PAUL VER EECKE

Connexions d'ordre infini

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 11, n° 3 (1969), p. 281-321

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1969__11_3_281_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

Vol. XI, 3

Νῦν καὶ ἐννοῶ, ῥηθέντος τοῦ περὶ τοὺς λογισμοὺς
μαθήματος, ὡς κομψόν ἐστι ...
ἐὰν τοῦ γνωρίζειν ἕνεκα τις αὐτὸ, ἐπιτηδεύη,
ἀλλὰ μὴ τοῦ καπηλεύειν.

(Platon, *République*, VII)

CONNEXIONS D'ORDRE INFINI

par Paul VER EECKE

Cet article qu'une note [11] avait annoncé propose une notion de connexion d'ordre infini accordée à celle d'ordre supérieur fini imaginée par C. Ehresmann [5] .

Une connexion d'ordre n sur une variété banachique V à valeurs dans un groupoïde différentiable Φ de base V consiste en un champ sur V d'objets de $Q^n(V,\Phi)$, variété dite des éléments de Φ-connexion d'ordre n sur V. $Q^n(V,\Phi)$ est une sous-variété de la variété $J^n(V,\Phi)$ de tous les jets infinitésimaux d'ordre n de V dans Φ et la condition sous laquelle un élément de $J^n(V,\Phi)$ appartient à $Q^n(V,\Phi)$ est de satisfaire à certaines relations qui ne peuvent être écrites plus simplement ni rendre mieux le sens géométrique sinon dans le calcul des jets. Les mêmes voies conduisent aux connexions d'ordre infini. V et W étant des variétés de classe C^∞, il s'agissait de munir l'ensemble $J^\infty(V,W)$ des jets infinitésimaux d'ordre infini de V dans W d'une structure différentielle [Ch. III] ; celle-ci étant à modeler sur un espace de Fréchet non normable, il fallait une théorie des variétés localement convexes [Ch. II] qui fût rapportée à un calcul différentiel approprié [Ch. I] . Sous réserve de certaine condition de l'espace normé modelant V, $J^{\infty}(V, W)$ est homéomorphe à la limite d'un système projectif $(J^{n}(V, W), \pi_{n}^{m})$. Les relations analogues à celles qui définissent les sous-variétés $Q^{n}(V, \Phi)$ de $J^{n}(V, \Phi)$ font distinguer dans $J^{\infty}(V, \Phi)$ la sous-variété $Q^{\infty}(V, \Phi)$ des éléments de Φ-connexion d'ordre infini. On appelle Φ-connexion d'ordre infini sur V un champ $V \to Q^{\infty}(V, \Phi)$ de classe C^{∞} et il se trouve que les propriétés déjà reconnues à l'ordre fini [5], [9] subsistent à l'ordre infini [Ch. IV].

CHAPITRE I

CALCUL DIFFERENTIEL DANS LES ESPACES LOCALEMENT CONVEXES

I.1. b-dérivation [8].

Soient E, F des espaces vectoriels topologiques réels, F étant supposé séparé, et $L(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F. On dit qu'une application f définie dans l'ouvert U de E à valeurs dans F est *b-dérivable en* $x_0 \in U$ s'il existe $u \in L(E, F)$ vérifiant ce qui suit : Pour tout voisinage W de $0 \in F$ et pour toute partie bornée M de E il existe un réel $r > 0$ tel que $0 < |t| < r$, $h \in M$ entraînent

$$x_0 + th \in U \text{ et } f(x_0 + th) - f(x_0) - u(th) \in tW.$$

Etant démontré qu'il existe au plus un objet u satisfaisant à ce qui précède, on le désigne par $f'(x_0)$ ou $Df(x_0)$ et on l'appelle *b-dérivée de f en* x_0 ou, plus simplement, dérivée de f en x_0 ; en effet si E est normable, alors $u \in L(E, F)$ est la b-dérivée de f en x_0 si, et seulement si, u est la dérivée de f en x_0 au sens ordinaire. On dit que f est *dérivable* si $Df(x)$ est définie pour tout $x \in U$; dans ce cas l'application $Df : x \to Df(x)$ définie dans U, à valeurs dans l'espace vectoriel topologique séparé $L(E, F)$ de la convergence bornée, est appelée dérivée de f.

I.2. Théorème des accroissements finis [10].

I.2.1. Soit f une fonction définie sur l'intervalle réel $[a, b]$ à valeurs dans l'espace localement convexe séparé E. Si f est continue et dérivable à droite en tout point du complémentaire d'un ensemble dénombrable D, alors on a

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \in C,$$

où C est l'enveloppe convexe fermée de $\{f'_d(x),\ x \in [a, b[- D\}$.

I. 2. 2. COROLLAIRE 1. *Soit f une application dérivable définie sur l'ouvert U de l'espace vectoriel topologique E à valeurs dans l'espace loca-*

lement convexe séparé F; *quels que soient* $x, y \in U$ *tels que le segment* $[x, y]$ *soit contenu dans* U *on a* $f(y) - f(x) \in C$, *où* C *désigne l'enveloppe convexe fermée de* $\{Df(z)(y-x),\ z \in [x,y]\}$.

I.2.3. COROLLAIRE 2. *Soit* $f : U \subset E \to F$ *comme ci-dessus. Soit* $x_o \in U$ *et soit* $M \subset U - x_o$ *un borné équilibré.*

i) Si Df *est bornée sur* $x_o + M$, *alors*

$$\left\{ \frac{f(x_o + tb) - f(x_o)}{t},\ b \in M,\ 0 < |t| \leq 1 \right\}$$

est borné.

ii) Si Df *est continue en* x_o *par rapport à* $x_o + M$, *alors* f *est continue en* x_o *par rapport à* $x_o + M$.

DEMONSTRATION.

i) Il existe un ensemble borné N de F, qu'on peut supposer convexe et fermé, tel que $|t| \leq 1$, $b \in M$ entraînent $Df(x_o + tb)(b) \in N$. D'où $Df(x_o + \tau tb)(tb) \in tN$ pour $b \in M$, $|t| \leq 1$, $0 \leq \tau \leq 1$ et enfin $f(x_o + tb) - f(x_o) \in tN$ quels que soient $|t| \leq 1$, $b \in M$.

ii) Soient W un voisinage convexe fermé de $0 \in F$ et W_1 un voisinage de $0 \in F$ tel que $W_1 + W_1 \subset W$. Il existe un voisinage équilibré V de $0 \in E$ tel que $x_o + V \subset A$, tel que $b \in V$ entraîne $Df(x_o)(V) \subset W_1$ et tel que $b \in V \cap M$, $k \in M$ entraînent $(Df(x_o + tb) - Df(x_o))(k) \in W_1$.

Pour tout $|t| \leq 1$, $b \in V \cap M$ on a alors $tb \in V \cap M$, d'où :

$$Df(x_o + tb)(b) = (Df(x_o + tb) - Df(x_o))(b) + Df(x_o)(b) \in W_1 + W_1 \subset W;$$

d'où $f(x_o + b) - f(x_o) \in W$ quel que soit $b \in V \cap M$.

I.3. Dérivées d'ordre supérieur.

I. 3. 1. Soient E, F des espaces vectoriels topologiques; $L(E, F)$, muni de la convergence bornée, étant un espace vectoriel topologique, on définit par itération pour tout entier $n > 0$, l'espace vectoriel topologique

$$L(E, L(E, \ldots, L(E, \underbrace{F) \ldots))}_{n}.$$

Soit $L_{n,b}(E, F)$ l'espace vectoriel topologique des applications n-linéaires bornées de E^n dans F, muni de la topologie de convergence bornée.

L'application naturelle ψ qui à tout $u \in \underbrace{L(E, \ldots, L(E, F)\ldots)}_{n}$ fait correspondre une application n-linéaire de E^n dans F prend ses valeurs dans $L_{n,b}(E, F)$; en outre, pour les topologies de convergence bornée, ψ est un homéomorphisme linéaire sur un sous-espace vectoriel de $L_{n,b}(E, F)$ formé d'applications bornées séparément continues que l'on désignera par $L_{(n)}(E, F)$. Pour tout $n > 1$ l'application naturelle qui à tout $u \in L(E, L_{(n-1)}(E, F))$ fait correspondre l'application n-linéaire $(x_1, \ldots, x_n) \to u(x_1)(x_2, \ldots, x_n)$ est un homéomorphisme linéaire de $L(E, L_{(n-1)}(E, F))$ sur $L_{(n)}(E, F)$. Si E est normable, alors $L_{(n)}(E, F) = L_{n,b}(E, F)$ n'est rien d'autre que l'espace vectoriel $L_n(E, F)$ des applications n-linéaires continues.

I. 3. 2. Soit f une application définie dans l'ouvert U d'un espace vectoriel topologique E, à valeurs dans l'espace vectoriel topologique séparé F. Les espaces vectoriels topologiques $L_{(n)}(E, F)$ étant séparés, on définit par la récurrence suivante pour $n > 1$ la dérivabilité d'ordre n de f en $x_o \in U$ et la dérivée d'ordre n de f en x_o, notée $D^n f(x_o)$ ou $f^{(n)}(x_o)$, élément de $L_{(n)}(E, F)$. Ces notions étant supposées définies à l'ordre $n-1$, on dit que f est *n fois dérivable en x_o* s'il existe un voisinage ouvert $V \subset U$ de x_o tel que f soit $(n-1)$ fois dérivable en tout $x \in V$ et que $D^{n-1} f : V \to L_{(n-1)}(E, F)$ soit dérivable en x_o. On appellera alors *dérivée d'ordre n de f en x_o* et on notera $D^n f(x_o)$, ou $f^{(n)}(x_o)$, l'image de $D(D^{n-1} f)(x_o)$ dans l'identification naturelle :

$$L(E, L_{(n-1)}(E, F)) \sim L_{(n)}(E, F).$$

Lorsque E est normable cette définition coïncide avec la notion traditionnelle. Si $E = R$, on peut identifier $D^n f(x_o)$ à un élément de F au moyen de l'identification $L_n(R, F) \sim F$ qui à u fait correspondre $u(1, \ldots, 1)$.

I. 3. 3. La dérivation est additive et en outre linéaire au sens précis que voici :

REMARQUE. Soit $f : U \subset E \to F$ une application n fois dérivable en $x_o \subset U$.

i) Si $u : F \to G$ est une application linéaire continue d'espaces vectoriels topologiques séparés, alors $u \circ f : U \to G$ est n fois dérivable en x_o et on a : $D^n(u \circ f)(x_o) = u \circ D^n f(x_o)$.

ii) Si $u : E_1 \to E$ est une application linéaire continue, alors $f \circ u : \overset{-1}{u}(U) \subset E \to F$ est n fois dérivable en tout $y_o \in \overset{-1}{u}(x_o)$ et on a :

$$D^n(f \circ u)(y_o) = D^n f(x_o) \circ u^{(n)},$$

en désignant par $u^{(n)}$ l'application de E^n dans E^n induite par u.

I.3.4. Soient $E_1, \ldots, E_n, F$ des espaces vectoriels topologiques; on dit qu'une application n-linéaire bornée $u : E_1 \times \ldots \times E_n \to F$ est *hypocontinue par rapport à* E_i si l'application linéaire

$$\bar{u}_i : E_i \to L_b(E_1, \ldots, E_{i-1}, E_{i+1}, \ldots, E_n, F)$$

qui à x_i fait correspondre $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \to u(x_1, \ldots, x_n)$ est continue.

Si u est hypocontinue par rapport à E_i pour chaque $i = 1, \ldots, n$, on dira que u est *hypocontinue,* ce qui implique que u est séparément continue. On désignera par $L_h(E_1, \ldots, E_n, F)$ le sous-espace de $L_b(E_1, \ldots, E_n, F)$ formé des applications hypocontinues.

PROPOSITION. *Soit f une application définie dans un ouvert U d'un espace vectoriel topologique E à valeurs dans un espace localement convexe séparé F. Si f est n fois dérivable en $x_o \in U$, alors l'application n-linéaire $D^n f(x_o)$ est symétrique et hypocontinue.*

Puisque $D^n f(x_o)$ est hypocontinue par rapport au premier argument, il suffit de démontrer que $D^n f(x_o)$ est symétrique.

Quels que soient $(h_1, \ldots, h_n) \in E^n$ et la permutation σ de $\{1, \ldots, n\}$, il s'agit de vérifier :

$$D^n f(x_o)(h_1, \ldots, h_n) = D^n f(x_o)(h_{\sigma(1)}, \ldots, h_{\sigma(n)}).$$

1^{er} *CAS : $F = R$.* Soit f l'application $h \to f(x_o + h)$ définie sur l'ouvert $U - x_o$ et soit $u : R^n \to E$ l'application $(t_1, \ldots, t_n) \to \sum_{i=1}^{n} t_i h_i$; soit enfin $e_1, \ldots, e_n$ la base canonique de R^n. D'après **3.3** l'application $f \circ u : \overset{-1}{u}(U - \{x_o\}) \subset R^n \to R$ est n fois dérivable en 0 et on a :

$$D^n f(x_o)(h_1, \ldots, h_n) = D^n f(0)(u(e_1), \ldots, u(e_n)) =$$

$$D^n(f \circ u)(0)(e_1, \ldots, e_n) = D_1, \ldots, D_n(f \circ u)(0) =$$

$$D_{\sigma(1)}, \ldots, D_{\sigma(n)}(f \circ u)(0) = D^n(f \circ u)(0)(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)}) =$$

$$D^n f(0)(u(e_{\sigma(1)}), \ldots, u(e_{\sigma(n)})) = D^n f(x_o)(h_{\sigma(1)}, \ldots, h_{\sigma(n)}).$$

CAS GENERAL. F étant localement convexe, il suffit de vérifier que

$$z'((D^n f(x_o)(h_1,\dots, h_n)) = z'((D^n f(x_o)(h_{\sigma(1)},\dots, h_{\sigma(n)})),$$

pour toute forme linéaire continue z' sur F. Or compte tenu de **3.3** et de ce qui précède, on a :

$$z'((D^n f(x_o)(h_1,\dots, h_n)) = D^n(z'\circ f)(x_o)(h_1,\dots, h_n) =$$
$$= D^n(z'\circ f)(x_o)(h_{\sigma(1)},\dots, h_{\sigma(n)}) = z'((D^n f(x_o)(h_{\sigma(1)},\dots, h_{\sigma(n)})).$$

I.3.5. Soit f une application définie dans l'ouvert U d'un espace vectoriel topologique E à valeurs dans un espace vectoriel topologique séparé F. On dira que f est *de classe* C^p, $p \geq 0$, *en* $x_o \in U$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

i) f est continue en x_o.

ii) Il existe un voisinage $V \subset U$ de x_o tel que la restriction de f à V soit p fois dérivable et que, pour tout $k \leq p$, l'application $D^k f : V \to L_{(k)}(E, F)$ soit bornée sur les bornés et continue en x_o par rapport à tout sous-espace borné.

