CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

N. STAVROULAKIS

Sur les sous-structures des variétés différentiables de dimension finie

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 11, nº 1 (1969), p. 73-99

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1969__11_1_73_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE *Vol. XI,1*
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

SUR LES SOUS-STRUCTURES DES VARIETES DIFFERENTIABLES DE DIMENSION FINIE

par N. STAVROULAKIS

1. Préliminaires.

Nous allons aborder premièrement le problème de la meilleure définition d'une sous-structure différentiable $\mathcal{C}^r$ au sens de la notion générale des (K', p)-sous-structures, introduite par M. Ehresmann. Deuxièmement nous allons considérer le problème, posé également par M. Ehresmann, de la caractérisation des sous-structures différentiables $\mathcal{C}^r$. La terminologie utilisée est celle de [1].

$\mathfrak{M}$ est la catégorie des applications, $\mathfrak{M}^i$ la sous-catégorie des injections. $\mathcal{T}$ est la catégorie des applications continues, θ le foncteur canonique de $\mathcal{T}$ vers $\mathfrak{M}$. *Un monomorphisme* de $\mathcal{T}$ est un morphisme $u \in \mathcal{T}$ tel que $\theta(u) \in \mathfrak{M}^i$. La sous-catégorie des monomorphismes de $\mathcal{T}$ est notée $\mathcal{T}^i$.

On désigne par $\mathcal{H}^r$, avec $r \geq 1$, la catégorie des applications $\mathcal{C}^r$ entre variétés différentiables de *dimension finie.* Cela signifie que la source $\alpha(f)$ et le but $\beta(f)$ de tout morphisme $f \in \mathcal{H}^r$ sont des variétés de dimension finie et d'ordre r. L'espace topologique sous-jacent à une variété ne sera supposé ni séparé ni connexe. Toutefois, ses composantes connexes seront supposées de la même dimension.

Nous utilisons le foncteur canonique $p_r = (\mathcal{T}, \underline{p}_r, \mathcal{H}^r)$ avec $0<r<\infty$, ou $r=\infty$, ou $r=\omega$ (cas analytique). Un *monomorphisme* de $\mathcal{H}^r$ est un morphisme $f \in \mathcal{H}^r$ tel que $p_r(f) \in \mathcal{T}^i$. Si $\underline{f}$ est la bijection sous-jacente à un monomorphisme $f \in \mathcal{H}^r$, la variété image de $\alpha(f)$ par $\underline{f}$ sera notée $\underline{f}(\alpha(f))$; en outre par *topologie interne de* $\underline{f}(\alpha(f)) = \beta(f)$ nous entendrons la topologie image de $\alpha(f)$ par $\underline{f}$.

Si $f \in \mathcal{H}^r$, on désigne par *dim* $\alpha(f)$ (resp. *dim* $\beta(f)$) la dimension de $\alpha(f)$ (resp. de $\beta(f)$). Pour tout $f \in \mathcal{H}^r$, A_f est l'ensemble des points de $\alpha(f)$ où le rang de f est strictement inférieur à *dim* $\alpha(f)$. Un élément

$f \in \mathcal{H}^r$ sera appelé *monomorphisme singulier* lorsque

$$p_r(f) \in \mathcal{T}^i \quad \text{et} \quad A_f \neq \emptyset.$$

Si $f \in \mathcal{H}^r$, $p_r(f) \in \mathcal{T}^i$ et $A_f = \emptyset$, nous dirons que $f(\alpha(f))$ est une *sous-variété d'ordre r de* $\beta(f)$ ou une *sous-variété* $\mathcal{C}^r$ *de* $\beta(f)$.

La classe des $(\mathcal{T}^i, p_r)$-injections [1] (resp. $(\mathfrak{M}^i, \theta p_r)$-injections) sera notée $(\mathcal{T}^i, p_r)^{\ulcorner}$ (resp. $(\mathfrak{M}^i, \theta p_r)^{\ulcorner}$).

