CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

ANDRÉE BASTIANI
CHARLES EHRESMANN

Catégories de foncteurs structurés

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 11, nº 3 (1969), p. 329-384
<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1969__11_3_329_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE *Vol. XI, 3*
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

CATEGORIES DE FONCTEURS STRUCTURES

par Andrée BASTIANI et Charles EHRESMANN

Introduction.

Le présent article est une étude générale de la catégorie $\mathcal{F}(p)$ des foncteurs p-structurés, où p est un «bon» foncteur d'une catégorie H vers la catégorie des applications associée à un univers. Une catégorie p-structurée est un couple d'une catégorie $C^{\cdot}$ et d'une p-structure s sur l'ensemble C sous-jacent (i.e. d'une unité s de H vérifiant $p(s) = C$) tel que les applications source et but «se relèvent» en des éléments a et b de H de sources et buts s et que la loi de composition «se relève» en un élément de H de source un produit fibré de (a, b) et de but s. Cette notion est différente de celle de catégorie p-dominée (ou de la notion plus précise de catégorie monoïdale fermée [8]), où ce sont séparément les ensembles $Hom_C(e', e)$ qui sont munis de p-structures. Comme exemples importants de catégories structurées, citons les catégories doubles, ordonnées, topologiques, différentiables,... qui interviennent dans les domaines les plus variés (Topologie algébrique, Géométrie différentielle, Analyse,...).

Le texte a été rédigé en supposant seulement connus les résultats du cours [Al] (dont il utilise la terminologie et les notations), afin que sa lecture puisse être abordée par des chercheurs débutants. C'est pourquoi le paragraphe 1 et le début du paragraphe 3 contiennent quelques rappels (sur les p-injections, aussi appelées morphismes cartésiens, les limites, les foncteurs $\ulcorner$-engendrants).

La théorie générale des catégories structurées est exposée dans le paragraphe 2. Les principaux théorèmes assurent l'existence de sous-catégories structurées et de limites projectives sous des conditions plus faibles que celles de [6]. Dans le paragraphe 3, l'existence de catégories structurées quasi-quotients est montrée à l'aide du théorème général d'existence de structures libres [4]. Là encore, les hypothèses de [1] ont pu être affaiblies, en particulier pour montrer que la sous-catégorie structurée engendrée par une partie «assez petite» est «assez petite» (mais naturellement la construction par récurrence de cette sous-catégorie est plus compliquée que dans [1]).

Les transformations naturelles p-structurées ont été introduites dans [10], lorsque p est à limites projectives; dans le paragraphe 4, nous obtenons sans cette hypothèse la 2-catégorie des transformations naturelles structurées. Nous montrons aussi l'existence d'une catégorie double structurée des quatuors associée à une catégorie structurée, en supposant seulement p à produits fibrés finis, grâce à une construction entièrement différente de celle de [6] (qui supposait l'existence de produits). Cette catégorie double structurée est essentielle pour démontrer les principaux résultats de cet article, relatifs au cas où H est munie d'une p'-domination: La catégorie des transformations naturelles structurées entre deux catégories p-structurées données est alors canoniquement p'-structurée, et l'on obtient ainsi une domination de la catégorie $\mathcal{F}(p)$, qui est une domination forte si H est fortement p'-dominée. On en déduit que, si H est une catégorie cartésienne fermée dont un élément final est un générateur, $\mathcal{F}(p)$ est une catégorie cartésienne fermée. Ces résultats sont également valables pour la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}(p)$ ayant pour objets les groupoïdes structurés (paragraphe 5).

Nous nous sommes volontairement restreints au cas des catégories p-structurées, afin de ne pas utiliser la théorie générale des réalisations de l'esquisse des catégories [5]. C'est pourquoi les résultats du paragraphe 4 ne sont pas les meilleurs possibles. Dans un prochain article, nous montrerons qu'ils peuvent être étendus aux catégories structurées généralisées, même avec des hypothèses très affaiblies (voir remarque finale du pagraphe 4).

1. Quelques compléments sur les p-injections.

Soit $p = (K^{\cdot}, \underline{p}, H^{\cdot})$ un foncteur.

Rappelons [A1] que $j \in H$ est une *p-injection* si les conditions

$$f \in \beta(j).H \text{ et } p(f) = p(j).k$$

entraînent qu'il existe un et un seul $h \in H$ tel que

$$p(h) = k \text{ et } f = j.h.$$

Si j et j' sont des p-injections et si $j'.j$ est défini, alors $j'.j$ est une p-injection [A1]. Si j et j' sont des p-injections de même but et si $p(j') = p(j).k$, l'unique h tel que $p(h) = k$ et $j.h = j'$ est une p-injection. En particulier si p_γ est bien fidèle et si j et j' sont deux p-injections de même but telles que $p(j) = p(j')$, alors $j = j'$.

Si j et j' sont deux p-injections et si $g \in \beta(j).H.\beta(j')$ est tel que $p(g).p(j') = p(j).k$, l'unique h vérifiant

$$j.h = g.j' \text{ et } p(h) = k$$

est appelé *p-sous-morphisme de* g *(relativement à (j, j')).*

PROPOSITION 1. *Si p est fidèle et si $j \in H$ admet un inverse à gauche j', alors j est une p-injection.*

Δ. Soit $f \in \beta(j).H$ tel que $p(f) = p(j).k$. Posons $h = j'.f$. On a

$$p(h) = p(j').p(f) = p(j').p(j).k = p(j'.j).k = k,$$

d'où

$$p(j.h) = p(j).p(h) = p(j).k = p(f).$$

Comme p est fidèle, il s'ensuit $j.h = f$. De plus $j.h' = f$ entraîne

$$h' = j'.j.h' = j'.f = h. \ \nabla$$

On dira qu'une transformation naturelle $T = (F, t, \hat{s}')$ d'un foncteur constant $\hat{s}'$ sur $s' \in H_0^{\cdot}$ vers F est une *limite projective naturalisée dans* p si T est une limite projective naturalisée et si $pT = (p.F, \underline{p}\,t, \hat{e})$, où $e = p(s')$, est une limite projective naturalisée. En particulier, on définit ainsi les notions de produit (naturalisé) dans p, de produit fibré (naturalisé) dans p, de noyau dans p.

PROPOSITION 2. *Soient h et h' des éléments de H de même but. Si p est fidèle et s'il existe un produit naturalisé $((m, m'), s)$ de $(\alpha(h), \alpha(h'))$ dans p et un produit fibré naturalisé $((p(h), v), (p(h'), v'))$ dans $K^\cdot$, il existe un produit fibré naturalisé $((h, \bar{v}), (h', \bar{v}'))$ dans p tel que $p(\bar{v}) = v$ et $p(\bar{v}') = v'$ si, et seulement si, il existe une p-injection $j \in s.H$ telle que*

$$p(m).p(j) = v \text{ et } p(m').p(j') = v'.$$

Ceci résulte de la proposition 7, page 57 [A1].

PROPOSITION 3. *Soient h et h' deux éléments de $H^\cdot$ de même source et de même but. Si p est fidèle, il existe un noyau j de (h, h') dans p si, et seulement si, j est une p-injection telle que $p(j)$ soit un noyau de $(p(h), p(h'))$ dans $K^\cdot$.*

Δ. 1°) Soit j un noyau de (h, h') dans p et soit $f \in \beta(j).H$ tel que $p(f) = p(j).k$. Comme p est fidèle, les égalités

$$p(h.f) = p(h).p(j).k = p(h').p(j).k = p(h'.f)$$

entraînent $h.f = h'.f$, de sorte qu'il existe un unique g vérifiant $j.g = f$. On trouve $p(g) = k$, car le noyau $p(j)$ est un monomorphisme et

$$p(j).p(g) = p(f) = p(j).k.$$

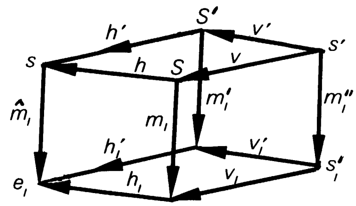
2°) Soit j une p-injection telle que $p(j)$ soit un noyau dans $K^\cdot$ de $(p(h), p(h'))$. Si $h.f = h'.f$, où $f \in H$, il existe un et un seul k tel que $p(j).k = p(f)$. Par suite il existe un unique $g \in H$ vérifiant $j.g = f$ et $p(g) = k$. Puisque $p(j)$ est un monomorphisme, j en est aussi un [A1] donc j est un noyau de (h, h') dans p. ∇

PROPOSITION 4. *Soient h_i et h'_i des éléments de H de même but e_i pour tout $i \in J$, et h et h' des morphismes produits de $(h_i)_{i \in J}$ et de $(h'_i)_{i \in J}$ dans $H^\cdot$ relatifs au même produit naturalisé $((\hat{m}_i)_{i \in J}, s)$ de $(e_i)_{i \in J}$. S'il existe des produits fibrés s'_i de (h_i, h'_i) et s' de (h, h') dans $H^\cdot$, alors s' est un produit de $(s'_i)_{i \in J}$.*

Δ. Soient $((h, v), (h', v'))$ et $((h_i, v_i), (h'_i, v'_i))$, pour tout élément i de J, des produits fibrés naturalisés, $((m_i)_{i \in J}, S)$ et $((m'_i)_{i \in J}, S')$ des produits naturalisés de $(\alpha(h_i))_{i \in J}$ et de $(\alpha(h'_i))_{i \in J}$ tels que $\hat{m}_i.h = h_i.m_i$ et $\hat{m}_i.h' = h'_i.m'_i$ pour tout $i \in J$. Comme

$$h_i . m_i . v = \hat{m}_i . h . v = \hat{m}_i . h' . v' = h'_i . m'_i . v'$$

pour tout $i \in J$, il existe un unique m''_i vérifiant



$v_i . m''_i = m_i . v$ et $v'_i . m''_i = m'_i . v'$.

On montre facilement que $((m''_i)_{i \in J}, \alpha(v))$ est un produit naturalisé. Ce résultat se déduit également du théorème de commutativité entre limites projectives (voir par exemple [2], chapitre I). ∇

Nous désignons par $C^\cdot$ une catégorie, par $\mathfrak{N}(H^\cdot, C^\cdot)^{\square\square}$ la catégorie longitudinale des transformations naturelles entre foncteurs de $C^\cdot$ vers $H^\cdot$, dont les unités sont identifiées aux foncteurs de $C^\cdot$ vers $H^\cdot$. La bijection c associant à $h \in H$ la transformation naturelle $(\hat{s}', \overline{h}, \hat{s})$, où

$$s = \alpha(h), \quad s' = \beta(h) \text{ et } \overline{h}(e) = h \text{ pour tout } e \in C^\cdot_o,$$

définit un isomorphisme de $H^\cdot$ sur une sous-catégorie de $\mathfrak{N}(H^\cdot, C^\cdot)^{\square\square}$. Si $T = (F, t, \hat{s}')$ est une transformation naturelle ayant pour source le foncteur constant sur le but de h, alors Th note la transformation naturelle $T \square\square\, c(h)$, c'est-à-dire la transformation naturelle $(F, t', \hat{s})$, où $t'(e) = t(e).h$ pour tout $e \in C^\cdot_o$. On a donc

$$(T' \square\square\, T)h = T' \square\square\, (Th) \quad \text{et} \quad T(h.h') = (Th)h'$$

si $T' \square\square\, T$ et $h.h'$ sont définis.

Soit $\mathfrak{N}(p)$ le foncteur canonique [A1] de $\mathfrak{N}(H^\cdot, C^\cdot)^{\square\square}$ vers $\mathfrak{N}(K^\cdot, C^\cdot)^{\square\square}$ associant à la transformation naturelle $T' = (F', t, F)$ la transformation naturelle $pT' = (p.F', pt, p.F)$.

PROPOSITION 5. *Soit $T = (F, t, F')$ une transformation naturelle entre foncteurs de $C^\cdot$ vers $H^\cdot$ telle que $t(e)$ soit une p-injection pour toute unité e de $C^\cdot$. Alors T est une $\mathfrak{N}(p)$-injection. Si $V = (F, v, \hat{s})$ et $W' = (p.F', w', \hat{x})$ sont des limites projectives naturalisées dans p et dans $K^\cdot$ respectivement, une limite projective naturalisée $V' = (F', u', \hat{s}')$ vérifiant $pV' = W'$ détermine une p-injection j telle que $Vj = T \square\square\, V'$; de même une p-injection j de but s telle que $(pV)p(j) = pT \square\square\, W$ détermine une limite projective naturalisée V' telle que $Vj = T \square\square\, V'$.*

Δ. 1°) Montrons que T est une $\mathfrak{N}(p)$-injection. Pour cela, soit $T' = (F, t', F'') \in \mathfrak{N}(H^{\cdot}, C^{\cdot})$ et $pT' = pT \square\!\square U$, où $U = (p.F', u, p.F'')$. Si $e \in C_0^{\cdot}$, l'égalité $p(t'(e)) = p(t(e)).u(e)$ assure l'existence d'un unique $t''(e) \in H$ tel que

$$t'(e) = t(e).t''(e) \text{ et } p(t''(e)) = u(e).$$

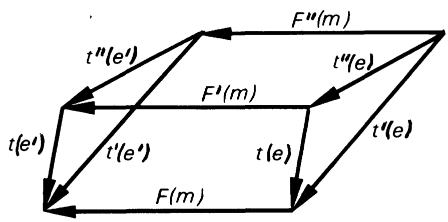
Soit $m \in e'.C.e$; on a $F'(m).t''(e) = t''(e').F''(m)$, car $t(e')$ est une p-injection,

$$t(e').F'(m).t''(e) = F(m).t(e).t''(e) = F(m).t'(e) =$$
$$= t'(e').F''(m) = t(e').t''(e').F''(m)$$

et

$$p(F'(m).t''(e)) = p(F'(m)).u(e) = u(e').p(F''(m)) =$$
$$= p(t''(e').F''(m)).$$

Par suite (F', t'', F'') est une transformation naturelle, qui est l'unique



élément T'' de $\mathfrak{N}(H^{\cdot}, C^{\cdot})$ vérifiant $T \square\!\square T'' = T'$ et $pT'' = U$.

2°) Supposons que $V = (F, v, \hat{s})$ et $V' = (F', v', \hat{s}')$ soient des limites projectives naturalisées dans p. La transformation naturelle $T \square\!\square V'$ ayant $\hat{s}'$ pour source et F pour but, il existe un unique $j \in s.H.s'$ tel que $Vj = T \square\!\square V'$. Supposons $h \in s.H$ et $p(h) = p(j).k$. D'après la partie 1, T est une $\mathfrak{N}(p)$-injection; comme

$$p(Vh) = ((pV)p(j))k = p(Vj)k = pT \square\!\square ((pV')k),$$

il existe un unique $T' \in \mathfrak{N}(H^{\cdot}, C^{\cdot})$ vérifiant

$$Vh = T \square\!\square T' \text{ et } pT' = (pV')k.$$

Puisque V' est une limite projective naturalisée, il existe un unique $h' \in s'.H$ tel que $V'h' = T'$. Les égalités

$$V(j.h') = (T \square\!\square V')h' = T \square\!\square T' = Vh$$

entraînent $j.h' = h$. De plus $p(h') = k$, car pV' est une limite projec-

$$\begin{tikzcd}
 & & \hat{s}'' \arrow[dll, "T'"'] \arrow[d, "c(h')"'] \arrow[dd, bend left, "c(h)"] \\
F' \arrow[d, "T"'] & & \hat{s}' \arrow[ll, "V'"'] \arrow[d, "c(j)"'] \\
F & & \hat{s} \arrow[ll, "V"]
\end{tikzcd}$$

tive naturalisée et

$$(pV')p(h') = pT' = (pV')k.$$

Donc j est une p-injection.

3°) Supposons que $V = (F, v, \hat{s})$, pV et $W' = (p.F', w', \hat{x})$ soient des limites projectives naturalisées, et que j soit une p-injection de but s vérifiant $(pV)p(j) = pT \square\!\square W'$; posons $s' = \alpha(j)$. Comme T est une $\mathfrak{N}(p)$-injection, il existe une unique transformation naturelle V' telle que $Vj = T \square\!\square V'$ et $pV' = W'$. Montrons que V' est une limite projective naturalisée. En effet, supposons $T' = (F', t', \hat{s}'') \in \mathfrak{N}(H^{\cdot}, C^{\cdot})$ et $s'' \in H_0^{\cdot}$. La transformation naturelle $T \square\!\square T'$ ayant $\hat{s}''$ pour source et F pour but, il existe $h \in s.H.s''$ tel que $Vh = T \square\!\square T'$. Puisque $W' = pV'$ est une limite projective naturalisée, il existe un unique $k \in K$ tel que $W'k = pT'$; des égalités

$$(pV)p(h) = pT \square\!\square pT' = pT \square\!\square (W'k) = p(Vj)k = (pV)(p(j).k),$$

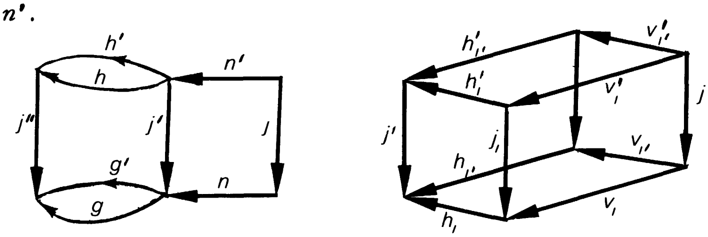
on déduit $p(h) = p(j).k$, car pV est une limite projective naturalisée. j étant une p-injection, il existe un unique $h' \in s'.H.s''$ vérifiant $j.h' = h$ et $p(h') = k$. Ce h' est l'unique morphisme de $H^{\cdot}$ tel que $V'h' = T'$, étant donné que T est une $\mathfrak{N}(p)$-injection et que

$$T \square\!\square (V'h') = (Vj)h' = Vh = T \square\!\square T' \text{ et } p(V'h') = W'k = pT'. \quad \nabla$$

COROLLAIRE 1. *Si j_i est une p-injection pour tout $i \in J$ et s'il existe un morphisme j produit de $(j_i)_{i \in J}$ dans p, alors j est une p-injection.*

COROLLAIRE 2. *Soit n un noyau de (g, g') dans p, h et h' des p-sous-morphismes relativement à (j'', j') de g et de g' respectivement. Si m est un noyau de $(p(h), p(h'))$ dans $K^{\cdot}$, il existe un noyau n' de (h, h')*

dans $H^{\cdot}$ *tel que* $p(n') = m$ *si, et seulement si, il existe une* p*-injection* j *vérifiant* $p(n.j) = p(j').m$; *et dans ce cas on peut choisir* n' *tel que* $n.j = j'.n'$.



COROLLAIRE 3. *Supposons que* $((h_i)_{i \in J}, (v_i)_{i \in J})$ *soit un produit fibré naturalisé dans* $H^{\cdot}$. *Soit* j' *une* p*-injection de but* $\beta(h_i)$ *et* h'_i *un* p*-sous-morphisme de* h_i *relativement à* (j', j_i) *pour tout* $i \in J$. *Si* $((p(h'_i))_{i \in J}, (w'_i)_{i \in J})$ *est un produit fibré naturalisé dans* $K^{\cdot}$, *il existe un produit fibré naturalisé* $((h'_i)_{i \in J}, (v'_i)_{i \in J})$ *dans* p *vérifiant* $p(v'_i) = w'_i$ *pour tout* $i \in J$ *si, et seulement si, il existe une* p*-injection* j *telle que* $p(v_i.j) = p(j_i).w'_i$ *pour tout* $i \in J$.

2. Catégories structurées.

Nous supposons désormais donnés un univers $\mathfrak{U}$, la catégorie $\mathfrak{M}$ des applications associée et un foncteur p d'une catégorie $H^{\cdot}$ vers $\mathfrak{M}$. Nous notons p_γ le foncteur de $H^{\cdot}_\gamma$ vers $\mathfrak{M}_\gamma$ restriction de p, où $H^{\cdot}_\gamma$ et $\mathfrak{M}_\gamma$ sont les groupoïdes des éléments inversibles de $H^{\cdot}$ et de $\mathfrak{M}$ respectivement.

DEFINITION. On dit que p est un *foncteur d'homomorphismes saturé* si p est fidèle et si p_γ est un foncteur d'hypermorphismes saturé, i.e. vérifie la condition :

Si $s \in H^{\cdot}_0$ et si f est une bijection telle que $\alpha(f) = p(s)$, il existe un et un seul $h \in H^{\cdot}_\gamma . s$ tel que $p(h) = f$.

PROPOSITION 1. *Soient* p *un foncteur d'homomorphismes saturé et* F *un foncteur de* $C^{\cdot}$ *vers* $H^{\cdot}$. *Si* F *admet une limite projective dans* p, *il existe une unique limite projective naturalisée* T *de but* F *telle que* pT *soit la limite projective naturalisée canonique de* $p.F$ *dans* $\mathfrak{M}$.

Δ. Soit $T' = (F, t', \hat{s}')$ une limite projective naturalisée dans p. Alors pT' est une limite projective naturalisée de but $p.F = F'$. Par ailleurs soit A la limite projective canonique de F', c'est-à-dire [Al] l'ensemble des familles $(x_i)_{i \in C_o^{\cdot}}$ telles que

$$x_i \in F'(i) \text{ et } F'(m)(x_i) = x_j \text{ si } m \in j.C.i;$$

notons v_i la projection canonique de A vers $F'(i)$ pour toute unité i de $C^{\cdot}$. Il existe une et une seule bijection f de $p(s')$ sur A telle que $v_i.f = p(t'(i))$ pour tout $i \in C_o^{\cdot}$. Par définition d'un foncteur d'homomorphismes saturé, il existe un unique $h \in H_\gamma^{\cdot}.s'$ appliqué par p sur f. Il s'ensuit que $T = (F, t, \hat{s})$ est la limite projective naturalisée cherchée, où $s = \beta(h)$ et $t(i) = t'(i).h^{-1}$ pour toute unité i de $C^{\cdot}$. ∇

HYPOTHESE. Nous supposons dans toute la suite que p est un foncteur d'homomorphismes saturé de $H^{\cdot}$ vers $\mathfrak{M}$.