On dit que f est *de classe* C^p si f est de classe C^p en tout point.

Si F est localement convexe alors ii) est équivalente à :

ii)' Il existe un voisinage $V \subset U$ de x_o tel que la restriction de f à V soit p fois dérivable et que $D^p f : V \to L_{(p)}(E, F)$ soit bornée sur les bornés et continue en x_o par rapport à tout sous-ensemble borné.

En effet, ceci résulte de **2.3** puisque les espaces $L_{(n)}(E, F)$ sont localement convexes.

On remarque enfin que, E et F étant supposés normables, f est de classe C^p en x_o au sens qui précède si, et seulement si, cette propriété a lieu au sens traditionnel.

I.4. Transitivité.

I.4.1. PROPOSITION. *Soit f une application définie sur l'ouvert U d'un espace vectoriel topologique E à valeurs dans un espace localement convexe séparé F, soit g une application définie dans un ouvert $V \supset f(U)$ de F et à valeurs dans un espace vectoriel topologique séparé G, et soit $x_o \in U$. On suppose que f est dérivable, que $Df : U \to L(E, F)$ est bornée sur les* *bornés et que* g *est dérivable en* $f(x_o)$. *Alors* $g \circ f : U \to G$ *est dérivable en* x_o *et on a*

$$D(g \circ f)(x_o) = Dg(f(x_o)) \circ Df(x_o).$$

Soient M un borné de E et W un voisinage de $0 \in G$. Puisque l'on a $Dg(f(x_o)) \circ Df(x_o) \in L(E, G)$ il s'agit d'indiquer $\alpha > 0$ tel que $h \in M$, $0 < |t| < \alpha$ entraînent

$$x_o + th \in U \text{ et } g(f(x_o + th)) - g(f(x_o)) - Dg(f(x_o))(Df(x_o)(th)) \in tW,$$

ou encore (1)

$$g(f(x_o) + t\frac{f(x_o + th) - f(x_o)}{t}) - g(f(x_o)) - Dg(f(x_o))(t\frac{f(x_o + th) - f(x_o)}{t}) \in tW_1$$

et

$$(2) \qquad Dg(f(x_o))(f(x_o + th) - f(x_o) - Df(x_o)(th)) \in tW_1,$$

pour un voisinage W_1 de $0 \in G$ tel que $W_1 + W_1 \subset W$.

Soit V_1 un voisinage de $0 \in F$ tel que $Dg(f(x_o))(V_1) \subset W_1$. Il existe $r > 0$ tel que $|t| < r$, $h \in M$ entraînent

$$x_o + th \in U \text{ et } f(x_o + th) - f(x_o) - Df(x_o)(th) \in tV_1$$

et par conséquent (2).

Il existe par hypothèse un borné N de F, qu'on peut supposer convexe et fermé, tel que $|t| \leq r$, $h \in M$, $k \in M$ entraînent $Df(x_o + th)(k) \in N$; d'où $Df(x_o + \tau th)(th) \in tN$ pour $h \in M$, $|t| \leq r$, $0 \leq \tau \leq 1$; d'après **2.2** on a alors

$$f(x_o + th) - f(x_o) \in tN \text{ pour } |t| \leq r, \ h \in M.$$

D'autre part il existe $0 < r_1 \leq r$ tel que $k \in N$, $0 < |t| < r_1$, entraînent

$$f(x_o) + tk \in V \text{ et } g(f(x_o) + tk) - g(f(x_o)) - Dg(f(x_o))(tk) \in tW_1,$$

d'où (1) pour $k \in M$, $0 < |t| < r_1$.

I.4.2. LEMME. *Soient* $E_1, \ldots, E_n$, F *des espaces vectoriels topologiques séparés et soit* $u : E_1 \times \ldots \times E_n \to F$ *une application* n*-linéaire hypocontinue par rapport à* E_1 *et séparément continue. Soit* U *un ouvert d'un espace vectoriel topologique* E, *soit* $x_o \in U$ *et, pour* $i = 1, \ldots, n$, *soit* $f_i : U \to E_i$

une application dérivable en x_o. *On supposera enfin que l'un ou l'autre groupe des conditions suivantes est vérifié.*

i) Pour $i > 1$, E_i est localement convexe, f_i est dérivable en tout point et $Df_i : U \to L(E, E_i)$ est bornée sur les bornés.

ii) u est hypocontinue et pour $i > 1$, f_i est bornée sur les bornés.

Alors $u \circ (f_1, \ldots, f_n) : U \to F$ *est dérivable en* x_o *et pour tout* $h \in E$ *on a*

$$D(u \circ (f_1, \ldots, f_n))(x_o)(h) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} u(f_1(x_o), \ldots, f_i(x_o), Df_i(x_o)(h), f_{i+1}(x_o), \ldots, f_n(x_o)).$$

Puisque u est séparément continue, le membre de droite de l'égalité proposée est une fonction linéaire continue en $h \in E$ et il s'agit alors pour tout borné M de E et pour tout voisinage W de $0 \in F$ d'indiquer $\alpha > 0$ tel que $|t| < \alpha$, $h \in M$ entraînent $x_o + th \in U$ et

$$(1) \qquad u(f_1(x_o + th), \ldots, f_n(x_o + th)) - u(f_1(x_o), \ldots, f_n(x_o)) -$$
$$- \sum_{i=1}^{n} u(f_1(x_o), \ldots, f_{i-1}(x_o), Df_i(x_o)(h), f_{i+1}(x_o), \ldots, f_n(x_o)) \in tW.$$

Compte tenu de la multilinéarité de u on a :

$$u(f_1(x_o + th), \ldots, f_n(x_o + th)) =$$
$$= u(f_1(x_o) + (f_1(x_o + th) - f_1(x_o)), \ldots, f_n(x_o) + f_n(x_o + th) - f_n(x_o)) =$$
$$= \sum_{\sigma \in P_n} u_\sigma(th),$$

où P_n désigne l'ensemble des parties de $\{1, \ldots, n\}$ et où on a posé :

$$u_\sigma(th) = u(g_1(th), \ldots, g_n(th)), \text{ avec } g_i(th) = f_i(x_o) \text{ pour } i \notin \sigma \text{ et}$$
$$g_i(th) = f_1(x_o + th) - f_i(x_o) \text{ pour } i \in \sigma.$$

En désignant par P'_n le sous-ensemble de P_n formé des parties de $\{2, \ldots, n\}$ ayant au moins deux éléments, le membre de gauche de la relation (1) s'écrit

$$(2) \qquad \sum_{i=2}^{n} u(f_1(x_o + th) - f_i(x_o), f_2(x_o), \ldots, f_{i-1}(x_o), f_i(x_o + th) -$$
$$- f_i(x_o), f_{i+1}(x_o), \ldots, f_n(x_o)) + \sum_{\sigma \in P'_n} u_\sigma(th) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} u(f_i(x_o), \ldots, f_{i-1}(x_o), f_i(x_o + th) - f_i(x_o) -$$
$$- Df_i(x_o)(th), f_{i+1}(x_o), \ldots, f_n(x_o)).$$

Soit alors W_1 un voisinage équilibré de $0 \in F$ tel que $(2^n - 1) W_1 \subset W$. Il s'agit pour chacun des $2^n - 1$ termes de la somme totale qui précède d'indiquer $\alpha > 0$ tel que ce terme (dépendant de t et h) soit contenu dans tW_1 pour $|t| < \alpha$ et $h \in M$. Vérifions d'abord la propriété pour un terme quelconque du troisième groupement, soit le $i^{ème}$.

Il existe un voisinage V_i de $0 \in E_i$ tel que $y_i \in V_i$ entraîne

$$u(f_1(x_o), \dots, f_{i-1}(x_o), y_i, f_{i+1}(x_o), \dots, f_n(x_o)) \in W_1;$$

d'autre part, il existe $\alpha > 0$ tel que $|t| < \alpha$, $h \in M$ entraînent $x_o + th \in U$ et

$$f_i(x_o + th) - f_i(x_o) - Df_i(x_o)(th) \in tV_i,$$

d'où

$$u(f_i(x_o), \dots, f_{i-1}(x_o), f_i(x_o + th) - f_i(x_o) -$$
$$- Df_i(x_o)(th), f_{i+1}(x_o), \dots, f_n(x_o)) \in tW_1.$$

Soit $0 < r \leq 1$ tel que $h \in M$, $|t| < r$ entraînent $x_o + th \in U$.

Compte tenu de **2.2** on vérifie comme dans **4.1** qu'il existe pour chaque $i = 2, \dots, n$ un borné convexe symétrique et fermé N_i de E_i tel que, sous l'hypothèse i) l'on ait

$$f_i(x_o + th) - f_i(x_o) \in tN_i \subset N_i,$$

et sous l'hypothèse ii)

$f_i(x_o + th) - f_i(x_o) \in N_i$ quels que soient $t \leq r$, $h \in M$ et $i = 2, \dots, n$.

On peut supposer $f_i(x_o) \in N_i$ pour tout $i = 2, \dots, n$. On examinera alors successivement le cas du terme général du deuxième et du premier groupement de (2) sous les hypothèses i) d'abord. Pour chaque $\sigma \in P'_n$ on a alors $u_\sigma(th) \in t^{n(\sigma)} u(\{f_1(x_o)\} \times N_2 \times \dots \times N_n)$ quels que soient $|t| < r$, $h \in M$, où $h(\sigma) \geq 2$ désigne le nombre d'éléments de σ. Puisque u est bornée il existe $0 < \alpha \leq r$ tel que $|t| < \alpha$ entraîne

$$t(\{f_1(x_o)\} \times N_1 \times \dots \times N_n) \subset W_1$$

d'où

$$u_\sigma(th) \in t^{n(\sigma)-1} W_1 \subset tW_1 \text{ pour } |t| < \alpha \text{ et } h \in M.$$

Il reste à examiner le cas du $i^{\text{ème}}$ terme du premier groupement sous les hypothèses ii); or on a :

$$(3) \quad u(f_1(x_o+th)-f_1(x_o), f_2(x_o), \dots, f_{i-1}(x_o), f_i(x_o+th)- \\ -f_i(x_o), f_{i+1}(x_o), \dots, f_n(x_o)) = u(f_1(x_o+th)-f_1(x_o)- \\ -Df_1(x_o)(th), f_2(x_o), \dots, f_{i-1}(x_o), f_i(x_o+th)- \\ -f_i(x_o), f_{i+1}(x_o), \dots, f_n(x_o)) + t^2 u(Df_1(x_o)(h), f_2(x_o), \dots, f_i(x_o), \\ \frac{f_i(x_o+th)-f_i(x_o)}{t}, f_{i+1}(x_o), \dots, f_n(x_o)).$$

Soit W_2 un voisinage équilibré de $0 \in F$ tel que $W_2 + W_2 \subset W_1$. Puisque u est hypocontinue par rapport à E_1 il existe un voisinage V'_1 de $0 \in E_1$ tel que $y_1 \in V'_1$, $y_i \in N_i$ entraînent

$$u(y_1, f_2(x_o), \dots, f_{i-1}(x_o), y_i, f_{i+1}(x_o), \dots, f_n(x_o)) \in W_2 .$$

D'autre part, il existe $0 < \alpha < r$ tel que $|t| < \alpha$, $h \in M$ entraînent

$$f_1(x_o+th) - f_1(x_o) - Df_1(x_o)(th) \in t V'_1 ,$$

ce qui implique que le premier terme de (3) est contenu dans tW_2 . On remarque enfin que

$$B = u(Df_1(x_o)(M) \times \{f_2(x_o)\} \dots \times \{f_{i-1}(x_o)\} \times N_i \times \{f_{i+1}(x_o)\} \dots \\ \times \{f_n(x_o)\})$$

est borné, ce dont il résulte que $|t| < \alpha$, $h \in M$ entraînent que le second terme de (3) est contenu dans $t^2 B$ et donc dans tW_2 à condition de restreindre éventuellement α .

Supposons maintenant vérifiées les hypothèses ii); on examinera par un même procédé le cas du terme général du premier ou du second groupement de (2), c'est-à-dire $u_\sigma(th)$, $\sigma \in P_n$ tel que $n(\sigma) \geq 2$. Soit alors i le plus petit élément de σ et j le plus petit élément de $\sigma - \{i\}$. On a :

$$(4) \quad u_\sigma(th) = u(f_1(x_o), \dots, f_{i-1}(x_o), f_i(x_o+th) - f_i(x_o) - \\ Df_i(x_o)(th), f_{i+1}(x_o), \dots, f_{j-1}(x_o), f_j(x_o+th) - f_j(x_o), g_{j+1}(th), \dots, g_n(th)) \\ + u(f_1(x_o), \dots, f_{i-1}(x_o), Df_i(x_o)(th), f_{i+1}(x_o), \dots, f_{j-1}(x_o), f_j(x_o+th) - \\ f_j(x_o) - Df_j(x_o)(th), g_{j+1}(th), \dots, g_n(th)) + u(f_1(x_o), \dots, f_{i-1}(x_o), \\ Df_i(x_o)(th), f_{i+1}(x_o), \dots, f_{j-1}(x_o), Df_j(x_o+th), g_{j+1}(th), \dots, g_n(th)).$$

Soit alors W_2 un voisinage équilibré de $0 \in F$ tel que $W_2 + W_2 + W_2 \subset W_1$.

