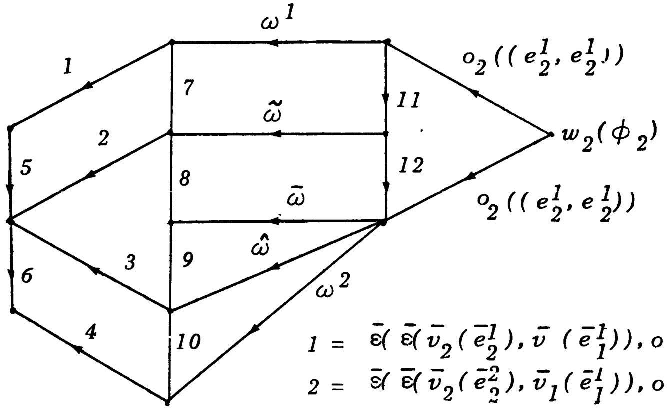
De plus, par définition de $o$ et $o_2$, l'on a :

$$\bar\varepsilon(\bar v_2(\bar e_2^2),v_2(y_2)).o_2((e_2^2,e_2^2))=\bar\varepsilon(\bar v_2(\bar y_2),v_2(e_2^1)).o_2((e_2^1,e_2^1));$$

$$\bar\varepsilon(v_2(e_2^2),v_1(y_1)).o((e_1^2,e_1^2))=\bar\varepsilon(v_2(y_2),v_1(e_1^1)).o((e_1^1,e_1^1)).$$

Posons :

$$\sigma(\bar e_1^i,\bar e_1^i)=\bar\varepsilon(\bar\varepsilon(\bar v_2(\bar e_2^i),\bar v_1(\bar e_1^i)),o((e_1^i,e_1^i))).\omega^i.o_2((e_2^i,e_2^i)).$$




$1=\bar\varepsilon(\bar\varepsilon(\bar v_2(\bar e_2^1),\bar v(\bar e_1^1)),o((e_1^1,e_1^1)))$

$2=\bar\varepsilon(\bar\varepsilon(\bar v_2(\bar e_2^2),\bar v_1(\bar e_1^1)),o((e_1^1,e_1^1)))$

$3=\bar\varepsilon(\bar\varepsilon(\bar v_2(\bar e_2^2),\bar v_1(\bar e_1^2)),o(e_1^2,e_1^2))$

$4=\bar\varepsilon(\bar\varepsilon(\bar v_2(\bar e_2^2),\bar v_1(\bar e_2^1)),o(e_1^2,e_1^2))$

$5=\bar\varepsilon(\bar\varepsilon(\bar v_1(\bar y),\bar v_1(\bar e_1^1)),w(\phi))$.

$6=\bar\varepsilon(\bar\varepsilon(\bar v_2(\bar e_2^2),\bar v_1(\bar y_1)),w(\phi))$

$7=\bar\varepsilon(\bar\varepsilon(\bar v_2(\bar y_2),\bar v_1(\bar e_1^1)),\bar\varepsilon(v_2(e_2^1),v_1(e_1^1)))$.

$8=\bar\varepsilon(\bar\varepsilon(\bar v_2(\bar e_2^2),\bar v_1(\bar e_1^1)),\bar\varepsilon(v_2(y_2),v_1(e_1^1)))$.

$9=\bar\varepsilon(\bar\varepsilon(\bar v_2(\bar e_2^2),\bar v_1(\bar e_1^1)),\bar\varepsilon(v_2(e_2^2),v_1(y_1)))$.

$10=\bar\varepsilon(\bar\varepsilon(\bar v_2(\bar e_2^2),\bar v_1(\bar y_1)),\bar\varepsilon(v_2(e_2^2),v_1(e_1^2)))$.

$11=\bar\varepsilon(\bar v_2(\bar y_2),v_2(e_2^1))$, $12=\bar\varepsilon(\bar v_2(\bar e_2^2),v_2(y_2))$.

Les relations précédentes nous assurent que :

$$\bar{\varepsilon}(\,\bar{\varepsilon}(\bar{v}_2(\bar{e}_2^2),\bar{v}_1(\bar{y}_1)),w(\phi)).\sigma(\bar{e}_1^2,\bar{e}_1^2)=$$
$$\bar{\varepsilon}(\,\bar{\varepsilon}(\bar{v}_2(\bar{y}_2),\bar{v}_1(\bar{e}_1^1)),w(\phi)).\sigma(\bar{e}_1^1,\bar{e}_1^1).$$

On a ainsi défini une transformation naturelle $S=(\,\bar{\varepsilon}(-,w(\phi)).\bar{N},\sigma,w_2(\phi_2))$. Or, par hypothèse, $\bar{L}=\bar{\varepsilon}(\cdot,w(\phi)).(\bar{N},\bar{o},\bar{a})$ est une limite projective naturalisée dans $K^\cdot$, de sorte qu'il existe un morphisme $\rho(\phi)=Lim_{\bar{L}}S=\rho(\phi,\phi)$.

Considérons une transformation naturelle $\psi=(\phi',\zeta,\phi)$ et posons :

$$\bar{\psi}=\phi_2\cdot\psi\cdot\phi_1=(\bar{\phi}',\bar{\zeta},\bar{\phi}),\ x=\zeta(e_2^1),\ \bar{x}=\phi_2(x),\ e_2'=\beta x,$$
$$\bar{e}_2'=\beta\bar{x},\quad s'=(\bar{e}_2',e_2',e_1^1,\bar{e}_1^1),\quad \check{s}=(\bar{e}_2',e_2^1,e_1^1,\bar{e}_1^1),$$
$$\omega'=\omega(s')_{(\zeta(\bar{e}_1^1),1)}\quad,\quad \check{\omega}=\omega(\check{s})_{(\zeta(\bar{e}_1^1),1)}.$$

Comme précédemment, on a les relations :

$$\bar{\varepsilon}(\,\bar{\varepsilon}(\bar{v}_2(\bar{x}),\bar{v}_1(\bar{e}_1^1)),\,\bar{\varepsilon}(v_2(e_2^1),v_1(e_1^1))).\omega^1=\hat{\omega}.\ \bar{\varepsilon}(\bar{v}_2(\bar{x}),v_2(e_2^1)),$$
$$\bar{\varepsilon}(\,\bar{\varepsilon}(\bar{v}_2(e_2'),\bar{v}_1(\bar{e}_1^1)),\,\bar{\varepsilon}(v_2(x),v_1(e_1^1))).\omega'=\check{\omega}.\ \bar{\varepsilon}(\hat{v}_2(\bar{e}_2'),v_2(x)).$$

D'autre part, si $(\bar{N}',\bar{o}',\bar{a}')$ et $(N',o',a')$ sont des limites projectives naturalisées définissant respectivement $\bar{w}(\bar{\phi}')$ et $w(\phi')$ , l'on a aussi :

$$o'((e_1^1,e_1^1)).w(\psi)=\bar{\varepsilon}(v_2(x),v_1(e_1^1)).o((e_1^1,e_1^1))$$
$$\bar{o}'((\bar{e}_1^1,\bar{e}_1^1)).\bar{w}(\bar{\psi})=\bar{\varepsilon}(\bar{v}_2(\bar{x}),\bar{v}_1(\bar{e}_1^1)).\bar{o}((\bar{e}_1^1,\bar{e}_1^1)).$$

On en déduit que :

$$\bar{\varepsilon}(\bar{w}(\bar{\psi}),w(\phi)).\rho(\phi)=\bar{\varepsilon}(\bar{w}(\bar{\phi}'),w(\psi)).\rho(\phi').$$

Ainsi le triplet $R=(\hat{N},\rho,w_2(\phi_2))$ définit une transformation naturelle et $\hat{\zeta}(\phi_2)$ sera, par définition, égal à $Lim_{\hat{L}}R$, où $\hat{L}$ est la limite projective naturalisée déterminant $\hat{w}(\hat{\phi}(\phi_2))$.

Considérons une transformation naturelle $\psi_2=(\phi_2',\zeta_2,\phi_2)$ et posons

$$z=\zeta_2(e_2^2),\ \ \beta(z)=\bar{e}_2'',\ \ s''=(\bar{e}_2'',e_2^1,e_1^1,\bar{e}_1^1)\ \text{ et }\ \omega''=\omega(s'')_{(\zeta_1(\bar{e}_1^1),1)}.$$

La relation :

$$\bar{\varepsilon}(\,\bar{\varepsilon}(z, \bar{v}_1(\bar{e}_1^1)),\, \bar{\varepsilon}(v_2(e_2^1), v_1(e_1^1))).\omega^1 = \omega''.\, \bar{\varepsilon}(z, v_2(e_2^1))$$

assure, par passage aux limites, que :

$$\hat{\zeta}(\phi_2').w_2(\psi_2) = \hat{w}(\hat{\phi}(\psi_2)).\hat{\zeta}(\phi_2).$$

Donc $(\hat{w}, \hat{\zeta}, \hat{\phi}, w_2)$ appartient à $\bar{A}(q)$ et correspond à la loi de composition de $\bar{A}(q)$. La fin de la démonstration est analogue à celle de la proposition 3. ■

REMARQUE. Désignons par $A^{C^\cdot}(q)$ la sous-catégorie de $\bar{A}(q)$ formée des triplets $(v', \zeta, C^\cdot, v)$ et par $j$ le foncteur de $C^\cdot$ vers $\mathcal{N}(C^\cdot, C^\cdot)^{\square\square}$ qui à $x$ associe la transformation naturelle constante sur $x$. Il existe un foncteur $\mu_{C^\cdot}$ de $(A^{C^\cdot}(q))\times(A^{C^\cdot}(q))^*$ vers $A^{C^\cdot}(q)$ qui à $(v', v)$ associe $\mu(v', v).j = w$. Si $e$ est une unité de $C^\cdot$, $q.w(e)$ est l'ensemble des transformations naturelles de la forme $(v'(e), \tau, v)$, où $v'(e)$ est considéré comme un foncteur constant. Si $\alpha(x) = e$, $q.w(x)$ associe à $(v'(e), \tau, v)$ la transformation naturelle $v'(x)\square\square(v'(e), \tau, v)$. Soit $p_{C^\cdot}$ la restriction du foncteur $p$ à $A^{C^\cdot}(q)$. Il existe une transformation naturelle canonique du foncteur $(p_{C^\cdot}).(\mu_{C^\cdot}.j)$ vers le foncteur $Hom_A C^\cdot$.

Soient $a_0$ une $q$-structure libre associée à $\{a_0\}$ et $\bar{a}_0$ le foncteur constant sur $a_0$, de source une catégorie $b^\cdot$, réduite à une unité $b$.

PROPOSITION 15 : *$\bar{a}_0$ est une P-structure libre associée à $\{a_0\}$. Si l'on a une équivalence $\varepsilon = (\bar{\varepsilon}(\cdot, a_0), \sigma, K^\cdot)$, l'on a aussi une équivalence $\bar{\varepsilon} = (\mu(\cdot, \bar{a}_0), \bar{\sigma}, \bar{A}(q))$.*

PREUVE : a) Soient $v$ un foncteur de $C^\cdot$ vers $K^\cdot$ appartenant à $\bar{A}(q)$ et $\bar{x}$ une application de $\{a_0\}$ dans $P(v)$ d'image $x$. Il existe une unique unité $e$ de $C^\cdot$ telle que $x$ appartienne à $qv(e)$; cette unité détermine un foncteur $\phi$ de $b^\cdot$ vers $C^\cdot$. Il existe, d'autre part, un unique morphisme $\zeta(b)$ de source $a_0$ et de but $v(e)$ tel que $\underline{q(\zeta(b)).g} = \underline{\bar{x}}$, où $(a_0, g)$ est un $q$-projecteur de source $\{a_0\}$. On a donc un élément $A = (v, \zeta, \phi, \bar{a}_0)$ de $v.\bar{A}(q).\bar{a}_0$ vérifiant : $P(A).g = \bar{x}$. De plus, $A$ est bien déterminé par ces conditions. Ainsi $(\bar{a}_0, g)$ est un $P$-projecteur.

b) Supposons que $\varepsilon$ est une équivalence. Pour toute unité $v$ de $A(q)$, posons $\bar{\sigma}(v) = (\mu(v, \bar{a}_0), \zeta, \phi, v)$, où $\phi$ est l'isomorphisme naturel de $C^{\cdot}$ vers $\mathfrak{N}(C^{\cdot}, b^{\cdot})^{\square\square}$ et où $\zeta(e)$ est l'inversible $\sigma(v(e))$, pour toute unité $e$ de $C^{\cdot}$. C'est un élément inversible de $\bar{A}(q)$. Soit $\hat{A}= (v', \hat{\zeta}, \hat{\phi}, v)$ un élément de $\bar{A}(q)$. Posons $\bar{\sigma}(v')=(\mu(v', \bar{a}_0), \zeta', \phi', v')$ et $\mu(\hat{A}, \bar{a}_0)=(\bar{v}', \bar{\zeta}, \bar{\phi}, \bar{v})$. L'on a:

$$\bar{\phi}.\phi=\mathfrak{N}(\hat{\phi}, a_0).\phi=\phi'.\hat{\phi},$$

$$\bar{\zeta}\,\phi(e).\sigma(v(e))=\sigma(v'\hat{\phi}(e)).\hat{\zeta}(e),$$

où $e \in C^{\cdot}_0$. Ainsi $\bar{\varepsilon}=(\mu(-, \bar{a}_0), \bar{\sigma}, \bar{A}(q))$ est une équivalence. ■

Considérons à nouveau une structure de catégorie monoïdale $\mathcal{K}= (K^{\cdot}, \otimes, a_0, r, r', s)$. Désignons par $\bar{\otimes}$ le foncteur de $\bar{A}(q)\times\bar{A}(q)$ vers $\bar{A}(q)$ défini dans la proposition 10, par $\bar{a}_0$ un foncteur constant sur $a_0$ de source une catégorie $b^{\cdot}$ ayant un seul élément $b$, par $\bar{r}(v)$ l'inversible $(v, \zeta, \phi, v\bar{\otimes}\bar{a}_0)$, où $\phi$ est l'isomorphisme de $C^{\cdot}\times b^{\cdot}$ vers $C^{\cdot}=\alpha(v)$ et où $\zeta(e)=r(v(e))$, pour toute unité $e$ de $C^{\cdot}$, par $\bar{r}'(v)$ l'inversible $(v, \zeta', \phi', \bar{a}_0\bar{\otimes}v)$, où $\phi'$ est l'inversible de $b^{\cdot}\times C^{\cdot}$ vers $C^{\cdot}$ et où

$$\zeta'(e)=r'(v(e)),$$

par $\bar{s}(v'', v', v)$ l'élément $((v''\bar{\otimes}v')\bar{\otimes}v, \zeta'', \phi'', v''\bar{\otimes}(v'\bar{\otimes}v))$, où $\phi''$ est l'isomorphisme de $C''^{\cdot}\times(C'^{\cdot}\times C^{\cdot})$ vers $(C''^{\cdot}\times C'^{\cdot})\times C^{\cdot}$ et où

$$\zeta''(e'', (e', e))= s(v''(e''), v'(e'), v(e))$$

pour toute unité $(e'', e', e)$ de $C''^{\cdot}\times C'^{\cdot}\times C^{\cdot}=\alpha(v'')\times\alpha(v')\times\alpha(v)$.