PROPOSITION 1. *Si l'élément* $f \in \mathcal{H}^r$ *est un monomorphisme, on aura* $\dim \alpha(f) \leq \dim \beta(f)$. *En outre* A_f *sera une partie fermée rare de* $\alpha(f)$.

DEMONSTRATION. Soient $n = \dim \alpha(f)$ et $m = \dim \beta(f)$. La condition $m \geq n$ peut s'obtenir par un raisonnement applicable aussi au cas des variétés topologiques. En effet, f peut être représenté localement par une injection continue ψ de R^n tout entier dans R^m. Supposons $m < n$ et identifions, d'une façon canonique, R^m à un sous-espace de R^n. La restriction de ψ à R^m est une bijection continue de l'espace R^m sur un sous-ensemble $U \subset R^m$. D'après le théorème de Brouwer sur l'invariance des domaines d'un espace numérique, U est un ouvert de R^m. Par conséquent on peut choisir un point $x \in R^n$ tel que $x \notin R^m$ et $\psi(x) \in U$. Mais la restriction de ψ à R^m étant aussi une injection, il existe un point $x' \in R^m$ tel que $\psi(x') = \psi(x)$. Comme $x' \neq x$, cela est impossible, donc l'hypothèse $m < n$ est à rejeter. Si q est le maximum du rang de f, nous allons démontrer que $q = n$. Raisonnons par l'absurde et supposons $q < n$. Alors f peut être représenté localement par une application $\mathcal{C}^r$ de R^n dans R^m, définie par des équations

$$y_j = f_j(x_1, \dots, x_n), \quad 1 \leq j \leq m,$$

telles que $\dfrac{\partial(f_1, \dots, f_q)}{\partial(x_1, \dots, x_q)}$ soit partout non nul, tous les mineurs d'ordre $\geq q+1$ de la matrice $\left\| \dfrac{\partial f_j}{\partial x_k} \right\|$ étant partout nuls. On peut résoudre le système des équations

$$y_k = f_k(x_1, \dots, x_n), \quad 1 \leq k \leq q,$$

sur un ouvert de R^n, par rapport aux $x_1, \dots, x_q$,

$$x_k = \varphi_k(y_1, \dots, y_q, x_{q+1}, \dots, x_n), \quad 1 \leq k \leq q,$$

et remplacer ensuite dans les autres équations, ce qui donne des fonctions

$$y_l = f_l(\varphi_1, \dots, \varphi_q, x_{q+1}, \dots, x_n) = \psi_l(y_1, \dots, y_q), \quad q+1 \leq l \leq m,$$

ne dépendant pas des $x_{q+1}, \dots, x_n$, comme cela résulte d'un raisonnement connu.

Les systèmes de coordonnées $(y_1, \dots, y_q, x_{q+1}, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_q, y_{q+1}, \dots, y_m)$ étant admissibles respectivement sur un ouvert U de $\alpha(f)$ et sur un ouvert W de $\beta(f)$ tel que $f(U) \subset W$, on voit que deux points distincts de U, définis par $(y_1, \dots, y_q, x_{q+1}, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_q, x'_{q+1}, \dots, x'_n)$, auront même image, ce qui contredit l'hypothèse que f est un monomorphisme. Par conséquent $q = n$.

L'ensemble des points de $\alpha(f)$ où le rang de f est égal à n étant évidemment ouvert, son complémentaire A_f est fermé. Si l'intérieur $\mathring{A}_f$ de A_f n'est pas vide, la restriction de f à $\mathring{A}_f$ sera un monomorphisme $\mathcal{C}^r$ ayant partout un rang inférieur à n, ce qui est impossible, d'après ce qui vient d'être dit. Par conséquent $\mathring{A}_f = \emptyset$, d'où le résultat.