Il s'agit pour chaque terme de (4) d'indiquer $0 < \alpha < r$ tel que pour $|t| < \alpha$, $h \in M$ ce terme soit contenu dans tW_3. Il existe d'abord un voisinage V'_i de $0 \in E_i$ tel que $y_i \in V'_i$, $y_j \in N_j$ pour $j \neq i$ (on pose $N_1 = \{f_1(x_o)\}$) entraînent $u(y_1, \ldots, y_n) \in W_3$. Pour $0 < \alpha < 2$ tel que $|t| < \alpha$, $h \in M$ entraînent

$$f_i(x_o + th) - f_i(x_o) - Df_i(x_o)(th) \in tV'_i,$$

le premier terme de (4) est alors contenu dans tW_3. Ensuite il existe un voisinage V'_j de $0 \in E_j$ tel que $y_i \in Df_i(x_o)(M)$, $y_j \in V'_j$, $y_k \in N_k$ pour $k \neq i, j$ entraînent $u(y_1, \ldots, y_n) \in tW_3$. Pour $0 < \alpha < r$ tel que $|t| < \alpha$, $h \in M$ entraînent

$$f_j(x_o + th) - f_j(x_o) - Df_j(x_o)(th) \in V'_j,$$

le deuxième terme de (4) est alors contenu dans tW_3. On achève la démonstration en remarquant que le troisième terme de (4) est contenu dans tB_1, où B_1 désigne l'ensemble borné

$$u(N_1 \times N_{i-1} \times Df_i(x_o)(M) \times N_{i+1} \cdots \times N_{j-1} \times Df(x_o)(M) \times N_{j+1} \times N_n).$$

I.4.3. Pour des entiers n, p tels que $0 \leq p < n$ on désignera par $P_{n,p}$ l'ensemble des systèmes $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$, où $\alpha_i = (\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{ik_i})$, $i = 1, \ldots, p$ est une sous-suite de $(1, \ldots, n)$ telle que $\alpha_{11} < \alpha_{21} < \ldots < \alpha_{p1}$ et que $(\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1k_1}, \alpha_{21}, \ldots, \alpha_{p1}, \ldots, \alpha_{pk_p})$ soit une permutation de $(1, \ldots, n)$.

PROPOSITION. *Soit f une application définie dans l'ouvert U d'un espace vectoriel topologique E à valeurs dans un espace localement convexe séparé F. Soit g une application définie dans l'ouvert $V \supset f(U)$ de F et à valeur dans un espace vectoriel topologique séparé G.*

On suppose que f est n fois dérivable en $x_o \in U$ et que $D^{n-1}f : U \to L_{(n-1)}(E, F)$ est définie et bornée sur les bornés. On suppose que g est n fois dérivable en $f(x_o)$ et $(n-1)$ fois dérivable en tout $y \in V$. Soit enfin l'une ou l'autre des conditions suivantes :

i) $D^n f : U \to L_{(n)}(E, F)$ est définie et bornée sur les bornés et en outre : ou bien G est localement convexe, ou bien $n \leq 2$.

ii) F est infratonnelé, G est localement convexe et $n > 1$.

Alors $g \circ f : U \to G$ est n fois dérivable en x_o et on a :

$$D^n(g\circ f)(x_o) = \sum_{\substack{p=1,\dots,n \\ (\alpha_1,\dots,\alpha_p)\in P_{n,p}}} D^p g(f(x_o))(D^{k_1} f(x_o)\circ \pi_{\alpha_1},\dots, D^{k_p} f(x_o)\circ \pi_{\alpha_p}),$$

où π_{α_i} *désigne la projection naturelle* $(h_1,\dots,h_n)\to(h_{\alpha_{i1}},\dots,h_{\alpha_i k_i})$ *de* E *sur* E^{k_i}.

On démontre d'abord par récurrence l'énoncé correspondant à i). La proposition étant établie pour $n=1$ d'après **4.1**, on la suppose vraie à l'ordre $n-1$. Il résulte alors des hypothèses que $D^{n-1}(g\circ f)(x)$ est définie pour tout $x\in U$ et on a :

$$D^{n-1}(g\circ f)(x) = \sum_{\substack{p=1,\dots,n-1 \\ (\alpha_1,\dots,\alpha_p)\in P_{n-1,p}}} D^p g(f(x))\,(D^{k_1} f(x)\circ \pi_{\alpha_1},\dots, D^{k_p} f(x)\circ \pi_{\alpha_p}) =$$

$$= \sum_{\substack{p=1,\dots,n-1 \\ (\alpha_1,\dots,\alpha_p)\in P_{n-1,p}}} \psi_{\alpha_1,\dots,\alpha_p}(D^p g(f(x)), D^{k_1} f(x),\dots, D^{k_p} f(x)),$$

où

$$\psi_{\alpha_1,\dots,\alpha_p} : L_{p,b}(F,G)\times L_{(k_1)}(E;F), \times L_{(k_p)}(E;F)\to L_{(n)}(E,G)$$

désigne l'application qui à $(v, u_1,\dots, u_p)$ fait correspondre

$$v\circ(u_1\circ\pi_{\alpha_1},\dots, u_p\circ\pi_{\alpha_p})$$

(on remarque que $D^p g\circ f : U\to L_{(p)}(E,G)$, $p<n$ prend ses valeurs dans $L_{pb}(E,G)$ en vertu de **3.4**. On observe que chaque application $\psi_{\alpha_1,\dots,\psi_p}$ est multilinéaire, séparément continue et en outre hypocontinue par rapport à $L_{pb}(F,G)$. D'autre part, $D^p g\circ f : U\to L_{pb}(F,G)$ est dérivable en x_o en vertu de **4.1** et, $D^n f$ étant bornée sur les bornés, il en résulte d'après **3.5** que $D(D^k f) : U\to L(E, L_{(k)}(E,F))$, identifiée à $D^{k+1} f : U\to L_{(k+1)}(E,F)$, est bornée sur les bornés pour $k<n$. Il résulte alors de **4.2** que

$$D^{n-1}(g\circ f) = \sum_{\substack{p=1,\dots,n-1 \\ (\alpha_1,\dots,\alpha_p)\in P_{n-1,p}}} \psi_{\alpha_1,\dots,\alpha_p}\circ(D^p g\circ f, D^{k_1} f,\dots, D^{k_p} f)$$

est dérivable en x_o. Pour démontrer l'expression développée de $D^n(g\circ f)(x_o)$, on suppose G localement convexe, (on vérifie aisément le cas $n=2$ par une démonstration directe sans hypothèse restrictive sur G). Pour

$(h_1,\dots,h_n)\in E^n$ (en écrivant h_{α_i} pour $(h_{\alpha_{i1}},\dots,h_{\alpha_{ik_i}})$) on a, compte tenu de **3.4** :

$$D^n(g\circ f)(x_o)(h_1,\dots,h_n)=D^n(g\circ f)(x_o)(h_n,h_1,\dots,h_{n-1})=$$

$$(D(D^{n-1}(g\circ f)(x_o)(h_n))(h_1,\dots,h_{n-1})=$$

$$\sum_{\substack{p=1,\dots,n-1\\(\alpha_1,\dots,\alpha_p)\in P_{n-1,p}}}\psi_{\alpha_1,\dots,\alpha_p}(D(D^p g\circ f)(x_o)(h_n),D^{k_1}f(x_o),\dots,D^{k_p}f(x_o))+$$

$$+\sum_{i=1}^{n-1}\psi_{\alpha_1,\dots,\alpha_p}(D^p g(f(x_o)),D^{k_1}f(x_o),\dots,D^{k_{i-1}}f(x_o),D(D^{k_i}f)(x_o)(h_n),$$

$$D^{k_i+1}f(x_o),\dots,D^{k_n}f(x_o)))(h_1,\dots,h_{n-1})=$$

$$\sum_{\substack{(\alpha_1,\dots,\alpha_p)\in P_{n-1,p}\\p=1,\dots,n-1}}D(D^p g\circ f)(x_o)(h_n)(D^{k_1}f(x_o)(h_{\alpha_1}),\dots,D^{k_p}f(x_o)(h_{\alpha_p}))+$$

$$+\sum_{i=1}^{p}D^p g(f(x_o))(D^{k_1}f(x_o)(h_{\alpha_1}),\dots,D^{k_{i-1}}f(x_o)h_{\alpha_{i-1}},$$

$$(D(D^{k_i}f(x_o)(h_n))(h_{\alpha_i}),D^{k_i+1}f(x_o)(h_{\alpha_{i+1}}),\dots,D^{k_p}f(x_o)(h_{\alpha_p})))=$$

$$\sum_{\substack{(\alpha_1,\dots,\alpha_p)\in P_{n-1,p}\\p=1,\dots,n-1}}D^{p+1}g(f(x_o))(Df(x_o)(h_n),D^{k_1}f(x_o)(h_{\alpha_1}),\dots,D^{k_p}f(x_o)(h_{\alpha_p}))+$$

$$+\sum_{\substack{(\alpha_1,\dots,\alpha_p)\in P_{n-1,p}\\p=1,\dots,n-1\\i=1,\dots,p}}D^p g(f(x_o))(D^{k_1}f(x_o)(h_{\alpha_1}),\dots,D^{k_{i-1}}f(x_o)(h_{\alpha_{i-1}})$$

$$D^{k_i+1}f(x_o)(h_{\alpha_i};h_n),D^{k_i+1}f(x_o)(h_{\alpha_{i+1}}),\dots,D^{k_p}f(x_o)(h_{\alpha_p}))=$$

$$=\sum_{\substack{(\alpha_1,\dots,\alpha_p)\in P_{n,p}\\p=1,\dots,n}}D^p g(f(x_o))(D^{k_1}f(x_o)(h_{\alpha_1}),\dots,D^{k_p}f(x_o)(h_{\alpha_p})).$$

En vue de démontrer la proposition sous les hypothèses ii) on observe en vertu de i) que $g\circ f: U\to G$ est $n-1$ fois dérivable et qu'il s'agit alors comme ci-dessus de vérifier que :

$$D^{n-1}(g\circ f):x\to\sum_{\substack{p=1,\dots,n-1\\(\alpha_1,\dots,\alpha_p)\in P_{n-1,p}}}D^p g(f(x))(D^{k_1}f(x)\circ\pi_{\alpha_1},\dots,D^{k_p}f(x)\circ\pi_{\alpha_p})$$

est dérivable en x_o. Or on peut invoquer les mêmes raisons que ci-dessus pour affirmer que chaque terme de cette somme est dérivable en x_o sauf l'unique terme qui correspond à $p=1$, c'est-à-dire $x\to Dg(f(x))\circ D^{n-1}f(x)$. Quant à cette application on remarque qu'elle est obtenue en composant l'application

$$(D^{n-1}f, Dg\circ f) : U \to L_{(n)}(E,F)\times L(F,G)$$

dérivable en x_o avec l'application bilinéaire $\theta : L_{(n)}(E,F)\times L(F,G)\to L_{(n)}(E,G)$ qui à (u,v) fait correspondre $v\circ u$. La fonction $\theta\circ(D^{n-1}f, Dg\circ f)$ est dérivable en x_o en vertu de la variante (i) du lemme 4.2. En effet, $Dg\circ f$ et $D^{n-1}f$ sont dérivables en x_o et $D^{n-1}f$ est bornée sur les bornés. D'autre part θ est hypocontinue. En effet, il est évident que θ est hypocontinue par rapport à $L(F,G)$; on démontre que θ est hypocontinue par rapport à $L_{(n)}(E,F)$ en observant que toute partie bornée de $L(F,G)$ est équicontinue parce que F est infratonnelé et G localement convexe.

REMARQUES. Le théorème de transitivité ponctuelle du calcul différentiel dans la catégorie des espaces normables admet en ordre $n>1$ une extension stricte à la catégorie des espaces infratonnelés, a fortiori à celle des espaces localement convexes métrisables. En termes précis, on obtient en corollaire de l'énoncé précédent le théorème classique qui affirme pour $f: U\subset E\to F$, et $g: V\subset F\to G$ où E,F,G sont normables et $f(U)\subset V$, que $g\circ f : U\to G$ est n fois, $n>1$, dérivable en $x_o\in U$ sous les seules conditions que $D^n f(x_o)$ et $D^n g(f(x_o))$ soient définies.

1.4.4. PROPOSITION. *Soit f une application définie sur l'ouvert U de l'espace vectoriel topologique E à valeurs dans l'espace localement convexe séparé F et soit g une application définie sur l'ouvert $V\supset f(U)$ de F à valeurs dans l'espace localement convexe séparé G. Si f est de classe C^n en $x_o\in U$ et si g est de classe C^n en $f(x_o)$, alors $g\circ f : U\to G$ est de classe C^n en x_o.*

Il s'agit de remarquer que $g\circ f$ est continue en x_o et de démontrer que $D^n(g\circ f)$ est définie sur un voisinage de x_o, bornée sur les bornés et continue en x_o par rapport aux bornés.

Il existe un voisinage ouvert $V_1\subset V$ de $f(x_o)$ tel que $D^n g(y)$ soit définie pour tout $y\in V_1$ et tel que $D^n g : V_1\to L_{(n)}(F,G)$ soit bornée sur les bornés et continue en $f(x_o)$ par rapport aux bornés. Puisque f est continue en x_o, il existe un voisinage ouvert $U_1\subset U$ de x_o tel que $f(U_1)\subset V_1$, tel que $D^n f(x)$ soit définie pour tout $x\in U_1$ et tel que $D^n f : U_1\to L_{(n)}(E,F)$ soit bornée sur les bornés et continue en x_o par rapport aux bornés. Il résulte de **4.3** que $D^n(g \circ f)(x)$ est alors définie pour tout $x \in U_1$.

D'autre part l'expression présentée ci-dessus :

$$D^n(g \circ f) = \sum_{\substack{p=1,\ldots,n \\ (\alpha_1,\ldots,\alpha_p) \in P_{n,p}}} \psi_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}(D^p g \circ f, D^{k_1} f, \ldots, D^{k_p} f)$$

montre que $D^n(g \circ f)$ est bornée sur les bornés. En effet pour $p = 1,\ldots, n$ l'application $D^p f$ est bornée sur les bornés de U_1 et $D^p g$ est bornée sur les bornés de V_1; enfin les applications $\psi_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}$ sont bornées.

D'autre part pour tout $(\alpha_1,\ldots,\alpha_p) \in P_{n,p}$, les hypothèses et **3.4** entraînent que

$$(D^p g \circ f, D^{k_1} f, \ldots, D^{k_n} f) : U_1 \to L_{p,b}(E,G) \times L_{(k_1)}(E,F) \ldots \times L_{(k_p)}(E,F)$$

est continue en x_o par rapport aux bornés; or $\psi_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p}$, hypocontinue relativement à $L_{p,b}(F,G)$, est continue par rapport aux bornés. Il en résulte que $D^p(g \circ f)$ est continue en x_o par rapport aux bornés.

