CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

G. JOUBERT
H. ROSENBERG

Plongement du tore T_2 dans la sphère S_3

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 11, n° 3 (1969), p. 323-328

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1969__11_3_323_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

Vol. XI,3

PLONGEMENT DU TORE T_2 DANS LA SPHERE S_3

par G. JOUBERT et H. ROSENBERG

Le but de cet article est de donner une démonstration géométrique du théorème suivant :

THEOREME. *Tout tore plongé dans S^3 borde un tore plein.*

Ce théorème a été énoncé pour la première fois par Alexander qui n'en donne qu'une démonstration succinte [1].

La démonstration qui suit fait appel aux méthodes utilisées dans [2] et [3] et qui ont déjà permis de démontrer le théorème analogue pour les sphères plongées dans R^3 (Schönflies différentiable) et même plus généralement que toute *3*-variété feuilletée par des plans est irréductible. Elle a en outre l'avantage de ne pas utiliser le «Loop-theorem » dont la démonstration est particulièrement difficile.

DEMONSTRATION. Soit T plongé dans R^3; on peut toujours supposer que T est plongé dans $S^3 - \{x_o\} = R^3$.

Si $R^3 = \{(x, y, z)\}$, soit F le feuilletage trivial de R^3 par les plans $P(z)$ $(z = \text{cte})$.

Par le théorème de transversalité de Thom, on peut supposer que T est en position générale par rapport à F.

Soit G le feuilletage (avec singularités) induit sur T par F. Puisque F et G sont en position générale, G n'a qu'un nombre fini de singularités qui sont des centres et des points de selle.

On peut toujours supposer qu'il n'y a pas deux points singuliers dans le même plan $P(z)$.

Il en résulte, puisque en outre $P(z)$ est fermé dans R^3, que tout élément de G est une courbe fermée : soit une courbe fermée simple, soit un point (centre), soit une figure «huit».

On a besoin du lemme général suivant :

LEMME. *Soit X un champ de vecteurs sur le tore T dont les zéros sont des centres ou des points de selle. Supposons que les trajectoires de X soient, ou bien des centres, ou bien des courbes fermées simples (trajectoires périodiques) ou bien des courbes homéomorphes à R, partant et aboutissant à un même point de selle. Dans ces conditions, il existe au moins une trajectoire périodique non homotope à zéro sur T.*

DEMONSTRATION. Si le champ n'a pas de singularités, alors nécessairement toutes les trajectoires (qui sont périodiques) sont non homotopes à zéro.

Supposons donc qu'il y a des singularités, (il y a autant de centres que de points de selle d'après la formule de Hopf) et supposons que toutes les trajectoires périodiques soient homotopes à zéro sur T.

Soit p un centre; dans un voisinage de p toutes les trajectoires de X sont des courbes fermées simples qui bordent un disque sur T contenant p à son intérieur.

Soit $H = \{ \cup D ;\ D$ est un 2-disque plongé dans T, $p \in D$, ∂D est une trajectoire périodique de X et toutes les trajectoires contenues dans D sont périodiques excepté $p \}$.

On sait (voir [3]) que, dans ce cas, $A = \partial \overline{H}$ est :

1) Soit une courbe fermée simple C_0 formée d'une trajectoire homéomorphe à R et d'un point de selle q. (L'une des deux séparatrices du point de selle).

2) Soit la figure «huit» qui contient un point de selle q.

-Dans le premier cas, soit A' la courbe fermée simple qui contient q est distincte de A. Alors A' borde un disque $\overline{H}'$, puisque toute trajectoire périodique voisine de A' borde un disque, et dans le complémentaire de $\overline{H} \cup \overline{H}'$ les trajectoires périodiques suffisamment voisines du «huit» bordent un disque D de T qui contient $\overline{H} \cup \overline{H}'$, sinon T serait homéomorphe à une sphère. D contient donc le point q et on peut alors modifier le champ X dans D de manière à éliminer le point de selle q.

-Dans le deuxième cas, soient C_1 et C_2 les deux courbes fermées simples qui constituent le «huit». Soient C'_1 et C'_2 des trajectoires périodiques voisines de C_1 et C_2. C'_1 et C'_2 bordent des disques D'_1 et D'_2 dans T dont l'un au moins contient q, sinon T serait homéomorphe à une sphère. Comme précédemment on peut éliminer le point de selle q.