PROPOSITION 2. *Soit un monomorphisme $f \in \mathcal{H}^r$ tel que $A_f = \emptyset$. Si la sous-variété définie par f est propre, f est une $(\mathfrak{M}^i, \theta p_r)$-injection.*

DEMONSTRATION. Il s'agit de montrer que toute relation de la forme

$$\mathcal{F}p_r(g) = \theta p_r(f).h, \quad (g \in \mathcal{H}^r, h \in \mathfrak{M}),$$

entraîne que h est $\mathcal{C}^r$. Posant $n = dim\, \alpha(f)$ et $m = dim\, \beta(f)$, on a $m \geq n$. Tout point de $\underline{\beta(f)}$ possède un voisinage ouvert U défini par des coordonnées locales $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m)$ telles que $\beta(\underline{f}) \cap U$ soit déterminé par $x_{n+1} = \dots = x_m = 0$. Cela montre que la restriction de h à l'ouvert $g^{-1}(U)$ de $\alpha(g)$ est $\mathcal{C}^r$, d'où le résultat.

PROPOSITION 3. *Soit un monomorphisme $f \in \mathcal{H}^r$ définissant une sous-variété $\mathcal{C}^r$. Supposons qu'il existe un recouvrement $\{U_l\}_{l \in L}$ de $\beta(\underline{f})$ par des ouverts de $\beta(f)$ satisfaisant aux conditions suivantes :*

1) Quel que soit $l \in L$, toute composante connexe de $U_l \cap \beta(\underline{f})$ pour la topologie interne de $\beta(\underline{f})$ définit une sous-variété propre de $\beta(f)$.

2) Quel que soit $l \in L$, toute composante connexe de $U_l \cap \beta(\underline{f})$ pour la topologie interne de $\beta(\underline{f})$ est aussi une composante connexe de

$U_l \cap \beta(\underline{f})$ pour la topologie de $\beta(f)$.
Alors $\bar{f}$ est une $(\mathfrak{M}^i, \theta p_r)$-injection.

DEMONSTRATION. Il s'agit de montrer que toute relation de la forme

$$\theta p_r(g) = \theta p_r(f).h, \quad (g \in \mathcal{H}^r,\ h \in \mathfrak{M}),$$

entraîne que h est $\mathcal{C}^r$. Posons $\theta p_r(g) = g_1$. Pour tout $l \in L$, $g_1^{-1}(U_l)$ est un ouvert de $\alpha(g)$ muni canoniquement d'une structure de variété $\mathcal{C}^r$. Il suffit donc de montrer que la restriction de h à $g_1^{-1}(U_l)$ est $\mathcal{C}^r$. Soit $\{V_{lj}\}_{j \in J}$ la famille des composantes connexes de $U_l \cap \beta(\underline{f})$. Soit un point $z \in g_1^{-1}(V_{lj})$ et W_z la composante connexe de z dans $g_1^{-1}(U_l)$. L'application g_1 étant continue, l'image $g_1(W_z)$ sera aussi un ensemble connexe de $U_l \cap \beta(\underline{f})$ pour la topologie de $\beta(f)$, donc, d'après la deuxième condition, $g_1(W_z)$ appartiendra à une composante connexe de $U_l \cap \beta(\underline{f})$ pour la topologie interne de $\beta(\underline{f})$, et cela prouve que $g_1(W_z) \subset V_{lj}$ ou $W_z \subset g_1^{-1}(V_{lj})$. Puisque $g_1^{-1}(U_l)$ est localement connexe, W_z est un ouvert de $g_1^{-1}(U_l)$. Par conséquent $g_1^{-1}(V_{lj})$ est une réunion d'ouverts, donc un ouvert de $g_1^{-1}(U_l)$ muni canoniquement d'une structure de variété $\mathcal{C}^r$. Tout se ramène finalement à montrer que la restriction de h à l'ouvert $g_1^{-1}(V_{lj})$ est $\mathcal{C}^r$. Cela résulte de la proposition 2, puisque V_{lj} définit une sous-variété propre de $\beta(f)$.