PROPOSITION 15. *$\mathfrak{A}=(\bar{A}(q), \bar{\otimes}, \bar{a}_0, \bar{r}, \bar{r}', \bar{s})$ est une catégorie monoïdale.*

PREUVE : La vérification est immédiate. ■

COROLLAIRE. *Si $\mathcal{K}$ est monoïdale fermée, il en est de même de $\mathfrak{A}$.*

PREUVE : C'est une conséquence de la proposition 10. ■

**Appendice.**

Supposons que nous sommes dans les conditions de la proposition 1, dont nous empruntons les notations, et que $\overline{C^{\cdot}} = K^{\cdot}$. Soient $\phi$ un foncteur d'une petite catégorie $I^{\cdot}$ vers $C^{\cdot}$ et $\mu = (\phi, \pi, e)$ une transformation naturelle de but $\phi$ et de source un foncteur constant sur l'unité $e$. On note $D^{\cdot}_e$ la sous-catégorie de $C^{\cdot}_e$ formée des flèches $((y', y), y)$ et des flèches $((y', y), y'.y)$ de l'une des formes suivantes et de leurs unités:

$y = y' = e$,

$y = e$ et $y' = x'.\pi(i')$, où $i' \in I^{\cdot}_0$,

$y = x.\pi(i)$, où $i \in I^{\cdot}_0$.

Le foncteur inclusion de $D^{\cdot}_e$ dans $C^{\cdot}_e$ est désigné par $\Delta_e$. On considère la condition $In(\mu)$:

la relation « il existe un couple $(i, i')$ d'unités de $I^{\cdot}$ et un couple de flèches $(x, x')$ de $C^{\cdot}$ tels que : $x.\pi(i) = x'.\pi(i')$ » assure l'existence d'un couple de flèches $(\hat{i}, \hat{i}')$ de $I^{\cdot}$ et d'une flèche $z$ de $C^{\cdot}$ tels que :

$$\alpha(\hat{i}) = i,\ \alpha(\hat{i}') = i',\ \beta(\hat{i}) = \beta(\hat{i}') = i'',\ x = z.\phi(\hat{i}) \text{ et } x' = z.\phi(\hat{i}').$$

On se donne deux foncteurs $v$ et $v'$ de $C^{\cdot}$ vers $K^{\cdot}$ et on pose

$$w = \hat{\varepsilon}(v', v).$$

PROPOSITION. *Supposons que l'on ait la condition* $In(\mu)$. *Si* $v'.\mu$ *est une limite projective naturalisée q-dominée, la limite projective du foncteur* $w.\phi$ *est isomorphe à la limite projective du foncteur* ${}^{v'}M_e^{v}.\Delta_e$.

PREUVE : Désignons par $(w.\phi, s, S)$ et par $({}^{v'}M_e^{v}.\Delta_e, \hat{l}, \hat{L})$ une limite projective naturalisée. Considérons une unité $i$ de $I^{\cdot}$ ; il existe un unique morphisme $k(i)$ vérifiant :

$$l_{\phi(i)}(y).k(i) = \hat{l}(y.\pi(i)), \text{ pour tout } y \text{ de } C.\phi(i).$$

En effet, ${}^{v'}L^{v}_{\phi(i)}$ est une limite projective naturalisée. Supposons que l'élément $\hat{i}$ de $I$ admet $i$ pour source et $i''$ pour but et que $z$ appartient à $C.\phi(i'')$. L'on a :

$$l_{\phi(i'')}(z).w\phi(\hat{i}).k(i) = l_{\phi(i)}(z.\phi(\hat{i})).k(i)$$

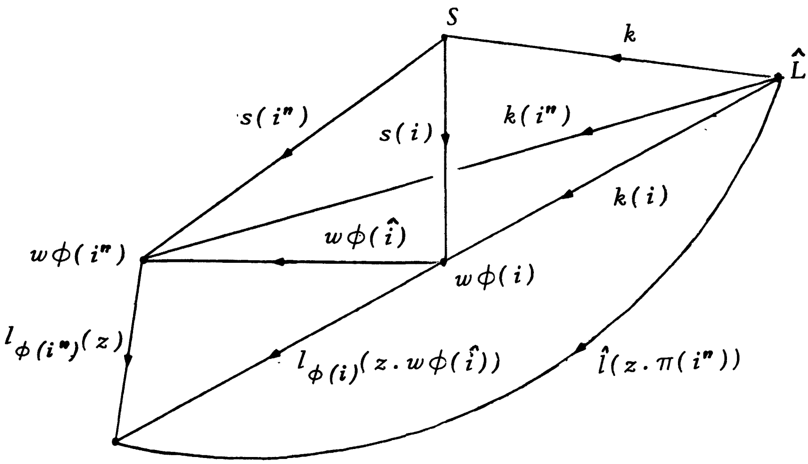
$$= \hat{l}(z\,.\,\phi(\hat{i})\,.\,\pi(i))$$
$$= \hat{l}(z\,.\,\pi(i''))= l_{\phi(i'')}(z)\,.\,k(i'').$$

La relation précédente étant vraie pour tout $z$ de $C.\phi(i'')$, on en déduit que:

$$w\phi(\hat{i})\,.\,k(i)=k(i'')\ .$$

Par suite, il existe un unique élément $k$ dans $K$ vérifiant:

$$s(i)\,.\,k=k(i)\ ,\ \text{pour tout}\ i\ \text{de}\ I'_0\,.$$




Cherchons un inverse $k'$ de $k$. Définissons une transformation naturelle $({}^{v'}M_e{}^{v}.\Delta_e, \zeta, S)$. Supposons qu'il existe une unité $i$ de $I'$ telle que $y=x.\pi(i)$; on posera $\zeta(y)=l_{\phi(i)}(x).s(i)$. Supposons que l'on ait aussi $y=x'.\pi(i')$, où $i'\in I'_0$. La condition $In(\mu)$ nous assure qu'il existe un couple de flèches $(\hat{i},\hat{i}')$ de $I$ et un élément $z$ de $C$ tels que: $x=z.\phi(\hat{i})$ et $x'=z.\phi(\hat{i}')$. Alors:

$$l_{\phi(i)}(x)\,.\,s(i)=l_{\phi(i)}(z\,.\,\phi(\hat{i}))\,.\,s(i)$$
$$=l_{\phi(i'')}(z)\,.\,w\phi(\hat{i})\,.\,s(i)$$
$$=l_{\phi(i'')}(z)\,.\,s(i'')$$
$$=l_{\phi(i'')}(z)\,.\,w\phi(\hat{i}')\,.\,s(i')$$
$$=l_{\phi(i')}(x')\,.\,s(i').$$

La définition de $\zeta(y)$ est donc acceptable. Si $\alpha(y')=\beta(y)$, l'on a:

$$\bar{\varepsilon}(v'(y'), v(\beta y)). \zeta(y) = \bar{\varepsilon}(v'(\beta y'), v(y')). \zeta(y'.y),$$

car

$$\bar{\varepsilon}(v'(y'), v(\beta y)). l_{\phi(i)}(y) = \bar{\varepsilon}(v'(\beta y'), v(y')). l_{\phi(i)}(y'.y).$$

Il nous faut définir $\zeta(e)$. Posons:

$$\theta(i) = \bar{\varepsilon}(v'\phi(i), v\pi(i)). l_{\phi(i)}(\phi(i)). s(i), \text{ pour tout } i \text{ de } I_0^{\boldsymbol{\cdot}}.$$

Calculons $\bar{\varepsilon}(v'\phi(\hat{i}), v(e)). \theta(i) =$

$$\bar{\varepsilon}(v'\phi(\hat{i}), v\pi(i)). l_{\phi(i)}(\phi(i)). s(i) =$$

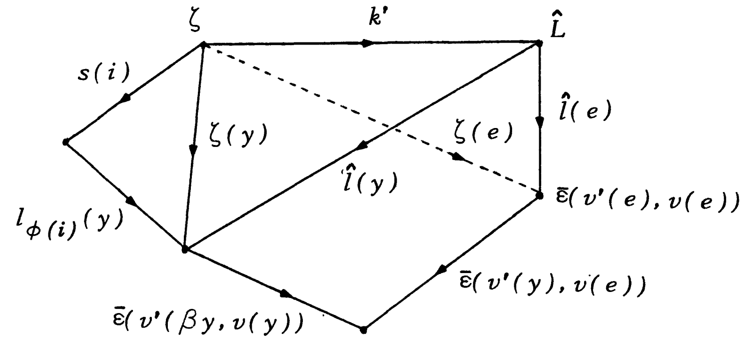
$$\bar{\varepsilon}(v'\phi(i''), v\pi(i'')). l_{\phi(i)}(\phi(\hat{i})). s(i) =$$

$$\bar{\varepsilon}(v'\phi(i''), v\pi(i'')). l_{\phi(i'')}(\phi(i'')). w\phi(\hat{i}). s(i) =$$

$$\bar{\varepsilon}(v'\phi(i''), v\pi(i'')). l_{\phi(i'')}(\phi(i'')). s(i'') = \theta(i'').$$

Comme $v'.\mu$ est une limite projective naturalisée dans $\bar{E}$, $\bar{\varepsilon}(v'.\mu, v(e))$ en est aussi une mais dans $K^{\boldsymbol{\cdot}}$. On notera $\zeta(e)$ l'unique morphisme de $K^{\boldsymbol{\cdot}}$ vérifiant: $\bar{\varepsilon}(v'\pi(i), v(e)). \zeta(e) = \theta(i)$, pour toute unité $i$ de $I^{\boldsymbol{\cdot}}$. Supposons que $y = x.\pi(i)$:

$$\begin{aligned}
\bar{\varepsilon}(v'(y), v(e)). \zeta(e) &= \bar{\varepsilon}(v'(x). v(e)). \bar{\varepsilon}(v'\pi(i), v(e)). \zeta(e) \\
&= \bar{\varepsilon}(v'(x), v(e)). \theta(i) \\
&= \bar{\varepsilon}(v'(x), v(\pi(i))). l_{\phi(i)}(\phi(i)). s(i) \\
&= \bar{\varepsilon}(v'(\beta x), v(x.\pi(i))). l_{\phi(i)}(x). s(i) \\
&= \bar{\varepsilon}(v'(\beta y), v(y)). \zeta(y).
\end{aligned}$$



$k'$ est l'unique morphisme de $K^{\cdot}$ vérifiant

$$\hat{l}(e).k' = \zeta(e), \quad \hat{l}(y).k' = \zeta(y) \text{ si } y = x.\pi(i).$$

On a les relations suivantes:

$$l_{\phi(i)}(x).s(i).k.k' = l_{\phi(i)}(x).k(i).k' =$$
$$\hat{l}(x.\pi(i)).k' = \zeta(x.\pi(i)) = l_{\phi(i)}(x).s(i).$$

On en déduit successivement

$$s(i).k.k' = s(i) \text{ et } k.k' = \alpha(k').$$

D'autre part

$$\bar{\varepsilon}(v'\pi(i), v(e)).\hat{l}(e).k'.k = \theta(i).k =$$
$$= \bar{\varepsilon}(v'\phi(i), v\pi(i)).l_{\phi(i)}(\phi(i)).s(i).k =$$
$$= \bar{\varepsilon}(v'\phi(i), v\pi(i)).l_{\phi(i)}(\phi(i)).k(i) =$$
$$= \bar{\varepsilon}(v'\phi(i), v\pi(i)).\hat{l}(\pi(i)) = \bar{\varepsilon}(v'\pi(i), v(e)).\hat{l}(e).$$

Donc $\hat{l}(e).k'.k = \hat{l}(e)$. De plus

$$\hat{l}(y).k'.k = \zeta(y).k = l_{\phi(i)}(x).s(i).k =$$
$$= l_{\phi(i)}(x).k(i) = \hat{l}(x.\pi(i)) = \hat{l}(y).$$

Par conséquent $k'.k = \alpha(k)$ et $k'$ est l'inverse de $k$. ∎

APPLICATION. On suppose que les limites projectives dans $\bar{E}$ et dans $K^{\cdot}$ coïncident, que $C^{\cdot}$ est sous-jacente à une esquisse $\mathcal{J}$-projective $\sigma$ et que l'on a la condition $In(\mu)$ pour tout cône projectif $\mu$ de $\sigma$. Il s'agit alors de trouver des conditions sur $\sigma$ afin que, pour tout sommet $e$ d'un cône projectif $\mu$ de $\sigma$, les foncteurs ${}^{v'}M_e^v$ et ${}^{v'}M_e^v.\Delta_e$ aient mêmes limites projectives. Dans ce cas, $w$ est une réalisation vague si $v'$ en est une et la catégorie des réalisations vagues $\mathcal{V}(K^{\cdot},\sigma)^{\square\square}$ de $\sigma$ dans $K^{\cdot}$ est dominée à l'aide d'une restriction de $\hat{\varepsilon}$. Ces conditions ne sont en général pas faciles à expliciter.

## III. Domination des catégories $q$-dominées

On suppose que la catégorie $C^{\cdot}$ est sous-jacente à une catégorie $q$-dominée $E = (\varepsilon, C^{\cdot})$. Désignons par $\mathfrak{N}'(\bar{E}, E)$ l'ensemble des triplets $\bar{t} = (\bar{v}', \tau, \bar{v})$ tels que $\bar{v}$ et $\bar{v}'$ soient des foncteurs $q$-dominés de $E$ vers $\bar{E}$ et que $t = (v', \tau, v)$ soit une transformation naturelle entre les foncteurs sous-jacents. Cet ensemble est muni d'une structure de catégorie $\mathfrak{N}'(\bar{E}, E)^{\square\square}$ comme suit:

> $(\bar{v}'_1, \tau_1, \bar{v}_1) \square\square (\bar{v}', \tau, \bar{v})$ est défini et égal à $(\bar{v}'_1, \tau_1\tau, \bar{v})$ si et seulement si $\bar{v}_1 = \bar{v}'$ et $\tau_1\tau(e) = \tau_1(e).\tau(e)$ pour tout $e$.

Il existe un foncteur pleinement fidèle $\Delta$ de $\mathfrak{N}'(\bar{E}, E)^{\square\square}$ vers $\mathfrak{N}(\bar{C}^{\cdot}, C^{\cdot})^{\square\square}$ qui associe $t$ à $\bar{t}$. Par suite, $\mathfrak{N}'(\bar{E}, E)^{\square\square}$ est munie d'une structure de catégorie $p$-quasi-dominée $\hat{E}' = (\hat{\varepsilon}', \mathfrak{N}'(\bar{E}, E)^{\square\square})$ et d'une structure de catégorie $q$-dominée $\mathfrak{N}'_q(\bar{E}, E) = (\nu', \mathfrak{N}'(\bar{E}, E)^{\square\square})$, où $\nu'(\bar{t}', \bar{t})$ est isomorphe à $\nu''(\bar{t}', \bar{t})$ (proposition 8). Si le foncteur $\Delta$ admet un adjoint [4] et si $\bar{E}$ est tensoriellement $q$-dominée, $\mathfrak{N}'_q(\bar{E}, E)$ est tensoriellement $q$-dominée et $\hat{E}'$ est tensoriellement $p$-quasi-dominée. Si $\bar{E}$ est une catégorie $(R, q)$-dominée, il en est de même de $\mathfrak{N}'_q(\bar{E}, E)$, noté $\mathfrak{N}'_R(\bar{E}, E)$.