I.5. Densité.

I.5.1. Dans ce qui suit on dira qu'un espace vectoriel topologique E est un *C-espace* si la condition suivante est vérifiée.

(C) Pour tout voisinage V de $0 \in E$ il existe une fonction $f : E \to R$ de classe C^∞ telle que :

i) $supp(f) \subset V$,

ii) $D^p f$ est bornée sur les bornés quel que soit $p \geq 0$,

iii) $f(0) \neq 0$ et $D^p f(0) = 0$ quel que soit $p > 0$.

Tout espace préhilbertien est un C-espace. En effet soit $h : R \to [0, 1]$ une fonction de classe C^∞ telle que

i) $supp(h) \subset [-1, 1]$,

ii) $h(0) = 1$,

iii) $h^{(p)}(0) = 0$ pour tout $p > 0$.

Alors la fonction numérique $x \to h(|x|^2)$ définie dans E vérifie les axiomes (C) (on tient compte de ce que $x \to |x|^2$ est dérivable et que l'on a $D(y \to |y^2|)(x)(h) = 2 < x, h >$ quels que soient $x, h \in E$).

I.5.2. E et F étant des espaces vectoriels topologiques, on désignera par $L_n^s(E,F)$ l'espace vectoriel topologique des applications n-linéaires continues symétriques.

PROPOSITION. *Soient E un C-espace normable, F un espace localement convexe métrisable; pour tout $n \in N$ soit enfin $c_n \in L_n^s(E,F)$.*

Il existe alors une application $f : E \to F$ de classe C^∞ telle que $D^n f(0) = c_n$ quel que soit $n \in N$.

La démonstration est une extension naturelle du cas classique où E est de dimension finie et $F = R$. Soient $/\!/$ une norme de E et $\varphi : E \to R$ une fonction de classe C^∞ vérifiant la condition (C). On peut supposer : $\varphi(x) = 0$ pour $x \geq 1$ et $\varphi(0) = 1$. Désignons par $\bar{c}_n$ l'application $x \to c_n(x,\dots,x)$ de E dans F. pour $p = 0, 1,\dots, n$ on pose

$$/\varphi/_p = \max_{k=0,\dots,p} \left(\sup_{x \in E} /D^p\varphi(x)/ \right).$$

Pour $0<\alpha<1$ et $n \in N$ on désignera par $f_{n,\alpha}$ l'application $x \to \frac{1}{n!}\varphi(\frac{x}{\alpha})\bar{c}_n(x)$ de E dans F. Pour $n \in N$, soit $B_n \subset F$ l'enveloppe équilibrée de

$$\{ c_n(h_1,\dots,h_n) \mid /h_i/ \leq 1;\ i = 1,\dots, n\};$$

B_n est bornée; pour $p, n \in N$ il en résulte que

$$B_{n,p} = \{ u \in L_p(E,F) \mid u(h_1,\dots,h_p) \in B_n,\ \forall\ /h_i/ \leq 1,\ i = 1,\dots,n\}$$

est un borné équilibré de $L_n(E,F)$. On démontre d'abord :

$$(1) \qquad D^p f_{n,\alpha}(x) \in \frac{(2n)^p}{n!} /\varphi/_p\, \alpha^{n-p} B_{n,p} \quad \text{quels que soient}$$
$$0 < \alpha < 1,\ x \in E \text{ et } n, p \in N \text{ tels que } p \leq n.$$

D'après les formules usuelles du calcul différentiel (règle de Leibniz) on a :

$$D^p f_{n,\alpha}(x)(h_1,\dots,h_p) = \frac{1}{n!} \sum_{\substack{(i_1,\dots,i_n) \in S_{p,k} \\ k=0,\dots,p}} (D^k(y \to \varphi(\frac{y}{\alpha}))(x)(h_{i_1},\dots,h_{i_k}))(D^{p-k}\bar{c}_n(x)(h_{\bar{i}_1},\dots,h_{\bar{i}_{p-k}})),$$

où $S_{p,k}$ désigne l'ensemble des sous-suites de k-éléments de $(1,\dots,p)$ et où $(\bar{i}_1,\dots,\bar{i}_{p-k})$ est la sous-suite de $(1,\dots,p)$ complémentaire à $(i_1,\dots,i_k)$. D'où

$$D^p f_{n,\alpha}(x)(h_1,\dots,h_p) =$$
$$= \frac{1}{n!} \sum_{\substack{(i_1,\dots,i_k)\in S_{p,k} \\ k=0,\dots,p}} \frac{1}{\alpha^k}(D^k\varphi(\tfrac{x}{\alpha})(h_{i_1},\dots,h_{i_k})\frac{n!}{(n-(p-k))!}c_n(x;h_{\tilde{i}_1},\dots,h_{\tilde{i}_{p-k}}),$$

où on a posé $c_n(x;h_{\tilde{i}_1},\dots,h_{\tilde{i}_{p-k}}) = c_n(y_1,\dots,y_n)$ avec $y_l = h_{i_l}$ pour $l = 1,\dots,p-k$ et $y_l = x$ pour $l > p-k$. D'où

$$D^p f_{n,\alpha}(x)(h_1,\dots,h_p) =$$
$$= \frac{1}{n!} \sum_{\substack{(i_1,\dots,i_k)\in S_{p,k} \\ p=0,\dots,k}} \frac{1}{\alpha^k}(D^k\varphi(\tfrac{x}{\alpha})(h_{i_1},\dots,h_{i_k}))\frac{n!}{(n-(p-k))!}\alpha^{n-(p-k)}(c_n(\tfrac{x}{\alpha};h_{\tilde{i}_1},\dots,h_{\tilde{i}_{p-k}})).$$

En tenant compte de l'inégalité $\frac{n!}{(n-(p-k))!} \leq n^p$ pour $p \leq n$ et de ce que $/x/ \geq 1 > \alpha$ entraîne $\varphi(x)=0$, il vient: $D^p f_{n,\alpha}(x) \in \frac{1}{n!} 2^p /\varphi/_p \; n^p \alpha^{n-p} B_{n,p}$ quels que soient $x \in E$ et $n, p \in N$ tels que $p \leq n$. Soit (W_n) une suite fondamentale décroissante de voisinages convexes symétriques de $0 \in F$. On posera

$$W_{n,p} = \{ u \in L_p(E,F) \mid u(h_1,\dots,h_p) \in W_n, \ \forall \ |h_i| \leq 1, \ i=1,\dots,n\}.$$

Pour chaque $p \in N$ la suite $(W_{n,p})_{n\in N}$ est un système fondamental de voisinages convexes symétriques de $0 \in L_p(E,F)$; pour tout $n \in N$ il existe $0 < \lambda_n < 1$ tel que $\lambda_n B_n \subset \frac{1}{2^n} W_n$; d'où $\lambda_n B_{n,p} \subset \frac{1}{2^n} W_{n,p}$ quels que soient $n, p \in N$. Soit (α_n) une suite décroissante telle que $0 < \alpha_n < \frac{\lambda_n n!}{n^n}$ pour tout $n \in N$. On vérifie maintenant, pour tout $p \in N$, que la série $\sum_{n=1}^{\infty} D^p f_{n,\alpha_n}$ converge uniformément. Cette série converge simplement parce que pour $x \neq 0$ (la chose étant évidente au point $0 \in E$) il existe n_o tel que $\alpha_{n_o} < |x|$, d'où $D^p f_{n,\alpha_n}(x) = 0$ pour $n \geq n_o$. Il suffit donc de vérifier que $(\sum_{k=p}^{\infty} D^p f_{k,\alpha_n})_{n\in N}$ est une suite de Cauchy dans l'espace de convergence uniforme $F_u(E, L_p(E,F))$. Ou encore pour tout $n \in N$, il s'agit d'indiquer un entier $m(n,p)$ tel que $x \in E$, $k \geq m(n,p)$, $l > 0$ entraînent $\sum_{s=k}^{k+l} D^p f_{s,\alpha_s}(x) \in W'_{n,p}$, où $(W'_{n,p})$ est un système fondamental de voisinages de $0 \in L_p(E,F)$. On observe que ceci est vrai en posant $m(n,p) = \max(n,p)$ et $W'_{n,p} = |\varphi|_p 2^p W_{n,p}$. En effet compte tenu de (1), pour $l > 0$ et $s > \max(n,p)$ on a :

$$D^p f_{s,\alpha_s}(x) \in |\varphi|_p 2^p \frac{s^p}{s!} \alpha_s^{s-p} B_{s,p} \subset |\varphi|_p 2^p \frac{s^s}{s!} \alpha_s B_{s,p} \subset$$
$$\subset |\varphi|_p 2^p \lambda_s B_{s,p} \subset |\varphi|_p 2^p (\frac{1}{2^s} W_{s,p}) \subset \frac{1}{2^s} W'_{n,p}.$$

D'où $k > max(n, p)$, $l > 0$, $x \in E$ entraînent

$$\sum_{s=k}^{k+l} D^p f_{s,\alpha_s}(x) \in \sum_{s=k}^{k+l} \frac{1}{2^s} W'_{n,p} = \left(\sum_{s=k}^{k+l} \frac{1}{2^s}\right) W'_{n,p} \subset W'_{n,p},$$

Compte tenu des théorèmes généraux de convergence [10] , ce qui précède montre que $\sum_{n=1}^{\infty} f_{n,\alpha_n}$ est de classe C^{∞} et pour tout $p \in N$ on a

$$D^p\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_{s,\alpha_s}\right)(0) = \sum_{n=1}^{\infty} D^p f_{s,\alpha_s}(0) = D^p f_{p,\alpha_p}(0) = c_p .$$

CHAPITRE II

VARIETES LOCALEMENT CONVEXES

II.1. Atlas, morphismes.

II.1.1. Soit $\mathcal{C}^p$ la classe des objets (f, U, E, F) où E, F sont des espaces localement convexes séparés et f une application de classe C^p définie sur un ouvert U de E à valeurs dans F.

Si (f, U, E, F) et (g, V, F, G) sont des objets de $\mathcal{C}^p$ tels que $f(U) \subset V$, alors $(g \circ f, U, E, G)$ est un objet de $\mathcal{C}^p$ en vertu de *I.4.4.* Ce qui permet une théorie des variétés modelées sur des espaces localement convexes (chose déjà entreprise [1] pour un calcul différentiel distinct de celui-ci) sur le modèle de celle des variétés banachiques. On énumère ci-après quelques notions et propriétés utiles dans la suite, les démonstrations qui seront omises, étant celles qui réussissent pour les variétés banachiques ([2],[9]), à la condition que le théorème des fonctions implicites n'y soit pas indispensable.

II.1.2. Soit V un espace topologique; on appelle *atlas localement convexe de classe* C^p sur V la donnée d'un ensemble $\mathfrak{A}$ de triplets $(V_\alpha, f_\alpha, E_\alpha)$, $\alpha \in \mathfrak{A}$ vérifiant ce qui suit :

i) $(V_\alpha)_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ est un recouvrement ouvert de V.

ii) Pour tout $\alpha \in \mathfrak{A}$, E_α est un espace localement convexe séparé et $f_\alpha : V_\alpha \to f_\alpha(V_\alpha)$ est un homéomorphisme de V_α sur un ouvert de E_α.

iii) Quels que soient $\alpha, \beta \in \mathfrak{A}$ tels que $V_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$, l'applica- $f_\beta \circ f_\alpha : f_\alpha(V_\alpha \cap V_\beta) \subset E_\alpha \to E_\beta$ est de la classe C^p.

On définit alors de manière naturelle ce qu'est un atlas complet de classe C^p sur un espace topologique et on appelle *variété localement convexe* (on dira désormais variété l.c.) *de classe* C^p la donnée d'un espace topologique muni d'un atlas localement convexe complet de classe C^p.

II.1.3. V étant une variété localement convexe de classe C^p et $\mathfrak{A}$ son atlas complet, on appelle *sous-variété ouverte de* V tout ouvert W de V muni de l'atlas complet de classe C^p induit par $\mathfrak{A}$.

II.1.4. On dit qu'une application $f : V \to W$ de variétés l.c. de classe C^p est un *morphisme* si pour tout $x \in V$, il existe des cartes (V', φ, E) et (W', ψ, F) de V et W en x et $f(x)$ telles que $f(V') \subset W'$ et que

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(V') \subset E \to F$$

soit de classe C^p. Si $f : U \to V$ et $g : V \to W$ sont des morphismes de variétés de classe C^p, alors $g \circ f : U \to W$ est un morphisme. Une application $f : V \to W$ de variétés est un *difféomorphisme* si f est une bijection et que f et f^{-1} sont des morphismes.

II.2. Immersions, submersions.

II.2.1. Soit $f : V \to W$ une application de variétés de classe C^p. On dit que f est une *submersion* si, pour tout $x \in V$, il existe

i) une sous-variété ouverte $V' \subset V$ telle que $x \in V'$,

ii) une sous-variété ouverte $W' \subset W$ telle que $f(V') \subset W'$,

iii) une variété W'' de classe C^p,

iv) un difféomorphisme $\varphi : V' \to W' \times V''$ tel que

$$\begin{tikzcd} V' \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & & W' \times V'' \arrow[dl, "p_{W'}"] \\ & W' & \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

La composée de deux submersions est une submersion.

II. 2.2. On dit qu'une application $f : V \to W$ de variétés l.c. de classe C^p est une *immersion* si, pour tout $x \in V$, il existe

i) une sous-variété ouverte $V' \subset V$ telle que $x \in V'$,

ii) une sous-variété ouverte $W' \subset W$ telle que $f(V') \subset W'$,

iii) une variété W'' de classe C^p,

iv) un difféomorphisme $\varphi : W' \to V' \times W''$ et un point $y \in W''$ tels que

$$\begin{tikzcd} V' \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "i_y"'] & & W' \arrow[dl, "\varphi"] \\ & V' \times W' & \end{tikzcd}$$

soit commutatif, où i_y désigne l'injection $x \to (x, y)$.

La composée de deux immersions est une immersion.

II. 2. 3. Soient V et W des variétés l.c. de classe C^p. On dit que V est *une sous-variété de* V si

i) $W \subset V$,

ii) la topologie de W est celle induite par V,

iii) l'injection naturelle $W \to V$ est une immersion.