Il résulte de ce qui précède qu'on peut, dans les hypothèses considérées, diminuer d'une unité le nombre des points-selles par modification du champ X. On aboutit donc, au bout d'un nombre fini de telles opérations, à un champ X sans singularités qui admet des trajectoires périodiques homotopes à zéro, ce qui est impossible.

Il résulte de ce lemme qu'il existe z_o tel que $P(z_o)$ contienne au moins une courbe fermée simple non homotope à zéro sur T.

Ce fait sera utilisé ultérieurement.

La démonstration résultera alors des lemmes suivants :

LEMME 1. *Soit C_o une courbe fermée simple appartenant à G (située dans $P(z_o)$). Alors il existe un nombre $\varepsilon_o > 0$ et un plongement*

$$\pi :]\, z_o - \varepsilon_o, z_o + \varepsilon_o [\times D_1 \to R^3$$

tels que, pour tout $z \in]\, z_o - \varepsilon_o, z_o + \varepsilon_o [$, on ait les relations :

a) $\pi(z \times S_1) = C_o(z)$ appartient à G,

b) $\pi(z \times D_1) = d_o(z)$ est le disque fermé de $P(z)$ bordé par $C_o(z)$.

PREUVE. C_o ne contient aucune singularité de G; il existe donc un voisinage V de C_o dans T ayant la même propriété. Il existe alors sur V un champ n-transverse à G et admettant un groupe local à un paramètre (noté encore n) $n :]-\varepsilon, \varepsilon[\times S_1 \to T$ tel que $n(t)[S_1]$ appartienne à G.

$n(t)[S_1]$ est donc contenu dans $P(z)$; on définit ainsi une fonction différentiable $t \to z(t)$ telle que $z'(0) \neq 0$, donc localement inversible.

Par conséquent, il existe $\varepsilon_o > 0$ et un plongement

$$\pi' :]\, z_o - \varepsilon_o, z_o + \varepsilon_o [\times S_1 \to T$$

défini par :

$$\pi'(z,\theta) = n(t(z),\theta),\ \theta \in S_1.$$

On obtient ensuite sans difficulté π par extension de π' à $]z_o - \varepsilon_o, z_o + \varepsilon_o[\times D_1$. D'où le lemme.

On peut toujours supposer, quitte à restreindre ε_o, que π est défini sur $[z_o - \varepsilon_o, z_o + \varepsilon_o]$.

NOTATION. Si $\partial_z(\varepsilon) =]z - \varepsilon, z + \varepsilon[$ et $\overline{\partial}_z(\varepsilon) = [z - \varepsilon, z + \varepsilon]$, on pose

$$M(z_o, \varepsilon_o) = \pi[\overline{\partial_{z_o}(\varepsilon_o)} \times D_1], \quad B(z_o, \varepsilon_o) = \pi[\partial_{z_o}(\varepsilon_o) \times S_1]$$

(M est fermé dans R^3 et B ouvert dans T).

LEMME 2. *Soit z_o tel que $P(z_o)$ rencontre T et ne contienne aucune singularité de G. On a :*

$$P(z_o) \cap T = \bigcup_{i=1,2,\dots,n} C_i$$

(C_i courbe fermée simple). Alors il existe une isotopie qui laisse fixe les courbes C_i non homotopes à zéro sur T et diminue d'au moins une unité le nombre de celles qui sont homotopes à zéro.

PREUVE. Soit $C_{i_o} = C_o$ une courbe homotope à zéro sur T.

D'après le lemme 1 il existe un plongement :

$$\pi' : \overline{\partial_{z_o}(\varepsilon_o)} \times S_1 \to T$$

tel que $\pi'(z \times S_1) = C_o(z)$ appartienne à G et $C_o(z_o) = C_o$.

Soient $z_2 = z_o + \varepsilon_o$ et $z_1 = z_o - \varepsilon_o$; π définit une isotopie sur T entre C_o et $C_o(z_i)$, $i = 1, 2$. Donc $C_o(z_i)$ est homotope à zéro sur T et borde un disque $D_o(z_i)$ sur T.

Nécessairement l'un des deux disques $D_o(z_i)$ contient $B(z_o, \varepsilon_o)$, sinon on aurait :

$$T = B \cup D_o(z_1) \cup D_o(z_2) \quad \text{(réunion disjointe)}$$

et par suite T serait homéomorphe à une sphère.