Soient $\bar{t} = (\bar{v}', \tau, \bar{v})$ un élément de $\mathfrak{N}'(\bar{E}, E)$ et $\phi$ (resp. $\phi'$) la transformation naturelle définissant $\bar{v}$ (resp. $\bar{v}'$); $\phi$ appartient à l'ensemble $\bar{\varepsilon}.\, v \times v^* \square\square \mathfrak{N}(K^{\cdot}, C^{\cdot} \times C^{\cdot *}) \square\square \varepsilon$.

DEFINITION 3. On dira que $\bar{t}$ est *une transformation naturelle $q$-dominée* si la propriété suivante est réalisée:

$$(\bar{\varepsilon}.\, v' \times t^*) \square\square \phi' = (\bar{\varepsilon}.\, t \times v^*) \square\square \phi, \text{ où } t = (v', \tau, v) .$$

La relation précédente équivaut à:

$$\bar{\varepsilon}(v'(e'), \tau(e)).\bar{v}'(e', e) = \bar{\varepsilon}(\tau(e'), v(e)).\bar{v}(e', e),$$

pour tout couple $(e', e)$ d'unités de $C^{\cdot}$. Le sous-ensemble $\mathfrak{N}(\bar{E}, E)$ de $\mathfrak{N}'(\bar{E}, E)$ formé des transformations naturelles $q$-dominées définit une sous-catégorie $\mathfrak{N}(\bar{E}, E)^{\square\square}$ de $\mathfrak{N}'(\bar{E}, E)^{\square\square}$. En effet, si $\bar{t}' = (\bar{v}'', \tau', \bar{v}')$ est est une autre transformation naturelle $q$-dominée, la relation

$$\bar{\varepsilon}(\tau'(e'), v(e)) \,.\, \bar{\varepsilon}(v'(e'), \tau(e)) = \bar{\varepsilon}(\tau'(e'), \tau(e)) =$$
$$= \bar{\varepsilon}(v''(e'), \tau(e)) \,.\, \bar{\varepsilon}(\tau'(e'), v'(e))$$

assure que:

$$\bar{\varepsilon}(\tau'\tau(e'), v(e)) \,.\, \bar{v}(e', e) = \bar{\varepsilon}(v''(e'), \tau'\tau(e)) \,.\, \bar{v}''(e', e).$$

La définition précédente ne fait pas intervenir le fait que $q$ est à limites projectives. Remarquons que, si $q$ est à produits fibrés finis, la catégorie $q$-dominée $\bar{E}$ induit deux catégories $q$-dominées

$$\square\square\bar{E} = (\square\square\bar{\varepsilon}, \square\square\bar{C}^{\cdot}) \quad \text{et} \quad \boxminus\bar{E} = (\boxminus\bar{\varepsilon}, \boxminus\bar{C}^{\cdot}):$$

- $\square\square\bar{\varepsilon}(y'^{\square\square}, y^{\square\square})$ est défini comme produit fibré de $\bar{\varepsilon}(y', \alpha y)$ et de $\bar{\varepsilon}(\beta y', y)$,
- $\boxminus\bar{\varepsilon}(x'^{\boxminus}, x^{\boxminus})$ est défini comme produit fibré de $\bar{\varepsilon}(x', \alpha x)$ et de $\bar{\varepsilon}(\beta x', x)$.

Notons que $\boxminus\bar{E}$ et $\square\square\bar{E}$ sont $(R, q)$-dominées si $\bar{E}$ l'est; la démonstration est analogue à celle de la démonstration de la proposition 9. Il y a correspondance biunivoque entre les transformations naturelles $q$-dominées de $E$ vers $\bar{E}$ et les foncteurs $q$-dominés de $E$ vers $\boxminus\bar{E}$.

Nous allons donner des conditions permettant de dominer la catégorie $\mathcal{N}(\bar{E}, E)$. Notons ${}_{\bar{v}'}i_{\bar{v}}$ l'injection canonique de $\bar{v}'\square\square\mathcal{N}(\bar{E}, E)\square\square\bar{v}$ vers $\bar{v}'\square\square\mathcal{N}'(\bar{E}, E)\square\square\bar{v}$.

PROPOSITION 16. *S'il existe, pour tout couple* $(\bar{v}', \bar{v})$ *de foncteurs q-dominés de E vers* $\bar{E}$, *un q-monomorphisme* $\bar{u}(\bar{v}', \bar{v})$ *se projetant sur* ${}_{\bar{v}'}i_{\bar{v}}$ *de but* $\nu'(\bar{v}', \bar{v})$, *alors* $\mathcal{N}'_q(\bar{E}, E)$ *admet une sous-catégorie q-dominée:* $\mathcal{N}_q(\bar{E}, E) = (\nu, \mathcal{N}(\bar{E}, E)^{\square\square})$.

PREUVE. On pose $\nu(\bar{v}', \bar{v}) = \alpha(\bar{u}(\bar{v}', \bar{v}))$. Soient $\bar{t} = (\bar{v}', \tau, \bar{v})$ et $\bar{t}' = (\bar{v}''', \tau', \bar{v}'')$ deux éléments de $\mathcal{N}(\bar{E}, E)$. On a

$$Hom_{\mathcal{N}'}(\bar{t}', \bar{t}) \,.\, {}_{\bar{v}''}i_{\bar{v}'} = {}_{\bar{v}'''}i_{\bar{v}} \,.\, Hom_{\mathcal{N}}(\bar{t}', \bar{t}) \,,$$

où $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}'$ sont mis respectivement pour $\mathcal{N}(\bar{E}, E)^{\square\square}$ et $\mathcal{N}'(\bar{E}, E)^{\square\square}$ Il existe un unique sous-morphisme $\nu(\bar{t}', \bar{t})$ de $\nu'(\bar{t}', \bar{t})$ vérifiant l'égalité $q(\nu(\bar{t}', \bar{t})) = Hom_{\mathcal{N}}(\bar{t}', \bar{t})$. On détermine ainsi un sous-foncteur $\nu$ de

$$\nu' \,.\, \iota \times \iota^*, \quad \text{où} \quad \iota = (\mathcal{N}'(\bar{E}, E)^{\square\square}, \underline{\iota}, \mathcal{N}(\bar{E}, E)^{\square\square}).$$

On notera $\bar{u}$ le foncteur $q$-dominé injection de $\mathfrak{N}'_q(\bar{E}, E)$ vers $\mathfrak{N}_q(\bar{E}, E)$.

COROLLAIRE 1. *La condition de la proposition 16 est vérifiée si $q$ est fidèle.*

En effet, dans ce cas $\mathfrak{N}'(\bar{E}, E) = \mathfrak{N}(\bar{E}, E)$.

DEFINITION 4. On dira que *$q$ est à monomorphismes* si, pour toute unité $a$ de $K^{\cdot}$ et toute injection $i$ de but $\underline{q}(a)$, il existe un $q$-monomorphisme $k$ de but $a$ se projetant sur $i$. (Si $q$ est fidèle, il est à monomorphismes si et seulement si il est sous-étalant.)

COROLLAIRE 2. *Si $q$ est à monomorphismes, la condition de la proposition 16 est vérifiée.*

PROPOSITION 17. *Avec les hypothèses des propositions 11 et 16, supposons que tout $q$-monomorphisme est un $Q$-monomorphisme (notation de [3]). $\mathfrak{N}_q(\bar{E}, E)$ est une catégorie $(R, q)$-dominée, notée $\mathfrak{N}_R(\bar{E}, E)$.*

PREUVE. Avec les notations des propositions 11 et 16, on a la relation:

$$\underline{Q}(g).({}_{\bar{v}''}i_v, \times_{\bar{v}'}i_v) = {}_{\bar{v}''}i_{\bar{v}}.h,$$

où $h$ est une restriction de la loi de composition de $\mathfrak{N}(\bar{E}, E)^{\square\square}$. Il existe par suite un unique $(R, q)$-multimorphisme $g'$ tel que

$$\bar{u}(\bar{v}'', \bar{v}).g' = g.(\bar{u}(\bar{v}'', \bar{v}'), \bar{u}(\bar{v}', \bar{v})). \quad \blacksquare$$

COROLLAIRE. *La condition de la proposition 17 est vérifiée si les projections dans $\mathfrak{M}$ des $(R, q)$-produits tensoriels naturalisés sont des surjections.* (C'est en particulier le cas s'il s'agit de catégories fortement $q$-dominées.)

Afin de donner d'autres conditions permettant de dominer la catégorie $\mathfrak{N}(\bar{E}, E)^{\square\square}$, nous aurons besoin du lemme qui suit:

Soient $I^{\cdot}$ une sous-catégorie d'une catégorie $\bar{I}^{\cdot} \in \mathfrak{F}_0$, vérifiant $\beta(\bar{I}.I_0^{\cdot}) = \bar{I}_0^{\cdot}$, et $\bar{I}*I_0^{\cdot}$ l'ensemble des couples $(i', i)$ de $\bar{I}.I_0^{\cdot}$ de même but. Considérons trois foncteurs $\bar{p}$, $F$, $\bar{F}$ vérifiant $\bar{p}.F = \bar{F}.(\bar{I}^{\cdot}, \underline{\iota}, I^{\cdot})$. Posons $\alpha(\bar{p}) = \bar{H}^{\cdot}$ et $\beta(\bar{p}) = \bar{K}^{\cdot}$.

DEFINITION. On appellera *limite projective naturalisée de $(\bar{F}, F)$ dans*

$\bar{p}$ une transformation naturelle $\psi = (F, s, a)$ de source un foncteur constant, telle que:

a) $\bar{F}(i).\bar{p}(s(\alpha i)) = \bar{F}(i').\bar{p}(s(\alpha i'))$, pour tout $(i, i')$ de $\bar{I} * I^{\bullet}_{0}$,

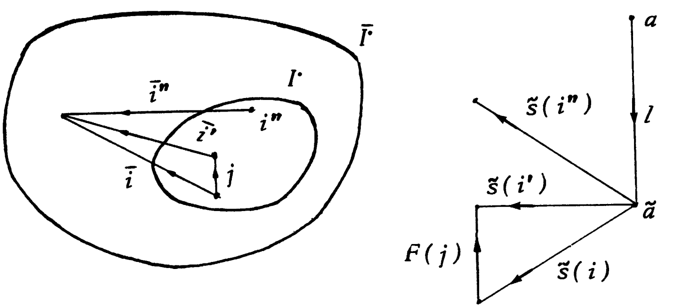
b) si $\psi' = (F, s', a')$ est une autre transformation naturelle de source un foncteur constant et qui vérifie

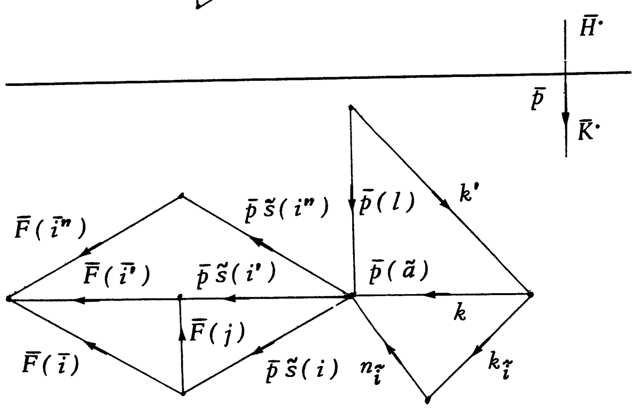
$$\bar{F}(i).\bar{p}(s'(\alpha i)) = \bar{F}(i').\bar{p}(s'(\alpha j')),$$

pour tout $(i, i')$ de $\bar{I} * I^{\bullet}_{0}$, il existe une unique transformation naturelle, constante sur $h$, telle que $\psi \square\square h = \psi'$.

Les quasi-injections *, introduites par E. Burroni, permettent de donner une condition d'existence:

LEMME. *Si $\bar{p}$ est à quasi-injections et si $\bar{H}^{\bullet}$ et $\bar{K}^{\bullet}$ sont à limites projectives, le couple $(\bar{F}, F)$ admet une limite projective naturalisée dans $\bar{p}$.*




*) $l$ est une $\bar{p}$-quasi-injection définie par $(l, k, \alpha k, k')$ si: 1° $\bar{p}(l) = k.k'$; 2° supposons que $l' \in \beta(h').\bar{H}$ et $\bar{p}(l') = k.k''$; il existe alors un unique $h$ tel que

$$l.h = l' \quad \text{et} \quad k'.p(h) = k''.$$

PREUVE. Soit $\tilde{\psi} = (F, \tilde{s}, \tilde{a})$ une limite projective naturalisée dans $\bar{H}^{\bullet}$. Pour tout élément $\tilde{i} = (i, i')$ de $\bar{I} * I_0^{\bullet}$, il existe un noyau $n_{\tilde{i}}$ du couple

$$(\bar{F}(i).\bar{p}(\tilde{s}(\alpha i)),\ \bar{F}(i').\bar{p}(\tilde{s}(\alpha i'))).$$

Il existe aussi un produit fibré naturalisé $(n_{\tilde{i}}, k_{\tilde{i}})_{\tilde{i} \in \bar{I} * I_0^{\bullet}}$. Posons $k = n_{\tilde{i}}.k_{\tilde{i}}$ et désignons par $l$ une $\bar{p}$-quasi-injection associée à $k$ et définie par le quadruplet $(l, k, \alpha k, k')$. Si $s(i) = \tilde{s}(i).l$, pour tout $i$ de $I_0^{\bullet}$, on a une transformation naturelle $\psi = (F, s, a)$, où $a = \alpha l$. Supposons que $\psi' = (F, s', a')$ vérifie la condition b de la définition. Posons $f = lim_{\tilde{\psi}} \psi'$. Pour tout $\tilde{i}$ de $\bar{I} * I_0^{\bullet}$, il existe un unique $m_{\tilde{i}}$ vérifiant $n_{\tilde{i}}.m_{\tilde{i}} = \bar{p}(f)$. Par suite, il existe un unique élément $m$ de $K$ tel que $k_{\tilde{i}}.'m = m_{\tilde{i}}$, pour tout $\tilde{i}$ de $I * I^{\bullet}$. Ainsi $\bar{p}(f) = k.m$ et il existe un unique $h$ vérifiant:

$$l.h = f \quad \text{et} \quad k'.p(h) = m. \quad \text{Donc} \quad \psi \boxminus h = \psi'.$$

L'unicité de $h$ se déduit du fait que $f$ est un monomorphisme, car $k$ en est un, puisque les $n_{i}$ en sont. ■

REMARQUES. 1° Les conditions: «$\bar{p}$ admet un coadjoint et $\bar{H}^{\bullet}$ est à produits fibrés finis» assurent que $\bar{p}$ est à quasi-injections.

2° Si $q$ est à atomes, $q$ est compatible avec les monomorphismes. Par suite, si $\bar{H}^{\bullet} = \bar{K}^{\bullet} = K^{\bullet}$, alors $q(l)$ est une injection.