De la proposition 1, il résulte en particulier que, si (h, h') admet un produit fibré dans p, il existe un produit fibré naturalisé $((h,v),(h',v'))$ tel que $p(v)$ et $p(v')$ soient les restrictions des projections canoniques du produit $p(\alpha(h)) \times p(\alpha(h'))$ à la partie $p(h) \vee p(h')$ de ce produit formée des couples (x, x') vérifiant $p(h)(x) = p(h')(x')$. Nous l'appellerons *produit fibré naturalisé canonique de* (h, h') *dans* p, nous poserons $h \vee h' = \alpha(v)$ et nous dirons que v et v' sont les projections canoniques de $h \vee h'$ vers $\alpha(h)$ et $\alpha(h')$.

De même, si $(s_i)_{i \in J}$ admet un produit dans p, nous noterons $\prod_{i \in J} s_i$ son *produit canonique dans* p, c'est-à-dire le produit S tel que $p(S)$ soit l'ensemble produit de $(p(s_i))_{i \in J}$ et que la projection canonique de S vers s_i soit l'unique $v_i \in s_i.H.S$ tel que $p(v_i)((x_i)_{i \in J}) = x_i$.

Enfin si (h, h') admet un noyau dans p, son noyau canonique est l'unique n tel que $p(n)$ soit l'injection canonique dans $p(\alpha(h))$ de sa partie formée des x vérifiant $p(h)(x) = p(h')(x)$.

Par ailleurs, si j est une p-injection, où $p(j)$ est l'injection canonique (B, ι, B') de $B' \subset B$ dans B, alors $s' = \alpha(j)$ est l'unique p-sous-structure de $s = \beta(j)$ vérifiant $p(s') = B'$; on dit que c'est la p-sous-structure de s *définie par* B'.

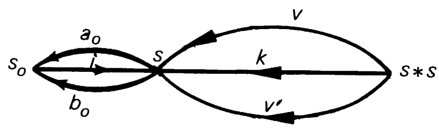
DEFINITION. On appelle *catégorie p-structurée* un couple $(C^{\cdot}, s)$ vérifiant les conditions suivantes :

1°) $C^{\cdot}$ est une catégorie, $s \in H^{\cdot}_{o}$ et $p(s) = C$;

2°) Il existe une unité s_o de $H^{\cdot}$ et des éléments $a_o \in s_o . H . s$, $b_o \in s_o . H . s$ et $i \in s . H . s_o$ tels que

$$p(i) = (C, \iota, C^{\cdot}_{o}), \quad p(a_o) = (C^{\cdot}_{o}, \alpha, C), \quad p(b_o) = (C^{\cdot}_{o}, \beta, C).$$

3°) Il existe un produit fibré naturalisé canonique $a_o \vee b_o = s * s$ dans p et un $k \in s . H . s * s$ tel que $p(k) = (C, \kappa, C^{\cdot} * C^{\cdot})$ soit la loi de composition de $C^{\cdot}$.



PROPOSITION 2. *Soit $(C^{\cdot}, s)$ une catégorie p-structurée. Avec les notations de la définition, s_o est une p-sous-structure de s et i un noyau de $(s, i . a_o)$ et un noyau de $(s, i . b_o)$. S'il existe un produit canonique $s \times s$ de (s, s) dans p, alors $s * s$ en est une p-sous-structure.*

Δ. Puisque p est fidèle et que $p(a_o . i)$ est l'application identique de $C^{\cdot}_{o}$, l'élément a_o est un inverse à gauche de i; il s'ensuit (proposition 1-1) que i est une p-injection. De plus i est un noyau de (s, a), où $a = i . a_o$, d'après la proposition 3-1, car $p(i)$ est le noyau canonique de $(p(s), p(a))$ dans $\mathfrak{M}$. On voit de même que i est un noyau de (s, b), où $b = i . b_o$. La dernière affirmation résulte de la proposition 2-1. ∇

PROPOSITION 3. *Si p est un foncteur à produits fibrés finis (resp. à noyaux), $(C^{\cdot}, s)$ est une catégorie p-structurée si, et seulement si, les conditions suivantes sont vérifiées :*

1°) $C^{\cdot}$ est une catégorie, $s \in H^{\cdot}_{o}$ et $p(s) = C$.

2'°) Il existe $a \in s . H . s$ et $b \in s . H . s$ tels que

$$p(a) = (C, \alpha, C) \quad \text{et} \quad p(b) = (C, \beta, C)$$

et un produit fibré naturalisé $((a, v), (b, v'))$ dans p.

3'°) Si on désigne par $s * s$ le produit fibré canonique de (a, b) dans p, il existe $k \in s . H . s * s$ tel que $p(k) = (C, \kappa, C^{\cdot} * C^{\cdot})$.

Δ. 1°) Si $(C^{\cdot}, s)$ est une catégorie p-structurée, les conditions sont vérifiées en prenant

$$a = i . a_o \text{ et } b = i . b_o ;$$

en effet, i étant un monomorphisme, $s * s$ est un produit fibré de (a, b) si, et seulement si, c'est un produit fibré de (a_o, b_o).

2°) Supposons que p soit à noyaux et que les conditions de la proposition soient remplies. Il existe un noyau canonique i de (s, a) dans p, et $p(i)$ est l'injection canonique de $C_o^\bullet$ dans C. Comme i est une p-injection (proposition 3-1) et que $p(a) = p(i).(C_o^\bullet, \alpha, C)$, il existe un et un seul $a_o \in H.s$ vérifiant

$$i . a_o = a \text{ et } p(a_o) = (C_o^\bullet, \alpha, C).$$

De même il existe $b_o \in H.s$ tel que $i . b_o = b$ et $p(b_o) = (C_o^\bullet, \beta, C)$. Le produit fibré de (a, b) étant aussi un produit fibré de (a_o, b_o), il en résulte que $(C^\bullet, s)$ est une catégorie p-structurée.

3°) a- Supposons vérifiées les conditions 1 et 2' de l'énoncé. Il existe un produit fibré naturalisé canonique $((a, v), (b, v'))$ dans p et $s * s = a \vee b$ admet $C^\bullet * C^\bullet = (C, \alpha, C) \vee (C, \beta, C)$ pour image par p. Comme p est fidèle, $a . s = a = b . a$, car $\alpha(x) = \beta(\alpha(x))$ pour tout $x \in C$. Par suite il existe un unique $j_a \in s * s . H . s$ vérifiant

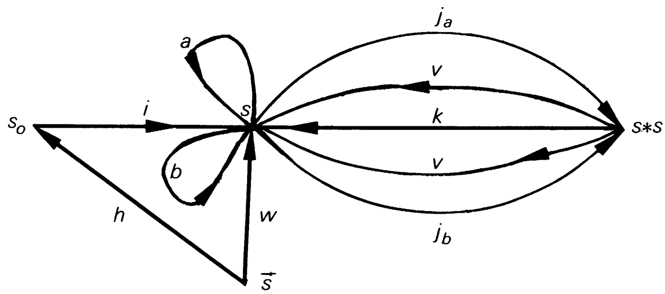
$$v . j_a = s \text{ et } v' . j_a = a.$$

L'application $p(j_a)$ de C dans $C^\bullet * C^\bullet$ associe $(x, \alpha(x))$ à x. De même les égalités $a . b = b = b . s$ assurent l'existence d'un unique $j_b \in s * s . H . s$ tel que

$$v . j_b = b \text{ et } v' . j_b = s,$$

et $p(j_b)$ associe $(\beta(x), x)$ à $x \in C$; remarquons que j_a et j_b sont des p-injections d'après la proposition 1-1, car ils ont des inverses à gauche.

b- Supposons de plus que p soit à produits fibrés finis et que la condition 3' soit remplie. Montrons qu'il existe une p-injection i telle que $p(i) = (C, \iota, C_o^\bullet)$. Une démonstration analogue à la fin de la partie 2 prouvera alors que $(C^\bullet, s)$ est une catégorie p-structurée. Voyons d'abord qu'il existe une p-injection de source $\overline{s}$, de but s, telle que $p(\overline{s})$ soit la diagonale D de $C_o^\bullet \times C_o^\bullet$. Avec les notations de la partie a, il existe un produit fibré naturalisé canonique $((j_a, w), (j_b, w'))$ dans p. Si $\overline{s}$ est source de w, l'ensemble $p(\bar{s})$ est formé des couples $(x, y) \in C \times C$ ls que $(x, \alpha(x)) = (\beta(y), y)$, i.e. tels que $x = \beta(x)$ et $\alpha(x) = y$, encore tels que $x = y \in C_o^\cdot$. Autrement dit, $p(\bar{s}) = D$. Les applications $w)$ et $p(w')$ de D dans C associant e à $(e, e) \in D$, on trouve $w = w'$,



car p est fidèle. Il en résulte que w est un noyau de (j_a, j_b) dans p et que (prop. 3-1) w est une p-injection. L'application $f : (e, e) \to e$ de D sur $C_o^\cdot$ étant une bijection, il existe un unique inversible h de $H^\cdot$ de source $\bar{s}$ tel que $p(h) = f$. Le composé $i = w . h^{-1}$ est une p-injection et

$$p(i) = p(w) . f^{-1} = (C, \iota, C_o^\cdot).$$

Ceci achève la démonstration. ∇

DEFINITION. On appelle *foncteur p-structuré* un triplet $((\bar{C}^\cdot, \bar{s}), h, (C^\cdot, s))$ vérifiant les conditions suivantes :

1°) $(C^\cdot, s)$ et $(\bar{C}^\cdot, \bar{s})$ sont des catégories p-structurées.

2°) $h \in \bar{s}.H.s$ et $p(h)$ définit un foncteur de $C^\cdot$ vers $\bar{C}^\cdot$, désigné par $(\bar{C}^\cdot, \underline{h}, C^\cdot)$.

Nous noterons $\mathfrak{F}(p)$ l'ensemble des foncteurs p-structurés. On voit que $\mathfrak{F}(p)$ est une catégorie pour la loi de composition

$$(((\bar{C}_1^\cdot, \bar{s}_1), h_1, (C_1^\cdot, s_1)), ((\bar{C}^\cdot, \bar{s}), h, (C^\cdot, s))) \to ((\bar{C}_1^\cdot, \bar{s}_1), h_1 . h, (C^\cdot, s))$$

si, et seulement si, $(C_1^\cdot, s_1) = (\bar{C}^\cdot, \bar{s})$.

Cette catégorie admet pour classe d'objets l'ensemble $\mathfrak{F}(p)_o$ des catégories p-structurées.

On définit des foncteurs p_H et $p_{\mathfrak{F}}$ de $\mathfrak{F}(p)$ vers $H^\cdot$ et vers la catégorie $\mathcal{F}$ des foncteurs en associant à $((\overline{C}^{\bullet}, \overline{s}), h, (C^{\bullet}, s))$ respectivement h et $(\overline{C}^{\bullet}, \underline{h}, C^{\bullet})$. On note $\hat{p}$ le foncteur $p.\hat{p}_H$ de $\mathcal{F}(p)$ vers $\mathfrak{M}$. On a aussi $\hat{p} = p_{\mathcal{F}}.\hat{p}_{\mathcal{F}}$, où $p_{\mathcal{F}}$ est le foncteur d'oubli de $\mathcal{F}$ vers $\mathfrak{M}$.

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{F}(p) \arrow[dl, "\hat{p}_H"'] \arrow[dr, "\hat{p}_{\mathcal{F}}"] \arrow[dd, "\hat{p}"] & \\ H \arrow[dr, "p"'] & & \mathcal{F} \arrow[dl, "p_{\mathcal{F}}"] \\ & \mathfrak{M} & \end{tikzcd}$$

PROPOSITION 4. *$\hat{p}$ est un foncteur d'homomorphismes saturé.*

Δ. $\hat{p}_H$ étant évidemment fidèle et p étant fidèle, $\hat{p}$ est fidèle. Soient $(C^{\bullet}, s)$ une catégorie p-structurée et f une bijection de C sur C'. Il existe par hypothèse un unique $h \in H_{\gamma}^{\bullet}.s$ tel que $p(h) = f$. Posons $s' = \beta(h)$ et notons $C'^{\bullet}$ la catégorie image de $C^{\bullet}$ par f.

1°) Montrons que $(C'^{\bullet}, s')$ est une catégorie p-structurée. En effet, reprenons pour $(C^{\bullet}, s)$ les notations de la définition d'une catégorie p-structurée.

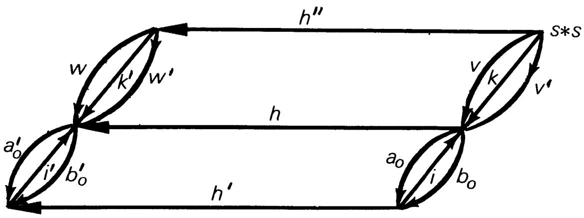
a- Si $s_o = \alpha(i)$ et si f' est la bijection de $C_o^{\bullet}$ sur $C_o'^{\bullet}$ restriction de f, il existe $h' \in H_{\gamma}^{\bullet}.s_o$ tel que $p(h') = f'$. Soit $s'_o = \beta(h')$. On trouve

$$i' = h.i.h'^{-1} \in s'.H.s'_o, \quad a'_o = h'.a_o.h^{-1} \in s'_o.H.s',$$

$$b'_o = h'.b_o.h^{-1} \in s'_o.H.s', \quad p(i') = (C', \iota, C_o'^{\bullet}),$$

$$p(a'_o) = (C'^{\bullet}, \alpha', C'), \quad p(b'_o) = (C_o'^{\bullet}, \beta', C'),$$

où α' et β' sont les surjections source et but de $C'^{\bullet}$.



b- Puisque h' est inversible et que $h'.a_o = a'_o.h$ et $h'.b_o = b'_o.h$, le couple $((a'_o.h, v), (b'_o.h, v'))$ est un produit fibré naturalisé dans p, ainsi que $((a'_o, h.v), (b'_o, h.v'))$, car h est inversible. Par suite, il existe un produit fibré naturalisé $((a'_o, w), (b'_o, w'))$ canonique. L'unique inversible h'' tel que

$$w.h'' = h.v \text{ et } w'.h'' = h.v'$$

admet pour image par p l'application de $C^{\cdot} * C^{\cdot}$ vers $C'^{\cdot} * C'^{\cdot}$ restriction de $f * f$. Il en résulte que, si $k' = h.k.h''^{-1}$, l'application $p(k')$ est la loi de composition de $C'^{\cdot}$. Donc $(C'^{\cdot}, s') \in \mathcal{F}(p)_o$.

2°) f définit l'isomorphisme canonique de $C^{\cdot}$ sur $C'^{\cdot}$, de sorte que $\hat{h} = ((C'^{\cdot}, s'), h, (C^{\cdot}, s))$ est un foncteur p-structuré, qui est un inversible de $\mathcal{F}(p)$. Si $\hat{h}_1 = ((C_1^{\cdot}, s_1), h_1, (C^{\cdot}, s)) \in \mathcal{F}(p)_\gamma$ et $\bar{p}(\hat{h}_1) = f$, alors $C_1^{\cdot} = C'^{\cdot}$ et

$$h_1 = \bar{p}_H(\hat{h}_1) \in H_\gamma^{\cdot} . s, \text{ d'où } h = h_1 \text{ et } \hat{h}_1 = \hat{h}.$$

Ainsi $\bar{p}$ est un foncteur d'homomorphismes saturé. ∇

Si $(C^{\cdot}, s)$ est une catégorie p-structurée et f une bijection de C sur C', l'unique catégorie p-structurée $(C'^{\cdot}, s')$ associée à $(C^{\cdot}, s)$ et à f par la preuve précédente est appelée *catégorie p-structurée image de $(C^{\cdot}, s)$ par f.*

PROPOSITION 5. *Soient $(C^{\cdot}, s)$ une catégorie p-structurée et $C'^{\cdot}$ une sous-catégorie de $C^{\cdot}$. Si l'une des conditions suivantes est vérifiée, C' définit une $\bar{p}$-sous-structure $(C'^{\cdot}, s')$ de $(C^{\cdot}, s)$.*

1- p est un foncteur à produits fibrés finis et C' définit une p-sous-structure s' de s.

2- p est un foncteur à noyaux et $C'^{\cdot} * C'^{\cdot}$ définit une p-sous-structure $\bar{s}'$ de $s * s = a \vee b$.

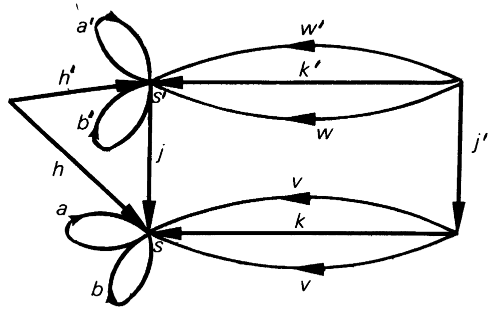
Δ. 1°) Nous reprenons les notations de la proposition 3 et nous désignons par α', β' et κ' les surjections source, but et loi de composition de $C'^{\cdot}$; ce sont des restrictions de celles α, β et κ de $C^{\cdot}$.

a- Supposons la condition 1 vérifiée et soit j la p-injection canonique de source s', de but s. Comme

$$p(j).(C', \alpha', C') = p(a).p(j),$$

il existe un p-sous-morphisme a' de a relativement à (j, j), vérifiant $p(a') = (C', \alpha', C')$. De même il existe un p-sous-morphisme b' de b relativement à (j, j), et $p(b') = (C', \beta', C')$. Soient $((a, v), (b, v'))$ et $((a', w), (b', w'))$ les produits fibrés naturalisés canoniques dans p (qui existent par hypothèse). D'après la proposition 5-1, l'unique j' tel que

$$v\,.\,j' = j\,.\,w \text{ et } v'\,.\,j' = j\,.\,w'$$



est une p-injection. L'application $p(j')$ étant l'injection canonique de $C'\cdot_* C'\cdot$ dans $C\cdot_* C\cdot$, on a

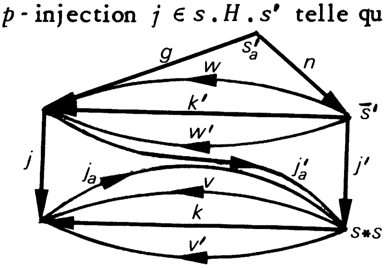
$$p(k).p(j') = p(j).(C', \kappa', C'\cdot_* C'\cdot),$$

de sorte qu'il existe un p-sous-morphisme k' de k relativement à (j, j') vérifiant $p(k') = (C', \kappa', C'\cdot_* C'\cdot)$. Donc $(C'\cdot, s')$ est une catégorie p-structurée.

b- Supposons la condition 2 remplie, et soit j' la p-injection canonique de source $\overline{s}'$, de but $s * s$. Il existe un noyau canonique n de $(v'.j', a.v.j')$ dans p, à savoir la p-injection canonique de but $\overline{s}'$, de source s'_a, où $p(s'_a)$ est l'ensemble des couples $(x, \alpha(x))$, $x \in C'$. Le foncteur d'homomorphismes p étant saturé, il existe $g \in H^{\bullet}_{\gamma}\,.\,s'_a$ tel que $p(g)$ soit la bijection $(x, \alpha(x)) \to x$ de $p(s'_a)$ sur C'; posons $s' = \beta(g)$. Le composé $j'.n.g^{-1}$ est une p-injection j'_a appliquée par p sur une restriction de l'application $\gamma_a : x \to (x, \alpha(x))$ de C dans $C\cdot_* C\cdot$. D'après la partie 3a de la proposition 3, il existe une p-injection $j_a \in s * s.H.s$ vérifiant $p(j_a) = \gamma_a$. Puisque

$$p(j'_a) = p(j_a).(C, \iota, C'),$$

il existe une unique p-injection $j \in s.H.s'$ telle que



$$j'_a = j_a . j \text{ et } p(j) = (C, \iota, C').$$

On voit comme dans la partie a qu'il existe des p-sous-morphismes a' et b' de a et b relativement à (j, j) et k' de k relativement à (j, j') vérifiant :

$$p(a') = (C', \alpha', C'), \quad p(b') = (C', \beta', C'),$$

$$p(k') = (C', \kappa', C'^{\bullet} * C'^{\bullet}).$$

Enfin le corollaire 3 de la proposition 5-1 entraîne qu'il existe un produit fibré naturalisé canonique $((a', w), (b', w'))$ dans p et que

$$\bar{s}' = a' \vee b', \quad v.j' = j.w \text{ et } v'.j' = j.w'.$$

Ainsi $(C'^{\bullet}, s')$ est une catégorie p-structurée.

2°) Nous venons de voir, dans les deux cas précédents, que $\hat{j} = ((C^{\bullet}, s), j, (C'^{\bullet}, s'))$ est un foncteur p-structuré. Montrons que $\hat{j}$ est une $\hat{p}$-injection. En effet, supposons

$$\hat{h} = ((C^{\bullet}, s), h, (\bar{C}^{\bullet}, \bar{s})) \in \mathfrak{F}(p) \text{ et } \hat{p}(\hat{h}) = \hat{p}(\hat{j}).k.$$

Puisque j est une p-injection et que

$$p(h) = \hat{p}(\hat{h}) = p(j).k,$$

il existe un unique $h' \in s'.H.\bar{s}$ vérifiant $p(h') = k$ et $j.h' = h$. L'application $p(h)$ définissant un foncteur de $\hat{C}^{\bullet}$ vers $C^{\bullet}$ prenant ses valeurs dans C', l'application $p(h')$ définit un foncteur de $\bar{C}^{\bullet}$ vers $C'^{\bullet}$. Donc $((C'^{\bullet}, s'), h', (\bar{C}^{\bullet}, \bar{s}))$ est l'unique élément $\hat{h}'$ de $\mathfrak{F}(p)$ tel que $\hat{j}.\hat{h}' = \hat{h}$ et $\hat{p}(\hat{h}') = k$, de sorte que $(C'^{\bullet}, s')$ est une $\hat{p}$-sous-structure de $(C^{\bullet}, s)$. ∇

REMARQUE. Soient $(C^{\bullet}, s)$ une catégorie p-structurée et $(C'^{\bullet}, s')$ une de ses $\hat{p}$-sous-structures. Comme (C, ι, C') définit un foncteur de $C'^{\bullet}$ vers $C^{\bullet}$, la catégorie $C'^{\bullet}$ est une sous-catégorie de $C^{\bullet}$; mais s' peut ne pas être une p-sous-structure de s. Cependant s'il existe une p-sous-structure $\bar{s}$ de s définie par C', on a $s' = \bar{s}$, car $(C'^{\bullet}, \bar{s})$ est alors l'unique $\hat{p}$-sous-structure de $(C^{\bullet}, s)$ définie par C', si p est à produits fibrés finis.