Supposons qu'il en soit ainsi pour $D_o(z_2)$. Il est alors facile de construire une isotopie qui laisse $T - D_o(z_2)$ fixe et place le disque $D_o(z_2)$ entièrement au-dessus de $P(z_o)$.

Cette isotopie élimine de $P(z_o)$ la courbe C_o et les éventuelles courbes C_i appartenant à $D_o(z_2) \cap P(z_o)$, toutes homotopes à zéro sur T ; elle laisse invariantes toutes les autres courbes C_i.

Ce qui démontre le lemme.

Soit maintenant z_o *tel que* $P(z_o)$ *contienne au moins une courbe fermée simple de* G *non homotope à zéro sur* T.

On sait d'après le lemme initial qu'il existe de telles valeurs et on peut supposer que dans $P(z_o)$ il n'y a aucune singularité de G.

LEMME 3. *Il existe un plongement* π *ayant les propriétés du lemme 1 et tel que l'intersection de* M *avec* T *soit* $\overline{B}$.

PREUVE. On peut toujours supposer que le disque $D_o(z_o) = D_o$ ne contient aucune courbe C_i non homotope à zéro sur T et on peut par isotopie (lemme 2) éliminer les courbes C_i homotopes à zéro et situées dans D_o. On a donc $D_o \cap T = C_o$.

A partir de C_o, on peut construire un plongement

$$\pi' = \delta_{z_o}(\varepsilon_o) \times D_1 \to T$$

ayant les propriétés du lemme 1.

Soit alors $T' = T - B$. T' et D_o sont compacts et de plus $T' \cap D_o = \emptyset$; donc α, minimum de la distance de T' à D_o, est strictement positif.

Prenons $\varepsilon_o < min(\varepsilon, \alpha)$ et le plongement π restriction du plongement précédent : $\pi = \delta_{z_o}(\varepsilon_o) \times D_1 \to T$. Soit $M(z_o, \varepsilon_o)$ associé à π ; M a les propriétés requises, d'où le lemme.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème.

Plaçons-nous dans les conditions du lemme 3, et soit π le plongement ayant les propriétés énoncées dans ce lemme

$$\pi : \delta_{z_o}(\varepsilon_o) \times D_1 \to R^3 .$$

Soient $z_2 = z_o + \varepsilon_o$, $z_i = z_o - \varepsilon_o$, $C_i = C(z_i)$, $D_i = D(z_i)$, $i = 1, 2$. Soit $T' = T - B$.

On peut toujours déformer D_i par isotopie à l'intérieur de M de façon que D_i se raccorde différentiablement à T' le long de C et que D_2 (resp. D_1) soit au-dessus (resp. en dessous) de $P(z_o)$.

Puisque C_o est non homotope à zéro sur T, la réunion $S = T' \cup D_1 \cup D_2$ est alors une sphère plongée dans R^3.

Soient Σ_j, $j = 1, 2$, les deux composantes dans S_3 de $S_3 - S$. Il est connu, ou il résulte de [2], que $\overline{\Sigma}_j$ est une boule fermée plongée dans S_3, telle que $\partial \overline{\Sigma}_j = S$, $j = 1, 2$.

D'autre part, soit M' la partie (fermée) de M comprise entre D_1 et D_2 (après isotopie). Alors M' est encore difféomorphe à $[0, 1] \times D_1$ et $\partial M' = B \cup D_2 \cup D_1$; de plus $M' - D_1 - D_2$ ne contient, par construction, aucun point de S; il est donc contenu dans l'une des deux composantes Σ_j, soit Σ_1 par exemple. On a donc $M' \cap \overline{\Sigma}_2 = D_1 \cup D_2$. Ainsi $M' \cap \Sigma_2$ a $B \cup T' = T$ pour frontière dans S, c'est donc une sous-variété plongée dans S et de bord T et elle est, par construction, difféomorphe à un tore plein, d'où le théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALEXANDER, *On the subdivision of 3-space by a polyedron,* Proc. N.A.S. (1926), pp. 6-8.

[2] H. ROSENBERG, *Foliations by planes,* Topology, Vol. 7, pp. 131-138.

[3] H. ROSENBERG and R. ROUSSAIRE, *Reeb-foliations* (à paraître dans Annals of Math).

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
21 - DIJON