PROPOSITION 18. *Supposons que $q$ est à atomes et qu'il existe un foncteur $(R, q)$-produit tensoriel associatif $\otimes$ vérifiant la condition: Pour toute unité $a$ de $K^{\bullet}$, le foncteur $-\otimes a$ de $K^{\bullet}$ dans $K^{\bullet}$ est à quasi-injections. Si $E$ est une catégorie $(R, q)$-dominée, il existe un foncteur $(R, q)$-dominé $\bar{u}$ injectif de $(\nu, \mathcal{N}(\bar{E}, E)^{\boxminus}) = \mathcal{N}_R(\bar{E}, E)$ vers $\mathcal{N}'_R(\bar{E}, E)$.*

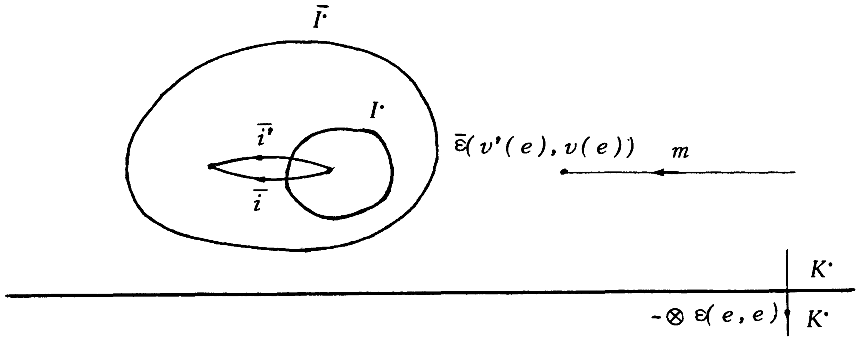
PREUVE. Soient $\bar{v}'$ et $\bar{v}$ deux foncteurs $(R, q)$-dominés de $E$ vers $\bar{E}$. Nous allons définir $\nu(\bar{v}', \bar{v})$ comme limite projective d'un foncteur $_{\bar{v}'}M_{\bar{v}} = (K^{\bullet}, \underline{M}, J^{\bullet})$.

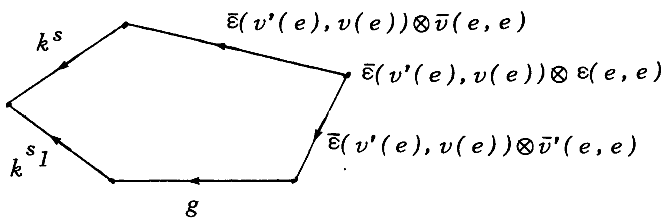
- L'ensemble sous-jacent à la catégorie $J^{\bullet}$ est formé des unités de $C^{\bullet}$, des couples d'unités de $C^{\bullet}$ et des triplets $(e'', e', e)$ d'unités de $C^{\bullet}$ de la forme $e'' = e'$ ou $e'' = e$. De plus,

$$\alpha(e', e', e) = \alpha(e, e', e) = (e', e),$$

$$\beta(e', e', e) = e' \quad \text{et} \quad \beta(e, e', e) = e.$$

- Définition de $\underline{M}((e,e,e)) = m$. Désignons par $(k^s)_{s \in \Sigma}$ la famille de morphismes de $K^{\cdot}$ associée à $\bar{E}$ et par $g$ l'isomorphisme canonique de $\bar{\varepsilon}(v'(e), v(e)) \otimes \bar{\varepsilon}(v'(e), v'(e))$ vers $\bar{\varepsilon}(v'(e), v'(e)) \otimes \bar{\varepsilon}(v'(e), v(e))$.




On posera

$$s = (v'(e), v(e), v(e)), \quad s_1 = (v'(e), v'(e), v(e)),$$

$$l = k^s.(\bar{\varepsilon}(v'(e), v(e)) \otimes \bar{v}(e,e)),$$

$$l_1 = k^{s_1}.g.(\bar{\varepsilon}(v'(e), v(e)) \otimes \bar{v}'(e,e)).$$

D'après le lemme, il existe un monomorphisme $m$ dans $\bar{\varepsilon}(v'(e), v(e)).K^{\cdot}$ vérifiant l'égalité:

$$l.(m \otimes \bar{\varepsilon}(e,e)) = l_1.(m \otimes \bar{\varepsilon}(e,e)).$$

De plus, $m$ est universel pour cette propriété, ce qui revient à dire qu'il est universel pour les relations suivantes: ①

a) $\bar{\varepsilon}(v'(e), v(x)).m = \bar{\varepsilon}(v'(x), v(e)).m$, pour tout $x$ de $e.C.e$.

b) $\bar{\varepsilon}(y, v(e)).\bar{v}(e,e) = \bar{\varepsilon}(v'(e), y).\bar{v}'(e,e)$, pour tout $\sigma$ de

$\alpha(q(m))$, avec $y = q(m)(\sigma)$.

D'après la remarque suivant le lemme, $q(m)$ est une injection. Désignons par $\hat{a}$ un objet final de $K^{\cdot}$. Soit $z$ un élément de $v'(e).\bar{C}.v(e)$ vérifiant la condition b ci-dessus. Désignons par $\tilde{m}$ le morphisme de source $\hat{a}$, de but $\bar{\varepsilon}(v'(e), v(e))$ et projeté par $q$ sur l'application constante d'image $z$. Alors

$$l.(\tilde{m} \otimes \varepsilon(e,e)) = l_1.(\tilde{m} \otimes \varepsilon(e,e)),$$

car $\bar{\varepsilon}(v'(e), v(x)).\tilde{m}$ et $\bar{\varepsilon}(v'(x), v(e)).\tilde{m}$ ont même source, même but et se projettent sur l'application constante d'image $z.v(x) = v'(x).z$, avec $x \in e.C.e$. Par suite, il existe un morphisme $\tilde{m}'$ vérifiant $m.\tilde{m}' = \tilde{m}$, de sorte que l'image de $q(m)$ est formée des éléments $z$ de $v'(e).\bar{C}.v(e)$ vérifiant b. Comme $q$ est saturé, on peut supposer que $q(m)$ est une injection canonique. En particulier, si $\bar{v}' = \bar{v}$, l'unité $v(e)$ appartient à $\alpha(q(m))$.

- Définition de $\underline{M}((e,e',e)) = \rho_2.\bar{m}$ et de $\underline{M}((e',e',e)) = \rho_1.\bar{m}$, où $e \neq e'$. On désigne par $\bar{g}$ l'isomorphisme canonique de

$\bar{\varepsilon}(v'(e), v(e)) \otimes \bar{\varepsilon}(v'(e'), v'(e))$ vers $\bar{\varepsilon}(v'(e'), v'(e')) \otimes \bar{\varepsilon}(v'(e), v(e))$

et par $((\rho_1, \rho_2), b)$ un produit naturalisé de

$$(\bar{\varepsilon}(v'(e'), v(e')), \bar{\varepsilon}(v'(e), v(e))),$$

appliqué par $q$ sur un produit canonique. Posons

$$\bar{s} = (v'(e'), v(e'), v(e)), \quad \bar{s}_1 = (v'(e'), v'(e), v(e)),$$

$$\bar{l} = k^{\bar{s}}.(\bar{\varepsilon}(v'(e'), v(e')) \otimes \bar{v}(e', e)),$$

$$\bar{l}_1 = k^{\bar{s}_1}.\bar{g}.(\bar{\varepsilon}(v'(e), v(e)) \otimes \bar{v}'(e', e)).$$

D'après le lemme, il existe un monomorphisme $\bar{m}$ dans $b.K$ vérifiant:

$$\bar{l}.((\rho_2.\bar{m}) \otimes \varepsilon(e', e)) = \bar{l}_1.((\rho_1.\bar{m}) \otimes \varepsilon(e', e))$$

et universel pour cette propriété. La relation précédente peut être remplacée par les deux suivantes: ②

a) $\quad \bar{\varepsilon}(v'(e'), v(x)).\rho_2.\bar{m} = \bar{\varepsilon}(v'(x), v(e)).\rho_1.\bar{m},$

pour tout $x$ de $e'.C.e$.

b) $$\bar{\varepsilon}(y_2, v(e)).\bar{v}(e', e) = \bar{\varepsilon}(v'(e'), y_1).\bar{v}'(e', e),$$

pour tout $\bar{\sigma}$ de $\alpha(q(\bar{m}))$, avec

$$y_2 = q(\rho_2.\bar{m})(\bar{\sigma}) \quad \text{et} \quad y_1 = q(\rho_1.\bar{m})(\bar{\sigma}).$$

Remarquons que $q(\bar{m})$ est une injection, que l'on supposera canonique. Soit $(z_1, z_2)$ un élément de $q(b)$ vérifiant la condition b ci-dessus et $\hat{m}$ le morphisme constant de source $a$, de but $b$ et d'image $\{(z_1, z_2)\}$. Comme $q$ est à atomes,

$$l.((\rho_2.\hat{m})\otimes \varepsilon(e', e)) = l_1.((\rho_1.\hat{m})\otimes \varepsilon(e', e)),$$

car, pour tout $x$ de $e'.C.e$, l'on a $z_2.v(x) = v'(x).z_1$. Par suite, il existe un unique $\hat{m}'$ vérifiant $\bar{m}.\hat{m}' = \hat{m}$ et l'image de $q(\bar{m})$ est formée des couples $(z_1, z_2)$ vérifiant b.

Le foncteur $q.{}_{\bar{v}'}M_{\bar{v}}$ admet dans $\mathfrak{M}$ une limite projective formée des familles $(\sigma(e))_{e\in C_0}$ vérifiant:

$$v'(x).\sigma(\alpha x) = \sigma(\beta x).v(x) \text{ , pour tout } x \text{ de } C,$$

$$\bar{\varepsilon}(\sigma(e'), v(e)).\bar{v}(e', e) = \bar{\varepsilon}(v'(e'), \sigma(e)).\bar{v}'(e', e).$$

Ainsi l'ensemble $\bar{v}' \square\mathfrak{N}(\bar{E}, E)\square \bar{v}$ en est aussi une limite projective; soit donc ${}_{\bar{v}'}D_{\bar{v}} = ({}_{\bar{v}'}M_{\bar{v}}, d, \nu(\bar{v}', \bar{v}))$ une limite projective naturalisée dans $q$ vérifiant:

$$q(\nu(\bar{v}', \bar{v})) = \bar{v}' \square\mathfrak{N}(\bar{E}, E)\square \bar{v},$$

$$q(d((e', e)))(t) = (\tau(e'), \tau(e)), \text{ si } e \neq e',$$

$$q(d((e, e)))(t) = \tau(e), \text{ où } t = (\bar{v}', \tau, \bar{v}).$$

On a obtenu une structure de graphe orienté $q$-dominé; montrons qu'elle s'étend en une structure de catégorie $(R, q)$-dominée. Pour simplifier les notations, nous supposerons que les isomorphismes d'associativité du produit tensoriel sont des unités.

Considérons un troisième foncteur $(R, q)$-dominé $\bar{v}''$ de $E$ vers $\bar{E}$ et posons:

$${}_{\bar{v}''}D_{\bar{v}} = (M'', d'', a'') = D'' \quad \text{et} \quad {}_{\bar{v}''}D_{\bar{v}'} = (M', d', a').$$

Mettons des indices ' et " aux éléments définissant $M$ pour indiquer qu'il s'agit d'éléments correspondants définissant $M'$ et $M''$. Si

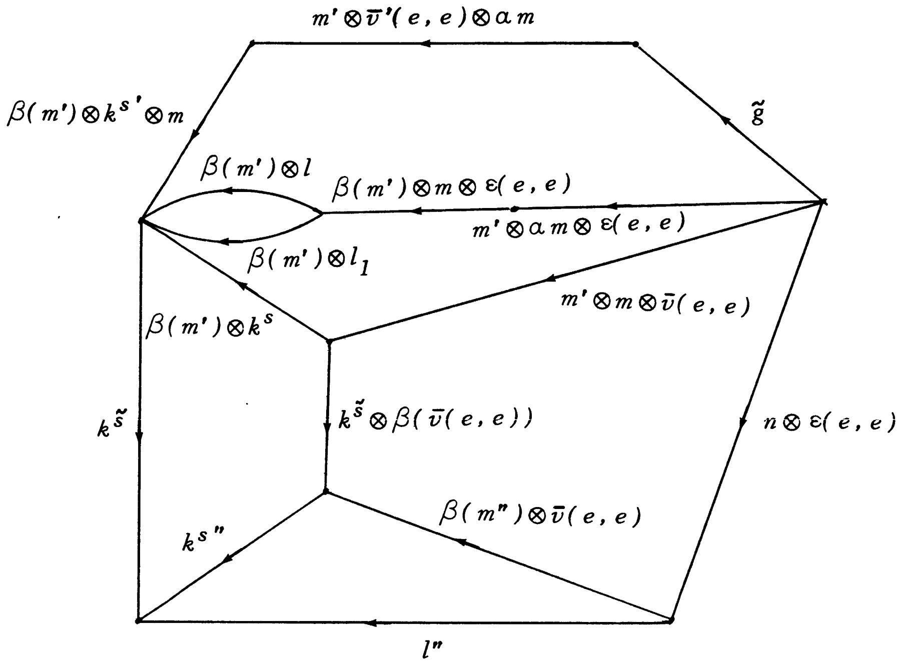
$$\tilde{s} = (v''(e), v'(e), v(e)) \quad \text{et si} \quad n = k^{\tilde{s}}.(m' \otimes m),$$

montrons que

$$l''.(n \otimes \varepsilon(e,e)) = l''_1.(n \otimes \varepsilon(e,e)).$$

En effet, la relation

$$k^{\tilde{s}}.(k^{s'} \otimes \bar{\varepsilon}(v'(e), v(e))) = k^{\tilde{s}}.(\bar{\varepsilon}(v''(e), v'(e)) \otimes k^{s1})$$




entraîne ③

$$k^{\tilde{s}}.((k^{s'}.(m' \otimes \bar{v}'(e,e))) \otimes m).\tilde{g} = k^{\tilde{s}}.(m' \otimes (k^{s1}.(\bar{v}'(e,e) \otimes m))).\tilde{g},$$

où $\tilde{g}$ est l'isomorphisme de

$$\alpha(m') \otimes \alpha(m) \otimes \varepsilon(e,e) \quad \text{vers} \quad \alpha(m') \otimes \varepsilon(e,e) \otimes \alpha(m).$$

Le deuxième membre de ③ est égal à:

$$k^{\tilde{s}}.(\bar{\varepsilon}(v''(e), v'(e)) \otimes (k^{s1}.g.(m \otimes \bar{v}'(e,e))).(m' \otimes \alpha(m) \otimes \varepsilon(e,e))$$

$$= k^{\tilde{s}}.(\bar{\varepsilon}(v''(e), v'(e)) \otimes (k^{s}.(m \otimes \bar{v}(e,e))).(m' \otimes \alpha(m) \otimes \varepsilon(e,e)) =$$