Si W est un sous-ensemble d'une variété V de classe C^p, il existe au plus une structure de variété de classe C^p sur W telle que W soit une sous-variété de V.

Si U, V, W étant des variétés de classe C^p, U (resp. V) est sous-sous-variété de V (resp. W), alors U est sous-variété de W.

II.2.4. Soit $f : U \to V$ un morphisme de variétés de classe C^p prenant ses valeurs dans une sous-variété W de V; alors $f : U \to W$ est un morphisme de variétés.

II. 2. 5. On appelle *plongement* un morphisme $f: V \to W$ de variétés de classe C^p tel que $f(V)$ soit une sous-variété de W et $f : V \to f(V)$ un difféomorphisme.

II.2.6. Soit $f : V \to W$ une submersion de variétés de classe C^p et soit U une sous-variété de W, alors $f^{-1}(U)$ est une sous-variété de V et $f : f^{-1}(U) \to U$ est une submersion. Cette propriété est d'usage courant en géométrie sous la forme suivante : soient $f : V \to W$ une submersion et $g : U \to W$ un plongement de variétés de classe C^p; alors $f^{-1}(g(U))$ est une sous-variété de V et l'application $h : f^{-1}(g(U)) \to U$ définie par composition de f et de $g^{-1}_{|g(U)}$ est une submersion.

II. 2. 7. Soient U, V, W des variétés de classe C^p, $f : U \to W$ et $g : V \to W$ des submersions. Le sous-ensemble $U \boxtimes V$ de $U \times V$ formé des (x, y) tels que $f(x) = g(y)$ (qu'on appelle le produit fibré de f et de g) est alors une sous-variété de $U \times V$ et les flèches du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} U \boxtimes V \arrow[r, "p_V"] \arrow[d, "p_U"] & V \arrow[d, "g"] \\ U \arrow[r, "f"'] & W \end{tikzcd}$$

sont des submersions.

II.3. Groupoïdes différentiables, fibrations.

II.3.1. Dans ce qui suit on appellera *groupoïde différentiable* [7] *de classe* C^p un ensemble Φ, muni d'une structure de groupoïde et d'une structure de variété l.c. de classe C^p vérifiant :

i) le sous-ensemble C formé des unités de Φ est une variété,

ii) les applications source $a : \Phi \to C$ (qui à f fait correspondre son unité à droite) et but $b : \Phi \to C$ (qui à f fait correspondre son unité à gauche) sont des submersions,

iii) la loi de composition du groupoïde $(f, g) \to gf$ définie sur le produit fibré $\Phi \boxtimes \Phi$ de $b : \Phi \to C$ et de $a : \Phi \to C$ (ce produit fibré est une variété d'après *2.7*) est un morphisme de $\Phi \boxtimes \Phi$ dans Φ,

iv) l'inversion $f \to f^{-1}$ du groupoïde est un morphisme de Φ dans Φ.

Si la variété Φ est banachable alors l'axiome iv) résulte des précédents [7], [9] et l'axiome ii) est équivalent à :

ii)' les applications $a : \Phi \to \Phi$ et $b : \Phi \to \Phi$ sont des morphismes.

On dit que le groupoïde différentiable Φ est *transitif* (resp. *localement transitif*) si $(a, b) : \Phi \to C \times C$ est une submersion surjective (resp. une submersion).

II. 3.2. On appellera *base d'un groupoïde différentiable* Φ tout couple (V, i), où i est un difféomorphisme de V sur la sous-variété des unités de Φ : on désignera alors par les mêmes symboles et on appellera morphismes source et but de Φ rapporté à (V, i) les submersions évidentes $a : \Phi \to V$ et $b : \Phi \to V$.

II. 3.3. Soit (M, π, V) un triplet de classe C^p c'est-à-dire une submersion surjective $\pi : M \to V$ de variétés l.c. de classe C^p. On appelle *groupoïde d'opérateurs* [7], [9] sur (M, π, V) les données d'un groupoïde différentiable Φ de classe C^p, de base (V, i) et d'un morphisme $(f, z) \to fz$ définie sur la sous-variété $\Phi \boxtimes M$, produit fibré des submersions $a : \Phi \to V$ et $\pi : M \to V$, à valeurs dans M vérifiant ce qui suit :

i) Pour tout $(f, z) \in \Phi \boxtimes M$ on a : $b(f) = \pi(fz)$,

ii) si $g(fz)$ ou $(gf)z$ est défini alors, $g(fz)$ et $(gf)z$ étant définis (ce que l'on voit aisément), on a : $g(fz) = (gf)z$.

iii) Pour tout $z \in M$ on a $\hat{i}(\pi(z))z = z$ (le membre de gauche étant défini de toute évidence).

On dit que Φ *opère transitivement sur* (M, π, V) si le morphisme $(f, z) \to (z, fz)$ de $\Phi \boxtimes M$ dans $M \times M$ est une submersion surjective.

II.3.4. Soit s une section du triplet (M, π, V) sur lequel opère transitivement le groupoïde différentiable Φ. L'ensemble $\Phi(s)$ formé des $f \in \Phi$ tels que l'on ait $f(s(a(f))) = s(b(f))$ est un sous-groupoïde différentiable transitif de Φ de base V que l'on appellera le *sous-groupoïde d'isotropie relatif à* s.

II. 3. 5. On appelle *fibration de classe* C^p tout triplet (M, π, V) de classe C^p tel que, pour tout $x \in V$, il existe un voisinage ouvert U de x, une variété F de classe C^p et un difféomorphisme $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times F$ tels que

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times F \arrow[dl, "p_U"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

soit commutatif; on dit que (U, φ, F) est *une carte de trivialisation*, U un *ouvert de trivialisation* et F une *fibre* en x. Si V est connexe, alors des fibres en deux points quelconques de V sont difféomorphes.

II.3.6. PROPOSITION [7], [9]. *Pour qu'un triplet* (M, π, V) *de classe* C^p *soit une fibration, il suffit qu'il admette au groupoïde différentiable d'opérateurs de classe* C^p *localement transitif.*

Soient alors (M, π, V) et (M', π', V) des triplets munis du groupoïde différentiable Φ de base V et soit $\Phi : M \to M'$ un morphisme Φ-covariant, c'est-à-dire tel que

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & M' \arrow[dl, "\pi'"] \\ & V & \end{tikzcd}$$

soit commutatif et que, pour tout couple composable $(f, z) \in \Phi \boxtimes M$, $f(\varphi(z))$ (qui est alors défini) égale $\varphi(fz)$. Supposons que Φ opère transitivement sur (M', π', V), soit s une section de (M', π', V) et soit, conformément à *3. 4*, $\Phi(s)$ le sous-groupoïde d'isotropie. Si φ est une submersion surjective, alors le triplet $(M(s), \pi, V)$, où $M(s) \subset M$ est défini d'après *2.6* par le plongement $s : V \to M'$, se trouve être muni du groupoïde transitif $\Phi(s^{\cdot})$ et constitue par conséquent une sous-fibration de (M, π, V). C'est là le modèle d'une situation courante en Géométrie.

II. 3.7. On dit qu'une variété V de classe C^p est C^p*-contractile* s'il existe un intervalle ouvert $I \supset [0, 1]$ de R, un morphisme $h : I \times V \to V$ et un point $x_o \in V$ tels que $g(0, x) = x_o$ et $g(1, x) = x$ quel que soit $x \in V$. Tout espace localement convexe E est C^∞-contractile puisque l'application bilinéaire continue $R \times E \to E$ qui à (λ, x) fait correspondre λx est une fonction de contraction de classe C^∞.

On dira qu'une variété l.c. V de classe C^p est C^p*-normale* si, quels que soient les fermés disjoints A et B de V, il existe un morphisme $f : V \to R$ de variétés de classe C^p tel que l'on ait $f(V) \subset [0, 1]$, $f(A) = 0$, $f(B) = 1$.

On démontre alors comme dans [9] l'énoncé suivant :

LEMME. *Soit (M, π, V) une fibration trivialisable de classe C^p. On suppose que la fibre est C^p-contractile et que V est C^p-normale. Soient U une sous-variété ouverte de V et s une section de $(\pi^{-1}(U), \pi, U)$; pour tout ouvert U_1 de V tel que $\overline{U}_1 \subset U$, il existe alors une section s_1 de (M, π, V) telle que $s_1/U_1 = s/U_1$.*

PROPOSITION. *Soit (M, π, V) une fibration de classe C^p dont les fibres soient C^p-contractiles. On suppose que l'espace topologique V est normal. Soient alors U_1, V_1 des sous-variétés ouvertes de V telles que $V_1 \subset U_1$ et soit s une section de $(\pi^{-1}(U_1), \pi, U_1)$. Si l'ouvert $V - \overline{V}_1$ est réunion dénombrable d'ouverts de trivialisation C^p-normaux, alors il existe une section σ de (M, π, V) telle que $\sigma \mid V_1 = s \mid V_1$.*

Soit $(U_n)_{n \geq 2}$ un recouvrement de $V - \overline{V}_1$ formé d'ouverts de trivialisation C^p-normaux. V étant normal on peut par un procédé classique construire une suite d'ouverts $(V_n)_{n \geq 2}$ telle que $(V_n)_{n \in N}$ soit un recouvrement de V et que l'on ait $\overline{V}_n \subset U_n$ quel que soit $n \in N$. Il existe aussi pour tout $n \in N$ une suite décroissante $(U_n^{(k)})_{k \in N}$ d'ouverts de V tels que

$$U_n^{(1)} = U_n \quad \text{et} \quad \overline{V}_n \subset U_n^{(k+1)} \subset \overline{U}_n^{(k+1)} \subset U_n^{(k)}$$

quel que soit $k \in N$. Pour tout $n \in N$ on pose

$$V_{[n]} = U_1^{(n)} \cup U_2^{(n-1)} \dots \cup U_n^{(1)} \quad \text{et} \quad W_n = U_1^{(n+1)} \cup U_2^{(n)} \dots \cup U_n^{(2)}.$$

On a $V_{[1]} = U_1$; $\overline{W}_n \subset V_{[n]}$, $W_n \subset V_{[n+1]}$ quel que soit $n \in N$. On peut construire par récurrence une suite (s_n) où s_n est une section de $(\pi^{-1}(V_{[n]}), \pi, V_{[n]})$ telle que $s_1 = s$ et que l'on ait

$$(1) \qquad s_n|_{W_n} = s_{n+1}|_{W_n} \quad \text{pour tout } n \in N.$$

En effet soit $(s_1, \dots, s_n)$ une suite finie de sections vérifiant les conditions précédentes. On observe que $s_n|_{U_{n+1}} \cap V_{[n]}$ est une section définie sur un ouvert de la fibration trivialisable $(\pi^{-1}(U_{n+1}), \pi, U_{n+1})$ de base C^p-normale et fibré C^p-contractile et que $W_n \cap U_{n+1}$ est un ouvert de U_{n+1} pour lequel on a :

$$\overline{W_n \cap U_{n+1}}^{\,U_{n+1}} = \overline{W}_n \cap U_{n+1} \subset V_{[n]} \cap U_{n+1}.$$

En vertu du lemme, il existe alors une section σ_n de $(\pi^{-1}(U_{n+1}), \pi, U_{n+1})$ telle que $\sigma_n|_{W_n} \cap U_{n+1} = s_n|_{W_n} \cap U_{n+1}$. D'où une section s_{n+1} définie au-dessus de $V_{[n+1]} = W_n \cap U_{n+1}$ en posant $s_{n+1}(x) = s_n(x)$ pour $x \in W_n$ et $s_{n+1}(x) = \sigma_n(x)$ pour $x \in U_{n+1}$. La suite partielle $(s_1, \dots, s_{n+1})$ vérifie bien la condition de cohérence (1). On pose alors $V_n^* = \bigcup_{k \leq n} V_k$ et $s_n = s_n^*|_{W_n}$ pour tout $n \in N$. La suite croissante $(V_n^*)_{n \in N}$ est un recouvrement ouvert de V; on a $s_1^* = s_1$ et $s_{n+1}^*|_{V_n^*} = s_n^*$ quel que soit $n \in N$. D'où une section σ de (M, π, V) définie en posant $\sigma(x) = s_n(x)$ pour $x \in V_n$ et qui, de toute évidence, prolonge $s|V_1$.

Compte tenu de *3. 6*, on obtient [9] :

COROLLAIRE. *Soit (M, π, V) un triplet de classe C^p. On suppose que V est paracompacte et modelée en tout point sur un espace normé séparable C^p-normal (par exemple un espace préhilbertien) et que, pour tout point $x \in V$, la sous-variété $\pi^{-1}(x)$ est C^p-contractile (par exemple difféomorphe à un espace localement convexe).*

Pour que (M, π, V) admette des sections, il suffit qu'il existe un groupoïde différentiable localement transitif opérant sur (M, π, V).

CHAPITRE III

JETS D'ORDRE INFINI

III.1. Définitions.

III.1.1. Soient V, W des variétés l.c. de classe C^∞ et soit $G^\infty(V, W)$ l'ensemble des couples (f, x) où $x \in V$ et où f est un morphisme défini sur une sous-variété ouverte, voisinage de x, et à valeurs dans W. Soit ρ_∞ la relation sur $G(V, W)$ définie comme suit : $(f, x)\,\rho_\infty\,(g, y)$ si, et seulement si, $x = y$, $f(x) = g(y)$ et s'il existe des cartes locales (V', φ, E) et (W', ψ, F) de V et W en x et $f(x)$ respectivement telles que $f(V') \subset W'$, $g(V') \subset W'$ et

$$D^k(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) = D^k(\psi \circ g \circ \varphi)(\varphi(x))$$

dans $L_{(k)}(E, F)$ quel que soit $k \in N$. On remarque que ρ_∞ est une relation d'équivalence sur $G(V, W)$; on désigne par $J^\infty(V, W)$ et on appelle *ensemble des jets d'ordre infini de V dans W* le quotient $G^\infty(V, W)/\rho_\infty$, la classe de (f, x), c'est-à-dire le jet d'ordre infini de f en x étant noté $j_x^\infty(f)$. L'application $(f, x) \to (x, f(x))$ de $G^\infty(V, W)$ sur $V \times W$ induit une application dite source-but $(\alpha, \beta) : J^\infty(V, W) \to V \times W$.