DEFINITION. On appelle *sous-catégorie p-structurée* de $(C^{\bullet}, s) \in \mathfrak{F}(p)_0$ une $\hat{p}$-sous-structure $(C'^{\bullet}, s')$ de $(C^{\bullet}, s)$ telle que s' soit une p-sous-structure de s. On appelle *$\hat{p}$-monomorphisme strict* une $\hat{p}$-injection $\hat{j}$ telle que $\hat{p}_H(\hat{j})$ soit un p-monomorphisme.

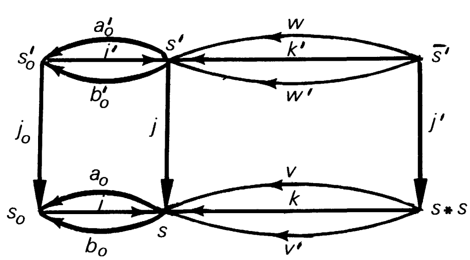
Pour que $\hat{j} = ((C^\bullet, s), j, (\overline{C}^\bullet, \overline{s})) \in \mathfrak{F}(p)$ soit un $\hat{p}$-monomorphisme strict, il faut et il suffit que $p(j)$ soit une injection et que la catégorie p-structurée $(C'^\bullet, s')$ image de $(\overline{C}^\bullet, \overline{s})$ par la bijection de $\overline{C}$ sur C' restriction de $p(j)$ soit une sous-catégorie p-structurée de $(C^\bullet, s)$ (i.e. que s' soit une p-sous-structure de s).

PROPOSITION 6. *Soient $(C^\bullet, s)$ une catégorie p-structurée et $C'^\bullet$ une sous-catégorie de $C^\bullet$. Alors C' définit une sous-catégorie p-structurée de $(C^\bullet, s)$ si, et seulement si, C', $C'^\bullet_o$ et $C'^\bullet * C'^\bullet$ définissent respectivement des p-sous-structures de s, de s_o et de $s * s$.*

Δ. Reprenons les notations de la définition d'une catégorie p-structurée et soit $((a_o, v), (b_o, v'))$ le produit fibré naturalisé canonique dans p. Nous notons α', β' et κ' respectivement les surjections source, but et loi de composition de $C'^\bullet$.

1°) Soit $(C'^\bullet, s')$ une sous-catégorie p-structurée de $(C^\bullet, s)$. Comme $C'^\bullet_o \subset C^\bullet_o$, la p-sous-structure s'_o de s', et a fortiori de s, définie par $C'^\bullet_o$ est une p-sous-structure de s_o. Si a'_o et b'_o sont les p-sous-morphismes de a_o et b_o structurant α' et β', le produit fibré canonique $s' * s' = a'_o \vee b'_o$ est une p-sous-structure de $s * s = a_o \vee b_o$ (proposition 5-1).

2°) Inversement, supposons qu'il existe des p-sous-structures s'_o de s_o, s' de s et $\overline{s}'$ de $s * s$ définies par $C'^\bullet_o$, par C' et par $C'^\bullet * C'^\bullet$; soient $j_o \in s_o . H . s'_o$, $j \in s . H . s'$ et $j' \in s * s . H . \overline{s}'$ les p-injections canoniques. Puisque α', β' et κ' sont des restrictions de α, β et κ, on voit comme dans la proposition 5 qu'il existe des p-sous-morphismes a'_o et b'_o de a_o et b_o relativement à (j_o, j), i' de i relativement à (j, j_o), k', w et w' de k, v, v' relativement à (j, j'), tels que les morphismes



a'_o, b'_o, i' et k' structurent respectivement α', β', $(C', \iota, C'^{\bullet}_o)$ et κ' et que $((a'_o, w), (b'_o, w'))$ soit un produit fibré naturalisé canonique dans p. Par suite $(C'^{\bullet}, s')$ est une sous-catégorie p-structurée de $(C^{\bullet}, s)$, et $\overline{s'} = s' * s'$. ∇

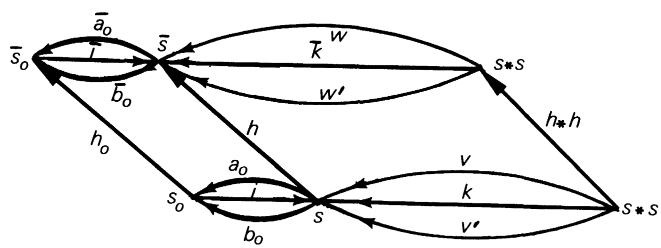
Soit $\hat{h} = ((\overline{C}^{\bullet}, \overline{s}), h, (C^{\bullet}, s))$ un foncteur p-structuré. Si s_o et s_o sont les p-sous-structures de s et de $\overline{s}$ définies par $C^{\bullet}_o$ et par $\overline{C}^{\bullet}_o$ et i et $\overline{i}$ les p-injections canoniques correspondantes, il existe un p-sous-morphisme h_o de h relativement à $(\overline{i}, i)$, car $p(h)$ définit un foncteur de $C^{\bullet}$ vers $\overline{C}^{\bullet}$ de sorte que $p(h)(C^{\bullet}_o) \subset \overline{C}^{\bullet}_o$. Par ailleurs, si $((a, v), (b, v'))$ et $((\overline{a}, w), (\overline{b}, w'))$ sont les produits fibrés naturalisés intervenant dans la définition de $(C^{\bullet}, s)$ et de $(\overline{C}^{\bullet}, \overline{s})$, l'égalité $\overline{a}.h.v = \overline{b}.h.v'$ entraîne qu'il existe un unique $h * h \in H$ tel que

$$w.h * h = h.v \quad \text{et} \quad w'.h * h = h.v';$$

ainsi $h * h$ admet pour source $s * s = a \vee b$, pour but $\overline{s} * \overline{s} = \overline{a} \vee \overline{b}$ et $p(h * h)$ est l'application

$$(x, y) \to (p(h)(x), p(h)(y)) \text{ de } C^{\bullet} * C^{\bullet} \text{ dans } \overline{C}^{\bullet} * \overline{C}^{\bullet}.$$

Comme h_o et $h * h$ sont déterminés de façon unique, les applications $\hat{h} \to h_o$ et $\hat{h} \to h * h$ de $\mathcal{F}(p)$ dans H définissent des foncteurs $\hat{p}^o$ et $\hat{p}''$ de $\mathcal{F}(p)$ vers $H^{\bullet}$.

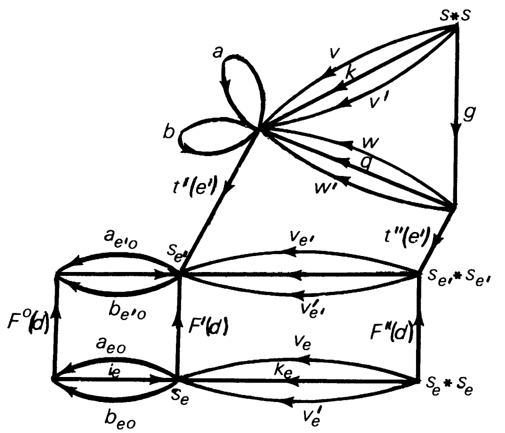


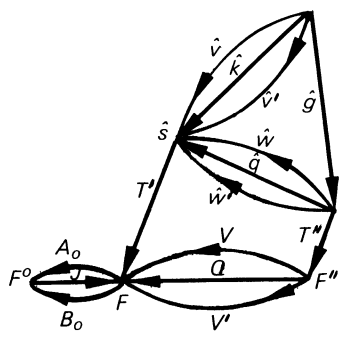
PROPOSITION 7. *Supposons que F soit un foncteur d'une catégorie $K^{\bullet}$ vers $\mathcal{F}(p)$ et que les foncteurs $F' = \hat{p}_H . F$ et $F'' = \hat{p}'' . F$ admettent des limites projectives dans p. Alors si $F^o = \hat{p}^o . F$ admet une limite projective dans p (resp. si p est à produits fibrés finis ou à noyaux), F admet une limite projective $(C^{\bullet}, s)$ dans $\hat{p}$, où $C^{\bullet}$ et s sont respectivement les limites projectives canoniques de $\hat{p}_{\mathcal{F}} . F$ et de F'.*

Δ. Soit e une unité de $K^\bullet$. Posons

$$F(e) = (C^\bullet_e, s_e),\quad F^o(e) = s_{eo},\quad F''(e) = s_e * s_e.$$

Soient $a_{eo} \in s_{eo}.H.s_e$, $b_{eo} \in s_{eo}.H.s_e$, $k_e \in s_e.H.s_e * s_e$ et $i_e \in s_e.H.s_{eo}$ les morphismes structurant les applications source α_e, but β_e et loi de composition κ_e de $C^\bullet_e$ et l'injection canonique $(C_e, \iota, C^\bullet_{eo})$. Il existe des produits fibrés naturalisés $((a_{eo}, v_e),(b_{eo}, v'_e))$ dans p, et $((a_e, v_e),(b_e, v'_e))$ est aussi un produit fibré naturalisé dans p, où $a_e = i_e.a_{eo}$ et $b_e = i_e.b_{eo}$. Si $\tilde{a}_o$, $\tilde{b}_o$, $\tilde{k}$, $\tilde{\imath}$, $\tilde{v}$ et $\tilde{v}'$ sont les applications de $K^\bullet_o$ dans H associant à e respectivement a_{eo}, b_{eo}, k_e, i_e, v_e et v'_e, montrons que les triplets $A_o = (F^o, \tilde{a}_o, F')$, $B_o = (F^o, \tilde{b}_o, F')$, $Q = (F', \tilde{k}, F'')$, $J = (F', \tilde{\imath}, F^o)$, $V = (F', \tilde{v}, F'')$ et $V' = (F', \tilde{v}', F'')$ sont des transformations naturelles. En effet, si $d \in e'.K.e$, on obtient les





$\hat{m} = c(m)$

égalités

$$a_{e'o}.F'(d) = F^o(d).a_{eo},\quad b_{e'o}.F'(d) = F^o(d).b_{eo},$$

$$k_{e'}.F''(d) = F'(d).k_e,\quad i_{e'}.F^o(d) = F'(d).i_e,$$

$$v_{e'}.F''(d) = F'(d).v_e,\quad v'_{e'}.F''(d) = F'(d).v'_e,$$

car p est fidèle et $p(F'(d))$ définit un foncteur de $C^\bullet_e$ vers $C^\bullet_{e'}$. De plus $((A_o, V),(B_o, V'))$ est un produit fibré naturalisé dans $\mathfrak{N}(H^\bullet, K^\bullet)^{\square\square}$ ([2], chapitre I) et $((pA_o, pV),(pB_o, pV'))$ un produit fibré naturalisé dans $\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, K^\bullet)^{\square\square}$. De même $((A, V),(B, V'))$, où $A = J \square\square A_o$ et $B = J \square\square B_o$, est un produit fibré naturalisé dans $\mathfrak{N}(p)$.

2°) Soient $T' = (F', t', \hat{s})$ et $T'' = (F'', t'', \hat{s}')$ des limites projectives naturalisées canoniques dans p. Si $M^{\square\square}$ est la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{N}(H^\bullet, K^\bullet)^{\square\square}$ ayant pour seules unités F' et F'', il existe un unique foncteur L de $M^{\square\square}$ vers $H^\bullet$ qui soit un foncteur limite projective partiel sur $H^\bullet$ associé aux éjecteurs (T', s) et (T'', s'). Posons:

$$a = L(A), \quad b = L(B), \quad q = L(Q), \quad w = L(V), \quad w' = L(V')$$

et soit z le foncteur injection canonique de $M^{\square\square}$ vers $\mathfrak{N}(H^\bullet, K^\bullet)^{\square\square}$. Comme L est un foncteur coadjoint partiel du foncteur canonique c de $H^\bullet$ vers $\mathfrak{N}(H^\bullet, K^\bullet)^{\square\square}$, si Ω est une limite projective naturalisée dans $M^{\square\square}$ et si $z\Omega$ est une limite projective naturalisée, alors $L\Omega$ est une limite projective naturalisée, dans $\dot{H}^\bullet$ ([A1], corollaire, proposition 8-5-I, ou [2], théorème de commutativité des limites projectives). En particulier, $((A, V), (B, V'))$ étant un produit fibré naturalisé, $((a, w), (b, w'))$ est un produit fibré naturalisé dans $H^\bullet$. Etant donné que $((pA, pV), (pB, pV'))$ est un produit fibré naturalisé dans $\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, K^\bullet)^{\square\square}$ et que pT et pT' sont des limites projectives naturalisées dans $\mathfrak{M}$, on voit par un raisonnement analogue que $((p(a), p(w)), (p(b), p(w')))$ est aussi un produit fibré naturalisé dans $\mathfrak{M}$. Il s'ensuit qu'il existe un produit fibré naturalisé canonique $((a, v), (b, v'))$ dans p et un unique $g \in H^\bullet_\gamma$ tel que $v = w \cdot g$ et $v' = w' \cdot g$; soit $k = q \cdot g$. Puisque $pT' = (\hat{p}\mathcal{J}.F, \underline{p}t', \hat{C})$ et pT'' sont les limites projectives naturalisées canoniques dans $\mathfrak{M}$, les applications $p(a)$ et $p(b)$ associent à $(x_e)_{e \in K^\bullet_o} \in C$ respectivement $(\alpha_e(x_e))_{e \in K^\bullet_o}$ et $(\beta_e(x_e))_{e \in K^\bullet_o}$, tandis que $p(g)$ et $p(k)$ associent respectivement

$$((x'_e, x_e))_{e \in K^\bullet_o} \text{ et } (x'_e \cdot x_e)_{e \in K^\bullet_o} \text{ à } ((x'_e)_{e \in K^\bullet_o}, (x_e)_{e \in K^\bullet_o}).$$

Ceci montre que a, b et k structurent les applications source (C, α, C), but (C, β, C) et loi de composition κ de la catégorie $C^\bullet$ limite projective canonique du foncteur $\hat{p}\mathcal{J}.F$.

a-Si p est à produits fibrés finis ou à noyaux, ce qui précède montre que $(C^\bullet, s)$ vérifie les conditions de la proposition 3, de sorte que cette proposition affirme que $(C^\bullet, s)$ est une catégorie p-structurée.

b-Supposons que F^o admette une limite projective dans p et soit $T = (F^o, t, \hat{s}_o)$ la limite projective naturalisée canonique dans p; l'ensemble $p(s_o)$ étant la limite projective canonique de $p\,.\,F^o$, on trouve $p(s_o) = C_o^{\bullet}$. Les uniques morphismes a_o, b_o et i vérifiant

$$T a_o = A_o \boxminus T', \quad T b_o = B_o \boxminus T' \text{ et } T'i = J \boxminus T$$

sont appliqués par p respectivement sur $(C_o^{\bullet}, \alpha, C)$, sur $(C_o^{\bullet}, \beta, C)$ et sur $(C, \iota, C_o^{\bullet})$, et $((a_o, v), (b_o, v'))$ est un produit fibré naturalisé dans p. Donc $(C^{\bullet}, s)$ est une catégorie p-structurée.

3°) Montrons que $u = (C^{\bullet}, s)$ est une limite projective de F dans $\hat{p}$.

a-Si e est une unité de $K^{\bullet}$, on a $t'(e) \in s_e . H . s$ et $p(t'(e))$ définit un foncteur de $C^{\bullet}$ vers $C_e^{\bullet}$; par suite

$$y(e) = (F(e), t'(e), u) \in \mathfrak{F}(p).$$

De plus $F(d).y(e) = y(e')$ si $d \in e'.K.e$, car $\hat{p}_H$ est fidèle et

$$\hat{p}_H(F(d).y(e)) = F'(d).t'(e) = t'(e') = \hat{p}_H(y(e')).$$

Ainsi $Y = (F, y, \hat{u})$ est une transformation naturelle, où y est l'application $e \to y(e)$ de $K_o^{\bullet}$ dans $\mathfrak{F}(p)$, et $\hat{p}_H Y = T'$.

b-Supposons que $Y' = (F, y', \hat{u}')$ soit une transformation naturelle, où $u' = (G^{\bullet}, S) \in \mathfrak{F}(p)_o$. Comme $\hat{p}_H Y'$ est une transformation naturelle de $\hat{S}$ vers F', il existe un unique $h \in s.H.S$ vérifiant $T'h = \hat{p}_H Y'$, et $p(h)$ définit l'unique foncteur de $G^{\bullet}$ vers $C^{\bullet}$ tel que $(\hat{p}_{\mathfrak{F}} Y)p(h) = \hat{p}_{\mathfrak{F}} Y'$. On en déduit que (u, h, u') est l'unique foncteur p-structuré $\overline{h}$ tel que $Y\overline{h} = Y'$. Ceci prouve que Y est une limite projective naturalisée dans $\hat{p}$. ∇

COROLLAIRE. *Si p est un foncteur à $K^{\bullet}$-limites projectives (resp. à K-produits, resp. à produits fibrés finis, resp. à noyaux), il en est de même pour $\hat{p}$.*

PROPOSITION 8. *Soient F un foncteur de $K^{\bullet}$ vers $\mathfrak{F}(p)$ et $F' = \hat{p}_H . F$, $F'' = \hat{p}'' . F$. Dans les deux cas suivants, F admet une limite projective canonique $(C^{\bullet}, s)$ dans $\hat{p}$:*

1°) p est à produits fibrés finis et F' admet une limite projective dans p ;

2°) p est à noyaux et F'' admet une limite projective dans p. Dans chacun de ces cas, $C^{\bullet}$ est la catégorie limite projective de $\hat{p}_{\mathfrak{F}} . F$ et

s la limite projective canonique de F' dans p.

Δ. D'après la proposition 7, il suffit de prouver que F'' dans le premier cas, F' dans le second, admettent des limites projectives dans p. Reprenons les notations de la partie 1 de la preuve de la proposition 6.

1°) Supposons que p soit à produits fibrés finis et que $T'=(F',t',\hat{s})$ soit la limite projective naturalisée canonique dans p; notons encore a et b les éléments de $s.H.s$ tels que

$$T'a = A \square T' \quad \text{et} \quad T'b = B \square T'.$$

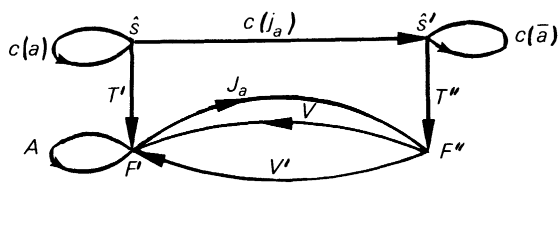
Dans p, il existe un produit fibré naturalisé canonique $((a,v),(b,v'))$. Le foncteur $\{1,2\}$-produit fibré canonique sur $H^{\bullet}$ étant compatible avec les limites projectives, $a \vee b$ est une limite projective de F'' (théorème de commutativité des limites projectives).

2°) Supposons que p soit à noyaux. Pour tout $e \in K_o^{\bullet}$, il existe (preuve de la proposition 3, partie 3) une p-injection j_{ea} de source s_e, de but $s_e * s_e$ telle que $p(j_{ea})(x) = (x, \alpha(x))$ si $x \in C_e$. Pour tout $d \in e'.K.e$, on a $F''(d).j_{ea} = j_{e'a}.F'(d)$, car p est fidèle et $\bar{p}(F(d))$ définit un foncteur de $C_e^{\bullet}$ vers $C_{e'}^{\bullet}$. Ainsi $J_a = (F'', \tilde{j}_a, F')$ est une transformation naturelle, où $\tilde{j}_a(e) = j_{ea}$ si $e \in K_o^{\bullet}$. Supposons que F'' admette une limite projective dans p. En notant $C^{\bullet}$ la catégorie limite projective de $\bar{p}\mathcal{J}.F$, il existe une limite projective naturalisée $\theta = (p.F'', m, \widehat{C^{\bullet} * C^{\bullet}})$ telle que

$$m(e')((x'_e)_{e \in K_o^{\bullet}}, (x_e)_{e \in K_o^{\bullet}}) = (x'_{e'}, x_{e'}) \text{ pour tout } e' \in K_o^{\bullet}.$$

Le foncteur d'homomorphismes p étant saturé, il existe une limite projective naturalisée $T'' = (F'', t'', \hat{s}')$ dans p telle que $pT'' = \theta$. Soit $\bar{a}$ l'unique élément de $s'.H.s'$ vérifiant $T''\bar{a} = J_a \square V \square T''$; alors $p(\bar{a})$ est l'application

$$(x', x) \to (x', \alpha(x')) \text{ de } C^{\bullet} * C^{\bullet} \text{ dans } C^{\bullet} * C^{\bullet}.$$



Comme $(p(\overline{a}), p(s'))$ admet pour noyau l'application $\gamma_a : x \mapsto (x, a(x)))$ de C dans $C^\bullet * C^\bullet$ et que p est un foncteur d'homomorphismes saturé à noyaux, il existe un noyau j_a de $(\overline{a}, s')$ dans p tel que $p(j_a) = \gamma_a$, et j_a est une p-injection (proposition 3-1). La source C de $p(j_a)$ étant une limite projective de $p.F'$, il résulte de la proposition 5-1 que la source s de j_a est une limite projective de F'. ∇

COROLLAIRE 1. *Soit* $\xi = ((C_i^\bullet, s_i))_{i \in K}$ *une famille de catégories p-structurées; si p est à produits fibrés finis et s'il existe un produit de* $(s_i)_{i \in K}$ *(resp. si p est à noyaux et s'il existe un produit de* $(s_i * s_i)_{i \in K}$*) dans p, alors ξ admet un produit* $(\prod_{i \in K} C_i^\bullet, s)$ *dans $\hat{p}$ tel que s soit le produit canonique de* $(s_i)_{i \in K}$ *dans p.*

COROLLAIRE 2. *Soit p un foncteur à produits fibrés finis (resp. à noyaux); si $\overline{h}$ et $\overline{h}'$ sont deux foncteurs p-structurés ayant même source, même but tels que* $(\hat{p}_H(\overline{h}), \hat{p}_H(\overline{h}'))$ *ait un noyau n dans p, il existe un noyau $\overline{n}$ de* $(\overline{h}, \overline{h}')$ *dans $\hat{p}$, et $\overline{n}$ est un $\hat{p}$-monomorphisme strict.*

Δ. D'après la proposition 8 (resp. proposition 7), il existe un noyau $\overline{n}$ de $(\overline{h}, \overline{h}')$ dans $\hat{p}$ tel que $\hat{p}_H(\overline{n}) = n$. Comme n est un p-monomorphisme, $\overline{n}$ est un $\hat{p}$-monomorphisme strict. ∇

3. Catégories structurées quasi-quotients.

HYPOTHESES. Nous supposons que $\mathfrak{U}$ et $\hat{\mathfrak{U}}$ sont deux univers tels que $\mathfrak{U} \subset \hat{\mathfrak{U}}$ et nous désignons par $\mathfrak{M}$ et $\hat{\mathfrak{M}}$ les catégories des applications associées, par $\hat{\mathfrak{M}}^\iota$ l'ensemble des injections canoniques (E, ι, E') d'une partie E' de $E \in \hat{\mathfrak{U}}$ dans E. Soit $\tilde{\mathfrak{U}}$ l'ensemble des éléments de $\hat{\mathfrak{U}}$ équipotents à un élément de $\mathfrak{U}$, et $\tilde{\mathfrak{M}}$ la sous-catégorie pleine de $\hat{\mathfrak{M}}$ ayant pour objets les éléments de $\tilde{\mathfrak{U}}$. Rappelons (prop. 3-15 [3]) que $\tilde{\mathfrak{U}}$ est un univers. Nous nous donnons un foncteur d'homomorphismes saturé $P = (\hat{\mathfrak{M}}, \underline{P}, \hat{H}^\bullet)$ de $\hat{H}^\bullet$ vers $\hat{\mathfrak{M}}$, et nous notons $H^\bullet$ et $\tilde{H}^\bullet$ les sous-catégories pleines de $\hat{H}^\bullet$ telles que $H = \overset{-1}{\underline{P}}(\mathfrak{M})$ et $\tilde{H} = \overset{-1}{\underline{P}}(\tilde{\mathfrak{M}})$. Soit X un ensemble de P-monomorphismes et X^ι l'ensemble des $j \in X$ tels que $P(j) \in \hat{\mathfrak{M}}^\iota$.