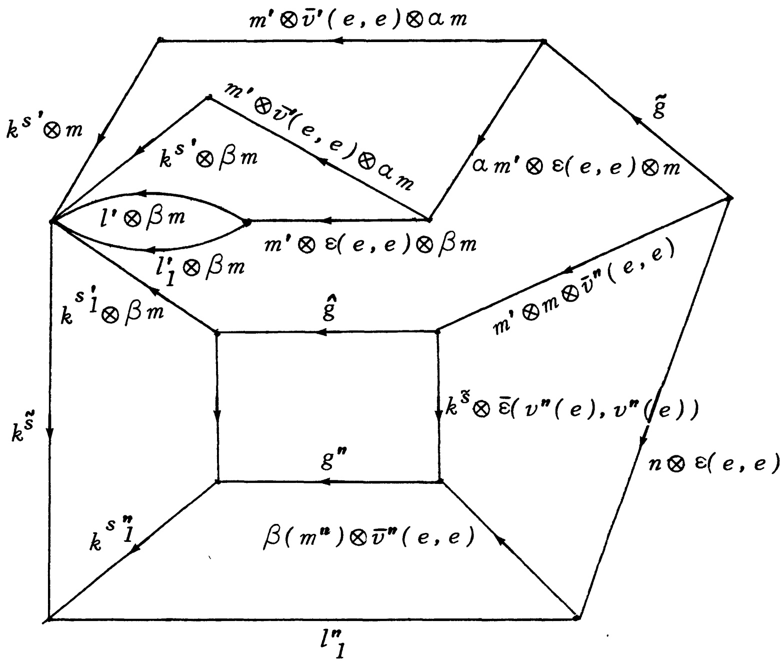
$$= k^{\tilde{s}}.(\bar{\varepsilon}(v''(e),v'(e))\otimes k^{s}).(m'\otimes m\otimes \bar{v}(e,e)) =$$

$$= k^{s''}.(k^{\tilde{s}}\otimes \bar{\varepsilon}(v'(e),v(e))).(m'\otimes m\otimes \bar{v}(e,e)) =$$

$$= k^{s''}.(\bar{\varepsilon}(v''(e),v(e))\otimes \bar{v}(e,e)).((k^{\tilde{s}}.(m'\otimes m))\otimes \varepsilon(e,e)) =$$

$$= l''.((k^{\tilde{s}}.(m'\otimes m))\otimes \varepsilon(e,e)) = l''.(n\otimes \varepsilon(e,e)),$$

tandis que son premier membre vaut




$$k^{\tilde{s}}.(k^{s'}\otimes \bar{\varepsilon}(v'(e),v(e))).(m'\otimes \bar{v}'(e,e)\otimes m).\tilde{g} =$$

$$k^{\tilde{s}}.(k^{s'_1}\otimes \bar{\varepsilon}(v'(e),v(e))).(g'\otimes \bar{\varepsilon}(v'(e),v(e))).(m'\otimes \bar{v}''(e,e)\otimes m).\tilde{g} =$$

$$k^{\tilde{s}}.(k^{s'_1}\otimes \bar{\varepsilon}(v'(e),v(e))).\hat{g}.(m'\otimes m\otimes \bar{v}''(e,e)) =$$

$$k^{s''_1}.(\bar{\varepsilon}(v''(e),v''(e))\otimes k^{\tilde{s}}).\hat{g}.(m'\otimes m\otimes \bar{v}''(e,e)) =$$

$$k^{s''_1}.g''.(k^{\tilde{s}}\otimes \bar{\varepsilon}(v''(e),v(e))).(m'\otimes m\otimes \bar{v}''(e,e)) =$$

$$k^{s''_1}.g''.(\bar{\varepsilon}(v''(e),v(e))\otimes \bar{v}''(e,e)).((k^{\tilde{s}}.(m'\otimes m))\otimes \varepsilon(e,e)) =$$

$$l''_1.(n\otimes \varepsilon(e,e)),$$

où $\hat{g}$ est l'isomorphisme canonique de

$\alpha(m')\otimes\alpha(m)\otimes\bar{\varepsilon}(v''(e),v''(e))$ vers $\bar{\varepsilon}(v''(e),v''(e))\otimes\alpha(m')\otimes\alpha(m)$.
Il existe, par suite, un unique élément $n(e,e)$ vérifiant:

$$m''.n(e,e)=k^{\tilde{s}}.(m'\otimes m)=n.$$

Considérons une unité $e'$ de $C^{\cdot}$ différente de $e$ et usons des mêmes conventions de notations; par une démonstration analogue, on montre que

$$\bar{l}''.((\rho_2''.\bar{n})\otimes\varepsilon(e',e))=\bar{l}_1''.((\rho_1''.\bar{n})\otimes\varepsilon(e',e)),$$

où

$$\bar{n}=(k^{\tilde{s}'}\otimes k^{\tilde{s}}).[\rho_2'\otimes\rho_2,\rho_1'\otimes\rho_1].(\bar{m}'\otimes\bar{m})$$

et où $\tilde{s}'=(v''(e'),v'(e'),v(e'))$. Il existe donc un unique $n(e',e)$ dans $K$ vérifiant $\bar{m}''.n(e',e)=\bar{n}$. Désignons par $f$ le $(R,q)$-produit tensoriel naturalisé de source $(a',a)$ et posons:

$$\sigma(e)=k^{\tilde{s}}.(d'(e)\otimes d(e)).f,$$
$$\sigma(e',e)=n(e',e).(d'((e',e))\otimes d((e',e))).f.$$

Le triplet $S=(M'',\sigma,(a',a))$ est une transformation naturelle dont la source est un foncteur constant. Il existe un $(R,q)$-multimorphisme $\kappa=Lim_{D''}S$, car $D''$ est aussi une limite projective naturalisée de $T(R)$ (voir [3]). La projection dans $\mathfrak{M}$ de $\kappa$ est une restriction de la loi de composition de $\mathfrak{N}(\bar{E},E)^{\square\square}$. De ceci on déduit facilement que $(\nu,\mathfrak{N}(\bar{E},E)^{\square\square})$ est une catégorie $(R,q)$-dominée, où $\nu$ est prolongé en un foncteur à l'aide des limites définies plus haut.

Soit $O=({}^{\bar{v}'}N^{\bar{v}},o,\nu'(\bar{v}',\bar{v}))$ la limite projective définissant (proposition 9) $\nu'(\bar{v}',\bar{v})$ et $\nu''(\bar{v}',\bar{v})$. Posons

$$\bar{o}((e,e))=M((e,e,e)).d((e,e)),\ \text{si}\ e\in C_0^{\cdot},$$
$$\bar{o}((y,y))=\bar{\varepsilon}(v'(y),v(e)).M((e,e',e)).d((e',e)),\ \text{si}\ y\in C,$$
$$\alpha(y)=e\ \text{et}\ \beta(y)=e'.$$

La relation

$$\bar{o}((y,y))=\bar{\varepsilon}(v'(y),v(e)).\bar{o}((e,e))=$$
$$=\bar{\varepsilon}(v'(e'),v(y)).M((e',e',e)).d((e',e))$$

résulte de la relation ② a. Ainsi $\bar{O}=({}^{\bar{v}'}N^{\bar{v}},\bar{o},\nu(\bar{v}',\bar{v}))$ est une transformation naturelle dont la source est un foncteur constant, et $\bar{u}(\bar{v}',\bar{v})=$

$Lim_O \bar{O}$ détermine un foncteur $(R, q)$-dominé

$$\bar{u} \text{ de } \mathcal{N}_R(\bar{E}, E) \text{ vers } \mathcal{N}'_R(\bar{E}, E). \quad \blacksquare$$

REMARQUE. Supposons que $\otimes$ est aussi le foncteur produit tensoriel (son unité est notée ici $a_0$ ) d'une catégorie monoïdale fermée et que $q$ est son foncteur d'oubli vers $\mathcal{M}$. Les conditions de la proposition 18 sont vérifiées si on a la propriété suivante:

Pour tout couple $(a', a)$ d'unités de $K^{\cdot}$ et tout morphisme $k'$ de source $a_0$ et de but $a'$, il existe $k \in K$ tel que $k.K.a_0 \subset \{k'\}$ et $\alpha(k) = a$. En effet, $\cdot \otimes a$ est alors à quasi-injections, car $\cdot \otimes a$ admet un coadjoint, $K^{\cdot}$ est à produits fibrés finis; de plus $q$ est à atomes grâce à la propriété ci-dessus.

PROPOSITION 19. *Le foncteur $(R, q)$-dominé $\bar{u}$ est un $p_{(R,\mathcal{F})}$-monomorphisme, où $p_{(R,\mathcal{F})}$ est le foncteur d'oubli usuel vers $\mathcal{M}$ de la catégorie ${}^R\mathcal{F}$.*

PREUVE. Soit $w'$ un foncteur $(R, q)$-dominé de $\check{E} = (\mathcal{E}, \check{C}^{\cdot})$ vers $\mathcal{N}'_R(\bar{E}, E)$ tel que $w'(\check{C})$ soit contenu dans $\mathcal{N}(\bar{E}, E)$. Considérons deux unités $\check{e}'$ et $\check{e}$ de $\check{C}^{\cdot}$ et posons $w'(\check{e}') = \bar{v}'$, $w'(\check{e}) = \bar{v}$. Si $\check{z}$ est un élément de $\check{e}'.\check{C}.\check{e}$, si $w'(z) = (\bar{v}', \tau, \bar{v})$ et si $(e', e)$ est un couple d'unités de $C^{\cdot}$, l'on a

$$\bar{\varepsilon}(\tau(e'), v(e)).\bar{v}(e', e) = \bar{\varepsilon}(v'(e), \tau(e)).\bar{v}'(e', e),$$

vu l'hypothèse faite sur $w'$. On en déduit que $o((e, e)).\bar{w}'(\check{e}', \check{e})$ vérifie les équations ①; de même, le morphisme

$$\check{m} = [\, o((e', e')).\bar{w}'(\check{e}', \check{e}),\ o((e, e)).\bar{w}'(\check{e}', \check{e})\,]$$

vérifie les équations ②. Il existe donc un unique $\rho(e, e)$ (resp. $\rho(e', e)$) tel que

$$m.\rho(e, e) = o((e, e)).\bar{w}'(\check{e}', \check{e}) \text{ (resp. } \bar{m}.\rho(e', e) = \check{m}\text{)}.$$

On définit ainsi une transformation naturelle $(\bar{}_v, M_{\bar{v}}, \rho, \check{\varepsilon}(\check{e}', \check{e}))$, qui admet une limite $\bar{w}(\check{e}', \check{e})$ relativement à $\bar{}_v, D_{\bar{v}}$. Ceci permet de déterminer un foncteur $(R, q)$-dominé $\bar{w}$ de $\check{E}$ vers $\mathcal{N}_R(\bar{E}, E)$ tel que $\bar{u}.\bar{w} = \bar{w}'$. De plus, cette détermination a été faite de façon unique. $\blacksquare$

REMARQUE. Si les hypothèses des propositions 17 et 18 sont vérifiées, les deux structures de catégorie $(R, q)$-dominée définies sur $\mathfrak{N}(\bar{E}, E)^{\square\square}$ sont isomorphes, car on obtient des $p_{(R,\mathfrak{F})}$-monomorphismes. Ceci justifie l'utilisation d'une même notation pour ces deux structures.

Soit $t^R$ le foncteur de la catégorie des foncteurs $(R, q)$-dominés ${}^R\mathfrak{F}$ vers $\mathfrak{M}$, qui associe à un foncteur $\bar{v}$ sa restriction $v_0$ aux unités.

PROPOSITION 20. *a) La catégorie ${}^R\mathfrak{F}$ est munie d'une structure de catégorie $t^R$-dominée $(\mathfrak{N}'_R, {}^R\mathfrak{F}) = \mathcal{E}'$.*

*b) Avec les hypothèses des propositions 17 ou 18, elle est munie d'une seconde telle structure, $(\mathfrak{N}_R, {}^R\mathfrak{F}) = \mathcal{E}$.*

PREUVE. Soient $\bar{w}$ et $\bar{w}'$ deux foncteurs $(R, q)$-dominés de sources respectives $E_1$ et $\bar{E}$, de buts $E$ et $\bar{E}_1$. Il existe un foncteur $\mathfrak{N}'(\bar{w}', \bar{w})$ de $\mathfrak{N}'(\bar{E}, E)^{\square\square}$ vers $\mathfrak{N}'(\bar{E}_1, E_1)^{\square\square}$ qui, à $\bar{t} = (\bar{v}', \tau, \bar{v})$, associe

$$\bar{t}' = (\bar{w}'.\bar{v}'.\bar{w}, \tau_1, \bar{w}'.\bar{v}.\bar{w}), \text{ où } \tau_1(e_1) = w'(\tau(w(e_1))).$$

Il admet un sous-foncteur $\mathfrak{N}(\bar{w}', \bar{w})$ de source $\mathfrak{N}(\bar{E}, E)^{\square\square}$ et dont le but est $\mathfrak{N}(\bar{E}_1, E_1)^{\square\square}$. En effet, si $\bar{t}$ est une transformation naturelle $q$-dominée, si $(e'_1, e_1)$ est un couple d'unités de $E_1$, si $w \times w(e'_1, e_1) = (e', e)$ et si $\bar{E}_1 = (\bar{\varepsilon}_1, \bar{C}_1)$, l'on a:

$$\begin{aligned}
&\bar{\varepsilon}_1(w'.v'(e'), w'(\tau(e))).(\bar{w}'.\bar{v}'.\bar{w})(e'_1, e_1) = \\
&\bar{w}'(v'(e'), v(e)).\ \bar{\varepsilon}(v'(e'), \tau(e)).(\bar{v}'.\bar{w})(e'_1, e_1) = \\
&\bar{w}'(v'(e'), v(e)).\ \bar{\varepsilon}(\tau(e'), v(e)).(\bar{v}.\bar{w})(e'_1, e_1) = \\
&\bar{\varepsilon}_1(w'(\tau(e')), w'.v'(e)).(\bar{w}'.\bar{v}.\bar{w})(e'_1, e_1).
\end{aligned}$$

Posons $\mathfrak{N}'_R(\bar{E}_1, E_1) = (\nu'_1, \mathfrak{N}'(\bar{E}_1, E_1)^{\square\square})$ et désignons par $O_1 = (N_1, o_1, a_1)$ la limite projective naturalisée définissant