III.1.2. Soient U, V, W des variétés l.c. de classe C^∞ et soit

$$G^\infty(U, V) \boxtimes G^\infty(V, W)$$

l'ensemble des couples $((f, x), (g, y))$ où $y = f(x)$. Les formules de dérivation des fonctions composées *(I.4.3)* entraînent que l'application $((f, x), (g, y)) \to ((g \circ f), x)$ de $G^\infty(U, V) \boxtimes G^\infty(V, W)$ dans $G^\infty(U,W)$ est compatible avec les relations d'équivalence $\rho_\infty \times \rho_\infty$ et ρ_∞, d'où, comme dans [9], une application dite *composition des jets d'ordre infini* $(X, Y) \to YX$ de $J^\infty(U, V) \boxtimes J^\infty(V, W)$ dans $J^\infty(U, W)$, où $J^\infty(U,V) \boxtimes J^\infty(V,W)$ est le produit fibré de $\beta : J^\infty(U,V) \to V$ et de $\alpha : J^\infty(V, W) \to V$.

III.2. Coordonnées.

III.2.1. Soient E, F des espaces localement convexes séparés, U un ouvert de E, V un ouvert de F. On désignera par $L^\infty(U, V)$ l'ouvert

$$U \times V \times \prod_{n=1}^{\infty} L^s_{n,k}(E, F)$$

de l'espace localement convexe $E \times F \times \prod_{n=1}^{\infty} L_{n,k}(E, F)$, où $L^s_{n,k}(E, F)$ est l'espace des applications n-linéaires hypocontinues, symétriques de E^n dans F. On a une application $\zeta : G^\infty(U, V) \to L^\infty(U, V)$ qui à (f, x) fait correspondre $(x, f(x), (D^n f(x))_{n \in N})$, laquelle, compatible avec la relation d'équivalence ρ_∞, donne lieu par passage au quotient à une injection $\omega_\infty : J^\infty(U, V) \to L^\infty(U, V)$. On dit que $\omega_\infty(X)$ est le système canonique de coordonnées de X.

PROPOSITION. *Soient E un C-espace normable et F un espace localement convexe métrisable. Alors pour tout ouvert $U \subset E$ et pour tout ouvert $V \subset F$ l'application $\omega_\infty : J^\infty(U, V) \to L^\infty(U, V)$ est bijective.*

En effet, il résulte de *I. 5. 2* que l'application $\zeta : G^\infty(U, V) \to L^\infty(U, V)$ est surjective.

III. 2. 2. Soient V, W des variétés l.c. de classe C^∞ ; soit $X \in J^\infty(V, W)$ et soient (V', φ, E) et (W', ψ, F) des cartes locales en $x \in \alpha(X)$ et $y = \beta(X)$. On désignera par $J^\infty(V, W; V', W')$ le sous-ensemble de $J^\infty(V, W)$ formé des jets ayant leur source dans V' et leur but dans W'; les cartes précitées induisent une bijection

$$(\varphi, \psi)_\infty : J^\infty(V, W; V', W') \to J^\infty(\varphi(V'), \psi(W'))$$

qui à X fait correspondre $\psi X j^\infty_{\varphi(\alpha(X))}(\varphi^{-1})$. On appellera *système de coordonnées de* $J^\infty(V, W)$ attaché aux cartes (V', φ, E) et (W', ψ, F) l'injection

$$\omega_\infty \circ (\varphi, \psi)_\infty : J^\infty(V, W; V', W') \to L^\infty(\varphi(V'), \psi(W')).$$

D'après ce qui précède, $\omega_\infty \circ (\varphi, \psi)_\infty$, qu'on désignera désormais par $[\varphi, \psi]_\infty$, est bijective dans le cas où E est C-normable et F métrisable.

III. 2. 3. Soient E, F, G des espaces localement convexes séparés et $U \subset E$, $V \subset F$, $W \subset G$ des ouverts. Soit $L^\infty(U, V) \boxtimes L^\infty(V, W)$ le produit fibré des projections naturelles $L^\infty(U, V) \to V$ et $L^\infty(V, W) \to V$. Soit

$$\theta : L^\infty(U, V) \boxtimes L^\infty(V, W) \to L^\infty(U, W)$$

l'application qui à $((x, y), (X_n)_{n \in N}), (y, z, (Y_n)_{n \in N}))$ fait correspondre

$(x, z, (Z_n)_{n\in N})$ où $Z_n \in L^s_{n,b}(E, G)$ est défini comme suit avec les notations de *I.4.3* : .

$$Z_n = \sum_{\substack{(\alpha_1,\dots,\alpha_p)\in P_{n,p}\\ p=1,\dots,n}} Y_p \circ (X_{k_1}\circ\pi_{\alpha_1},\dots,X_{k_p}\circ\pi_{\alpha_p}).$$

Soient alors U, V, W des variétés de classe C^∞. Soient $X \in J^\infty(U, V)$, $Y \in J^\infty(V, W)$ des jets composables et soient (U', φ, E), (V', ψ, F), (W', χ, G) des cartes locales de U, V, W en $\alpha(X)$, $\beta(X) = \alpha(Y)$, $\beta(Y)$. Comme dans [9] on remarquera que, si $(x, y, (X_n)_{n\in N})$ et $(y, z, (Y_n)_{n\in N})$ sont les systèmes de coordonnées de X et Y dans les cartes locales $(U', \varphi, E), (V', \psi, F)$ et $(V', \psi, F), (W', \chi, G)$ respectivement, alors $\theta((x, y, (X_n)), (y, z, (Y_n)))$ est le système des coordonnées du jet composé YX par rapport aux cartes $(U', \varphi, E), (W', \chi, G)$.

III. 2. 4. Soient V et W des variétés de classe C^∞. Pour $m \leq n$ on a une projection naturelle $\pi^m_n : J^n(V, W) \to J^m(V, W)$ et $(J^n(V, W), \pi^m_n)$ est un système projectif. On a aussi des projections naturelles

$$\pi^n : J^\infty(V, W) \to J^n(V, W).$$

PROPOSITION. *Si V est modelée sur un espace C-normable et que W est localement métrisable, alors $(J^\infty(V, W), \pi^n)$ est limite projective de $(J^n(V, W), \pi^m_n)$.*

Soit $\underleftarrow{\prod} J^n(V, W)$ le sous-ensemble de $\prod_{n=1}^{\infty} J^n(V, W)$ formé des (X_n) tels que $\pi^n_m(X_n) = X_m$ quels que soient $m \leq n$. Il suffit de remarquer que l'injection $(\pi^n) : J^\infty(V, W) \to J^n(V, W)$ prend ses valeurs dans $\underleftarrow{\prod} J^n(V, W)$ et de démontrer que $(\pi^n) : J^\infty(V, W) \to \underleftarrow{\prod} J^n(V, W)$ est surjective. Il suffit de procéder localement, c'est-à-dire de vérifier pour des cartes quelconques (V', φ, E) et (W', ψ, F) de V et W que l'application induite $(\pi^n) : J^\infty(V, W; V', W') \to \underleftarrow{\prod} J^n(V, W; V', W')$ est surjective. Pour des ouverts $U \subset E$ et $V \subset F$ on pose

$$L^n(U, V) = U \times V \times \prod_{k=1}^{n} L^s_k(E, F);$$

on a [9] des bijections naturelles :

$$[\varphi, \psi]_n : J^n(V, W; V', W') \to L^n(\varphi(V'), \psi(W'))$$

attachées aux cartes précitées. D'autre part on a des projections naturelles:

$$\pi^n : L^\infty(\varphi(V'), \psi(W')) \to L^n(\varphi(V'), \psi(W'))$$

et
$$\pi^n_m : L^m(\varphi(V'), \psi(W')) \to L^n(\varphi(V'), \psi(W'))$$

pour $n \leq m$ et $(L^\infty(\varphi(V'), \psi(W')), \pi^n)$ est limite projective du système $(L^n(\varphi(V'), \psi(W')), \pi^m_n)$. D'où le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} J^\infty(V, W; V', W') & \xrightarrow{(\pi^n)} & \underleftarrow{\Pi} J^n(V, W; V', W') \\ \Big\downarrow [\varphi, \psi]_\infty & & \Big\downarrow [\varphi, \psi]_n \\ L^\infty(\varphi(V'), \psi(W')) & \xrightarrow{(\pi^n)} & \underleftarrow{\Pi} L^n(\varphi(V'), \psi(W')) \end{array}$$

où les autres flèches étant bijectives compte tenu de *2.1*, la flèche horizontale supérieure l'est aussi.

III.3. Variétés de jets d'ordre infini.

III. 3. 1. Soient $\{(V_\alpha, \varphi_\alpha, E_\alpha) \mid \alpha \in \mathfrak{A}\}$ l'atlas complet d'une variété V de classe C^∞ modelée en tout point sur un C-espace normé et $\{(W_\beta, \psi_\beta, F_\beta) \mid \beta \in \mathfrak{B}\}$ l'atlas complet d'une variété de classe C^∞ modelée sur un espace normé. Comme dans [9], on observe qu'il existe sur $J^\infty(V, W)$ une et une seule structure de variété de classe C^∞ telle que

$$\{((J^\infty(V, W); V_\alpha, W_\beta), [\varphi_\alpha, \psi_\beta]_\infty, L^\infty(E_\alpha, F_\beta)) \mid (\alpha, \beta) \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}\}$$

en soit un atlas. Cela tient, à ce que, pour des espaces normables E, F, G la composante θ_1 :

$$\left(\prod_{n=1}^{\infty} L^s_n(E, F)\right) \times \prod_{n=1}^{\infty} L^s_n(F, G)) \to \prod_{n=1}^{\infty} L^s_n(E, G)$$

de $\theta : L^\infty(E, F) \boxtimes L^\infty(F, G) \to L^\infty(E, G)$ définie dans *2. 3* est une application de classe C^∞ d'espaces localement convexes. Les projections naturelles $\pi^n : J^\infty(V, W) \to J^n(V, W)$ et $(\alpha, \beta) : J^\infty(V, W) \to J^n(V, W)$ sont évidemment des submersions.

III.3.2. Soient V et W des variétés comme ci-dessus; alors $(J^\infty(V, W), \pi^n)$ est la limite projective de $(J^n(V, W), \pi^m_n)$. Soit U une variété et, pour chaque $n \in N$, soit $f^n : U \to J^n(V, W)$ une application telle que l'on ait $\pi^m_n \circ f^n = f^m$ pour $m \leq n$; alors l'unique application $f : U \to J^\infty(V, W)$ qui vérifie $\pi^n \circ f = f^m$ quel que soit $n \in N$, est un morphisme de variétés si, et seulement si, chaque f^n est un morphisme.

III. 3.3. Soient U, V des variétés modelées sur des C-espaces normables, W une variété modelée sur un espace normable. Le produit fibré $J^{\infty}(U, V) \boxtimes J^{\infty}(V, W)$ de $\beta : J^{\infty}(U, V) \to V$ et de $\alpha : J^{\infty}(V, W) \to V$, c'est-à-dire l'ensemble des couples de jets composables, est une variété d'après *II.2.7*, et on vérifie comme dans [9] que la composition des jets $J^{\infty}(U, V) \boxtimes J^{\infty}(V, W) \to J^{\infty}(U, W)$ est un morphisme de variétés de classe C^{∞}

III.3.4. Parmi les propriétés du calcul des jets, dont la démonstration fournie dans [9] demeure valide à l'ordre infini, il y a lieu de signaler :

PROPOSITION. *Soient U une variété modelée sur un C-espace normé, V et W des variétés modelées sur des espaces normés, $f : V \to W$ une submersion (surjective). Pour tout $n \in N$, l'application*

$$(\overline{f}, \pi^n) : J^{\infty}(U, V) \to J^{\infty}(U, W) \times J^n(U, V)$$

qui à X fait correspondre $(fX, \pi^n(X))$, est une submersion dans (sur) le produit fibré des submersions $\pi^n : J^{\infty}(U, W) \to J^n(U, W)$ et $\overline{f} : J^n(U, V) \to J^n(U, W)$.

III. 3. 5. Si V est une variété modelée sur un C-espace de Banach alors le sous-ensemble $\Pi^{\infty}(V)$ de $J^{\infty}(V, V)$ formé des jets inversibles est une sous-variété ouverte; $\Pi^{\infty}(V)$ est l'image réciproque de l'ouvert $\Pi(V)$ de $J(V, V)$ par la projection $\pi^1 : J^{\infty}(V, V) \to J(V, V)$.

On observe que $\Pi^{\infty}(V)$ est un groupoïde différentiable transitif pour la loi de composition des jets admettant la base naturelle (V, j^{∞}) où $j^{\infty} : V \to J^{\infty}(V, V)$ désigne le morphisme $x \to j^{\infty}_x(1_V)$.

CHAPITRE IV

CONNEXIONS D'ORDRE INFINI

IV.1. Théorèmes d'existence.

IV.1.1. Dans ce qui suit Φ désigne un groupoïde différentiable de classe C^∞ modelé sur un espace normé, rapporté à une base (V, i), où V est modelée sur un C-espace normé; on désigne par a, b les submersions source et but $\Phi \to V$. Soit alors $Q^\infty(V, \Phi)$ le sous-ensemble de la variété $J^\infty(V, \Phi)$ formé des X tels que l'on ait :

i) $\beta(X) = i(\alpha(X))$,

ii) $aX = j^\infty_{\alpha(X)}$,

iii) $bX = j^{\infty\wedge}_{\alpha(X)}$,

(V et W étant des variétés, pour $x \in V$, $y \in W$, on écrit $j^\infty_x(\hat{y})$ et $j^{\infty\wedge}_x$ au lieu de $j^\infty_x(z \to y)$ et $j^\infty_x(z \to x)$).