Comme P est un foncteur d'homomorphismes, si s est une P-sous-structure de $S \in \hat{H}_0^\bullet$, il existe une unique P-injection $j \in S.\hat{H}.s$ telle que $P(j) \in \hat{\mathfrak{M}}^\iota$; on l'appellera *P-injection canonique de s vers S.*

DEFINITION. Soit S une unité de $\hat{H}^{\bullet}$. On appelle *(X, P)-sous-structure* de S une P-sous-structure $\bar{s}$ de S telle que la P-injection canonique de $\bar{s}$ vers S appartienne à X. Si E est une partie de $P(S)$, on dit que $\bar{s}$ est la *(X, P)-sous-structure de S engendrée par E* si $\bar{s}$ est une (X, P)-sous-structure de S, si $E \subset P(\bar{s})$ et si $P(\bar{s}) \subset P(s')$ pour toute (X, P)-sous-structure s' de S telle que $E \subset P(s')$.

Ainsi $\bar{s}$ est la (X, P)-sous-structure de S engendrée par $E \subset P(S)$ si, et seulement si, c'est la plus petite (X, P)-sous-structure s de S telle que $E \subset P(s)$, l'ordre sur l'ensemble des (X, P)-sous-structures de S étant :

$$s < s' \text{ si, et seulement si, } P(s) \subset P(s').$$

S'il existe une (X, P)-sous-structure $\bar{s}$ de S engendrée par E, celle-ci est déterminée d'une façon unique. Si de plus $\bar{s}$ est une (X', P)-sous-structure de S, où $X' \subset X$, c'est aussi une (X', P)-sous-structure de S engendrée par E.

PROPOSITION 1. *Soient $S \in \hat{H}^{\bullet}_{o}$ et $E \subset P(S)$. Une (X, P)-sous-structure $\bar{s}$ de S est engendrée par E si, et seulement si, la P-injection canonique j de $\bar{s}$ vers S est un (X^{ι}, P)-sous-morphisme de S engendré par $(P(S), \iota, E)$* [A1].

Δ. Soit A l'ensemble des $j \in S.X^{\iota}$ tels que $E \subset P(s)$ et

$$P(j).(P(s), \iota, E) = (P(S), \iota, E),$$

où $s = \alpha(j)$; en associant s à j, on définit une bijection α' de A sur l'ensemble A' des (X, P)-sous-structures s de S telles que $E \subset P(s)$. Si j et j' sont les P-injections canoniques de $s \in A'$ vers S et de $s' \in A'$ vers S, on a $P(s) \subset P(s')$ si, et seulement si, il existe $h \in \hat{H}$ tel que $j = j'.h$ (et alors $P(h) = (P(s'), \iota, P(s))$). Donc $j \in A$ est un (X^{ι}, P)-sous-morphisme de S engendré par $(P(S), \iota, E)$ si, et seulement si, $\alpha(j)$ est une (X, P)-sous-structure de S engendrée par E. ∇

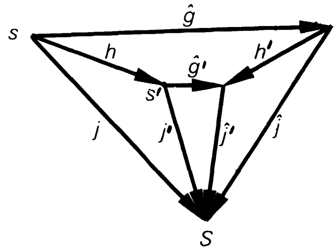
DEFINITION. Supposons $X.\tilde{H}^{\bullet}_{\gamma} \subset X$. On dit que P est $(\mathfrak{M}, X.H^{\bullet}_{o})$-*engendrant* s'il vérifie la condition :

(1) Pour tout $S \in \hat{H}^{\bullet}_{o}$ et toute partie E de $P(S)$ telle que $E \in \tilde{\mathfrak{U}}$,

il existe une $(X.\tilde{H}^{\bullet}_{o}, P)$-sous-structure de S engendrée par E. On dit que P est *dénombrablement* $(\bar{\mathfrak{M}}, X.H^{\bullet}_{o})$*-engendrant* s'il est $(\mathfrak{M}, X.H^{\bullet}_{o})$-engendrant et si de plus, N notant l'ensemble des entiers $\neq 0$, on a :

(2) Si $S \in \hat{H}^{\bullet}_{o}$ et si $(s_i)_{i \in N}$ est une suite de $(X.\tilde{H}^{\bullet}_{o}, P)$-sous-structures de S telles que $P(s_i) \subset P(s_{i+1}) \in \tilde{\mathfrak{U}}$ pour tout entier i, alors il existe une (X, P)-sous-structure $\bar{s}$ de S vérifiant $P(\bar{s}) = \bigcup_{i \in N} P(s_i)$.

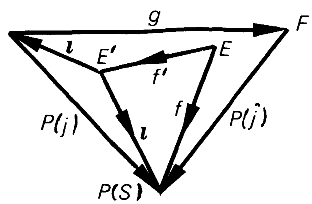
PROPOSITION 2. *Supposons* $X.\tilde{H}^{\bullet}_{\gamma} \subset X$, $S \in \hat{H}^{\bullet}_{o}$, $f = (P(S), \underline{f}, E) \in \hat{\mathfrak{M}}$ *et* $E \in \mathfrak{U}$. *Il existe un* $(X.H^{\bullet}_{o}, P)$*-sous-morphisme de* S *engendré par* f *si, et seulement si, il existe une* $(X.\tilde{H}^{\bullet}_{o}, P)$*-sous-structure de* S *engendrée par* $E' = f(E)$.



Δ. Soient A l'ensemble des $j \in X^{\iota}.\tilde{H}^{\bullet}_{o}$ tels que

$P(j) \cdot (P(\alpha(j)), \iota, E') = (P(S), \iota, E')$,

et B l'ensemble des $\hat{j} \in X.H^{\bullet}_{o}$ tels qu'il existe k vérifiant $P(\hat{j}) \cdot k = f$. Si $j \in A$ et $s = \alpha(j)$, l'ensemble $P(s)$ appartient à $\tilde{\mathfrak{U}}$, de sorte qu'il existe une bijection g de $P(s)$ sur un $F \in \mathfrak{U}$. Le foncteur d'homomorphismes P étant saturé, il existe un et un seul $\hat{g} \in \hat{H}^{\bullet}_{\gamma}.s$ tel que



$P(\hat{g}) = g$. Par définition de $\tilde{H}$ et de H, on a $\hat{g} \in H^{\bullet}_{o}.\tilde{H}^{\bullet}_{\gamma}$, d'où

$$\hat{j} = j.\hat{g}^{-1} \in X.\tilde{H}^{\bullet}_{\gamma}.H^{\bullet}_{o} \subset X.H^{\bullet}_{o}.$$

De plus, si f' désigne l'application de E sur E' restriction de f, on trouve

$$f = (P(S), \iota, E').f' = P(j).(P(s), \iota, E').f' =$$
$$= P(\hat{j}).g.(P(s), \iota, E').f',$$

c'est-à-dire $\hat{j} \in B$. Inversement, si $\hat{j}' \in B$, il existe un $\hat{g}'' \in \hat{H}^{\bullet}_{\gamma}.\alpha(\hat{j}')$ tel que $P(\hat{g}'')$ soit la bijection restriction de $P(\hat{j}')$ à $\alpha(P(j'))$ et posant $\hat{g}' = \hat{g}''^{-1}$ et $j' = \hat{j}''.\hat{g}'$, on trouve $j' \in A$, car $P(j') = (P(S), \iota, E'')$, où $E'' = P(\beta(g'))$. Enfin il existe $h \in \hat{H}$ tel que $j'.h = j$ si, et seulement si,

$\hat{j}'.h' = \hat{j}$, où $h' = \hat{g}'.h.\hat{g}^{-1}$. Il en résulte que la P-injection canonique j de s vers S est un $(X^{\iota}.\tilde{H}^{\bullet}_{o}, P)$-sous-morphisme de S engendré par $(P(S),\iota, E')$ (i.e., d'après la proposition 1, que s est une $(X.\tilde{H}^{\bullet}_{o}, P)$-sous-structure de S engendrée par E') si, et seulement si, $\hat{j}$ est un $(X.H^{\bullet}_{o}, P)$-sous-morphisme de S engendré par f. ∇

COROLLAIRE. *Si $X.\tilde{H}^{\bullet}_{\gamma} \subset X$, alors P est $(\mathfrak{M}, X.H^{\bullet}_{o})$-engendrant si, et seulement si, pour tout $S \in \hat{H}^{\bullet}_{o}$ et toute application $(P(S), \underline{f}, E)$, où $E \in \bar{\mathfrak{U}}$, il existe un $(X.H^{\bullet}_{o}, P)$-sous-morphisme de S engendré par f.*

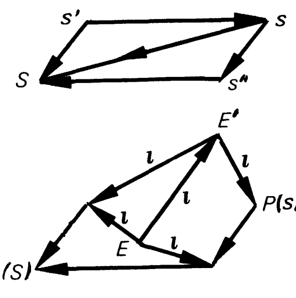
DEFINITION. Supposons que X soit l'ensemble des P-monomorphismes; une (X, P)-sous-structure de S engendrée par E est appelée une *P-sous-structure de S engendrée par E;* si P est (resp. est dénombrablement) $(\mathfrak{M}, X.H^{\bullet}_{o})$-engendrant, on dit que P est (resp. est *dénombrablement) $\ulcorner$-engendrant pour* $\mathfrak{M}$.

PROPOSITION 3. *P est $\ulcorner$-engendrant pour $\mathfrak{M}$ si, et seulement si, il vérifie la condition : Pour toute unité S de $\hat{H}^{\bullet}_{o}$ et toute partie E de $P(S)$ appartenant à $\tilde{\mathfrak{U}}$, il existe une P-sous-structure s de S engendrée par E telle que $P(s) \in \tilde{\mathfrak{U}}$.*

Δ. Notons X l'ensemble de tous les P-monomorphismes.

1°) Si la condition est vérifiée et si $S \in \hat{H}^{\bullet}_{o}$, $E \subset P(S)$ et $E \in \tilde{\mathfrak{U}}$, la P-sous-structure s de S engendrée par E est a fortiori une $(X.\tilde{H}^{\bullet}_{o}, P)$-sous-structure de S engendrée par E. Donc P est $\ulcorner$-engendrant pour $\mathfrak{M}$.

2°) Supposons que P soit $\ulcorner$-engendrant pour $\mathfrak{M}$, que $S \in \hat{H}^{\bullet}_{o}$ et que $E \in \tilde{\mathfrak{U}}$ soit une partie de $P(S)$. Il existe une $(X.\tilde{H}^{\bullet}_{o}, P)$-sous-structure s' de S engendrée par E, et $P(s')$ appartient à $\tilde{\mathfrak{U}}$. Montrons que s' est une P-sous-structure de S engendrée par E. En effet, soit s'' une P-sous-structure de S telle que $P(s'')$ contienne E. L'ensemble $E' = P(s') \cap P(s'')$ appartient à l'univers $\tilde{\mathfrak{U}}$, de sorte qu'il existe une $(X.\tilde{H}^{\bullet}_{o}, P)$-sous-structure s de s'' engendrée par E'. Comme s est une P-sous-structure de S telle que



$$P(s) \in \tilde{\mathfrak{U}} \text{ et } E \subset E' \subset P(s),$$

elle admet s' pour P-sous-structure. Il s'ensuit que s' est une P-sous-structure de s'', ce qui achève la preuve. ∇

COROLLAIRE. *Si P est Γ-engendrant pour $\mathfrak{M}$, si s_i est une P-sous-structure de $S \in \hat{H}_o^\bullet$ pour tout $i \in J$ et si $E = \bigcap_{i \in J} P(s_i) \in \tilde{\mathfrak{U}}$, alors E définit une P-sous-structure de S.*

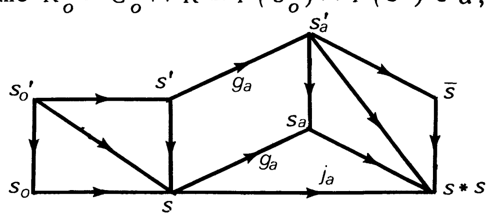
Δ. D'après la proposition, E engendre une P-sous-structure s de S telle que $E \subset P(s) \in \tilde{\mathfrak{U}}$. Puisque s_i est une P-sous-structure de S et que E est contenu dans $P(s_i)$, s est une P-sous-structure de s_i pour tout $i \in J$, d'où $P(s) \subset \bigcap_{i \in J} P(s_i) = E$. Au total $P(s) = E$. ∇

PROPOSITION 4. *Supposons que P soit Γ-engendrant pour $\mathfrak{M}$; soient $(C^\bullet, s)$ une catégorie P-structurée et $K^\bullet$ une sous-catégorie de $C^\bullet$. Si K appartient à $\tilde{\mathfrak{U}}$ et si $K^\bullet * K^\bullet$ définit une P-sous-structure $\bar{s}$ de $s * s$, alors K définit une sous-catégorie P-structurée de $(C^\bullet, s)$.*

Δ. Reprenons les notations de la partie 3 de la démonstration de la proposition 3-2, en y remplaçant p par P; en particulier soit j_a la P-injection de s vers $s * s$ telle que $P(j_a)(x) = (x, \alpha(x))$. Le foncteur d'homomorphismes P étant saturé, il existe $g_a \in \hat{H}_\gamma^\bullet . s$ tel que le but s_a de g_a soit une P-sous-structure de $s * s$ appliquée par P sur l'ensemble $C_a^\bullet$ des couples $(x, \alpha(x))$, où $x \in C$, et que $P(g_a)$ soit la bijection restriction de $P(j_a)$ à C. L'ensemble

$$K_a^\bullet = C_a^\bullet \cap (K^\bullet * K^\bullet) = P(s_a) \cap P(\bar{s})$$

des couples $(x, \alpha(x))$, où $x \in K$, appartenant à $\tilde{\mathfrak{U}}$, il définit une P-sous-structure s'_a de $s * s$ d'après le corollaire de la proposition 3. Notons s' le but de l'unique élément g'_a de $\hat{H}_\gamma^\bullet . s'_a$ tel que $P(g'_a)(x, \alpha(x)) = x$ pour tout $x \in K$. On trouve $K = P(s')$ et s' est une P-sous-structure de s, car s'_a est une P-sous-structure de s_a. Toujours d'après le corollaire de la proposition 3, comme $K_o^\bullet = C_o^\bullet \cap K = P(s_o) \cap P(s') \in \tilde{\mathfrak{U}}$, l'ensemble



$K_o^\bullet$ définit une P-sous-structure s'_o de s, et s'_o est a fortiori une P-sous-structure de s_o. Il résulte alors de la proposition 6-2 que $(K^\bullet, s')$ est une sous-catégorie P-structurée de $(C^\bullet, s)$. ∇

COROLLAIRE. *Supposons que P soit ρ-engendrant pour $\mathfrak{M}$ et que $(C^\bullet, s)$ soit une catégorie P-structurée. Si $(C_i^\bullet, s_i)$ est une sous-catégorie P-structurée de $(C^\bullet, s)$ pour tout $i \in J$ et si $K = \bigcap_{i \in J} C_i$ appartient à $\tilde{\mathfrak{U}}$, alors K définit une sous-catégorie P-structurée de $(C^\bullet, s)$.*

Δ. D'après le corollaire de la proposition 3, K définit une P-sous-structure s' de s; de même $K^\bullet * K^\bullet = \bigcap_{i \in J} C_i^\bullet * C_i^\bullet$ définit une P-sous-structure $\bar{s}$ de $s * s$, étant donné que $K^\bullet * K^\bullet$ appartient à $\tilde{\mathfrak{U}}$ et que $C_i^\bullet * C_i^\bullet$ définit une P-sous-structure $s_i * s_i$ de $s * s$ pour tout $i \in J$ (proposition 6-2). Par suite la proposition 4 entraîne que $(K^\bullet, s')$ est une sous-catégorie P-structurée de $(C^\bullet, s)$. ∇

PROPOSITION 5. *Soient $\hat{\mathfrak{F}}$ la catégorie des foncteurs associée à $\hat{\mathfrak{U}}$ et $P_{\mathfrak{F}}$ son foncteur d'oubli vers $\hat{\mathfrak{M}}$. Alors $P_{\mathfrak{F}}$ est dénombrablement ρ-engendrant pour $\mathfrak{M}$.*

Δ. Soit $C^\bullet$ une catégorie telle que C appartienne à $\hat{\mathfrak{U}}$.

1°) Soient E une partie de C et $K^\bullet$ la sous-catégorie de $C^\bullet$ engendrée par E. Pour montrer que $P_{\mathfrak{F}}$ est ρ-engendrant pour $\mathfrak{M}$, il suffit de prouver que, si $E \in \tilde{\mathfrak{U}}$, alors $K \in \tilde{\mathfrak{U}}$. Or posons $A = E \cup \alpha(E) \cup \beta(E)$, où α et β sont les surjections source et but de $C^\bullet$; soit L l'ensemble des chemins de $C^\bullet$ de la forme $(x_n, \dots, x_1)$, où $x_i \in A$ si $1 \leq i \leq n$. K est l'image de L par l'application k':

$$(x_n, \dots, x_1) \to x_n. \dots .x_1 \text{ de } L \text{ dans } C.$$

$\tilde{\mathfrak{U}}$ étant un univers, $E \in \tilde{\mathfrak{U}}$ entraîne $\alpha(E) \in \tilde{\mathfrak{U}}$ et $\beta(E) \in \tilde{\mathfrak{U}}$, d'où $A \in \tilde{\mathfrak{U}}$. Il s'ensuit (proposition 3-15 [3]) que l'ensemble produit A^n, pour tout entier n, appartient à $\tilde{\mathfrak{U}}$, et par suite la réunion $A' = \bigcup_{n \in N} A^n$ appartient à $\tilde{\mathfrak{U}}$, l'ensemble N des entiers appartenant à tout univers. Comme L est une partie de A', on obtient $L \in \tilde{\mathfrak{U}}$, et a fortiori $K = k'(L) \in \tilde{\mathfrak{U}}$.

2°) Si $(C_n^\bullet)_{n \in N}$ est une suite de sous-catégories de $C^\bullet$ telle que $C_n \subset C_{n+1}$ pour tout entier n, alors $C' = \bigcup_{n \in N} C_n$ définit évidemment une sous-catégorie $C'^\bullet$ de $C^\bullet$. ∇

Désignons par $\mathfrak{F}(P)$ la catégorie des foncteurs P-structurés, par $\hat{P}$ son foncteur d'oubli vers $\hat{\mathfrak{M}}$ et par $\hat{X}$ l'ensemble des $\hat{P}$-monomorphismes stricts (voir § 2).

PROPOSITION 6. *Si P est dénombrablement $\smallfrown$-engendrant pour $\mathfrak{M}$, $\hat{P}$ est dénombrablement $(\mathfrak{M}, \hat{X}.\mathfrak{F}(p)_o)$-engendrant.*

$\triangle$. Comme P est un foncteur d'homomorphismes saturé, il en est de même pour $\hat{P}$ (proposition 4-2). De plus $\hat{X}.\mathfrak{F}(P)_{\hat{\gamma}} \subset \hat{X}$, car tout foncteur P-structuré inversible dans $\mathfrak{F}(P)$ appartient à $\hat{X}$ et $\hat{X}$ définit une sous-catégorie de $\mathfrak{F}(P)$. Soit $(C^\bullet, s)$ une catégorie P-structurée. Notons $\mathfrak{F}(\tilde{p})_o$ l'ensemble des catégories P-structurées $(\tilde{C}^\bullet, \tilde{s})$ où $\tilde{C} \in \tilde{\mathfrak{U}}$.