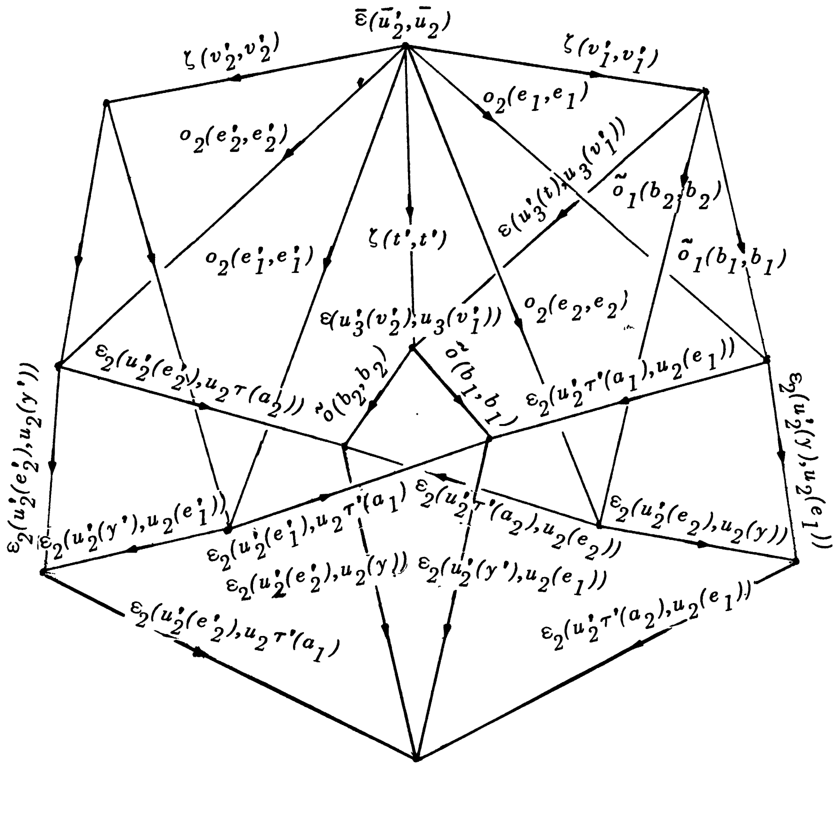
$$\nu'_1(\bar{w}'.\bar{v}'.\bar{w},\ \bar{w}'.\bar{v}.\bar{w})$$

et par $O = (N, o, a)$ celle définissant $\nu'(\bar{v}', \bar{v})$. On définit une transformation naturelle $\tilde{O} = (N_1, \tilde{o}, a)$ en posant

$$\begin{aligned}
&\tilde{o}(e_1, e_1) = \bar{w}'(v'(e), v(e)).o((e, e)), \text{ où } e_1 \in (C_1)_0 \text{ et } e = w(e_1), \\
&\tilde{o}(y_1, y_1) = \bar{w}'(v'(e'), v(e)).o((y, y)), \text{ où } y_1 \in C_1, \\
&\qquad y = w(y_1), \quad \alpha(y) = e \text{ et } \beta(y) = e'.
\end{aligned}$$

Le morphisme $\bar{V}(v', v) = Lim_{O_1}\tilde{O}$ permet d'assurer qu'il existe un foncteur $q$-dominé $\bar{V}$ de $\mathfrak{N}'_R(\bar{E}, E)$ vers $\mathfrak{N}'_R(\bar{E}_1, E_1)$ ayant $\mathfrak{N}'(\bar{w}', \bar{w})$ pour foncteur sous-jacent. On posera $\bar{V} = \mathfrak{N}'_R(\bar{w}', \bar{w})$. On a ainsi défini un foncteur $\mathfrak{N}'_R$ de $({}^R\mathcal{F}) \times ({}^R\mathcal{F})^*$ vers ${}^R\mathcal{F}$ dont le composé par ${}^Rt$ est le foncteur *Hom* de ${}^R\mathcal{F}$.

Si les conditions des propositions 17 ou 18 sont vérifiées, on peut définir une transformation naturelle $(\mathfrak{N}'_R, \bar{u}, \mathfrak{N}_R)$, où $\bar{u}(\bar{E}, E)$ est le $p_{(R,\mathcal{F})}$-monomorphisme de $\mathfrak{N}_R(\bar{E}, E)$ vers $\mathfrak{N}'_R(\bar{E}, E)$ défini dans ces mêmes propositions. De plus $t^R . \mathfrak{N}'_R = t^R . \mathfrak{N}_R$. ∎



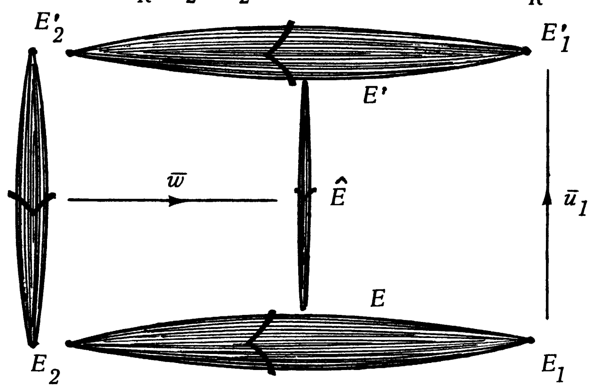

PROPOSITION 21. *$\mathcal{E}' = (\mathfrak{N}'_R, {}^R\mathcal{F})$ est muni d'une structure de catégorie hyperdominée $(\Omega', \mathcal{E}')$.*

PREUVE. Considérons quatre catégories $(R, q)$-dominées

$$E'_1 = (\varepsilon'_1, C'^{\cdot}_1), \; E'_2 = (\varepsilon'_2, C'^{\cdot}_2), \; E_1 = (\varepsilon_1, C^{\cdot}_1), \; E_2 = (\varepsilon_2, C^{\cdot}_2),$$

et un foncteur $(R, q)$-dominé $\bar{u}_1$ de $E_1$ vers $E'_1$. Posons

$$E' = (\varepsilon', C'^{\cdot}) = \mathfrak{N}'_R(E'_2, E'_1), \quad E = (\varepsilon, C^{\cdot}) = \mathfrak{N}'_R(E_2, E_1),$$
$$\bar{E} = (\bar{\varepsilon}, \bar{C}^{\cdot}) = \mathfrak{N}'_R(E_2, E'_2), \quad \hat{E} = (\hat{\varepsilon}, \hat{C}^{\cdot}) = \mathfrak{N}'_R(E, E').$$




Soit $\bar{u}_2$ un foncteur $(R, q)$-dominé de source $E'_2$ et de but $E_2$. Il existe un foncteur $\underline{w}(\bar{u}_2)$ de $C'^{\cdot}$ vers $C^{\cdot}$ qui, à $t' = (\bar{v}'_2, \tau', \bar{v}'_1)$, associe

$$(\bar{v}_2, \tau, \bar{v}_1), \quad \text{où } \bar{v}_i = \bar{u}_2 . \bar{v}'_i . \bar{u}_1 \quad \text{et} \quad \tau = u_2 . \tau' u_1 .$$

Ce foncteur est sous-jacent à un foncteur $(R, q)$-dominé $w(\bar{u}_2)$ En effet, désignons par $(N', o', \varepsilon'(\bar{v}'_2, \bar{v}'_1))$ et par $O = (N, o, \varepsilon(\bar{v}_2, \bar{v}_1))$ les limites projectives naturalisées définissant (proposition 9) respectivement $\varepsilon'(\bar{v}'_2, \bar{v}'_1)$ et $\varepsilon(\bar{v}_2, \bar{v}_1)$. Le foncteur $u_1$ induit un foncteur de $C^{\cdot\Lambda}_1$ vers $C'^{\cdot\Lambda}_1$ qui lui-même induit une transformation naturelle

$$(N, \tilde{o}, \varepsilon'(\bar{v}'_2, \bar{v}'_1)), \quad \text{où } \tilde{o}(z, z) = \bar{u}_2(v'_2(a_2), v'_1(a_1)) . o'(z', z'),$$
$$\text{avec } z \in C_1, \; z' = u_1(z), \; a_2 = \beta(z'), \; a_1 = \alpha(z').$$

La limite par rapport à $O$ de cette transformation naturelle détermine la structure $(R, q)$-dominée de $w(\bar{u}_2)$. Si $\bar{u}'_2$ est un foncteur $(R, q)$-dominé de $E'_2$ vers $E_2$, on détermine de manière analogue $\underline{w}(\bar{u}'_2)$ et $w(\bar{u}'_2)$. Une transformation naturelle $(u'_2, \sigma, u_2)$ entre les foncteurs sous-jacents à $\bar{u}'_2$ et à $\bar{u}_2$ détermine une transformation naturelle $(\underline{w}(\bar{u}'_2), \underline{w}(\sigma), \underline{w}(\bar{u}_2))$,

$$\underline{w}(\sigma)(\bar{v}'_1) = (\bar{u}'_2 . \bar{v}'_1 . \bar{u}_1, \tau_1, \bar{u}_2 . \bar{v}'_1 . \bar{u}_1),$$
$$\tau_1(b) = \sigma(v'_1 . u_1(b)),$$

pour toute unité $b$ de $C^{\cdot}_1$. Ainsi le triplet $(\underline{w}(\bar{u}'_2), \underline{w}(\sigma), \underline{w}(\bar{u}_2))$ appartient à $\hat{C}$ et la surjection $\underline{w}$ de $\bar{C}$ dans une partie de $\hat{C}$ est sous-jacente à un foncteur de $\bar{C}^{\bullet}$ vers $\hat{C}^{\bullet}$, que l'on notera aussi $w$. Montrons que $w$ est sous-jacent à un foncteur $(\bar{R}, q)$-dominé de $\bar{E}$ vers $\hat{E}$. Posons $\bar{u}'_3 = w(\bar{u}'_2)$ et $\bar{u}_3 = w(\bar{u}_2)$; désignons par

$$O_2 = (N_2, o_2, \bar{\varepsilon}(\bar{u}'_2, \bar{u}_2)) \text{ et par } O_3 = (N_3, o_3, \hat{\varepsilon}(\bar{u}'_3, \bar{u}_3))$$

les limites projectives naturalisées définissant $\bar{\varepsilon}(\bar{u}'_2, \bar{u}_2)$ et $\hat{\varepsilon}(\bar{u}'_3, \bar{u}_3)$ respectivement. A l'élément $t'$ de $C'$, nous allons associer un morphisme $\zeta(t', t')$ de source $\bar{\varepsilon}(\bar{u}'_2, \bar{u}_2)$ et de but $\varepsilon(u'_3(\bar{v}'_2), u_3(\bar{v}'_1))$. Soit $\tilde{O} = (\tilde{N}, \tilde{o}, \tilde{c})$ la limite projective naturalisée correspondant à l'élément

$$\varepsilon(u'_3(\bar{v}'_2), u_3(\bar{v}'_1));$$

considérons un élément $z$ de $C_1$ de source $b_1$ et de but $b_2$ et posons:

$$a_1 = u_1(b_1), \quad a_2 = u_1(b_2), \quad y = v'_1 u_1(z), \quad y' = v'_2 u_1(z),$$
$$e_1 = \alpha(y), \quad e'_1 = \alpha(y'), \quad e_2 = \beta(y), \quad e'_2 = \beta(y').$$

La définition de $o_2$ et le fait que $(v'_2, \tau', v'_1)$ est une transformation naturelle assurent que:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_2(u'_2(e'_2), u_2(y)) . o_2(\tau'(a_2), \tau'(a_2)) = \\
&\varepsilon_2(u'_2(e'_2), u_2(y)) . \varepsilon_2(u'_2\tau'(a_2), u_2(e_2)) . o_2(e_2, e_2) = \\
&\varepsilon_2(u'_2\tau'(a_2), u_2(e_1)) . \varepsilon_2(u'_2(e_2), u_2(y)) . o_2(e_2, e_2) = \\
&\varepsilon_2(u'_2\tau'(a_2), u_2(e_1)) . o_2(y, y) = \\
&\varepsilon_2(u'_2(\tau'(a_2) . y), u_2(e_1)) . o_2(e_1, e_1) = \\
&\varepsilon_2(u'_2(y' . \tau'(a_1)), u_2(e_1)) . o_2(e_1, e_1) = \\
&\varepsilon_2(u'_2(y'), u_2(e_1)) . o_2(\tau'(a_1), \tau'(a_1)).
\end{aligned}$$

L'élément $\zeta(t', t')$ sera défini comme l'unique morphisme vérifiant, pour toute unité $b$ de $C_1^{\bullet}$,

$$\tilde{o}(b, b) . \zeta(t', t') = o_2(\tau'(a), \tau'(a)), \quad \text{où } a = u_1(b).$$

On définit de manière analogue $\zeta(\bar{v}'_1, \bar{v}'_1)$ et $\zeta(\bar{v}'_2, \bar{v}'_2)$. Soit $(\tilde{N}_1, \tilde{o}_1, \tilde{c}_1)$ la limite projective correspondant à $\beta(\zeta(\bar{v}'_1, \bar{v}'_1))$. L'on a:

$$\begin{aligned}
&\tilde{o}(b_1, b_1) . \varepsilon(u'_3(t'), u_3(\bar{v}'_1)) . \zeta(\bar{v}'_1, \bar{v}'_1) = \\
&\varepsilon_2(u'_2\tau'(a_1), u_2(e_1)) . \tilde{o}_1(b_1, b_1) . \zeta(\bar{v}'_1, \bar{v}'_1) =
\end{aligned}$$

$$\varepsilon_2(u'_2\,\tau'(a_1), u_2(e_1)).\,o_2(e_1, e_1) = o_2(\tau'(a_1), \tau'(a_1)) = \\ = \tilde{o}(b_1, b_1).\,\zeta(t', t').$$

De même

$$\tilde{o}(b_2, b_2).\,\varepsilon(u'_3(t'), u_3(\bar{v}'_1)).\,\zeta(\bar{v}'_1, \bar{v}'_1) = \tilde{o}(b_2, b_2).\,\zeta(t', t').$$

Ainsi

$$\varepsilon(u'_3(t'), u_3(\bar{v}'_1)).\,\zeta(\bar{v}'_1, \bar{v}'_1) = \zeta(t', t').$$

On montre d'une façon analogue que

$$\varepsilon(u'_3(\bar{v}'_2), u_3(t')).\,\zeta(\bar{v}'_2, \bar{v}'_2) = \zeta(t', t').$$

Par suite le triplet $(N_3, \zeta, \bar{\varepsilon}(\bar{u}'_2, \bar{u}_2))$ est une transformation naturelle dont la source est un foncteur constant; sa limite par rapport à $O_3$ est désignée par $\bar{w}(\bar{u}'_2, \bar{u}_2)$ et détermine une structure de foncteur $(R, q)$-dominé $\bar{w}$ ayant $w$ pour foncteur sous-jacent. On posera:

$$\bar{\Omega}'(E_2, E'_2, E'_1, E_1)_{(\bar{u}_1, 1)} = \bar{w}.$$

On définirait de même un foncteur $(R, q)$-dominé $\bar{\Omega}'(E_2, E'_2, E'_1, E_1)_{(\bar{u}_2, 2)}$ correspondant à la multiplication à droite. On montre que ces foncteurs $(R, q)$-dominés sont naturels en chacune des variables. ■

COROLLAIRE. *Avec les hypothèses de la proposition 15,* $\bar{\Omega}'$ *induit sur* $\mathfrak{S}$ *une structure de catégorie hyperdominée* $(\bar{\Omega}, \mathfrak{S})$.

PREUVE. Il suffit de remarquer que $\mathfrak{N}'_R(\bar{u}, \tilde{E})$ est un $p_{(R,\mathcal{F})}$-monomorphisme, si $\tilde{E}$ est une catégorie $(R, q)$-dominée et si $\bar{u}$ est le foncteur $(R, q)$-dominé canonique de $\mathfrak{N}_R(E_2, E_1)$ vers $\mathfrak{N}'_R(E_2, E_1)$. Alors le foncteur $(R, q)$-dominé $\bar{\Omega}(E_2, E'_2, E'_1, E_1)_{(\bar{u}_1, 1)}$ est un $p_{(R,\mathcal{F})}$-sous-morphisme de $\mathfrak{N}'_R(E, \bar{u}').\bar{\Omega}'(E_2, E'_1, E'_1, E_1)_{(\bar{u}_1, 1)}$, où $\bar{u}'$ est le foncteur $(R, q)$-dominé canonique de $\mathfrak{N}_R(E'_2, E'_1)$ vers $\mathfrak{N}'_R(E'_2, E'_1)$. ■

Supposons dans la suite qu'il existe un foncteur $(R, q)$-produit tensoriel associatif et commutatif $\otimes$ ; pour simplifier, admettons que les morphismes d'associativité soient des unités. La catégorie ${}^R\mathcal{F}$ est alors tensoriellement $t^R$-dominée. Pour établir ceci, déterminons un foncteur $(\delta(R), t^R)$-produit tensoriel [3].