Si Φ est transitif (ce qui sera supposé désormais) on observe que $Q^\infty(V, \Phi)$ est une sous-variété de $J^\infty(V, \Phi)$ et que la restriction de $\alpha : J^\infty(V, \Phi) \to V$ induit une submersion surjective $q : Q^\infty(V, \Phi) \to V$ de type affine, c'est-à-dire que chaque sous-variété $q^{-1}(x)$, $x \in V$, est difféomorphe à un espace localement convexe. En effet, la submersion surjective $(a, b) : \Phi \to V \times V$ induit d'après *II.3.3* une submersion $(\overline{(a, b)}, \beta)$ de $J^\infty(V, \Phi)$ sur $J^\infty(V, V \times V) \boxtimes \Phi$, produit fibré de $\beta : J^\infty(V, V\times V) \to V \times V$ et de $(a, b) : \Phi \to V \times V$, et $q : Q^\infty(V, \Phi) \to V$ est alors induit d'après *II.2.6* par le plongement $x \to (j^\infty_x(y \to (y, x)), i(x))$ de V dans $J^\infty(V, V \times V) \boxtimes \Phi$. On peut alors étendre la définition fondamentale [5].

DEFINITION. Soit Φ un groupoïde différentiable transitif de base (V, i); on appelle *élément de Φ-connexion d'ordre infini en* $x \in V$ tout $X \in Q^\infty(V, \Phi)$ tel que $q(X) = x$. On appelle *Φ-connexion d'ordre infini* sur V une section de $q : Q^\infty(V, \Phi) \to V$ de classe C^∞.

IV.1.2. Pour les données ci-dessus, on a pour tout $n \in N$, d'après *III.3.4*, une submersion $(\overline{(a, b)}, \pi^n) : J^\infty(V, \Phi) \to J^\infty(V, V \times V) \times J^n(V, \Phi)$ sur le produit fibré de $\pi^n : J^\infty(V, V \times V) \to J^n(V, V \times V)$ et de $\overline{(a, b)} : J^n(V, \Phi) \to J^n(V, V \times V)$. Compte tenu de *II.2.6*, le plongement

$$X \to (j^\infty_{\alpha(X)}(x \to (x, \alpha(X))), X)$$

de $Q^n(V, \Phi)$ dans $J^\infty(V, V\times V) \boxtimes J^n(V, \Phi)$ définit alors une sous-variété de $J^\infty(V, \Phi)$ qui n'est autre que $Q^\infty(V, \Phi)$ et une submersion de $Q^\infty(V, \Phi)$ sur $Q^n(V, \Phi)$ qui n'est autre que la restriction de π^n : $J^\infty(V, \Phi) \to J^n(V, \Phi)$. Le système de submersions $(Q^\infty(V, \Phi), \pi^n)$ est limite projective du système de submersions $(Q^n(V, \Phi), \pi^m_n)$; c'est-à-dire: Pour qu'une section $\mathfrak{X} : V \to Q^\infty(V, \Phi)$ définisse une Φ-connexion d'ordre infini, il faut et il suffit que chaque section $\pi^n \circ \mathfrak{X} : V \to Q^n(V, \Phi)$ soit de classe C^∞ c'est-à-dire une Φ-connexion d'ordre n.

IV. 1. 3. Soit $\mathfrak{X}$ une Φ-connexion d'ordre n, c'est-à-dire une section de classe C^∞ de $(Q^n(V, \Phi), q, V)$. On appelle *Φ-connexion d'ordre infini au-dessus de* X ou compatible avec X, toute connexion d'ordre infini $\mathfrak{X}' : V \to Q^\infty(V, \Phi)$ telle que $\pi^n \circ \mathfrak{X}' = \mathfrak{X}$. Si on désigne par $Q^\infty(V, \Phi; \mathfrak{X})$ le sous-ensemble de $Q^\infty(V, \Phi)$ formé des X tels que $\pi^n(X) = \mathfrak{X}(\alpha(X))$, alors $Q^\infty(V, \Phi; \mathfrak{X})$ est une sous-variété et la restriction de $q : Q^\infty(V, \Phi) \to V$ à $Q^\infty(V, \Phi; \mathfrak{X})$ est une submersion sur V.

En effet, $Q^\infty(V, \Phi; \mathfrak{X})$ est l'image réciproque du plongement $X : V \to Q^n(V, \Phi)$ relativement à la submersion $\pi^n : Q^\infty(V, \Phi) \to Q^n(V, \Phi)$. Une Φ-connexion d'ordre infini au-dessus de X n'est rien d'autre qu'une section de $(Q^\infty(V, \Phi; \mathfrak{X}), q, V)$.

IV. 1. 4. Soient Φ et V comme ci-dessus; en outre on supposera désormais que V est modelée sur un C-espace de Banach. Soit alors $\Phi^\infty(V)$ le sous-ensemble de $J^\infty(V, \Phi) \times J^\infty(V)$ formé des (X, Y) tels que l'on ait $\alpha(X) = \alpha(Y)$, $\beta(X) = \beta(Y)$,

$$aX = j^\infty_{\alpha(X)} \hat{}, \quad bX = j^\infty_{\alpha(X)}(\widehat{b(\beta(X))}), \quad aY = j^\infty_{\alpha(Y)} \text{ et } bY \in \pi^\infty(V).$$

On vérifie comme dans [9], que $\Phi^\infty(V)$ est une sous-variété de $J^\infty(V, \Phi) \boxtimes J^\infty(V, \Phi)$ et que l'application $(\tilde{a}, \tilde{b}) : \Phi^\infty(V) \to V \times V$ qui à (X, Y) fait correspondre $(\alpha(X), b(\beta(X))$ est une submersion surjective. Sur le produit fibré $\Phi^\infty(V) \boxtimes \Phi^\infty(V)$ de $\tilde{b}$ et de $\tilde{a}$, on définit alors un morphisme $\lambda : \Phi^\infty(V) \boxtimes \Phi^\infty(V) \to J^\infty(V, \Phi) \times J^\infty(V, \Phi)$ à valeurs dans $\Phi^\infty(V)$ qui à $((X, Y), (X_1, Y_1))$ fait correspondre $(\tilde{J}(X, X_1 bY), \tilde{\tau}(Y, Y_1 bY))$ où $\tilde{\tau}$ définie sur le produit fibré $J^\infty(V, \Phi) \boxtimes J^\infty(V, \Phi)$

des submersions $\overline{b} : J^{\infty}(V,\Phi) \to J^{\infty}(V,V)$ et $\overline{a} : J^{\infty}(V,\Phi) \to J(V,V)$ est le prolongement de la loi de composition du groupoïde $\tau : \Phi \boxtimes \Phi \to \Phi$ c'est-à-dire $\overline{\tau} : J^{\infty}(V,\Phi\times\Phi) \to J(V,\Phi)$ composée à droite avec la réciproque du difféomorphisme naturel

$$(\overline{p}_1,\overline{p}_2) : J^{\infty}(V,\Phi\times\Phi) \to J^{\infty}(V,\Phi) \boxtimes J^{\infty}(V,\Phi)$$

(où p_1 et p_2 sont les projections de $\Phi\times\Phi$ sur les premier et second facteurs Φ). On s'assure alors que la variété $\Phi^{\infty}(V)$ munie de la loi de composition λ partiellement définie est un groupoïde différentiable transitif de base $(V, x \to (j^{\infty}_x\, \widehat{i(x)}, j^{\infty}_x(i)))$ par rapport à laquelle $\tilde{a}$ et $\tilde{b}$ sont les applications source et but.

IV. 1. 5. PROPOSITION. *Soit Φ un groupoïde différentiable transitif, modelé sur un espace normé, de base V modelée sur un C-espace de Banach.*

i) $(Q^{\infty}(V,\Phi), q, V)$ est alors une fibration;

ii) si $\mathfrak{X}$ est une Φ-connexion d'ordre n sur V, alors $(Q^{\infty}(V,\Phi;\mathfrak{X}), q, V)$ est une fibration.

DEMONSTRATION. Compte tenu de *III. 3. 6*, il suffit d'observer que le groupoïde différentiable transitif $\Phi^{\infty}(V)$ opère sur $(Q^{\infty}(V,\Phi), q, V)$. Comme dans [9] à l'ordre fini on définit un morphisme $((A,B),X) \to (A,B) * X$ sur le produit fibré de $\tilde{a} : \Phi^{\infty}(V) \to V$ et de $q : Q^{\infty}(V,\Phi) \to V$ à valeurs dans $Q^{\infty}(V,\Phi)$ en posant $(A,B) * X = (\tilde{\tau}(sB, X, A))(bB)^{-1}$, où $s : \Phi \to \Phi$ est l'inversion du groupoïde et où $\tilde{\tau}$ est le prolongement de la loi de composition $\tau : (f,g,h) \to fgh$ des triplets composables de Φ ; τ étant définie sur la sous-variété $\Phi \boxtimes \Phi \boxtimes \Phi$ de $\Phi\times\Phi\times\Phi$ formée des (f,g,h) tels que $b(f) = a(g)$ et $b(g) = a(f)$, on a un prolongement $\overline{\tau} : J^{\infty}(V, \Phi\boxtimes\Phi\boxtimes\Phi) \to J^{\infty}(V,\Phi)$ auquel s'identifie $\tilde{\tau}$ par le difféomorphisme naturel (p_1, p_2, p_3) de $J^{\infty}(V, \Phi\boxtimes\Phi\boxtimes\Phi)$ sur la sous-variété de $J^{\infty}(V,\Phi) \times J^{\infty}(V,\Phi) \times J^{\infty}(V,\Phi)$ formé des (X,Y,Z) tels que $bX = aY$ et $bY = aZ$. On remarque que le morphisme $\Phi^{\infty}(V) \boxtimes Q^{\infty}(V,\Phi) \to Q^{\infty}(V,\Phi)$ défini ci-dessus est une loi d'action du groupoïde différentiable transitif $\Phi^{\infty}(V)$ sur $(Q^{\infty}(V,\Phi), q, V)$:

ii) la restriction de

$$(\pi^n, \pi^n) : J^{\infty}(V,\Phi) \times J^{\infty}(V,\Phi) \to J^n(V,\Phi) \times J^n(V,\Phi)$$

au groupoïde différentiable $\Phi^{\infty}(V)$ est une submersion surjective fonctorielle sur le groupoïde différentiable $\Phi^{n}(V)$, qui opère transitivement [9] sur $Q^{n}(V,\Phi)$; il en résulte que $\Phi^{\infty}(V,\Phi)$ opère transitivement sur $Q^{n}(V,\Phi)$ et que la submersion surjective $\pi^{n}: Q^{\infty}(V,\Phi) \to Q^{n}(V,\Phi)$ est covariante par rapport à $\Phi^{\infty}(V)$. Il résulte alors de *II. 3.6*, que le sous-groupoïde d'isotropie $\Phi^{\infty}(V,\mathfrak{X})$ de $\Phi^{\infty}(V)$ relativement à la section $\mathfrak{X}$ de $(Q^{n}(V,\Phi), q, V)$ est un groupoïde différentiable transitif d'opérateurs pour $(Q^{\infty}(V,\Phi;\mathfrak{X}), q, V)$, ce qui achève la démonstration.

IV. 1. 6. PROPOSITION. *Soit V une variété paracompacte de classe C^{∞} modelée sur un C-espace de Banach, séparable et C^{∞}-normal, et soit Φ un groupoïde différentiable de classe C^{∞}.*

i) Il existe des Φ-connexions d'ordre infini sur V;

ii) quelles que soient $n \in N$ et la Φ-connexion $\mathfrak{X}$ d'ordre n sur V, il existe des Φ-connexions d'ordre infini au-dessus de $\mathfrak{X}$.

Ceci résulte de ce qui précède ainsi que de *II. 3. 7*, les fibres de $(Q^{\infty}(V,\Phi), q, V)$ et $(Q^{\infty}(V,\Phi, x), q, V)$ étant difféomorphes à des espaces localement convexes.

IV.2. Différentielle absolue

IV.2.1. Soit (M, p, V) un triplet de classe C^{∞}, où M est modelée sur un espace normé et V sur un C-espace normable. On désigne par $J^{\infty}(V,M,p)$ l'ensemble des $X \in J^{\infty}(V, M)$ tels $pX = j^{\infty}_{\alpha(X)}$. On observe que $J^{\infty}(V,M,p)$ est une sous-variété de $J^{\infty}(V, M)$ et que la restriction $\tilde{p}$ de $\alpha : J^{\infty}(V, M) \to V$ à $J^{\infty}(V, M, p)$ est une submersion sur V. En effet, $J^{\infty}(V, M, p)$ est l'image réciproque du plongement $x \to j^{\infty}_{x}$ de V dans $J^{\infty}(V, V)$ par la submersion $\bar{p} : J^{\infty}(V, M) \to J^{\infty}(V, V)$. De même le sous-ensemble $J^{\infty}(V, M; p)$, de $J^{\infty}(V, M)$ formé des X tels que $pX = j^{\infty}_{\alpha(\hat{X})}$ est une sous-variété de $J^{\infty}(V, M)$ muni d'une submersion naturelle $\tilde{p}$ sur V. On appellera *élément infinitésimal transversal* (resp. *vertical) d'ordre infini à (M, p, V) en $x \in V$* tout $X \in J^{\infty}(V, M, p)$ (resp. tout $X \in J^{\infty}_{v}(V, M, p)$) tel que $\tilde{p}(X) = x$.

On appellera *champ d'éléments infinitésimaux transversal* (resp. *vertical) à (M, p, V)* toute section de $(J^{\infty}(M, V, p), \tilde{p}, V)$ (resp. de $(J^{\infty}_{v}(M, V, p), \tilde{p}, V)$).

IV.2.2. Soit Φ un groupoïde différentiable transitif opérant sur (M, p, V). Soit $Q^\infty(V, \Phi) \boxtimes J^\infty(V, M, p)$ le produit fibré de $q : Q^\infty(V, \Phi) \to V$ et de $p : J^\infty(V, M, p) \to V$. On définit comme suit une application $\nabla : (X, Y) \to \nabla_X Y$ de $Q^\infty(V, \Phi) \boxtimes J^\infty(V, M, p)$ dans $J^\infty(V, M)$ en posant $\nabla_X Y = \tilde{\nu}(X, Y)$ où $\nu : \Phi \boxtimes M \to M$ désigne l'action de Φ sur (M, p, V) et où $\tilde{\nu}$, application définie sur le produit fibré $J^\infty(V, \Phi) \boxtimes J^\infty(V, M)$ des submersions $\bar{a} : J^\infty(V, \Phi) \to J^\infty(V, V)$ et $\bar{p} : J^\infty(V, M) \to J^\infty(V, V)$, à valeurs dans $J^\infty(V, M)$, correspond à $\bar{\tau} : J^\infty(V, \Phi \boxtimes M) \to J^\infty(V, M)$ par le difféomorphisme naturel

$$(p_\Phi, p_M) : J^\infty(V, \Phi \boxtimes M) \to J^\infty(V, \Phi) \boxtimes J^\infty(V, M).$$

On observe que ∇ prend ses valeurs dans $J_v^\infty(V, M, p)$, On dira que l'élément vertical $\nabla_X Y$ est la *dérivée absolue de l'élément transversal* Y par rapport à l'élément de Φ-connexion X.