1°) Montrons que, si E est une partie de C appartenant à $\tilde{\mathfrak{U}}$, il existe une sous-catégorie P-structurée $(K^\bullet, s')$ de $(C^\bullet, s)$ telle que $E \subset K \in \tilde{\mathfrak{U}}$ et que $K \subset C'$ pour toute sous-catégorie P-structurée $(C'^\bullet, s'')$ de $(C^\bullet, s)$ vérifiant $E \subset C' \in \tilde{\mathfrak{U}}$. En effet, soit $((\alpha, w), (\beta, w'))$ le produit fibré naturalisé canonique dans $\hat{\mathfrak{M}}$ de (α, β). Pour toute partie A de $C^\bullet * C^\bullet = \alpha \vee \beta$, nous poserons

$$z(A) = w(A) \cup w'(A);$$

si A appartient à $\tilde{\mathfrak{U}}$, il en est de même pour $z(A)$.

a- Soit $C_1^\bullet$ la sous-catégorie de $C^\bullet$ engendrée par E. D'après la proposition 5, C_1 appartient à $\tilde{\mathfrak{U}}$; par suite $C_1^\bullet * C_1^\bullet \in \tilde{\mathfrak{U}}$, et il existe (proposition 3) une P-sous-structure s'_1 de $s * s$ engendrée par $C_1^\bullet * C_1^\bullet$ telle que $P(s'_1) \in \tilde{\mathfrak{U}}$. Si $x \in C_1$, la relation

$$\bar{x} = (x, \alpha(x)) \in C_1^\bullet * C_1^\bullet \subset P(s'_1)$$

entraîne $x = w(\bar{x}) \in z(P(s'_1))$, c'est-à-dire $C_1 \subset z(P(s'_1))$.

b- Soit n un entier, $n > 1$, et supposons définies deux suites $(C_i)_{i<n}$ et $(s'_i)_{i<n}$ ayant pour premiers termes C_1 et s'_1 respectivement et telles que, si $1 < i < n$, les conditions suivantes soient vérifiées :

(1) $s'_i \in \tilde{H}_o^\bullet$, $P(s'_i) \subset C^\bullet * C^\bullet$, $C_i \subset Z_i = z(P(s'_i))$ et $C_i^\bullet$ est la sous-catégorie de $C^\bullet$ engendrée par Z_{i-1}.

(2) $P(s'_{i-1}) \subset C_i^\bullet * C_i^\bullet$ et s'_i est la P-sous-structure de $s * s$ engendrée par $C_i^\bullet * C_i^\bullet$.

Notons $C_n^{\bullet}$ la sous-catégorie de $C^{\bullet}$ engendrée par $Z_{n-1} = z(P(s'_{n-1}))$. Si $(x', x) \in P(s'_{n-1})$, on a $\alpha(x') = \beta(x)$,

$$x' \in Z_{n-1} \subset C_n, \quad x \in Z_{n-1} \subset C_n, \text{ d'où } (x', x) \in C_n^{\bullet} * C_n^{\bullet}.$$

Puisque $P(s'_{n-1})$ appartient à $\tilde{\mathfrak{U}}$, l'ensemble Z_{n-1} y appartient aussi, ainsi que C_n (proposition 5). Il en résulte que $C_n^{\bullet} * C_n^{\bullet}$ engendre une P-sous-structure s'_n de $s * s$ telle que $P(s'_n) \in \tilde{\mathfrak{U}}$. Enfin $x \in C_n$ a pour conséquence :

$$x = w(x, \alpha(x)) \in z(C_n^{\bullet} * C_n^{\bullet}) \subset Z_n, \text{ où } Z_n = z(P(s'_n)),$$

de sorte que $C_n \subset Z_n$.

c - Par récurrence on construit de cette façon deux suites $(C_i)_{i \in N}$ et $(s'_i)_{i \in N}$ vérifiant les conditions (1) et (2) pour tout entier $i \neq 0$. En particulier

$$C_i \subset C_{i+1} \in \tilde{\mathfrak{U}} \text{ et } P(s'_{i-1}) \subset C_i^{\bullet} * C_i^{\bullet} \subset P(s'_i)$$

pour tout $i \in N$. D'après la proposition 5, $K = \bigcup_{i \in N} C_i$ définit une sous-catégorie $K^{\bullet}$ de $C^{\bullet}$. Etant donné que K appartient à l'univers $\tilde{\mathfrak{U}}$, que

$$K^{\bullet} * K^{\bullet} = \bigcup_{i \in N} C_i^{\bullet} * C_i^{\bullet} = \bigcup_{i \in N} P(s'_i)$$

et que P est dénombrablement $\digamma$-engendrant pour $\mathfrak{M}$, l'ensemble $K^{\bullet} * K^{\bullet}$ définit une P-sous-structure $\bar{s}$ de $s * s$. La proposition 4 affirme que K définit aussi une $\hat{P}$-sous-structure $(K^{\bullet}, s')$ de $(C^{\bullet}, s)$.

2°) Avec les mêmes hypothèses, supposons que $(C'^{\bullet}, s'')$ soit une sous-catégorie P-structurée de $(C^{\bullet}, s)$ telle que $E \subset C'$ et $C' \in \tilde{\mathfrak{U}}$. Comme C_1 est contenu dans C', on a $C_1^{\bullet} * C_1^{\bullet} \subset C'^{\bullet} * C'^{\bullet}$, et la P-sous-structure s'_1 de $s * s$ engendrée par $C_1^{\bullet} * C_1^{\bullet}$ est une P-sous-structure de la P-sous-structure $s'' * s''$ de $s * s$ définie par $C'^{\bullet} * C'^{\bullet}$. Soit n un entier, $n > 1$, et supposons prouvées les inclusions

$$C_i \subset C' \text{ et } P(s'_i) \subset C'^{\bullet} * C'^{\bullet} \text{ pour tout } i < n.$$

$C'^{\bullet}$ étant une sous-catégorie de $C^{\bullet}$, on trouve

$$Z_{n-1} = z(P(s'_{n-1})) \subset z(C'^{\bullet} * C'^{\bullet}) \subset C';$$

par suite C_n, qui définit la sous-catégorie de $C^{\bullet}$ engendrée par Z_{n-1}, est contenu dans C', et $C_n^\cdot * C_n^\cdot \subset C'^\cdot * C'^\cdot$, de sorte que la P-sous-structure s'_n de $s * s$ engendrée par $C_n^\cdot * C_n^\cdot$ est une P-sous-structure de $s'' * s''$. Par récurrence ceci prouve que

$$C_n \subset C' \text{ et } P(s'_n) \subset C'^\cdot * C'^\cdot$$

pour tout entier $n > 1$. Il en résulte $K = \bigcup_{n \in N} C_n \subset C'$. Donc $(K^\cdot, s')$ est une $(\hat{X}.\mathfrak{F}(\tilde{p})_o, \hat{P})$-sous-structure de $(C^\cdot, s)$ engendrée par E.

3°) Soit $((G_n^\cdot, s_n))_{n \in N}$ une suite de sous-catégories P-structurées de $(C^\cdot, s)$ telle que $G_n \subset G_{n+1} \in \tilde{\mathfrak{U}}$ pour tout entier n. L'ensemble G réunion de $(G_n)_{n \in N}$ appartient à l'univers $\tilde{\mathfrak{U}}$ et définit une sous-catégorie $G^\cdot$ de $C^\cdot$ (proposition 5). Puisque $(G_n^\cdot * G_n^\cdot)_{n \in N}$ est une suite croissante de parties de $C^\cdot * C^\cdot$ telles que $G_n^\cdot * G_n^\cdot$ appartienne à $\tilde{\mathfrak{U}}$ et définisse une P-sous-structure $s_n * s_n$ de $s * s$ et que $G^\cdot * G^\cdot = \bigcup_{n \in N} G_n^\cdot * G_n^\cdot$, il existe une P-sous-structure $\tilde{s}$ de $s * s$ vérifiant $P(\tilde{s}) = G^\cdot * G^\cdot$, car le foncteur P est dénombrablement $\vdash$-engendrant pour $\mathfrak{M}$. D'après la proposition 4, il s'ensuit que G définit une sous-catégorie P-structurée de $(C^\cdot, s)$, c'est-à-dire une $(\hat{X}.\mathfrak{F}(\tilde{p})_o, \hat{P})$-sous-structure de $(C^\cdot, s)$. Ceci montre que P est dénombrablement $(\mathfrak{M}, \hat{X}.\mathfrak{F}(p)_o)$-engendrant. ∇

PROPOSITION 7. *Supposons que $\mathfrak{U} \in \hat{\mathfrak{U}}$, que P soit un foncteur à noyaux et à $\hat{\mathfrak{U}}$-produits, dénombrablement $\vdash$-engendrant pour $\mathfrak{M}$ et que $\underline{\overset{-1}{P}}(\{E\}) \in \hat{\mathfrak{U}}$ pour tout $E \in \mathfrak{U}$. Si $(C^\cdot, s)$ est une catégorie p-structurée et r une relation d'équivalence sur C, il existe une $\hat{p}$-structure quasi-quotient de $(C^\cdot, s)$ par r. De plus $\mathfrak{F}(p)$ est une catégorie à $K^\cdot$-limites inductives pour toute catégorie $K^\cdot \in \mathfrak{F}_o$.*

Δ. La proposition sera prouvée si on montre que sont vérifiées les conditions des théorèmes généraux d'existence de structures quasi-quotients (corollaire 1, proposition 3-2 [4]) et de limites inductives (proposition 4-3 [4]).

1°) $\mathfrak{F}(p)_o$ appartient à $\hat{\mathfrak{U}}$. En effet, si $(C^\cdot, s) \in \mathfrak{F}(p)_o$, on a

$$C^\cdot = (C, \kappa) \in \mathfrak{U} \times \mathfrak{U}, \quad s \in H_o^\cdot = \bigcup_{C \in \mathfrak{U}} \underline{\overset{-1}{P}}(\{C\}) \in \hat{\mathfrak{U}}$$

d'où $(C^\cdot, s) \in (\mathfrak{U} \times \mathfrak{U}) \times H_o^\cdot \in \hat{\mathfrak{U}}$, car $\hat{\mathfrak{U}}$ est un univers. Il s'ensuit

$$\mathfrak{F}(p)_o \subset (\mathfrak{U} \times \mathfrak{U}) \times H_o^\cdot, \text{ donc } \mathfrak{F}(p)_o \in \hat{\mathfrak{U}}.$$

2°) Le foncteur $\hat{p}$ étant fidèle, l'application

$$((\overline{C}^{\bullet}, \overline{s}), h, (C^{\bullet}, s)) \to ((\overline{C}^{\bullet}, \overline{s}), \underline{h}, (C^{\bullet}, s)),$$

où $\underline{h}$ est le graphe de $p(h)$, est une bijection de $\mathfrak{F}(p)$ sur une partie de $\mathfrak{F}(p)_0 \times \mathfrak{U} \times \mathfrak{F}(p)_0$. Par suite $\mathfrak{F}(p)$ est équipotent à un élément de $\hat{\mathfrak{U}}$. Le foncteur $\hat{P}$ étant à J-produits pour tout $J \in \hat{\mathfrak{U}}$ (corollaire 2, proposition 7-2), il est aussi à J-produits, pour toute partie J de $\mathfrak{F}(p)$.

3°) $\hat{P}$ est $(\mathfrak{M}, \hat{X}.\mathfrak{F}(p)_0)$-engendrant, où $\hat{X}$ est l'ensemble des P-monomorphismes stricts, en vertu de la proposition 6. De plus $\hat{p}$ est à noyaux et tout noyau n dans $\hat{p}$ appartient à $\hat{X}$ (corollaire, proposition 7-2); il s'ensuit $\hat{X}.n \subset \hat{X}$, car $\hat{X}$ définit une sous-catégorie de $\mathfrak{F}(P)$. ∇

4. Transformations naturelles structurées.

HYPOTHESE. Dans ce paragraphe, p désigne un foncteur d'homomorphismes saturé $(\mathfrak{M}, \underline{p}, H^{\bullet})$.

DEFINITION. On appelle *transformation naturelle p-structurée* un triplet $T = (\overline{h}', t, \overline{h})$, où $\overline{h}$ et $\overline{h}'$ sont deux foncteurs p-structurés de même source $(C'^{\bullet}, s')$, de même but $(C^{\bullet}, s)$ et où $t \in s.H.s'_0$ est tel que $(\hat{p}\mathfrak{J}(\overline{h}'), p(t), \hat{p}\mathfrak{J}(\overline{h}))$ soit une transformation naturelle, dite *sous-jacente à T*.

Si $(C^{\bullet}, s)$ et $(C'^{\bullet}, s')$ sont deux catégories p-structurées, nous noterons $\mathfrak{N}((C^{\bullet}, s), (C'^{\bullet}, s'))$ l'ensemble des transformations naturelles p-structurées $(\overline{h}', t, \overline{h})$ telles que $\overline{h}$ ait $(C'^{\bullet}, s')$ pour source, $(C^{\bullet}, s)$ pour but.

PROPOSITION 1. *Soient $(C^{\bullet}, s)$ et $(C'^{\bullet}, s')$ deux catégories p-structurées. L'application ν associant à $T \in \mathfrak{N}((C^{\bullet}, s), (C'^{\bullet}, s'))$ la transformation naturelle sous-jacente est une bijection de $\mathfrak{N}((C^{\bullet}, s), (C'^{\bullet}, s'))$ sur un ensemble M définissant une sous-catégorie $M^{\square}$ de la catégorie longitudinale $\mathfrak{N}(C^{\bullet}, C'^{\bullet})^{\square}$ des transformations naturelles entre foncteurs de $C'^{\bullet}$ vers $C^{\bullet}$.*

Δ. Le foncteur p étant fidèle, ν est une bijection de $M' = \mathfrak{N}((C^{\bullet}, s), (C'^{\bullet}, s'))$ sur une partie M de $\mathfrak{N}(C^{\bullet}, C'^{\bullet})$. Prouvons que M définit une sous-catégorie de $\mathfrak{N}(C^{\bullet}, C'^{\bullet})^{\square}$. En effet, supposons $T = (\overline{h}', t, \overline{h}) \in M'$, où

$$\overline{h} = ((C^{\bullet}, s), h, (C'^{\bullet}, s')) \text{ et } \overline{h'} = ((C^{\bullet}, s), h', (C'^{\bullet}, s')).$$

Notons (F', θ, F) la transformation naturelle $\nu(T) \in M$ et i' la p-injection canonique de s'_o vers s', où $p(s'_o) = C'^{\bullet}_o$. Le triplet $(\overline{h}, h.i', \overline{h})$ est une transformation naturelle p-structurée $\alpha^{\square} T$, et $\nu(\alpha^{\square} T) = (F, F_o, F) \in M$ est la source de $\nu(T)$ dans $\mathfrak{N}(C^{\bullet}, C'^{\bullet})^{\square}$. De même

$$\beta^{\square} T = (\overline{h'}, h'.i', \overline{h'}) \in M'$$

et $\nu(\beta^{\square} T) \in M$ est le but de $\nu(T)$ dans $\mathfrak{N}(C^{\bullet}, C'^{\bullet})^{\square}$. Soit de plus

$$T' = (\overline{h''}, t', \overline{h}_1) \in M' \text{ et } \nu(T') = (F'', \theta', F_1).$$

Le composé $\Theta'' = \nu(T') \square \nu(T)$ est défini dans $\mathfrak{N}(C^{\bullet}, C'^{\bullet})^{\square}$ si, et seulement si, $F_1 = F'$, c'est-à-dire si, et seulement si, $\overline{h}_1 = \overline{h'}$; supposons qu'il en soit ainsi. Alors

$$\Theta'' = (F'', \theta'', F), \text{ où } \theta''(x) = \theta'(x).\theta(x)$$

pour tout $x \in C'^{\bullet}_o$. Si a et b structurent les applications source et but de $C^{\bullet}$, on obtient $a.t' = b.t$, car p est fidèle et

$$\alpha(\theta'(x)) = F'(x) = \beta(\theta(x)) \text{ pour tout } x \in C'^{\bullet}_o.$$

Si $((a, v), (b, v'))$ est le produit fibré naturalisé canonique de (a, b) dans p, il existe un et un seul $g \in s * s.H.s'_o$ tel que

$$v.g = t' \text{ et } v'.g = t,$$

et $p(g)$ associe $(\theta'(x), \theta(x))$ à $x \in C'^{\bullet}_o$. Il s'ensuit que le composé $t'' = k.g$, où k structure la loi de composition de $C^{\bullet}$, admet θ'' pour

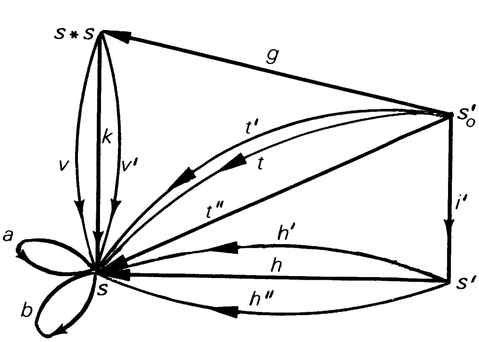


image par p. Donc

$$T'' = (\overline{h}'', t'', \overline{h}) \in M' \text{ et } \Theta'' = \nu(T'') \in M,$$

de sorte que M définit une sous-catégorie $M^{\square\square}$ de $\mathfrak{N}(C^\bullet, C'^\bullet)^{\square\square}$. ∇

DEFINITION. Avec les notations de la proposition 1, la catégorie image de $M^{\square\square}$ par la bijection inverse de ν est notée $\mathfrak{N}((C^\bullet, s), (C'^\bullet, s'))^{\square\square}$ et appelée catégorie *longitudinale des transformations naturelles p-structurées.*

Sa loi de composition est donc définie par :

$$((\overline{h}'', t', \overline{h}_1), (\overline{h}', t, \overline{h})) \to (\overline{h}'', t'', \overline{h}) \text{ si, et seulement si, } \overline{h}_1 = \overline{h}',$$

où t'' est l'unique élément de $s.H.s'_o$ tel que

$$p(t'')(x) = p(t'(x)).p(t(x)) \text{ pour tout } x \in C'^\bullet_o.$$

Soit $C^\bullet$ une catégorie, de loi de composition κ. Nous notons $(\boxminus C^\bullet, \square\square C^\bullet)$ la catégorie double des quatuors de $C^\bullet$ (voir [6]). L'ensemble $\square C^\bullet$ des quatuors de $C^\bullet$ est un produit fibré (non canonique) de (κ, κ) dans $\mathfrak{M}$, si $C \in \mathfrak{U}$, le produit fibré naturalisé correspondant étant $((\kappa, \mu), (\kappa, \mu'))$, où μ et μ' associent respectivement (y', x) et (x', y) à $(y', x', x, y) \in \square C^\bullet$. Si $(C^\bullet, s)$ est une catégorie p-structurée et s'il existe un produit fibré dans p de (k, k), où $k \in s.H.s * s$ structure κ, il existe aussi un unique produit fibré naturalisé $((k, m), (k, m'))$ dans p tel que $\mu = p(m)$ et $\mu' = p(m')$. Dans ce cas, nous désignerons par $\square s$ le produit fibré de (k, k) source de m.

Soit $C'^\bullet$ une autre catégorie. Si $\Theta = (F', \theta, F)$ est une transformation naturelle entre foncteurs de $C'^\bullet$ vers $C^\bullet$, l'application

$$x \to (F'(x), \theta(\beta(x)), \theta(\alpha(x)), F(x)), \text{ où } x \in C',$$

définit un foncteur Φ_Θ de $C'^\bullet$ vers la catégorie latérale $\boxminus C^\bullet$; l'application $\Theta \to \Phi_\Theta$ définit un isomorphisme de la catégorie $\mathfrak{N}(C^\bullet, C'^\bullet)^{\square\square}$ sur la catégorie $\mathcal{F}(\boxminus C^\bullet, C'^\bullet)^{\square\square}$ des foncteurs de $C'^\bullet$ vers $\boxminus C^\bullet$ considérée dans le théorème 7, II [6].

PROPOSITION 2. *Soient $(C^\bullet, s)$ et $(C'^\bullet, s')$ deux catégories p-structurées et supposons qu'il existe un produit fibré $\square s$ de (k, k) structurant*

$\square C^{\bullet}$. *Il existe une bijection z de* $\mathfrak{N}((C^{\bullet}, s), (C'^{\bullet}, s'))$ *sur l'ensemble* $\mathfrak{F}(\square s, s')$ *des* $f \in \square s . H . s'$ *tels que* $p(f)$ *définisse un foncteur de* $C'^{\bullet}$ *vers* $\boxminus C^{\bullet}$.

Δ. Reprenons les notations de la proposition 3-2 relativement à $(C^{\bullet}, s)$.

1° Supposons $T = (\overline{h'}, t, \overline{h}) \in \mathfrak{N}((C^{\bullet}, s), (C'^{\bullet}, s'))$, où

$$\overline{h} = ((C^{\bullet}, s), h, (C'^{\bullet}, s')) \text{ et } \overline{h'} = ((C^{\bullet}, s), h', (C'^{\bullet}, s')).$$

Notons Θ la transformation naturelle (F', θ, F) sous-jacente à T et Φ le foncteur de $C'^{\bullet}$ vers $\boxminus C^{\bullet}$ associé à Θ. Puisque

$$\alpha(F'(x)) = \beta(\theta(\alpha(x))) \text{ et } \alpha(\theta(\beta(x))) = \beta(F(x))$$

pour tout $x \in C'$ et que p est fidèle, on trouve

$$a_o . h' = b_o . t . a'_o \text{ et } a_o . t . b'_o = b_o . h,$$

où a_o, b_o, a'_o et b'_o structurent les applications source et but de $C^{\bullet}$ et de $C'^{\bullet}$. Il existe des éléments f' et f'' de $s * s . H . s'$ tels que

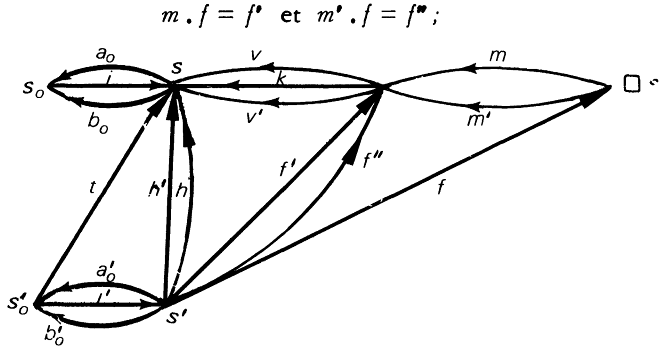
$$v . f' = h', \quad v' . f' = t . a'_o, \quad v . f'' = t . b'_o, \quad v' . f'' = h,$$

car $((a_o, v), (b_o, v'))$ est un produit fibré naturalisé dans p. Les applications $p(k . f')$ et $p(k . f'')$ associant respectivement à $x \in C'$ les composés

$$F'(x) . \theta(\alpha(x)) \text{ et } \theta(\beta(x)) . F(x)$$

qui sont égaux, on a $p(k . f') = p(k . f'')$, d'où $k . f' = k . f''$. Si $((k, m), (k, m'))$ est le produit fibré naturalisé dans p définissant $\square s$, il existe un unique $f \in \square s . H . s'$ tel que

$$m . f = f' \text{ et } m' . f = f'';$$



l'application $p(f)$ associe $(F'(x), \theta(\beta(x)), \theta(\alpha(x)), F(x))$ à $x \in C'$, c'est-à-dire définit le foncteur Φ. Donc $f \in \mathcal{F}(\square s, s')$; posons $f = z(T)$.