*Définition de* $\delta(R)$: Désignons par $V=(\bar{v}_y)$ un $t^R$-multimorphisme de but $E=(\varepsilon, C^\cdot)$ et de source $(E_i)_{i\leqslant n}$, avec $E_i=(\varepsilon_i, C_i^\cdot)$. Notons $(k_i^{s^i})_{s^i\in\Sigma^i}$ et $(k^s)_{s\in\Sigma}$ les familles de morphismes de $K^\cdot$ associées à $E_i$ et à $E$. Si $s'=(e_3, e_2, e_1)$ est une suite de trois éléments de

$$C^\circ = \prod_{i\leqslant n}(C_i)^\cdot_\circ, \quad \text{où} \quad e_j=(e_j^i)_{i\leqslant n}, \quad \text{et si} \quad s^i=(e_j^i)_{j\leqslant 3},$$

posons

$$X_j^{\bar{i}}=((e^i)_{i\leqslant n;\, i\neq\bar{i}};\bar{i}), \text{ avec } e^i=e_j^i \text{ pour } \bar{i}<i \text{ et } e^i=e_{j+1}^i \text{ pour } i<\bar{i},$$

$$Y^{\bar{i}}=((e^i)_{i\leqslant n;\, i\neq\bar{i}};\bar{i}), \text{ avec } e^i=e_1^i \text{ pour } \bar{i}<i \text{ et } e^i=e_3^i \text{ pour } i<\bar{i},$$

$$s_j=(v_{X_j^n}(e_{j+1}^n), v_{X_j^n}(e_j^n))+(v_{X_j^i}(e_j^i))_{i\leqslant n}, \text{ où } j\leqslant 2,$$

$$s=(v_{Y^n}(e_3^n), v_{Y^n}(e_1^n))+(v_{Y^i}(e_1^i))_{i\leqslant n}$$

(les notations étant celles de [3] ).

Nous dirons que $V$ *vérifie la condition* $c(R)$ si, pour toute suite $s'$ de trois éléments de $C^\circ$, l'on a la relation:

$$k^s.\bigotimes_{i\leqslant n}(\bar{v}_{Y^i}(e_3^i, e_1^i).k_i^{s^i}) = k^{s_2+s_1}.\bigotimes_{j\leqslant 2}(\bigotimes_{i\leqslant n} v_{X_j^i}(e_{j+1}^i, e_j^i)).$$

On désignera par $\delta(R)$ l'ensemble des $t^R$-multimorphismes $V$ d'ensemble d'indices fini vérifiant la condition $c(R)$.

PROPOSITION 22. *Il existe un foncteur* $(\delta(R), t^R)$*-produit tensoriel.*

PREUVE. Considérons une famille $(E_i)_{i\leqslant n}$ de catégories $(R,q)$-dominées. Il existe une catégorie $(R,q)$-dominée $(\varepsilon, C^\cdot)$ telle que

$$C_\circ^\cdot = \prod_{i\leqslant n}(C_i)^\cdot_\circ \quad \text{et} \quad \varepsilon((e_i')_{i\leqslant n},(e_i)_{i\leqslant n}) = \bigotimes_{i\leqslant n}\varepsilon_i(e_i', e_i);$$

les morphismes de composition de $E$ sont déterminés par les produits tensoriels des morphismes de composition des $E_i$, c'est-à-dire:

$$k^{s'} = \bigotimes_{i\leqslant n} k_i^{s^i}, \quad \text{où} \quad s'=(e_j)_{j\leqslant 3}, \quad s^i=(e_j^i)_{j\leqslant 3}, \quad e_j=(e_j^i)_{i\leqslant n}.$$

La preuve est analogue à celle de la proposition III-3-1 de [ 9 ].

Définissons un $t^R$-multimorphisme $V=(\bar{v}_Y)$ de source $(E_i)_{i\leqslant n}$, de but $E^{\cdot}_{\cdot}$. Donnons-nous un

$$Y = ((e^i)_{\substack{i \leqslant n \\ i \neq \bar{i}}} ; \bar{i}), \quad \text{où} \quad \bar{i} \leqslant n$$

et où $e^i$ est une unité de $C_i^{\cdot}$, et un couple $(e_2^{\bar{i}}, e_1^{\bar{i}})$ d'unités de $C_{\bar{i}}^{\cdot}$. La famille

$$(\varepsilon_i(e_2^i, e_1^i))_{i \leqslant n}, \quad \text{où} \quad e_2^i = e_1^i = e^i \quad \text{pour} \quad i \neq \bar{i},$$

admet un $(R, q)$-produit tensoriel naturalisé $g = (g_Z)$. Notons $\bar{v}_Y(e_2^i, e_1^i)$ le morphisme $g_Y$ de source $\varepsilon_{\bar{i}}(e_2^{\bar{i}}, e_1^{\bar{i}})$ et de but $\underset{i \leqslant n}{\otimes} \varepsilon_i(e_2^i, e_1^i)$. Soient $e_3^{\bar{i}}$ une autre unité de $C_{\bar{i}}^{\cdot}$ et $e_3^i = e^i$, pour $i \neq \bar{i}$. La relation ci-dessus nous indique que

$$k^s \cdot (\bar{v}_Y(e_3^i, e_2^i) \otimes \bar{v}_Y(e_2^i, e_1^i)) = \bar{v}_Y(e_3^i, e_1^i) \cdot k_i^{s^i},$$

car la condition 2 de la proposition 2 de [ 3 ] est vérifiée par $E_i$. On en déduit que $\bar{v}_Y$ est un foncteur $(R, q)$-dominé de $E_i$ vers $E$ et la famille $V = (\bar{v}_Y)$ est un $t^R$-multimorphisme de $(E_i)_{i \leqslant n}$ vers $E$.

Montrons que $V$ vérifie la condition $c(R)$. Utilisons les notations servant à définir cette condition et posons:

$$X^i = X_1^i, \quad \bar{e}_{\bar{i}} = (e^i)_{i \leqslant n}, \quad \text{où} \quad e^i = e_1^i \;\text{si}\; \bar{i} > i \;\text{et}\; e^i = e_2^i \;\text{si}\; \bar{i} \leqslant i,$$

$$\bar{s}_{\bar{i}} = (e_{\bar{i}}, \ldots, e_{\bar{1}}, e_1).$$

Désignons le produit tensoriel de source

$(\varepsilon_i(e_2^i, e_1^i))_{i \leqslant \bar{i}}$ par $g^{\bar{i}} = (g^{\bar{i}}_{(z,i)})$,

$(\varepsilon_i(e'^i, e^i))_{i \leqslant n}$ par $g^{(e',e)} = (g^{(e',e)}_{(y,i)})$, où $e' = (e'^i)_{i \leqslant n}$ et où $e = (e^i)_{i \leqslant n}$,

$(\varepsilon(e_{j+1}, e_j))_{j \leqslant m}$ par $f^s = (f^s_{(x,j)})$, où $s = (e_j)_{j \leqslant m}$ et $e_j \in C_0^{\cdot}$.

Il existe un unique morphisme $h^{\bar{i}}$ vérifiant

$$h^{\bar{i}} \cdot g^{\bar{i}}_{(z,i)} = g^{(e_{\bar{i}}, e_1)}_{(y,i)}, \quad \text{où} \quad i \leqslant \bar{i} \quad \text{et} \quad y = (z^j)_{\substack{j \leqslant n \\ j \neq \bar{i}}}, \quad \text{si} \quad z = (z^j)_{\substack{j \leqslant \bar{i} \\ j \neq i}} \quad \text{et si}$$

$$z^j = e_1^j \quad \text{pour} \quad j > \bar{i}.$$

Nous allons établir par récurrence que:

$$k^{\bar{s}_n} \cdot \underset{i \leqslant n}{\otimes} \bar{v}_{X^i}(e_2^i, e_1^i) = h^n = \varepsilon(e_2, e_1).$$

Supposons, en effet, que la relation précédente est vraie pour l'indice $\bar i$. On sait [ 3 ] que

$$k^{\bar s_{\bar i+1}} = k^{\check s}.(\varepsilon(e_{\bar i+1}, e_{\bar i}) \otimes k^{\bar s_{\bar i}}), \text{ où } \check s = (e_{\bar i+1}, e_{\bar i}, e_1).$$

Donc

$$A = k^{\bar s_{\bar i+1}} . \bigotimes_{i \leqslant \bar i+1} \bar v_{X^i}(e^i_2, e^i_1) = k^{\check s}.(\bar v_{X^{\bar i+1}}(e^{i+1}_2, e^{i+1}_1) \otimes h^{\bar i}).$$

Soit $z = (z^i)_{i \leqslant \bar i}$ un élément de $\prod_{i \leqslant \bar i} e^i_2 . C_i . e^i_1$. Posons

$$y = (y^i)_{\substack{i \leqslant n \\ i \neq \bar i+1}} \quad \text{avec } y^i = z^i \text{ pour } i \leqslant \bar i \text{ et } y^i = e^i_1 \text{ pour } \bar i < i,$$

$$x = \underline{Q}(g^{(e_{\bar i}, e_1)})(y).$$

On a

$$A . g^{\bar i+1}_{(z,\bar i+1)} = k^s . f^s_{(x,1)} . g^{(e_{\bar i+1}, e_{\bar i})}_{(y,\bar i+1)} =$$

$$g^{(e_{\bar i+1}, e_1)}_{(y,\bar i+1)} . k^{s_{\bar i+1}}_{\bar i+1} . f^{s_{\bar i+1}}_{(e^{\bar i+1}_1, 1)} = g^{(e_{\bar i+1}, e_1)}_{(y,\bar i+1)} = h^{\bar i+1} . g^{\bar i+1}_{(z,\bar i+1)},$$

vu la relation (2) de la proposition 2 de [ 3 ] . On suppose maintenant que

$$z = (z^j)_{\substack{j \leqslant \bar i+1 \\ j \neq i}} \in \prod_{\substack{j \leqslant \bar i+1 \\ j \neq i}} e^j_2 . C_j . e^j_1$$

et l'on pose:

$$z' = (z^j)_{\substack{j \leqslant \bar i \\ j \neq i}}, \quad y' = (z'^j)_{\substack{j \leqslant n \\ j \neq i}}, \quad y = (z^j)_{\substack{j \leqslant n \\ i \neq i}},$$

$$x = Q(g^{(\bar e_{j+1}, \bar e_j)})((x^j)_{j \leqslant n}),$$

où

$$z'^j = e^j_1 \quad \text{pour } j > \bar i \text{ et } j \neq i,$$

$$z'^j = z^j \text{ et } x^j = e^j_1 \quad \text{pour } j \leqslant \bar i \text{ et } j \neq i,$$

$$x^j = z^j = e^j_1 \quad \text{pour } j > \bar i+1 \text{ et où } x^{\bar i+1} = z^{\bar i+1}.$$

On a les relations suivantes:

$$A . g^{\bar i+1}_{(z,i)} = k^s . f^s_{(x,1)} . h^{\bar i} . g^{\bar i}_{(z',1)} = k^s . f^s_{(x,1)} . g^{(e_{\bar i}, e_1)}_{(y',1)} =$$

$$g^{(e_{\bar i+1}, e_1)}_{(y,1)} . k^{s_i} . f^{s_i}_{(e^i_2, 1)} = g^{(e_{\bar i+1}, e_1)}_{(y,i)} = h^{\bar i+1} . g^{\bar i+1}_{(z,i)} .$$

On en déduit que $A = \bar{h}^{i+1}$ et la formule est établie. Ce résultat permet d'affirmer que $V$ vérifie la condition $c(R)$. En effet, avec les notations définissant cette condition, le premier membre de l'équation $c(R)$ vaut:

$$k^s . \underset{i\leqslant n}{\otimes} \bar{v}_{Y^i}(e_3^i, e_1^i)) . \underset{i\leqslant n}{\otimes} k_i^{s_i} = \underset{i\leqslant n}{\otimes} k_i^{s_i} = k^{s'},$$

tandis que le second membre vaut

$$k^{s'} . \underset{j\leqslant 2}{\otimes} ( \underset{i\leqslant n}{\otimes} k^{s_j} . \bar{v}_{X_j^i}(e_{j+1}^i, e_j^i)) = k^{s'}, \quad \text{où} \quad s' = (e_3, e_2, e_1).$$

Montrons qu'un $t^R$-multimorphisme $V' = (\bar{v}'_Y)$ de source $(E_i)_{i\leqslant n}$ et de but $\tilde{E} = (\tilde{\varepsilon}, \tilde{C}^{\cdot})$ détermine un foncteur $(R, q)$-dominé $\bar{w}$ de $E$ vers $\tilde{E}$. Notons $(\tilde{k}^{\tilde{s}})_{\tilde{s}\in\tilde{\Sigma}}$ la famille de morphismes de composition de $\tilde{E}$ et utilisons les mêmes notations. Aux unités $e_2$ et $e_1$ de $C^{\cdot}$ correspond le $q$-multimorphisme

$$\tilde{k}^{\tilde{s}_1} . \underset{i\leqslant n}{\otimes} \bar{v}'_{X_1^i}(e_2^i, e_1^i) . g^{(e_2, e_1)},$$

$$\text{où} \quad s_1 = (v'_{X_2^i}(e_2^n), v'_{X_2^i}(e_1^n)) + (v'_{X_1^i}(e_1^i))_{i\leqslant n} .$$

De plus ce $q$-multimorphisme appartient à $R$ et il existe un unique morphisme $\bar{w}(e_2, e_1)$ vérifiant:

$$\bar{w}(e_2, e_1) = \tilde{k}^{\tilde{s}_1} . \underset{i\leqslant n}{\otimes} \bar{v}'_{X_1^i}(e_{j+1}^i, e_j^i).$$

Si $e_2 = e_1$ et si $u = q(\bar{w}(e_2, e_1))$, l'on a $u(e_1) = v'_{X_1^i}(e_1^1)$, car la condition 2 de la proposition 2 de [3] est vérifiée par les $E_i$. Ainsi la famille $(\bar{w}(e_2, e_1))_{(e_2, e_1)\in C_0^{\cdot}\times C_0^{\cdot}}$ définit un homomorphisme de graphes orientés $q$-dominés $[\bar{w}]$ de $[E]$ vers $[\tilde{E}]$. Lorsque $V'$ vérifie la condition $c(R)$, on a

$$\tilde{k}^{\tilde{s}'} . (\bar{w}(e_3, e_2) \otimes \bar{w}(e_2, e_1)) =$$

$$\tilde{k}^{\tilde{s}'} . ((\tilde{k}^{\tilde{s}_2} . \underset{i\leqslant n}{\otimes} \bar{v}'_{X_2^i}(e_3^i, e_2^i)) \otimes (\tilde{k}^{\tilde{s}_1} . \underset{i\leqslant n}{\otimes} v'_{X_1^i}(e_2^i, e_1^i))) =$$

$$\tilde{k}^{\tilde{s}_2 + \tilde{s}_1} . \underset{j\leqslant 2}{\otimes} ( \underset{i\leqslant n}{\otimes} \bar{v}'_{X_j^i}(e_{j+1}^i, e_j^i)) =$$

$$\tilde{k}^{\tilde{s}} . ( \underset{i\leqslant n}{\otimes} \bar{v}'_{Y^i}(e_3^i, e_1^i)) . \underset{i\leqslant n}{\otimes} k_i^{s_i} =$$

$$\bar{w}(e_3, e_1).\bigotimes_{i\leqslant n} k_i^{s_i} = \bar{w}(e_3, e_1).k^{s'}$$

(l'indice $\tilde{}$ indique qu'il s'agit de suites images appartenant à $\tilde{\Sigma}$). On en déduit que $[\bar{w}]$ est sous-jacent à un foncteur $(R,q)$-dominé $\bar{w}$ de $E$ vers $\tilde{E}$. Il est évident que $\bar{w}.V = V'$. L'unicité de $\bar{w}$ provient de l'unicité des $\bar{w}(e_2, e_1)$.