Si $\mathcal{X} : V \to Q^\infty(V, \Phi)$ est une Φ-connexion et si $\mathcal{Y} : V \to J^\infty(V, M, p)$ est un champ transversal, alors $\nabla_{\mathcal{X}} \mathcal{Y} : x \to \nabla_{\mathcal{X}(x)} \mathcal{Y}(x)$ est un champ vertical d'ordre infini à (M, p, V), qu'on appellera *la dérivée absolue de* $\mathcal{Y}$ *par rapport à* $\mathcal{X}$.

IV.2.3. On remarque que $\mathcal{X} : V \to Q^\infty(V, \Phi)$ étant une connexion et $\mathcal{Y} : V \to J^\infty(V, M, p)$ un champ transversal, les champs $\mathcal{Y}$ et $\nabla_{\mathcal{X}} \mathcal{Y}$ sont assujettis (en vertu de *i (1.1)*) à la condition $\beta(\mathcal{Y}(x)) = \beta((\nabla_{\mathcal{X}} \mathcal{Y})(x))$ quel que soit $x \in V$. Réciproquement, étant donnés respectivement un champ d'éléments transversaux $\mathcal{Y} : V \to J^\infty(V, M, p)$ et un champ d'éléments verticaux $\mathcal{Z} : V \to J_v^\infty(V, M, p)$ compatibles, c'est-à-dire tels que $\beta(\mathcal{Y}(x)) = \beta(\mathcal{Z}(x))$ pour tout $x \in V$, existe-t-il une Φ-connexion d'ordre infini $\mathcal{X}$ telle que $\nabla_{\mathcal{X}} \mathcal{Y} = \mathcal{Z}$?

Soit $Q^n(V, \Phi, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ l'ensemble des $X \in Q^\infty(V, \Phi)$ tels que $\nabla_X \mathcal{Y}(q(X)) = \mathcal{Z}(q(X))$, qu'on peut appeler l'ensemble des éléments de Φ-connexion d'ordre infini compatibles avec $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{Z}$; la question posée revient à se demander s'il existe des sections $V \to Q^\infty(V, \Phi)$ prenant leurs valeurs dans $Q^\infty(V, \Phi ; \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$.

PROPOSITION. *Soit* Φ *un groupoïde différentiable opérant transitivement sur le triplet* (M, p, V) *de classe* C^∞, *où* V *est modelée sur un* C*-espace,* *et soient* $\mathcal{Y}$ *et* $\mathcal{Z}$ *des champs respectivement transversal et vertical d'ordre infini à* (M, p, V).

i) $Q^{\infty}(V, \Phi, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ *est une sous-variété de* $Q^{\infty}(V, \Phi)$ *et* q: $Q^{\infty}(V, \Phi; \mathcal{Y}, \mathcal{Z}) \to V$ *est une submersion surjective; pour tout* $x \in V$, $q^{-1}(x)$ *est difféomorphe à un espace localement convexe.*

ii) Si V *est modelée sur un* C*-espace banachable, alors* $(Q^{\infty}(V, \Phi; \mathcal{Y}, \mathcal{Z}), q, V)$ *est une fibration.*

iii) Si V *est paracompacte et modelée sur un* C*-espace de Banach, séparable et* C^{∞}*-normal, alors* $(Q^{\infty}(V, \Phi; \mathcal{Y}, \mathcal{Z}), q, V)$ *admet des sections.*

DEMONSTRATION.

i) Soit $Q^{\infty}(V, \Phi) \boxtimes J^{\infty}(V, M, p)$ le produit fibré de $q: Q^{\infty}(V,\Phi) \to V$ et de $\tilde{p}: J^{\infty}(V, M, p) \to V$ et $J^{\infty}(V, M, p) \boxtimes J^{\infty}_{v}(V, M, p)$ celui des submersions $\beta: J^{\infty}(V, M, p) \to M$ et $\beta: J^{\infty}_{v}(V, M, p) \to M$. Si Φ opère transitivement sur M on observe comme dans [9] que l'application ∇': $(X, Y) \to (Y, \nabla_X Y)$ est une submersion de $Q^{\infty}(V, \Phi) \boxtimes J^{\infty}(V, M, p)$ sur $J^{\infty}(V, M, p) \boxtimes J^{\infty}(V, M, p)$ et que $\nabla'^{-1}(Y, Z)$ est difféomorphe à un espace localement convexe, quel que soit $(Y, Z) \in J^{\infty}(V, M, p) \boxtimes J^{\infty}_{v}(V, M, p)$. Il résulte que l'image réciproque par ∇' du plongement $(\mathcal{Y}, \mathcal{Z}): V \to J^{\infty}(V, M, p) \times J^{\infty}_{n}(V, M, p)$ est une sous-variété, notée $\nabla^{-1}(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$, de $Q(V, \Phi) \boxtimes J^{\infty}_{v}(V, M, p)$, et ∇' induit une submersion surjective q: $\nabla^{-1}(\mathcal{Y}, \mathcal{Z}) \to V$. D'autre part, $\nabla^{-1}(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ est l'image de $Q^{\infty}(V, \Phi; \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ dans le plongement $Q^{\infty}(V, \Phi) \to Q^{\infty}(V, \Phi) \boxtimes J^{\infty}(V, M, p)$ qui à X fait correspondre $(X, \mathcal{Y}_{q(X)})$, ce dont il résulte que $Q^{\infty}(V, \Phi; \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ est une sous-variété de $Q^{\infty}(V, \Phi)$, que $q: Q^{\infty}(V, \Phi; \mathcal{Y}, \mathcal{Z}) \to V$ est une submersion surjective et que $q^{-1}(x)$ est difféomorphe à un espace localement convexe pour tout $x \in V$.

ii) Soit $\Phi^{\infty}(V)$ le groupoïde différentiable défini plus haut *(1.4)*. Soient

$$(A, B) \in \Phi^{\infty}(V) \text{ et } (X, Y) \in Q^{\infty}(V, \Phi) \boxtimes J^{\infty}(V, M, p)$$

tels que $\tilde{a}(A, B) = q(X) = \tilde{p}(X)$. On pose

$$(A, B) * (X, Y) = ((A, B)_* X, B_* Y)$$

où $(A, B) * X$ est défini comme dans *1.5* et où $B * Y = (\tilde{\nu}(B,Y))(bB)^{-1}$, ν étant défini comme ci-dessus. L'application

$$((A, B), (X, Y)) \to (A, B) * (X, Y)$$

du produit fibré évident $\Phi^{\infty}(V) \boxtimes (Q^{\infty}(V, \Phi) \boxtimes J^{\infty}(V, M, p))$ dans $J^{\infty}(V, \Phi) \times J^{\infty}(V, \Phi)$ prend ses valeurs dans $Q^{\infty}(V, \Phi) \boxtimes J^{\infty}(V, M, p)$ et définit une loi d'action transitive du groupoïde $\Phi^{\infty}(V)$ sur le triplet $(Q^{\infty}(V, \Phi) \boxtimes J^{\infty}(V, M, p), q, V)$. De même $\Phi^{\infty}(V)$ opère transitivement sur $(J^{\infty}(V, M, p) \boxtimes J^{\infty}_{v}(V, M, p), p, V)$ par la loi de composition

$$((A, B), (Y, Z)) \to (A, B) * (Y, Z)$$

qui à tout $((A, B), (Y, Z))$ tel que $\tilde{a}(A, B) = \tilde{p}(Y, Z)$ fait correspondre $(B * Y), (A, B) * Z)$ où on a posé $(A, B) * Z = (\tilde{\nu}(A, Z))(bB)^{-1}$. On remarque que la submersion ∇' est $\Phi^{\infty}(V)$ covariante; il résulte de *II.3.6* que le triplet $(\nabla^{-1}(\mathcal{Y}, \mathcal{Z}), \tilde{q}, V)$, et par conséquent $(Q^{\infty}(V, \Phi; \mathcal{Y}, \mathcal{Z}), q, V)$, sont des fibrations.

iii) résulte de *i)* et *ii)* compte tenu de *II.3.7*.

IV.2.4. Soient (M, p, V) comme ci-dessus et $\mathcal{Z} : V \to J^{\infty}_{v}(V, M, p)$ un champ vertical; alors $j^{\infty}(\beta \circ \mathcal{Z}) : V \to J^{\infty}(V, M, p)$ est un champ transversal. Si Φ est un groupoïde différentiable transitif d'opérateurs sur (M, p, V), on désignera par $Q^{\infty}(V, \Phi; \mathcal{Z})$ l'ensemble des $X \in Q^{\infty}(V, \Phi)$ compatibles avec $\mathcal{Z}$, c'est-à-dire tels que $\nabla_X j^{\infty}_{q(X)}(\beta \circ \mathcal{Z}) = \mathcal{Z}(q(X))$, ou encore compatibles avec $j^{\infty}(\beta \circ \mathcal{Z})$ et $\mathcal{Z}$ au sens de *2.3*. On peut alors énoncer en conséquence de ce qui précède :

PROPOSITION.

i) Si Φ opère transitivement sur (M, p, V), alors $(Q^{\infty}(V, \Phi, \mathcal{Z}), q, V)$ est un triplet de classe C^{∞}.

ii) Si en outre V est modelée sur un C-espace de Banach, alors $(Q^{\infty}(V, \Phi, \mathcal{Z}), q, V)$ est une fibration.

iii) Si en outre V est paracompacte et modelée sur un C^{∞}-espace de Banach, séparable et C^{∞}-normal, alors $(Q^{\infty}(V, \Phi, \mathcal{Z}), q, V)$ admet des sections.

IV.3. Connexions de Cartan.

Soit (M, p, V) comme ci-dessus, V étant supposée modelée sur un C-espace de Banach. On appelle élément de soudure [3] d'ordre infini de V à (M, p, V) en $x \in V$ tout $S \in \Pi^{\infty}(V, p^{-1}(x))$ tel que $\alpha(S) = x$. Le plongement naturel $J^{\infty}(V, p^{-1}(x)) \to J^{\infty}(V, M, p)$ induit par $p^{-1}(x) \subset M$ permet, ce que l'on fera dans la suite, d'identifier un élément de soudure à un élément infinitésimal vertical à (M, p, V). On appelle alors *soudure d'ordre infini de* V à (M, p, V) toute section $\mathcal{S}$ de $(J_v^{\infty}(V, M, p), p, V)$ telle que $\mathcal{S}(x)$ soit un élément de soudure quel que soit $x \in V$. Si le groupoïde différentiable transitif Φ opère sur (M, p, V), on appelle [3] *élément de* Φ*-connexion de Cartan d'ordre infini relatif à* $\mathcal{S}$, tout $X \in Q^{\infty}(V, \Phi)$ compatible avec $\mathcal{S}$ au sens de *2.4*. On appelle Φ*-connexion de Cartan d'ordre infini relativement à* $\mathcal{S}$ toute connexion $\mathcal{X} : V \to Q^{\infty}(V, \Phi)$ telle que $\mathcal{X}(x)$ soit un élément de connexion de Cartan relativement à $\mathcal{S}$ en tout $x \in V$. Une telle connexion n'étant rien d'autre qu'une section de $(Q^{\infty}(V, \Phi), q, V)$ à valeurs dans $(Q^{\infty}(V; \Phi; \mathcal{S})$ défini dans *2.4*, on peut énoncer comme conséquence :

PROPOSITION. *Soit* (M, p, V) *un triplet de classe* C^{∞}, *soit* $\mathcal{S}$ *une soudure de classe* C^{∞} *de* V *à* (M, p, V) *et soit* Φ *un groupoïde différentiable opérant transitivement sur* (M, p, V). *On suppose que* V *est paracompacte, modelée sur un* C*-espace de Banach séparable et* C^{∞}*-normal. Alors il existe sur* V *des* Φ*-connexions de Cartan compatibles avec la soudure* $\mathcal{S}$.

En effet, $(Q(V, \Phi, \mathcal{S}), q, V)$ est alors une fibration de classe C^{∞} admettant des sections.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BASTIANI, Applications différentiables et variétés différentiables de dimension infinie, *Journal d'Analyse Mathématique* XIII, Jérusalem (1964).

[2] BOURBAKI, *Variétés différentielles,* Hermann, Paris.

[3] EHRESMANN, Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable, *Coll. de Topologie,* Bruxelles (1950).

[4] EHRESMANN, Calcul des jets, *C.R. Acad.Sc. Paris* 233, p. 598 (1951).

[5] EHRESMANN, Sur les connexions d'ordre supérieur, *Atti del V Congresso dell'Unione Mate. Ital.,* Pavia-Torino (1956).

[6] EHRESMANN, Gattungen von Lokalen Strukturen, *Jahresbericht Deutsch. Math. Vereinigung* (1957).

[7] EHRESMANN, Catégories topologiques et catégories différentiables, *Coll. Geom. Diff.* Bruxelles (1959).

[8] VER EECKE, Sur le calcul différentiel dans les espaces non normés, *C.R. Acad. Sc. Paris* 265, p. 720 (1967).

[9] VER EECKE, *Conexiones de orden superior,* Publicaciones del departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias, Zaragoza (1968).

[10] VER EECKE, *Calcul différentiel,* Centre de Documentation Universitaire, Paris (1969).

[11] VER EECKE, Connexions d'ordre infini, *C.R. Acad. Sc.* 269, p. 287 (1969).

Ces références suffiront à l'intelligence de l'article. Le lecteur désireux d'une documentation plus complète consultera avec avantage :

[12] EHRESMANN, Prolongements de Catégories Différentiables, *Cahiers Top. Géo. diff.* VI (1964).

[13] EHRESMANN, Propriétés infinitésimales des Catégories différentiables, *Cahiers Top. Géo. diff.* IX (1966).

[14] EHRESMANN, Sur les Catégories différentiables, *Atti del Congresso Internazionale di Geometria Differenziale,* Bologna, 1967.

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
33 Rue Saint-Leu
80 - AMIENS

SOMMAIRE