2° Inversement, supposons $f \in \mathcal{F}(\square s, s')$ et soient Φ le foncteur de $C'^{\bullet}$ vers $\boxminus C^{\bullet}$ défini par $p(f)$ et (F', θ, F) la transformation naturelle correspondante. Les applications $p(v.m.f)$ et $p(v'.m'.f)$ définissant respectivement les foncteurs F' et F, les triplets

$$\overline{b}' = ((C^{\bullet}, s), v.m.f, (C'^{\bullet}, s')) \text{ et } \overline{b} = ((C^{\bullet}, s), v'.m'.f, (C'^{\bullet}, s'))$$

sont des foncteurs p-structurés. Enfin $\theta = p(t')$, où $t' = v.m'.f.i'$, i' étant la p-injection canonique de s'_0 vers s'. Ainsi $T' = (\overline{b}', t', \overline{b})$ est une transformation naturelle p-structurée, et $f = z(T')$. Ceci prouve que l'application $z : T \to z(T)$ est la bijection cherchée. ∇

DEFINITION. On appelle *catégorie double p-structurée* un triplet $(K^{\bullet}, K^{o}, s)$, où $(K^{\bullet}, K^{o})$ est une catégorie double et où $(K^{\bullet}, s)$ et (K^{o}, s) sont des catégories p-structurées.

PROPOSITION 3. *Soit $(C^{\bullet}, s)$ une catégorie p-structurée. Si p est un foncteur à produits fibrés finis, il existe une catégorie double p-structurée $(\square\square C^{\bullet}, \boxminus C^{\bullet}, \square s)$, où $\square s$ est un produit fibré de (k, k).*

Δ. Nous reprenons les notations de la proposition 3-2 relativement à $(C^{\bullet}, s)$. Le foncteur d'homomorphismes saturé p étant à produits fibrés finis, il existe un produit fibré naturalisé $((k, m), (k, m'))$ dans p tel que $p(m)$ et $p(m')$ soient respectivement les applications

$$\mu : (y', x', x, y) \to (y', x) \text{ et } \mu' : (y', x', x, y) \to (x', y)$$

de $\square C^{\bullet}$ dans C. Posons $\square s = \alpha(m)$.

1°) Comme, par définition, on a $k.j_a = s = k.j_b$, il existe un unique $d \in \square s.H.s$ tel que

$$m.d = j_a \text{ et } m'.d = j_b.$$

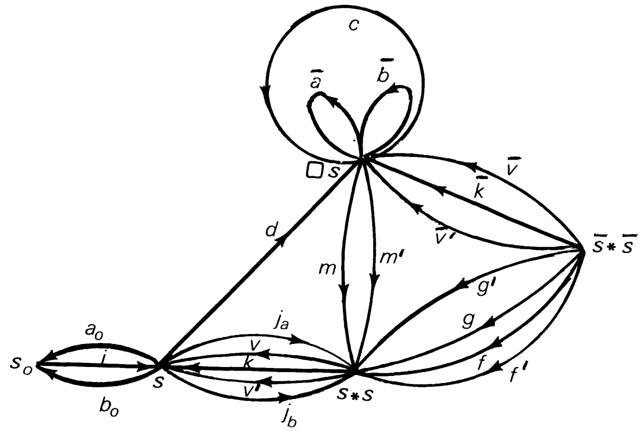
Le composé $\overline{a} = d.v'.m'$ est appliqué par p sur l'application source

$$(y', x', x, y) \to y^{\square\square} = (y, \beta(y), \alpha(y), y)$$

de $\square\square C^{\bullet}$. De même $\overline{b} = d.v.m$ est appliqué par p sur l'application but

$$(y', x', x, y) \to y'^{\square\square} \text{ de } \square\square C^{\bullet}.$$

Notons $((\overline{a}, \overline{v}), (\overline{b}, \overline{v}'))$ le produit fibré naturalisé canonique de $(\overline{a}, \overline{b})$ dans p, et soit $\overline{s} * \overline{s}$ la source de $\overline{v}$.



2°) On trouve $a . v' . m . \overline{v} = b . v' . m . \overline{v}'$, car p est fidèle et ces deux éléments de $s . H . \overline{s} * \overline{s}$ sont appliqués par p sur l'application

$$q = ((y'', x''', x'', y'), (y', x', x, y)) \to \alpha(x'') = \beta(x).$$

Il existe donc $f \in s * s . H . \overline{s} * \overline{s}$ tel que

$$v . f = v' . m . \overline{v} \quad \text{et} \quad v' . f = v' . m . \overline{v}';$$

$p(f)$ est l'application associant (x'', x) à q. De même, comme $a . v . m' . \overline{v} = b . v . m' . \overline{v}'$, il existe $f' \in s * s . H . \overline{s} * \overline{s}$ vérifiant

$$v . f' = v . m' . \overline{v} \quad \text{et} \quad v' . f' = v . m' . \overline{v}',$$

et $p(f')$ associe (x''', x') à q. Puisque $\alpha(y'') = \beta(x'' . x)$ et $\alpha(x''' . x') = \beta(y)$, on obtient $a . v . m . \overline{v} = b . k . f$ et $a . k . f' = b . v' . m' . \overline{v}'$, de sorte qu'il existe des éléments g et g' de $s * s . H . \overline{s} * \overline{s}$ tels que

$$v . g = v . m . \overline{v}, \qquad v' . g = k . f,$$

$$v . g' = k . f', \qquad v' . g' = v' . m' . \overline{v}'.$$

Les applications $p(g)$ et $p(g')$ associent respectivement à q les couples $(y'', x'' . x)$ et $(x''' . x', y)$. L'égalité

$$y'' . x'' . x = x''' . y' . x = x''' . x' . y$$

pour tout $q \in \Box\Box C^{\cdot} * \Box\Box C^{\cdot}$ entraîne $k . g = k . g'$. Il en résulte qu'il existe un et un seul $\overline{k} \in \Box s . H . \overline{s} * \overline{s}$ tel que

$$m.\bar{k}=g \quad \text{et} \quad m'.\bar{k}=g'.$$

L'application $p(\bar{k})$ associant $(y'', x'''.x', x''.x, y)$ à q, c'est la loi de composition de $\square\square C^{\cdot}$.

3°) Ainsi $(\square\square C^{\cdot}, \square s)$ vérifie les conditions de la proposition 3-2, et, p étant à produits fibrés finis, c'est une catégorie p-structurée. Par ailleurs de l'égalité $k.m = k.m'$, on déduit qu'il existe un et un seul élément c de $\square s.H.\square s$ vérifiant

$$m.c = m' \quad \text{et} \quad m'.c = m.$$

L'application $p(c)$ étant sous-jacente à l'isomorphisme canonique de $\square\square C^{\cdot}$ sur $\boxminus C^{\cdot}$, qui associe (x', y', y, x) à (y', x', x, y), l'élément c est son propre inverse dans $H^{\cdot}$. Donc $(\boxminus C^{\cdot}, \square s)$ est une catégorie p-structurée, à savoir l'image de $(\square\square C^{\cdot}, \square s)$ par $p(c)$. Au total $(\square\square C^{\cdot}, \boxminus C^{\cdot}, \square s)$ est une catégorie double p-structurée, notée $\square(C^{\cdot}, s)$. ∇

COROLLAIRE. *Supposons que p soit à produits fibrés finis et soient deux catégories p-structurées $(C^{\cdot}, s)$ et $(C'^{\cdot}, s')$. Il existe un isomorphisme de $\mathfrak{N}((C^{\cdot}, s), (C'^{\cdot}, s'))^{\square\square}$ sur une catégorie ayant pour ensemble sous-jacent l'ensemble $\underline{A}$ des foncteurs p-structurés de $(C'^{\cdot}, s')$ vers $(\boxminus C^{\cdot}, \square s)$.*

Δ. $(\boxminus C^{\cdot}, \square s)$ étant une catégorie p-structurée, l'application

$$((\boxminus C^{\cdot}, \square s), f, (C'^{\cdot}, s')) \to f$$

définit une bijection z' de $\underline{A}$ sur l'ensemble $\mathfrak{F}(\square s, s')$ considéré dans la proposition 2 dont nous reprenons les notations. La catégorie cherchée est donc l'image de $\mathfrak{N}((C^{\cdot}, s), (C'^{\cdot}, s'))^{\square\square}$ par la bijection $z'^{-1}.z$. ∇

REMARQUE. En fait la première partie de la preuve de la proposition 3 montre qu'il existe $\bar{a}$ et $\bar{b}$ structurant les applications source et but de $\square\square C^{\cdot}$ dès qu'il existe un produit fibré de (k, k) dans p; dans ce cas d, qui admet $v'.m'$ pour inverse à gauche, est une p-injection; la classe des unités de $\square\square C^{\cdot}$ définit alors une p-sous-structure s_o de $\square s$, à savoir le but de l'unique inversible d' de source s tel que $p(d)$ soit la bijection $y \mapsto y^{\square\square}$ de C sur $(\square\square C^{\cdot})_o$. Les parties 2 et 3 de cette preuve montrent que, si de plus il existe un produit fibré de $(\bar{a}, \bar{b})$ dans p, on a une catégorie double p-structurée $(\square\square C^{\cdot}, \boxminus C^{\cdot}, \square s)$, où $\square s$ est le produit fibré de (k, k) dans p défini plus haut.

PROPOSITION 4. *L'ensemble des transformations naturelles p-structurées est muni d'une structure de 2-catégorie* $(\mathfrak{N}(p)^{\square\square}, \mathfrak{N}(p)^{\blacklozenge})$ *telle que* $\mathfrak{N}(p)^{\square\square}$ *soit la catégorie somme des catégories longitudinales*

$$\mathfrak{N}((C^{\cdot}, s), (C'^{\cdot}, s'))^{\square\square}$$

et que l'application y associant à la transformation naturelle p-structurée T la transformation naturelle sous-jacente définisse un foncteur double de $(\mathfrak{N}(p)^{\square\square}, \mathfrak{N}(p)^{\blacklozenge})$ *vers la 2-catégorie des transformations naturelles associée à l'univers* $\mathfrak{U}$, *laquelle est notée* $(\mathfrak{N}^{\square\square}, \mathfrak{N}^{\blacklozenge})$.

Δ. y définit un foncteur fidèle de $\mathfrak{N}(p)^{\square\square}$ vers $\mathfrak{N}^{\square\square}$. Soit T une transformation naturelle p-structurée $(\bar{h}', t, \bar{h})$, où

$$\bar{h} = ((C'^{\cdot}, s'), h, (C^{\cdot}, s)).$$

Si $\bar{g}$ est un foncteur p-structuré $((\bar{C}^{\cdot}, \bar{s}), g, (C'^{\cdot}, s'))$, le triplet $(\bar{g}.\bar{h}', g.t_0, \bar{g}.\bar{h})$ est une transformation naturelle p-structurée, appliquée par y sur $p\mathcal{F}(\bar{g})y(T)$; nous la noterons $\bar{g}T$. Si $\bar{f}$ est un foncteur p-structuré $((C^{\cdot}, s), f, (G^{\cdot}, \tilde{s}))$ et si f_0 est le p-sous-morphisme de f de source $\tilde{s}_0$, de but s_0, le triplet $(\bar{h}'.\bar{f}, t.f_0, \bar{h}.\bar{f})$ est une transformation naturelle p-structurée appliquée par y sur $y(T)p\mathcal{F}(\bar{f})$; désignons-la par $T\bar{f}$. Considérons sur $\mathfrak{N}(p)$ la loi de composition partielle:

$$(T', T) \to T' \blacklozenge T = \bar{g}'T \square\square T'\bar{h}, \text{ ssi } \bar{g}.\bar{h} \text{ est défini, où } T = (\bar{h}', t, \bar{h}),$$
$$T' = (\bar{g}', t', \bar{g}).$$

y définit un homomorphisme de $\mathfrak{N}(p)^{\blacklozenge}$ vers $\mathfrak{N}^{\blacklozenge}$; puisque $(\mathfrak{N}^{\square\square}, \mathfrak{N}^{\blacklozenge})$ est une 2-catégorie et que p est fidèle, $(\mathfrak{N}(p)^{\square\square}, \mathfrak{N}(p)^{\blacklozenge})$ est aussi une 2-catégorie, dite 2-*catégorie des transformations naturelles p-structurées.* ∇

Nous allons montrer que, sous certaines conditions, les catégories longitudinales des transformations naturelles p-structurées sont canoniquement structurées.

HYPOTHESE. Dans la fin de ce paragraphe, nous supposons donné un foncteur d'homomorphismes saturé p', de $H'^{\cdot}$ vers $\mathfrak{M}$, à produits fibrés finis et à noyaux. Nous désignons par $(H^{\cdot}, D)$ une catégorie p'-dominée, de catégorie sous-jacente $H^{\cdot}$, telle que, pour toute unité s' de $H^{\cdot}$, le foncteur $D(., s')$ de $H^{\cdot}$ vers $H'^{\cdot}$ associant $D(h, s')$ à h soit compatible avec les produits fibrés finis. Rappelons (voir [5]) que, si $(K^{\cdot}, \bar{s})$ est une catégorie p-structurée, il existe alors une catégorie p'-structurée $((\bar{s}.H.s')^{\bullet}, D(\bar{s}, s'))$, notée $D((K^{\cdot}, \bar{s}), s')$, dont la loi de composition est:

$$(h', h) \to h'', \quad \text{où} \quad p'(h'')(x) = p'(h')(x).p'(h)(x)$$

ssi cet élément est défini pour tout $x \in p'(s')$.

PROPOSITION 5. *Soient $(C'^{\cdot}, s')$ une catégorie p-structurée et $(K^{\cdot}, K^{o}, \bar{s})$ une catégorie double p-structurée. Il existe une sous-catégorie p'-structurée $D((K^{\cdot}, K^{o}, s), (C'^{\cdot}, s'))$ de $D((K^{\cdot}, \bar{s}), s')$ définie par l'ensemble $\underline{A}$ des éléments f de H tels que $((K^{o}, \bar{s}), f, (C'^{\cdot}, s'))$ soit un élément de $\mathfrak{F}(p)$.*

Δ. Notons $\bar{a}, \bar{b}$ et $\bar{k}$ (resp. a', b' et k') les éléments de H structurant les applications source, but et loi de composition de K^{o} (resp. de $C'^{\cdot}$) relativement à $\bar{s}$ (resp. à s').

1°) Le couple $(D(\bar{a}, s'), D(\bar{s}, a'))$ admet un noyau canonique n dans p', dont la source u est appliquée par p' sur l'ensemble U des $f \in \bar{s}.H.s'$ tels que:

$$\bar{a}.f = p'(D(\bar{a}, s'))(f) = p'(D(\bar{s}, a'))(f) = f.a'.$$

Il existe aussi un noyau canonique n' dans p' de $(D(\bar{b}, s'), D(\bar{s}, b'))$, et p' applique la source u' de n' sur l'ensemble U' des $f \in \bar{s}.H.s'$ tels que $\bar{b}.f = f.b'$. Comme p' est un foncteur d'homomorphismes saturé à produits fibrés finis, il existe un produit fibré naturalisé (non canonique) $((n, \bar{n}), (n', \bar{n}'))$ dans p' tel que $n.\bar{n}$ soit la p'-injection canonique de $\bar{u}$ vers $D(\bar{s}, s')$, où $\bar{u}$ est la p'-sous-structure de $D(\bar{s}, s')$ définie par l'intersection de U et de U'. Autrement dit $p'(\bar{u})$ est l'ensemble U'' des $f \in \bar{s}.H.s'$ tels que $p(f)$ définisse un homomorphisme entre les graphes sous-jacents à $C'^{\cdot}$ et à K^{o}.

2°) Soient $((\bar{a}, \bar{v}), (\bar{b}, \bar{v}'))$ et $((a', w), (b', w'))$ les produits fibrés canoniques dans p. Par hypothèse

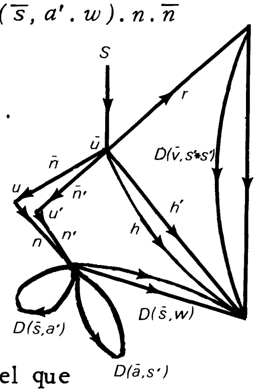
$$((D(\bar{a}, s'), D(\bar{v}, s')), (D(\bar{b}, s'), D(\bar{v}', s')))$$

est un produit fibré naturalisé dans p'. Posons

$$h = D(\bar{s}, w).n.\bar{n} \quad \text{et} \quad h' = D(\bar{s}, w').n.\bar{n}.$$

En utilisant le fait que D est un foncteur de $H^{\cdot} \times H^{*}$ vers $H^{\cdot}$, on obtient

$$D(\bar{a}, s'*s').h = D(\bar{a}, w).n.\bar{n} = D(\bar{s}, w).D(\bar{a}, s').n.\bar{n} =$$
$$= D(\bar{s}, w).D(\bar{s}, a').n.\bar{n} = D(\bar{s}, a'.w).n.\bar{n}$$



et, de même

$$D(\bar{b}, s'*s').h' = D(\bar{s}, b'.w').n'.\bar{n}'.$$

Puisque $a'.w = b'.w'$ et $n.\bar{n} = n'.\bar{n}'$, il s'ensuit

$$D(\bar{a}, s'*s').h = D(\bar{b}, s'*s').h',$$

de sorte qu'il existe un et un seul $r \in H'.\bar{u}$ tel que

$$D(\bar{v}, s'*s').r = h \quad \text{et} \quad D(\bar{v}', s'*s').r = h';$$

$p'(r)$ associe à l'élément f de U'' l'unique $f*f$ tel que

$$\bar{v}.(f*f) = f.w \quad \text{et} \quad \bar{v}'.(f*f) = f.w'.$$

La source S du noyau canonique dans p' du couple $(D(\bar{s}, k').n.\bar{n}, D(\bar{k}, s'*s').r)$ est telle que $p'(S)$ soit l'ensemble des $f \in U''$ tels que $f.k' = k.(f*f)$. Il en résulte $p'(S) = \underline{A}$.

4°) Soit $\mathfrak{F}(K^{\circ}, C'^{\cdot})$ la catégorie des foncteurs de $C'^{\cdot}$ vers K° associée à la catégorie double $(K^{\cdot}, K^{\circ})$ par le théorème 7-II [6]. La bijection restriction de p' à $\underline{A}$ définissant un isomorphisme de la sous-classe multiplicative $\underline{A}^{\bullet}$ de $(\bar{s}.H.s')^{\bullet}$ sur $\mathfrak{F}(K^{\circ}, C'^{\cdot})$, en fait $\underline{A}^{\bullet}$ est une sous-catégorie de $(\bar{s}.H.s')^{\bullet}$; comme S est une p'-sous-structure de $D(\bar{s}, s')$, il s'ensuit, d'après la proposition 5-2, que $(\underline{A}^{\bullet}, S)$ est une sous-catégorie p'-structurée de $D((K^{\cdot}, \bar{s}), s')$. ∇

Notons $\hat{p}'$ le foncteur d'oubli canonique de la catégorie $\mathfrak{F}(p')$ vers $\mathfrak{M}$ et $\hat{p}'^{\circ}$ le foncteur (non fidèle) de $\mathfrak{F}(p')$ vers $\mathfrak{M}$ associant $p'(f_o) = (C_o^{\cdot}, \underline{f}\iota, C_o'^{\cdot})$ à $((C^{\cdot}, s), f, (C'^{\cdot}, s'))$, où $\underline{f} = p'(f)$.

PROPOSITION 6. *Si p est à produits fibrés finis, il existe une catégorie $\hat{p}'^{\circ}$-dominée $(\mathfrak{F}(p), E)$ telle que $E((C^{\cdot}, s), (C'^{\cdot}, s'))$ soit isomorphe à la catégorie p'-structurée $D(\square(C^{\cdot}, s), (C'^{\cdot}, s'))$ associée à la catégorie double des quatuors de $(C^{\cdot}, s)$.*

Δ. Considérons deux foncteurs p-structurés

$$\bar{g}' = ((C'^{\cdot}, s'), g', (G'^{\cdot}, \bar{s}')) \quad \text{et} \quad \bar{g} = ((G^{\cdot}, \bar{s}), g, (C^{\cdot}, s)).$$

1°) Soit $g * g$ l'élément de $\tilde{s} * \tilde{s}. H. s * s$ appliqué par p sur une restriction de $p(g) \times p(g)$. Si k et $\tilde{k}$ sont les éléments de H structurant les lois de composition de $C^{\cdot}$ et $G^{\cdot}$ respectivement, on a $\tilde{k}. g * g = g. k$, de sorte qu'il existe un unique élément l de H tel que

$$\tilde{m}. l = g * g. m \quad \text{et} \quad \tilde{m}'. l = g * g. m',$$

où $((k, m), (k, m'))$ et $((\tilde{k}, \tilde{m}), (\tilde{k}, \tilde{m}'))$ sont les produits fibrés naturalisés dans p définissant $\square s$ et $\square \tilde{s}$. L'application $p(l)$ définissant un foncteur double entre les catégories de quatuors de $C^{\cdot}$ et de $G^{\cdot}$,

$$\square\!\square \bar{g} = ((\square\!\square G^{\cdot}, \square \tilde{s}), l, (\square\!\square C^{\cdot}, \square s)) \quad \text{et} \quad \boxminus \bar{g} = ((\boxminus G^{\cdot}, \square \tilde{s}), l, (\boxminus C^{\cdot}, \square s))$$

sont des foncteurs p-structurés. Posons $f = D(l, g')$. Si le composé $h' \bullet h$ est défini dans la catégorie $B^{\bullet}$ sous-jacente à $B = D((\square\!\square C^{\cdot}, \square s), s')$, alors $p'(f)(h' \bullet h) = l. (h' \bullet h). g'$ associe à $x \in G'$ l'élément

$$l(h'(g'(x)) \square\!\square\, h(g'(x))) = l(h'(g'(x))) \square\!\square\, l(h(g'(x))) =$$
$$= (l. h'. g' \bullet l. h. g')(x)$$

où l'on écrit $t(x')$ au lieu de $p(t)(x')$, si $t \in H$ et $x' \in p(\alpha(t))$. Il en résulte que f est sous-jacent à un foncteur p-structuré $\bar{f}$ de B vers $B' = D((\square\!\square G^{\cdot}, \square \tilde{s}), \tilde{s}')$.