Ainsi $V$ est bien un $(\delta(R), t^R)$-produit tensoriel naturalisé de la famille $(E_i)_{i\leqslant n}$. ∎

Nous noterons ce produit tensoriel $\boxtimes$. Remarquons qu'il est associatif, puisque $\otimes$ l'est.

PROPOSITION 23. *Avec les hypothèses des propositions 17 ou 18, le couple* $(\mathfrak{N}_R, {}^R\mathcal{F})$ *est une catégorie* $t^R$*-tensoriellement dominée.*

PREUVE. Soient $E = (\varepsilon, C^\cdot)$, $\bar{E} = (\bar{\varepsilon}, \bar{C}^\cdot)$ et $\tilde{E} = (\tilde{\varepsilon}, \tilde{C}^\cdot)$ trois catégories $(R,q)$-dominées. Montrons que le foncteur $\mathfrak{N}_R(\cdot, E)$ est un foncteur coadjoint de $-\boxtimes E$.

Définissons un foncteur $(R,q)$-dominé $\bar{w}$ de $\mathfrak{N}_R(\bar{E},E)\boxtimes E$ vers $\bar{E}$, où $\mathfrak{N}_R(\bar{E},E) = (\nu, \mathfrak{N}(\bar{E},E)^{\square\square})$. A toute unité $e$ de $C^\cdot$, on associe le foncteur $(R,q)$-dominé $\bar{w}_{(e,1)}$ de $\mathfrak{N}_R(\bar{E},E)$ vers $\bar{E}$ défini par:

$R\mathcal{F}$

$$\begin{tikzcd}
 & \tilde{E} \arrow[dl, "\bar{w}'''"'] \arrow[dr, "\bar{w}''"] & \\
\mathfrak{N}'_R(\bar{E},E) & & \mathfrak{N}_R(\bar{E},E) \arrow[ll, "\bar{u}"']
\end{tikzcd}$$

$\boxtimes E$

$R\mathcal{F}$

$$\begin{tikzcd}
 & \tilde{E}\boxtimes E \arrow[dl, "\bar{w}'"'] \arrow[dr, "\bar{w}''\boxtimes E"] & \\
\bar{E} & & \mathfrak{N}_R(\bar{E},E)\boxtimes E \arrow[ll, "\bar{w}"]
\end{tikzcd}$$

a) $\bar{w}_{(e,1)}(\bar{v}', \bar{v}) = o((e,e)).\bar{u}(\bar{v}', \bar{v})$, si les hypothèses de la proposition 17 sont vérifiées et si $O = (N, o, \nu'(\bar{v}', \bar{v}))$ est la limite projective définissant $\nu'(\bar{v}', \bar{v})$ (notations des propositions 9 et 16).

b) $\bar{w}_{(e,1)}(\bar{v}', \bar{v}) = d(e)$, si les hypothèses de la proposition 18 sont vérifiées.

En posant $\bar{w}_{(\bar{v},2)} = \bar{v}$, on définit un $t^R$-multimorphisme $W = (\bar{w}_z)$ de $(\mathfrak{N}_R(\bar{E}, E), E)$ vers $\bar{E}$. En effet,

$$w_{(\bar{v},2)}(e) = v(e) = w_{(e,1)}(v).$$

Soient $e'$ une autre unité de $C^{\bullet}$, $x$ un élément de $e'.C.e$ et $(\bar{v}', \tau, \bar{v})$ une transformation naturelle $(R, q)$-dominée appartenant à $\mathfrak{N}(\bar{E}, E)$. Posons

$$\bar{s} = (v'(e'), v(e'), v(e)) \quad \text{et} \quad \bar{s}' = (v'(e'), v'(e), v(e)).$$

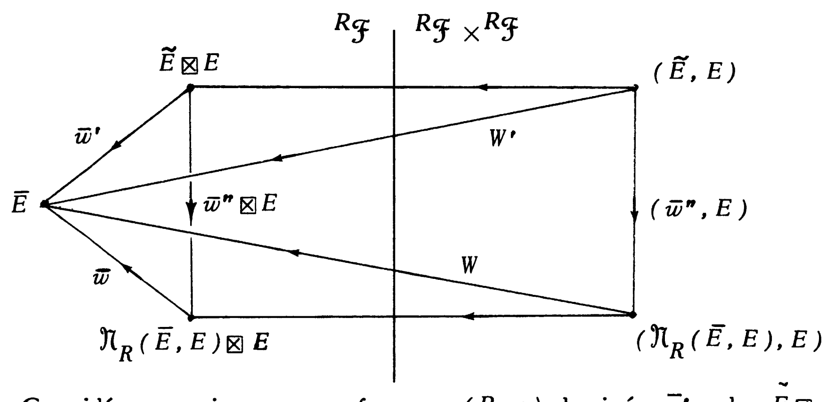
La relation

$$\bar{\varepsilon}(v'(e'), v(x)).\bar{w}_{(e',1)}(\bar{v}', \bar{v}) = \bar{\varepsilon}(v'(x), v(e)).\bar{w}_{(e,1)}(\bar{v}', \bar{v})$$

assure que

$$\bar{k}^{\bar{s}}.(\bar{w}_{(e',1)}(\bar{v}', \bar{v}) \otimes \bar{v}(e', e)).\gamma = \bar{k}^{\bar{s}'}.(\bar{v}'(e', e) \otimes \bar{w}_{(e,1)}(\bar{v}', \bar{v})),$$

où $\gamma$ est un isomorphisme de commutativité convenable. On en déduit que $W$ vérifie la condition $c(R)$ et appartient donc à $\delta(R)$. Ainsi $W$ détermine un foncteur $(R, q)$-dominé $\bar{w}$ de $\mathfrak{N}_R(\bar{E}, E) \boxtimes E$ vers $\bar{E}$.




Considérons maintenant un foncteur $(R, q)$-dominé $\bar{w}'$ de $\tilde{E} \boxtimes E$ vers $\bar{E}$ et soit $W' = (\bar{w}'_Y)$ le $t^R$-multimorphisme correspondant. Montrons que $W'$ détermine un foncteur $(R, q)$-dominé $\bar{w}'''$ de $\tilde{E}$ vers $\mathfrak{N}'_R(\bar{E}, E)$. Considérons un élément $\tilde{x}$ de $\tilde{C}$ de source $\tilde{e}$ et de but $\tilde{e}'$. Le triplet

$$w'''(\tilde{x}) = (\bar{w}'_{(\tilde{e}',2)}, \sigma_{\tilde{x}}, \bar{w}'_{(\tilde{e},2)}), \quad \text{où} \quad \sigma_x(e) = w'_{(\tilde{e},1)}(\tilde{x}),$$

est une transformation naturelle appartenant à $\mathfrak{N}'(\bar{E}, E)$. En effet, $W'$ vérifie la condition $c(R)$. Si $\tilde{x}'.\tilde{x}$ est défini dans $\tilde{C}^{\bullet}$, on a

$$w'_{(e,1)}(\tilde{x}'.\tilde{x}) = w'_{(e,1)}(\tilde{x}').w'_{(e,1)}(\tilde{x}),$$

c'est-à-dire $w'''(\tilde{x}'.\tilde{x}) = w''''(\tilde{x}').w'''(\tilde{x})$. Ainsi est défini un foncteur $w'''$ de $\tilde{C}^{\bullet}$ vers $\mathfrak{N}'(\bar{E}, E)^{\square}$. Posons $\bar{v}' = w'''(\tilde{e}')$ et $\bar{v} = w'''(\tilde{e})$. Il existe une transformation naturelle $X = (N, \chi, \varepsilon(\tilde{e}', \tilde{e}))$ définie par:

$$\chi((e,e)) = \bar{w}'_{(e,1)}(\tilde{e}', \tilde{e}), \quad \text{où} \quad e \in C_0^{\bullet},$$

$$\chi((y,y)) = \bar{\varepsilon}(v'(y), v(e)).\chi((e,e)) = \bar{\varepsilon}(v'(e'), v(y)).\chi((e',e'))$$

$$\text{où } e = \alpha(y) \text{ et où } e' = \beta(y).$$

On pose $\bar{w}'''(\tilde{e}', \tilde{e}) = Lim_O X$ ; la famille $(\bar{w}'''(\tilde{e}', \tilde{e}))_{(\tilde{e}',\tilde{e}) \in C_0^{\bullet} \times C_0^{\bullet}}$ détermine un foncteur $(R, q)$-dominé $\bar{w}'''$ admettant $w'''$ pour foncteur sous-jacent. D'autre part, comme $W'$ vérifie la condition $c(R)$, la transformation naturelle $w'''(\tilde{x})$ est $(R, q)$-dominée. Il suffit dans la formule définissant $c(R)$ de choisir $e_2 = e_3$ et d'en regarder la valeur pour un $\tilde{x}$ donné dans $\tilde{e}'.\tilde{C}.\tilde{e}$; c'est-à-dire:

$$\bar{\varepsilon}(w'_{(e,1)}(\tilde{x}), w'_{(e,1)}(\tilde{e})).\bar{w}'_{(\tilde{e},2)}(e', e) =$$

$$\bar{\varepsilon}(w'_{(e,1)}(\tilde{e}'), w'_{(e,1)}(\tilde{x})).\bar{w}'_{(\tilde{e}',2)}(e', e).$$

Comme $\bar{u}$ est un $p_{(R,\mathcal{F})}$-monomorphisme, il existe un unique foncteur $(R, q)$-dominé $\bar{w}''$ de source $E$, de but $\mathfrak{N}_R(\bar{E}, E)$ et vérifiant $\bar{u}.\bar{w}'' = \bar{w}'''$. Désignons par $W'' = (\bar{w}''_Z)$ le $t^R$-multimorphisme associé à $\bar{w}.(\bar{w}'' \boxtimes E)$. Le foncteur $(R, q)$-dominé $\bar{w}''_{(\tilde{e},2)}$ a pour source $E$, pour but $\bar{E}$ et vaut

$$\bar{w}_{(\bar{v},2)}, \quad \text{si} \quad \bar{v} = w''(\tilde{e}) = w'''(\tilde{e}) = \bar{w}'_{(\tilde{e},2)}.$$

Comme $\bar{w}'_{(\tilde{e},2)} = \bar{v}$, l'on a $\bar{w}''_{(\tilde{e},2)} = \bar{w}'_{(\tilde{e},2)}$. Posons $\bar{v}' = w'''(\tilde{e}')$ et $\bar{v} = w'''(\tilde{e})$; cherchons la valeur du foncteur $(R, q)$-dominé $\bar{w}''_{(e,1)}$ sur l'élément $(\tilde{e}', \tilde{e})$:

$$\bar{w}''_{(e,1)}(\tilde{e}', \tilde{e}) = (\bar{w}_{(e,1)}.\bar{w}'')(\tilde{e}', \tilde{e}) =$$

$$\bar{w}_{(e,1)}(\bar{v}', \bar{v}).\bar{w}''(\tilde{e}', \tilde{e}) = o((e,e)).\bar{u}(\bar{v}', \bar{v}).\bar{w}''(\tilde{e}', \tilde{e}),$$

$$o((e,e)).\bar{w}''(\tilde{e}', \tilde{e}) = \chi((e,e)) = \bar{w}'_{(e,1)}(\tilde{e}', \tilde{e}).$$

Par suite,

$$\bar{w}''_{(e,1)} = \bar{w}'_{(e,1)} \quad \text{et} \quad W'' = W', \quad \text{d'où} \quad \bar{w}.(\bar{w}'' \boxtimes E) = \bar{w}'.$$

De plus, $\bar{w}''$ est le seul foncteur $(R, q)$-dominé de $E$ vers $\mathfrak{N}_R(\bar{E}, E)$ vérifiant l'équation ci-dessus. En effet, $\bar{w}'$ détermine de manière unique $\bar{w}'''$, qui lui-même détermine bien $\bar{w}''$, puisque $\bar{u}$ est un monomorphisme. Ainsi $(\bar{w}, \mathfrak{N}_R(\bar{E}, E))$ est un $-\boxtimes E$-éjecteur; la proposition en découle. ■

**Bibliographie.**

[1] C. EHRESMANN, *Catégories et structures,* Dunod 1965, Paris.

[2] C. EHRESMANN, *Algèbre 1$^{ère}$ partie,* C.D.U. 1968, Paris.

[3] F. FOLTZ, Sur la domination des catégories I, *Cahiers de Topo. et Géom. diff.* XII,1, pages 93-110.

[4] F. FOLTZ, Sur la catégorie des foncteurs dominés, *Cahiers de Topo. et Géom. diff.* XI,2, pages 110-129.

[5] A. BURRONI, Esquisses de catégories à limites et quasi-topologies, (thèse de troisième cycle), *Esquisses mathématiques* 5, Paris 1970.

[6] F. FOLTZ, Réalisations dominées, *C.R.A.S.* t. 271, Paris (1970), p. 221-224.

[7] A. BASTIANI et C. EHRESMANN, Catégories de foncteurs structurés, *Cahiers de Topo. et Géom. diff.* XI,3, pages 329-384.

[8] A. BASTIANI et C. EHRESMANN, Catégories monoïdales de foncteurs stucturés (à paraître).

[9] S. EILENBERG et G.M. KELLY, Closed Categories, *Proceedings of the Conference on Categorical Algebra,* La Jolla 1965, Springer 1966.

[10] D.M. KAN, Adjoint functors, *Trans. Amer. Math. Soc.* 87, 1958, pages 294-329.

[11] A. BASTIANI, *Théorie des Ensembles,* C.D.U., Paris 1970.

[12] A. BASTIANI, *Topologie 2* (cours multigraphié), Amiens, 1968.

[13] E. BURRONI, Catégories discrètement structurées et triples (thèse de troisième cycle), *Esquisses mathématiques* 5, Paris 1970.

Département de Mathématiques
Tours 45-55
Université Paris VII
2, Place Jussieu
75 Paris 5$^{e}$.