2°) Soient $\underline{A}$ et $\underline{A}'$ les ensembles sous-jacents aux sous-catégories p-structurées

$$A = D(\square(C^{\cdot}, s), (C'^{\cdot}, s')) \quad \text{et} \quad A' = D(\square(G^{\cdot}, \tilde{s}), (G'^{\cdot}, \tilde{s}'))$$

de B et B' respectivement. Si h appartient à $\underline{A}$, alors $p'(f)(h) = l. h. g'$ définit un foncteur p-structuré de $(G'^{\cdot}, \tilde{s}')$ vers $(\boxminus G^{\cdot}, \square \tilde{s})$, c'est-à-dire appartient à A'. Par suite il existe un p'-sous-morphisme $D(\bar{g}, \bar{g}')$ de $\bar{f}$ de source A, de but A'. L'application $(\bar{g}, \bar{g}') \to D(\bar{g}, \bar{g}')$ définit un foncteur D' de $\mathfrak{F}(p) \times \mathfrak{F}(p)^*$ vers $\mathfrak{F}(p')$.

3°) Soit $\underline{z}_1$ la bijection $z^{-1}. z'$ définissant l'isomorphisme canonique (corollaire, proposition 3) de $A^{\bullet}$ sur la catégorie $\mathfrak{N}((C^{\cdot}, s), (C'^{\cdot}, s'))^{\square\!\square}$ dont on identifie les unités à des foncteurs p-structurés. Cette bijection définit un isomorphisme Z de A sur la catégorie p'-structurée $E((C^{\cdot}, s), (C'^{\cdot}, s'))$ image de A par $\underline{z}_1$. Soit Z' l'isomorphisme, défini de manière analogue, de A' sur $E((G^{\cdot}, \tilde{s}), (G'^{\cdot}, \tilde{s}'))$. L'application

$(\bar{g}, \bar{g}') \to Z'.D(\bar{g}, \bar{g}').Z^{-1}$ définit un foncteur E de $\mathfrak{F}(p)\times\mathfrak{F}(p)^*$ vers $\mathfrak{F}(p')$ équivalent à D' et $\bar{p}'^{o}$. E est le foncteur homomorphismes de $\mathfrak{F}(p)$, c'est-à-dire $(\mathfrak{F}(p), E)$ est une catégorie $\bar{p}'^{o}$-dominée. ∇

PROPOSITION 7. *Si p est à produits fibrés finis, il existe une catégorie p'-dominée $(\mathfrak{F}(p), E')$ telle que $E'((C^{\cdot}, s),(C'^{\cdot}, s'))$ soit isomorphe à une p'-sous-structure de $D(s, s')$ et il existe une transformation naturelle $(E'.(\square\square \times \square\square), \tau^{\square\square}, E')$, où $\square\square$ est le foncteur $\bar{g} \to \square\square\bar{g}$ de $\mathfrak{F}(p)$ vers $\mathfrak{F}(p)$ et où $p'(\tau^{\square\square}((C^{\cdot}, s),(C'^{\cdot}, s')))$ associe $\square\square\bar{g}$ à $\bar{g}$.*

Δ. Soient $e=(C^{\cdot}, s)$ et $e'=(C'^{\cdot}, s')$ deux catégories p-structurées; nous poserons $\square\square e=(\square\square C^{\cdot}, s)$.

1°) Si $\bar{g}=(e, g, e')$ est un foncteur p-structuré, un foncteur p-structuré $\square\square\bar{g}=(\square\square e, \square g, \square\square e')$ lui a été associé au début de la preuve de la proposition 6. Comme le foncteur sous-jacent à $\square\square\bar{g}$ est $\square\square F$, si F est le foncteur sous-jacent à $\bar{g}$, l'application $\bar{g} \to \square\square\bar{g}$ définit un foncteur $\square\square$ de $\mathfrak{F}(p)$ vers lui-même.

2°) Si C^{o} est la catégorie discrète sur C, le couple (C^{o}, s) est une catégorie p-structurée, et $\grave{e}=(C^{o}, C^{\cdot}, s)$ est une catégorie double p-structurée. La catégorie p'-structurée $D(\grave{e}, e')$ que lui associe la proposition 5 est de la forme (A^{o}, S), où A^{o} est la catégorie discrète sur l'ensemble des h tels que (e, h, e') soit un foncteur p-structuré et où S est une p'-sous-structure de $D(s, s')$; notons j la p'-injection canonique de S vers $D(s, s')$. Soit (A'^{o}, S') la catégorie p'-structurée construite de même à partir de $\square\square e$ et de $\square\square e'$, et j' la p'-injection canonique de S' vers $D(\square s, \square s')$. Montrons qu'il existe un élément $t(e, e')$ de H', de source S, de but S', tel que $p'(t(e, e'))$ associe $\square g$ à $g \in A$. Notons a, b, k et a', b', k' les éléments de H qui structurent respectivement les applications sources, buts et lois de composition de $C^{\cdot}$ et de $C'^{\cdot}$. Soient $((a, v),(b, v'))$ et $((a', w),(b', w'))$ les produits fibrés dans p naturalisés canoniques, $((k, m),(k, m'))$ et $((k', n),(k', n'))$ les produits fibrés naturalisés définissant $\square s$ et $\square s'$. Etant donné que l'on obtient $D(a, s').j = D(s, a').j$, les applications sous-jacentes aux deux membres associant respectivement $a.g$ et $g.a'$ à $g \in A$, et que de même $D(b, s').j = D(s, b').j$, une démonstration analogue à celle de la proposition 5, partie 2, prouve qu'il existe un élément r de H' tel que

$$D(v, s'*s').r = D(s, w).j \quad \text{et} \quad D(v', s'*s').r = D(s, w').j;$$

$p'(r)$ associe $g*g$ à g. L'égalité $k.(g*g) = g.k'$ pour tout g entraîne:

$$D(k, s'*s').r = D(s, k').j,$$

d'où

$$\begin{aligned} D(k, \square s').D(s*s, n).r = D(k, n).r &= D(s, n).D(k, s'*s').r \\ &= D(s, n).D(s, k').j \end{aligned}$$

et, de manière analogue,

$$D(k, \square s').D(s*s, n').r = D(s, n').D(s, k').j.$$

Il s'ensuit

$$D(k, \square s').D(s*s, n).r = D(k, \square s').D(s*s, n').r,$$

car

$$D(s, n').D(s, k') = D(s, k'.n') = D(s, k'.n) = D(s, n).D(s, k').$$

Le foncteur $D(.,\square s')$ étant compatible avec les produits fibrés finis, il existe un unique r' tel que

$$D(m, \square s').r' = D(s*s, n).r \quad \text{et} \quad D(m', \square s').r' = D(s*s, n').r,$$

et $p'(r')$ associe à $g \in A$ l'élément $\square g \in A'$ défini par

$$m.\square g = g*g.n \quad \text{et} \quad m'.\square g = g*g.n'.$$

Puisque $p'(r')(A)$ est contenu dans A', il existe un unique élément r'' de $S'.H'.S$ tel que $j'.r'' = r'$, où j' est la p'-injection canonique de S' vers $D(\square s, \square s')$. Nous poserons $S = D''(e, e')$ et $r'' = t(e, e')$.

3°) Si de plus $\bar{h} = (\tilde{e}, h, (C^{\cdot}, s))$ et $\bar{h}' = ((C'^{\cdot}, s'), h', \tilde{e}')$ sont des foncteurs p-structurés et si $D''(\tilde{e}, \tilde{e}') = S''$, l'image de l'application $p'(D(h, h')) : g \to h.g.h'$ est contenue dans $p'(S'')$, de sorte qu'il existe un p'-sous-morphisme $D''(\bar{h}, \bar{h}')$ de $D(h, h')$ de source S et de but S''. L'application $(\bar{h}, \bar{h}') \to D''(\bar{h}, \bar{h}')$ définit un foncteur de $\mathfrak{F}(p) \times \mathfrak{F}(p)^*$ vers $H'^{\cdot}$, que nous désignerons par D''. On a

$$D''(\square\bar{h}, \square\bar{h}').t(e, e') = t(\tilde{e}, \tilde{e}').D''(\bar{h}, \bar{h}'),$$

les applications sous-jacentes aux deux membres associant respectivement $\square h.\square g.\square h'$ et $\square(h.g.h')$ à $g \in A$, lesquels sont égaux. Donc $T =$

$(D''.(\square\square \times \square\square), t, D'')$ est une transformation naturelle.

4°) p' étant un foncteur d'homomorphismes saturé, il existe une équivalence $\Gamma = (E', \gamma, D'')$ telle que $p'(\gamma(e, e'))$ associe (e, h, e') à h. Le couple $(\mathfrak{F}(p), E')$ est une catégorie p'-dominée et la transformation naturelle cherchée est $\Gamma.(\square\square \times \square\square)\square\square T \square\square \Gamma^{-1}$. ∇

COROLLAIRE. *La proposition 7 est aussi vraie si l'on remplace partout* $\square\square$ *par* $\boxminus$.

Δ. La preuve est analogue à la précédente, l'application $p'(r')$ de la partie 2 ci-dessus appliquant aussi A dans l'ensemble des éléments de H sous-jacents à un foncteur p-structuré de $\boxminus e = (\boxminus C^{\cdot}, \square s)$ vers $\boxminus e'$. ∇

PROPOSITION 8. *Si p est à produits fibrés finis et si $(H^{\cdot}, D)$ est une catégorie p'-dominée, où p' est à produits finis, $(\mathfrak{F}(p), E')$ et $(\mathfrak{F}(p), E)$ sont des catégories fortement p'-dominée et $\hat{p}'^{o}$-dominée respectivement.*

Δ. Dire que $(H^{\cdot}, D)$ est fortement p'-dominée signifie que, si s, s' et $\bar{s}$ sont trois unités de $H^{\cdot}$, il existe un élément $k(s, s', \bar{s})$ de H' de source $D(s, s')\times D(s', \bar{s})$ et de but $D(s, \bar{s})$ appliqué par p' sur une restriction de la loi de composition de $H^{\cdot}$. Soient

$$e = (C^{\cdot}, s), \quad e' = (C'^{\cdot}, s') \quad \text{et} \quad \bar{e} = (G^{\cdot}, \bar{s})$$

trois catégories p-structurées.

1°) Pour montrer que $(\mathfrak{F}(p), E')$ est fortement p'-dominée, il suffit, vu la construction de E' à partir du foncteur D'' donnée dans la proposition 7, de prouver qu'il existe un élément $k'(e, e', \bar{e})$ de

$$\tilde{s} = D''(e, e')\times D''(e', \bar{e}) \quad \text{vers} \quad s'' = D''(e, \bar{e})$$

appliqué par p' sur une restriction de la loi de composition de $H^{\cdot}$. L'image $p'(k(s,s',s))(p'(\tilde{s}))$ étant contenue dans $p'(s'')$ et $\tilde{s}$ et s'' étant respectivement des p'-sous-structures de $D(s, s')\times D(s', \bar{s})$ et de $D(s, \bar{s})$, il existe un p'-sous-morphisme $k'(e, e', \bar{e})$ de $k(s, s', \bar{s})$ vérifiant les conditions voulues.

3°) Montrons qu'il existe un élément $\bar{h}$ de $\mathfrak{F}(p')$ de source $L\times L'$, où $L = E(e, e')$, $L' = E(e', \bar{e})$, de but $L'' = E(e, \bar{e})$, appliqué par $\hat{p}'$ sur une restriction c de la loi de composition de la catégorie $\mathfrak{N}(p)^{\blacklozenge}$ (proposition 4) à $\mathfrak{N}(e, e') \times \mathfrak{N}(e', \tilde{e})$; cet élément étant appliqué par $\bar{p}'^{o}$ sur une restriction de la loi de composition de $\mathcal{F}(p)$, il s'ensuivra que $(\mathcal{F}(p), E)$ est fortement $\bar{p}'^{o}$-dominée. En effet L, L' et L'' sont isomorphes à $A = D(\Box e, e') = (\underline{A}^{\bullet}, S)$, $A' = D(\Box e', \bar{e}) = (\underline{A}'^{\bullet}, S')$, $A'' = D(\Box e, \bar{e}) = (\underline{A}''^{\bullet}, S'')$; notons

$$Z = (L, z_1, A), \quad Z' = (L', z_1', A') \quad \text{et} \quad Z'' = (L'', z_1'', A'')$$

les isomorphismes canoniques. L'application $c' = \underline{z}_1''^{-1}. c. (\underline{z}_1 \times \underline{z}_1')$ associe à (f', f) l'élément $(\Box(b^{\Box\Box}. f'). f) \bullet (f'. a'^{\Box\Box}. f)$, où $a'^{\Box\Box}$ est l'élément de $s'. H. \Box s'$ tel que $p(a'^{\Box\Box})(y, y_1, x_1, x) = x$ et $b^{\Box\Box}$ l'élément de de $s. H. \Box s$ tel que $p(b^{\Box\Box})(y', y_1', x_1', x') = y'$ (ceux-ci existent d'après la proposition 3). Il nous suffit de prouver qu'il existe un foncteur p'-structuré $\bar{h}' = (A'', h', A \times A')$ tel que $p'(h') = c'$; l'élément $\bar{h}$ voulu sera alors $Z''. \bar{h}'. (Z \times Z')^{-1}$. Or S étant la p'-sous-structure de $D(\Box s, s')$ définie par l'ensemble des éléments de H sous-jacents à un foncteur p-structuré de e' vers $\boxminus e$, elle est identique à $D''(\boxminus e, e')$; de même

$$S' = D''(\boxminus e', \bar{e}) \quad \text{et} \quad S'' = D''(\boxminus e, \bar{e}).$$

Soit $t(e, e')$ l'élément considéré dans la proposition 7, de source S, de but $D''(\boxminus e, \boxminus e')$. Les triplets $\bar{a}' = (e', a'^{\Box\Box}, \boxminus e')$ et $\bar{b} = (e, b^{\Box\Box}, \boxminus e)$ étant des foncteurs p-structurés, il existe des éléments $S \times D''(\bar{a}', \bar{e})$ et $(t(e', e). D''(\bar{b}, e')) \times S'$ de source $S \times S'$, de but $S \times D''(e', \bar{e})$ et $D''(\boxminus e, \boxminus e') \times S'$ respectivement. Posons

$$g' = k'(\boxminus e, e', \bar{e}). (S \times D''(\bar{a}', \bar{e})),$$
$$g = k'(\boxminus e, \boxminus e', \bar{e}). ((t(e, e'). D''(\bar{b}, e')) \times S').$$

g et g' sont des éléments de H' de source $S \times S'$, de but $D''(\boxminus e, \bar{e})$, et les applications $p'(g)$ et $p'(g')$ associent à (f', f) respectivement $\Box(b^{\Box\Box}. f'). f$ et $f'. a'^{\Box\Box}. f$; ces derniers éléments étant composables dans $A''^{\bullet}$ et le foncteur p' étant fidèle, il s'ensuit $a^{\bullet}. g = b^{\bullet}. g'$, où $a^{\bullet}$ et $b^{\bullet}$ sont les éléments de H' structurant les applications source et but de $A''^{\bullet}$. Par suite il existe un unique élément g'' de H' tel que

$$v^{\bullet}. g'' = g \quad \text{et} \quad v'^{\bullet}. g'' = g',$$

où $((a^{\bullet}, v^{\bullet}), (b^{\bullet}, v'^{\bullet}))$ est le produit fibré naturalisé canonique dans p'.

Si $k^\bullet$ est l'élément de H' structurant la loi de composition de $A''^\bullet$, l'élément $h' = k^\bullet . g''$ est tel que $p'(h') = c'$. Comme $(\mathfrak{N}(p)^{\square\square}, \mathfrak{N}(p)^\blacklozenge)$ est une 2-catégorie, c définit un foncteur de $\mathfrak{N}(e, e')^{\square\square} \times \mathfrak{N}(e', \bar{e})^{\square\square}$ vers $\mathfrak{N}(e, \bar{e})^{\square\square}$; a fortiori c' définit un foncteur de $A^\bullet \times A'^\bullet$ vers $A''^\bullet$. Donc $(A'', h', A \times A')$ est un foncteur p'-structuré $\overline{h'}$. ∇

Supposons maintenant que $p = p'$ et que $(C'^{\cdot}, s')$ est une catégorie p-structurée, notée e', telle que le produit $s \times s'$ dans p soit défini pour toute unité s de $H^{\cdot}$. Il existe alors un foncteur $X : f \to f \times s'$ produit canonique par s', de $H^{\cdot}$ vers $H^{\cdot}$. D'après le corollaire de la proposition 7-2, il existe également un foncteur X' de $\mathfrak{F}(p)$ vers $\mathfrak{F}(p)$, produit canonique par e'.

PROPOSITION 9. *Supposons que $D(\,.\,, s')$ soit un foncteur coadjoint de X, le X-éjecteur associé à une unité s de $H^{\cdot}$ étant de la forme $(j(s), D(s, s'))$, où $p(j(s))$ est l'application d'évaluation $(f, x) \to p(f)(x)$; alors le foncteur X' admet $E(\,.\,, (C'^{\cdot}, s'))$ pour coadjoint.*

Δ. Soient $e = (C^{\cdot}, s)$ une catégorie p-structurée,

$$A = D(\square e, e') = (A^\bullet, S), \qquad L = E(e, e');$$

nous notons $Z = (A, z_1, L)$ l'isomorphisme canonique de A sur L et $\bar{u} = (B, u, A)$ la p-injection canonique de A vers $B = D((\square\square C^{\cdot}, \square s), s')$. Enfin $((k, m), (k, m'))$ est le produit fibré naturalisé définissant $\square s$.

1°) Si X'' désigne le foncteur $F \to F \times C'^{\cdot}$ de $\mathfrak{F}$ vers $\mathfrak{F}$, on sait (voir par exemple [2] ou [7]) qu'il existe un X''-éjecteur $(J, \mathfrak{N}(C^{\cdot}, C'^{\cdot})^{\square\square})$ tel que J soit le foncteur de $\mathfrak{N}(C^{\cdot}, C'^{\cdot})^{\square\square} \times C'^{\cdot}$ vers $C'^{\cdot}$ associant à (T, x) l'élément $T(x) = F'(x) . t(o)$, si $T = (F', t, F)$ et si x est un élément de C' de source o. Par ailleurs l'injection ν (proposition 1) associant à une transformation naturelle p-structurée la transformation naturelle sous-jacente définit un foncteur N de $\mathfrak{N}(e, e')^{\square\square}$ vers $\mathfrak{N}(C^{\cdot}, C'^{\cdot})^{\square\square}$. Si l'on pose

$$j' = k . m . j(\square s) . (u . z_1^{-1} \times s'),$$

l'application $p(j')$ est sous-jacente au foncteur $J . (N \times C'^{\cdot})$, de sorte que $\overline{j'} = (e, j', X'(L))$ est un foncteur p-structuré.

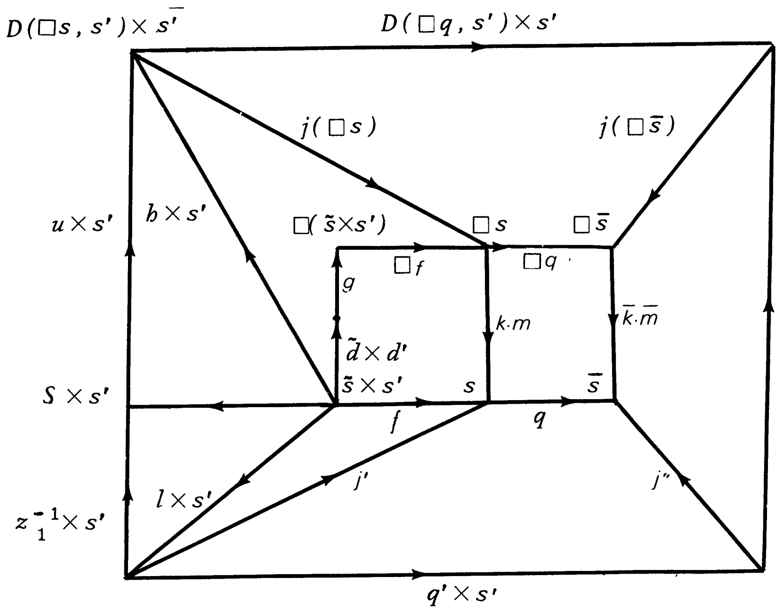
2°) Montrons que $(L, \bar{j}')$ est un X'-éjecteur. En effet, supposons que $\bar{f}=(e, f, X'(\tilde{e}))$, où $\tilde{e}=(G^{\cdot}, \tilde{s})$, soit un foncteur p-structuré, et soit F le foncteur de $G^{\cdot}\times C'^{\cdot}$ vers $C^{\cdot}$ sous-jacent. Il existe des catégories p-structurées $(\square\square G^{\cdot}, \square\tilde{s})$ et $(\square\square(G^{\cdot}\times C'^{\cdot}), \square(\tilde{s}\times s'))$; soient $\tilde{k}$, k' et k'' les éléments de H structurant les lois de composition de $G^{\cdot}$, de $C'^{\cdot}$ et de $G^{\cdot}\times C'^{\cdot}$ relativement à $\tilde{s}$, à s' et à $\tilde{s}\times s'$; comme k'' est un produit de $(\tilde{k}, k')$, d'après le théorème de commutativité des produits et produits fibrés, le produit fibré $\square(\tilde{s}\times s')$ de (k'', k'') est un produit de $(\square\tilde{s}, \square s')$. Il existe donc un $g\in\square(\tilde{s}\times s').H.(\square\tilde{s}\times\square s')$ inversible tel que $p(g)$ associe

$$((\bar{x}, \bar{x}'), (\bar{y}, \bar{y}'), (y, y'), (x, x')) \text{ à } ((\bar{x}, \bar{y}, y, x), (\bar{x}', \bar{y}', y', x')).$$

D'après la preuve de la proposition 3, il existe aussi des éléments $\tilde{d}$ et d' de H vérifiant les conditions:

$$\tilde{d}\in\square\tilde{s}.H.\tilde{s} \quad\text{et}\quad p(\tilde{d})(x)=x^{\boxminus}, \text{ si } x\in G,$$
$$d'\in\square s'.H.s' \quad\text{et}\quad p(d')(x')=x'^{\square\square}, \text{ si } x\in C'.$$

Enfin il existe $\square f\in\square s.H.\square(\tilde{s}\times s')$ tel que $p(\square f)$ soit l'application définissant le foncteur $\boxminus F$. Posons $f'=\square f.g.(\tilde{d}\times d')$; puisque f' appar-



tient à $\square s.H.X(\tilde{s})$, il existe un unique $h \in D(\square s, s').H.\tilde{s}$ tel que $f' = j(\square s).(h \times s')$. Cette relation entraîne

$$p(h(x))(x') = p(f')(x,x'), \text{ où } h(x) = p(h)(x),$$

si $x \in G$ et $x' \in C'$. Autrement dit $p(h(x))$ est l'application

$$p(\square f).p(g).[c_x, p(d')] : x' \to (f(\bar{e}, x'), f(x, \bar{e}'), f(x, e'), f(e, x')),$$

où $f(\xi) = p(f)(\xi)$ et où c_x est l'application de C' dans $\square G^{\bullet}$ constante sur $x^{\boxminus}$, e et e' les sources de x et x', $\bar{e}$ et $\bar{e}'$ leurs buts. Etant donné que $p(d')$ et c_x définissent des foncteurs de $C'^{\bullet}$ vers $\boxminus C'^{\bullet}$ et vers $\boxminus G^{\bullet}$ respectivement, que $p(g)$ définit un isomorphisme de $\boxminus G^{\bullet} \times \boxminus C'^{\bullet}$ sur $\boxminus(G^{\bullet} \times C'^{\bullet})$ et $p(\square f)$ le foncteur $\boxminus F$, le triplet $(\boxminus e, h(x), e')$ est un foncteur p-structuré, c'est-à-dire $h(x)$ appartient à $\underline{A}$ pour tout élément x de G; par suite, S étant la p-sous-structure de $D(\square s, s')$ définie par $\underline{A}$, il existe un unique élément h' de $S.H.\tilde{s}$ tel que $u.h' = h$. Posant $l = z_1.h'$, on voit que l'application $\nu.p(l)$ est sous-jacente à l'unique foncteur F' de $G^{\bullet}$ vers $\mathfrak{N}(C^{\bullet}, C'^{\bullet})^{\square\square}$ tel que $J.(F' \times C'^{\bullet}) = F$. Il s'ensuit que $p(l)$ définit un foncteur de $G^{\bullet}$ vers la catégorie $\mathfrak{N}(e, e')^{\square\square}$ sous-jacente à L; a fortiori $\bar{l} = (L, l, \tilde{e})$ est un foncteur p-structuré. Si λ est le foncteur $\hat{p}\mathfrak{F}(\bar{l})$ sous-jacent à $\bar{l}$, on trouve

$$\hat{p}\mathfrak{F}(\bar{j}'.X'(\bar{l})) = J.(N \times C'^{\bullet}).(\lambda \times C'^{\bullet}) = J.(N.\lambda \times C'^{\bullet}) = J.F' = F,$$

d'où, $\hat{p}\mathfrak{F}$ étant fidèle, $\bar{j}'.X'(\bar{l}) = \bar{f}$. Enfin si $\bar{l}' = (L, l', \tilde{e})$ est un foncteur p-structuré tel que $\bar{j}'.X'(\bar{l}') = \bar{f}$, le foncteur λ' sous-jacent à $\bar{l}'$ vérifie $J.(N \times C'^{\bullet}).(\lambda' \times C'^{\bullet}) = F$, ce qui implique $N.\lambda' = F' = N.\lambda$, donc $\lambda = \lambda'$ et $\bar{l} = \bar{l}'$. Ceci prouve que $(L, \bar{j}')$ est un X'-éjecteur; nous le noterons $V(e)$.

3°) Soit Y le foncteur coadjoint de X' construit à partir des éjecteurs $V(e)$. Soient $q = (\bar{e}, q, e)$, où $\bar{e} = (\bar{C}^{\bullet}, \bar{s})$, un foncteur p-structuré, $V(\bar{e}) = (L', \bar{j}'')$, $\bar{j}'' = (\bar{e}, j'', X'(L'))$, $Z' = (L', z_1', A')$ l'isomorphisme canonique sur L' de $A' = D(\square \bar{e}, e')$ et $\bar{u}' = (B', u', A')$ la p-injection canonique de A' vers $B' = D(\square\square \bar{e}, s')$. Si $((\bar{k}, \bar{m}), (\bar{k}, \bar{m}'))$ est le produit fibré naturalisé définissant $\square \bar{s}$ et si $\square q$ est l'élément de H de source $\square s$, de but $\square \bar{s}$, associé à q, on a $\bar{k}.\bar{m}.\square q = q.k.m$. Comme $D(.,s')$ est le foncteur coadjoint de X associé aux X-éjecteurs de la forme $(D(s,s'), j(s))$, l'élément $D(\Box q, s')$ vérifie

$$j(\Box \bar{s}).(D(\Box q, s') \times s') = \Box q . j(\Box s).$$

D'après la preuve de la proposition 5, il existe un p-sous-morphisme q'' de $D(\Box q, s')$ relativement à (u', u) et l'on a $E(\bar{q}, e') = \bar{q}' = (L', q', L)$, où $q' = z'_1 . q'' . z_1^{-1}$. Il s'ensuit

$$\begin{aligned} j''.(q' \times s') &= \bar{k}.\bar{m}.j(\Box \bar{s}).(u'.z'^{-1}_1 \times s').(q' \times s') \\ &= \bar{k}.\bar{m}.j(\Box \bar{s}).(D(\Box q, s').u.z_1^{-1} \times s') \\ &= \bar{k}.\bar{m}.\Box q.j(\Box s).(u.z_1^{-1} \times s') = q.j'. \end{aligned}$$

Par conséquent $\bar{q}'$ est l'unique foncteur p-structuré tel que $\bar{j}''.X'(\bar{q}') = \bar{q}.\bar{j}'$, ce qui signifie que $\bar{q}' = Y(\bar{q})$. ∇

COROLLAIRE. *Avec les hypothèses de la proposition 9 et si $C'^{\cdot}$ est discrète, $D(e, s')$ est une X'-structure colibre associée à e, pour toute catégorie p-structurée e.*

Δ. Soit $e = (C^{\cdot}, s)$ une catégorie p-structurée. Reprenons les notations de la preuve précédente et posons $c = D(k.m, s').u$. Comme $C'^{\cdot}$ est discrète, l'application $f \to k.m.f$ définit un isomorphisme de $A^{\bullet}$ sur $(s.H.s')^{\bullet}$. De plus, si d est l'inverse à droite de $k.m$ tel que $p(d)$ soit l'application $x \to x^{\Box\Box}$ (proposition 3), $p(D(d,s'))(s.H.s')$ est contenu dans $\underline{A}$ et, u étant une p-injection, il existe un $\bar{d}'$ tel que $u.\bar{d}' = D(d, s')$. Ce $\bar{d}'$ est l'inverse de c dans $H^{\cdot}$. Donc c est sous-jacent à un isomorphisme $\bar{c}$ de A sur $\bar{L}' = D(e, s')$. Il en résulte que le couple $(\bar{L}', \bar{j}'.Z.\bar{c}^{-1})$ est aussi un X'-éjecteur. ∇

Rappelons [8] qu'on appelle *catégorie cartésienne fermée* une catégorie $H^{\cdot}$ à produits finis telle que, pour toute unité s' de $H^{\cdot}$, un foncteur produit par s' ait un coadjoint; ce dernier est alors compatible avec les produits fibrés finis.

PROPOSITION 10. *Si $H^{\cdot}$ est une catégorie cartésienne fermée dont un élément final O est un générateur et si p est un foncteur d'homomorphismes saturé à noyaux équivalent au foncteur η de $H^{\cdot}$ vers $\mathfrak{M}$ associé au générateur O, alors $\mathcal{F}(p)$ est une catégorie cartésienne fermée.*

Δ. Puisque η est à produits, p est aussi à produits fibrés finis.

D'après [8] $H^{\cdot}$ est une catégorie monoïdale fermée et on peut choisir pour toute unité s' un foncteur coadjoint $D(.,s')$ du foncteur produit canonique par s' dans p de sorte que $D(.,s')$ soit le foncteur partiel associé à une catégorie p-dominée $(H^{\cdot}, D)$ vérifiant les conditions de la proposition 9. Il s'ensuit que $\mathcal{F}(p)$ est une catégorie cartésienne fermée. ∇

REMARQUE. D'après la preuve précédente, les hypothèses de la proposition 10 équivalent à dire que $(H^{\cdot}, p)$ est un couple fermé au sens de [9] (mais $(\mathcal{F}(p), \bar{p})$ n'en est pas un, car l'application sous-jacente à un X'-éjecteur n'est pas l'application d'évaluation). Par suite cette proposition entraîne par exemple que la catégorie des foncteurs quasi-topologiques [5] (resp. ordonnés) est une catégorie cartésienne fermée. Par contre ses hypothèses ne sont pas remplies si $H^{\cdot}$ est la catégorie des foncteurs. Nous montrerons cependant dans un prochain article que la catégorie des foncteurs doubles est une catégorie cartésienne fermée. Plus généralement nous montrerons que la catégorie des foncteurs structurés [5] associée à une catégorie monoïdale fermée est fermée.

5. Groupoïdes structurés.

Soit p un foncteur d'homomorphismes saturé de $H^{\cdot}$ vers $\mathfrak{M}$.

DEFINITION. On appelle *groupoïde p-structuré* une catégorie p-structurée $e = (C^{\cdot}, s)$ vérifiant la condition suivante: $C^{\cdot}$ est un groupoïde, et il existe un élément I de $s.H.s$, dit *morphisme d'inversion de* e, tel que $p(I)$ soit l'application d'inversion $x \to x^{-1}$.

Comme $p(I)$ est une bijection qui est son propre inverse, et comme p est fidèle, I est son propre inverse dans $H^{\cdot}$.

Nous désignerons par $\mathcal{G}(p)$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}(p)$ ayant pour objets les groupoïdes p-structurés, par q le foncteur de $\mathcal{G}(p)$ vers $\mathfrak{M}$ restriction de $\bar{p}$.

PROPOSITION 1. *q est un foncteur d'homomorphismes saturé.*

Δ. Comme $\bar{p}$ est un foncteur d'homomorphismes saturé (proposition 4-2), il suffit de montrer que la catégorie p-structurée e' image d'un groupoïde p-structuré $e = (C^{\cdot}, s)$ par une bijection f est un groupoïde

p-structuré. Or son morphisme d'inversion est $h.I.h^{-1}$, où I est le morphisme d'inversion de e et h l'inversible de $H.s$ tel que $p(h)=f$. ∇

DEFINITION. Si e est un groupoïde p-structuré, on appelle *sous-groupoïde p-structuré de e* une sous-catégorie p-structurée e' de e telle que e' soit un groupoïde p-structuré.

$\mathcal{G}(p)$ étant une sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}(p)$, un sous-groupoïde p-structuré de e est a fortiori une q- sous-structure de e.

PROPOSITION 2. *Si* $e=(C^\cdot, s)$ *est un groupoïde p-structuré et* $e'=(C'^\cdot, s')$ *une sous-catégorie p-structurée de e telle que* $C'^\cdot$ *soit un groupoïde, alors e' est un sous-groupoïde p-structuré de e.*

Δ. Soit I le morphisme d'inversion de e. Puisque l'application d'inversion de $C'^\cdot$ est une restriction de $p(I)$ et que s' est une p-sous-structure de s, il existe un p-sous-morphisme I' de I tel que $p(I')$ soit l'application d'inversion de $C'^\cdot$. Donc e' est un groupoïde p-structuré. ∇

COROLLAIRE. *Si* $e=(C^\cdot, s)$ *est un groupoïde p-structuré, si* $C'^\cdot$ *est un sous-groupoïde de* $C^\cdot$ *tel que* C', $C'^\cdot_0$ *et* $C'^\cdot * C'^\cdot$ *définissent des p-sous-structures de s, de s et de* $s*s$ *respectivement, alors C' définit un sous-groupoïde p-structuré de e.*

Notons l le foncteur injection canonique de $\mathcal{G}(p)$ vers $\mathcal{F}(p)$.

PROPOSITION 3. *Soit G un foncteur de* $K^\cdot$ *vers* $\mathcal{G}(p)$; *posons* $l.G=F$. *Si F admet une limite projective e, celle-ci est aussi une limite projective de G.*

Δ. $\mathcal{G}(p)$ étant une sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}(p)$, il nous suffit de montrer que $e=(C^\cdot, s)$ est un groupoïde p-structuré. Pour toute unité u de $K^\cdot$, soit $\tilde{I}(u)$ le morphisme d'inversion de $F(u)=(C^\cdot_u, s_u)$. Le triplet $J=(F,\tilde{I},F)$ est une transformation naturelle; en effet, si f est un élément de $K.u$ de but u', on a $F(f).\tilde{I}(u)=\tilde{I}(u').F(f)$, les applications sous-jacentes aux deux membres étant identiques, car $p(F(f))$ définit un foncteur de $C^\cdot_u$ vers $C^\cdot_{u'}$. Si $T=(\hat{p}_H.F, t, \hat{s})$ est la limite projective naturalisée canonique, il existe un unique $I\in s.H.s$ tel que $TI=J\boxminus T$ et que $p(I)$ soit l'application d'inversion de $C^\cdot$. Donc e

est un groupoïde p-structuré. ∇

COROLLAIRE. *Si p est à $K^{\cdot}$-limites projectives, q est à $K^{\cdot}$-limites projectives.*

Ceci résulte des propositions 3 et 7-2.

PROPOSITION 4. *Avec les hypothèses du paragraphe 3 et si P est dénombrablement $\frown$-engendrant pour $\mathfrak{M}$, le foncteur Q de $\mathcal{G}(P)$ vers $\mathfrak{M}$ est dénombrablement $(\mathfrak{M}, X'.\mathcal{G}(p)_0)$-engendrant, où X' est l'ensemble des $\hat{P}$-monomorphismes stricts appartenant à $\mathcal{G}(p)$.*

Δ. La preuve est analogue à celle de la proposition 6-3, en y remplaçant partout les catégories p-structurées par des groupoïdes p-structurés, et en prenant pour $C_i^{\cdot}$ le sous-groupoïde de $C^{\cdot}$ engendré par Z_{i-1}. ∇

COROLLAIRE. *Supposons les conditions de la proposition 7-2 vérifiées. Alors q est un foncteur à structures quasi-quotients, $\mathcal{G}(p)$ est une catégorie à $K^{\cdot}$-limites inductives, si K appartient à $\mathfrak{U}$; enfin $\mathcal{F}(p)$ est est une catégorie à $\mathcal{G}(p)$-projections.*

Δ. $\mathcal{F}(p)$ appartenant à $\hat{\mathfrak{U}}$ (preuve de la proposition 7-3), $\mathcal{G}(p)$ y appartient aussi. Par suite, comme dans la propoistion 7-3, on peut appliquer les théorèmes généraux d'existence de structures quasi-quotients, de limites inductives et de structures libres de [4]. ∇

DEFINITION. On appelle *groupoïde double p-structuré* un triplet $(K^{\cdot}, K^{\circ}, s)$, où $(K^{\cdot}, K^{\circ})$ est un groupoïde double et où $(K^{\cdot}, s)$ et (K°, s) sont des groupoïdes p-structurés.

PROPOSITION 5. *Si $e = (C^{\cdot}, s)$ est un groupoïde p-structuré, la catégorie double p-structurée $\square e$ (proposition 3-4) est un groupoïde double p-structuré.*

Δ. $(\square\square C^{\cdot}, \boxminus C^{\cdot})$ est un groupoïde double. L'application d'inversion de $\square\square C^{\cdot}$ associe à $u = (y', x', x, y)$ le quatuor (y, x'^{-1}, x^{-1}, y'). Reprenons les notations de la preuve de la proposition 3-4, partie 1, et notons I le morphisme d'inversion de e. Comme

$$b.I.v'.m = a.v'.m = a.k.m = a.k.m' = a.v'.m',$$

il existe un unique h tel que

$$v.h = v'.m' \quad \text{et} \quad v'.h = I.v'.m.$$

et $p(h)$ associe (y, x^{-1}) à u. Il existe aussi un unique h' tel que

$$v.h' = I.v.m' \quad \text{et} \quad v'.h' = v.m,$$

car

$$a.I.v.m' = b.v.m' = b.k.m' = b.k.m = b.v.m.$$

Les applications sous-jacentes à $k.h$ et à $k.h'$ associant à u respectivement $y.x^{-1}$ et $x'^{-1}.y'$, elles sont identiques. Il s'ensuit $k.h = k.h'$. Donc il existe un unique I tel que

$$m.I = h \quad \text{et} \quad m'.I = h',$$

et $p(I)$ est l'application d'inversion de $\square\square C^{\cdot}$. Ceci montre que $\square\square e$ est un groupoïde p-structuré. Il en est de même pour sa catégorie p-structurée image $\boxminus e$. ∇

PROPOSITION 6. *Si e est un groupoïde p-structuré et e' une catégorie p-structurée, la catégorie $\mathfrak{N}(e, e')^{\square\square}$ est un groupoïde.*

Δ. Soit $T = (\bar{h}', t, \bar{h})$ un élément de $\mathfrak{N}(e, e')$. Si I dénote le morphisme d'inversion de e, alors $T' = (\bar{h}, I.t, \bar{h}')$ est une transformation naturelle p-structurée; T' est l'inverse de T dans $\mathfrak{N}(e, e')^{\square\square}$, les transformations naturelles sous-jacentes à T et à T' étant inverses l'une de l'autre dans $\mathfrak{N}^{\square\square}$. ∇

COROLLAIRE. *La sous-catégorie pleine de $\mathfrak{N}(p)^{\blacklozenge}$ ayant pour objets les groupoïdes p-structurés définit une sous-catégorie double de la catégorie double $(\mathfrak{N}(p)^{\square\square}, \mathfrak{N}(p)^{\blacklozenge})$.*

HYPOTHESE. Nous supposons maintenant remplie l'Hypothèse du § 4.

PROPOSITION 7. *Si $\grave{e} = (K^{\cdot}, K^{o}, s)$ est un groupoïde double p-structuré et $e' = (C'^{\cdot}, s')$ une catégorie p-structurée, $D(\grave{e}, e')$ est un groupoïde p'-structuré.*

Δ. $D((K^{\cdot}, s), s')$ est un groupoïde p'-structuré, son morphisme d'inversion étant $D(I, s')$, où I est le morphisme d'inversion de $(K^{\cdot}, s)$. Puisque $D(\grave{e}, e')$ est une sous-catégorie p'-structurée $(A^{\bullet}, S)$ de

$D((K^{\cdot}, s), s')$ et que $A^{\bullet}$ est un groupoïde isomorphe au groupoïde (proposition 6) $\mathfrak{N}((K^{o}, s), e')$, la proposition 3 affirme que $D(\dot{e}, e')$ est un groupoïde p-structuré. ∇

COROLLAIRE. *Supposons p à produits fibrés finis; il existe une catégorie q'^{o}-dominée $(\mathcal{G}(p), G)$, où G est une restriction de E et q'^{o} la restriction de $\bar{p}'^{o}$ à $\mathcal{G}(p')$. Si $(H^{\cdot}, D)$ est fortement p-dominée, alors $(\mathcal{G}(p), G)$ est fortement q'^{o}-dominée.*

Δ. Soient e et e' des groupoïdes p-structurés. Puisque $E(e, e') = D(\Box\dot{e}, e')$ et que $\Box e$ est un groupoïde p-structuré (proposition 5), $E(e, e')$ est un groupoïde p-structuré. Il existe donc un foncteur G de $\mathcal{G}(p) \times \mathcal{G}(p)^{*}$ vers $\mathcal{G}(p')$ restriction de E. Le corollaire résulte des propositions 6-4 et 8-4, $\mathcal{G}(p')$ étant une sous-catégorie pleine de la catégorie $\mathcal{F}(p')$. ∇

PROPOSITION 8. *Soit e' un groupoïde p-structuré. Si les conditions de la proposition 10-4 sont vérifiées, le foncteur de $\mathcal{G}(p)$ vers $\mathcal{G}(p)$ produit canonique par e' admet $G(., e')$ pour coadjoint.*

Δ. Ceci résulte de la proposition 9-4, car $G(., e')$ est la restriction de $E(., e')$ à la sous-catégorie pleine $\mathcal{G}(p)$ de $\mathcal{F}(p)$. ∇

COROLLAIRE. *Si les hypothèses de la proposition 10-4 sont vérifiées, $\mathcal{G}(p)$ est une catégorie cartésienne fermée.*

Bibliographie.

[A1] C. EHRESMANN, *Algèbre, 1ère partie*, C.D.U., Paris 1968.

[1] C. EHRESMANN, Structures quasi-quotients, *Math. Ann.* 171 (1967), p. 293 - 363.

[2] A. BASTIANI - C. EHRESMANN, *Catégories abéliennes et Homologie*, multigraphié, Paris 1970 (à paraître, C.D.U.).

[3] A. BASTIANI, *Théorie des Ensembles*, C.D.U., Paris 1970.

[4] C. EHRESMANN, Construction de structures libres, *Lecture Notes in Math.* 72, Springer 1969.

[5] C. EHRESMANN, Catégories structurées généralisées, *Cahiers Top. et Géom. dif.* X - 1, Dunod 1968.

[6] C. EHRESMANN, Catégories structurées, *Ann. Ec. Norm. Sup.* 80 (1963), p. 349 - 426.

[7] J.-M. CORDIER, Sur la notion de catégorie tensoriellement dominée, *C. R. A. S.* 270 (1970), p.572.

[8] EILENBERG - KELLY, Closed categories, *Proc. Conf. on Categorical Algebra*, La Jolla 1965, Springer 1966.

[9] P. ANTOINE, Etude élémentaire des catégories d'ensembles structurés, *Bul. Soc. Math. Belgique*, XVIII, 2 et 4 (1966), p. 142 et 387.

[10] C. EHRESMANN, Quintettes et applications covariantes, *Cahiers Top. et Géom. dif.* V, 1963.

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
33 Rue Saint-Leu, 80 - AMIENS

et

Département de Mathématiques
Tours 45 - 55
Faculté des Sciences
9 Quai Saint-Bernard, 75 - PARIS (5^e^).