EXEMPLE 1. Soit Q un ensemble dénombrable partout dense dans la droite numérique R^1. Soit d_q la droite de $R^2 = \{(x_1, x_2)\}$ définie par $x_1 = q$, $q \in Q$. L'espace somme $\sum_{q \in Q} d_q$ définit une sous-variété de R^2 qui n'est pas propre. Puisque Q est un sous-espace totalement discontinu de R, les composantes connexes de $\bigcup_{q \in Q} d_q$ pour la topologie naturelle de R^2 sont les droites d_q. La proposition 2 est applicable et montre que l'injection canonique dans R^2 de la sous-variété obtenue est une $(\mathfrak{M}^i, \theta p_r)$-injection quel que soit l'ordre r.

EXEMPLE 2. Ce qui vient d'être dit est aussi valable pour la sous-variété définie dans R^n par l'espace somme de la famille $\{(x_1 = q)\}_{q \in Q}$.

EXEMPLE 3. Considérons sur le tore T^2 une géodésique (pour la métrique euclidienne du carré fondamental) partout dense. Elle est définie, dans le carré fondamental, par un ensemble dénombrable de segments rectilignes parallèles. Il s'ensuit qu'il existe un recouvrement ouvert de T^2 satisfaisant aux conditions de la proposition 3. L'injection canonique dans T^2 de la géodésique considérée est une $(\mathfrak{M}^i, \theta p_r)$-injection quel que soit l'ordre r.

CONTRE-EXEMPLES. Les hypothèses de la proposition 3 ainsi que sa conclusion ne sont pas toujours valables. Le contre-exemple suivant est dû à M. Ehresmann.

Etant donnée une variété feuilletée $\mathcal{C}^r$, l'espace somme des feuilles définit une sous-variété $\mathcal{C}^r$. Puisque l'application identique de la variété sur cet espace somme n'est pas continue, il en résulte que la sous-variété ainsi obtenue n'est pas définissable au moyen de $(\mathfrak{M}^i, \theta p_r)$-injections. Il est à noter que la deuxième condition de la proposition 3 n'est pas remplie dans ce cas.

Soit encore Q un ensemble dénombrable partout dense dans $]-1, +1[$. Soit, dans R^2, la sous-variété définie par l'espace somme des segments

$$S \;:(-1 < x_1 < 1,\ x_2 = 0)$$

$$S_q : (x_1 = q,\ 0 < x_2 < 1) \text{ pour tout } q \in Q.$$

Elle est non propre et non connexe; son injection canonique dans R^2 n'est pas une $(\mathfrak{M}^i, \theta p_r)$-injection quel que soit l'ordre r.

2. Sur la définition des sous-structures $\mathcal{C}^r$.

La notion de sous-structure différentiable d'ordre r s'obtient par particularisation de la notion générale des (K', p)-sous-structures et peut être en principe définie soit par rapport au foncteur θp_r soit par rapport au foncteur p_r.

Le choix de θp_r donne lieu à deux possibilités suivant que les monomorphismes utilisés sont des $(\mathfrak{M}^i, \theta p_r)$-injections au sens global ou des $(\mathfrak{M}^i, \theta p_r)$-injections au sens local.

DEFINITION 1. Si $f \in (\mathfrak{M}^i, \theta p_r)^{\frown}$, nous dirons que $f(\alpha(f))$ est une *sous-structure différentiable de* $\beta(f)$ *du type* $\mathcal{C}^r_I$ ou simplement une *sous-structure* $\mathcal{C}^r_I$ *de* $\beta(f)$.

DEFINITION 2. Soit un monomorphisme $f \in \mathcal{H}^r$. Nous dirons que $f(\alpha(f))$ est une *sous-structure de* $\beta(f)$ *du type* $\mathcal{C}^r_{II}$, ou une *sous-structure* $\mathcal{C}^r_{II}$ *de* $\beta(f)$, s'il existe un recouvrement ouvert de $\alpha(f)$ tel que la restriction de f à tout ouvert de ce recouvrement soit une $(\mathfrak{M}^i, \theta p_r)$-injection.

Le choix du foncteur p_r conduit aussi à deux types de sous-structures différentiables d'ordre r suivant que les monomorphismes à considérer sont des $(\mathcal{J}^i, p_r)$-injections au sens local ou au sens global.

DEFINITION 3. Soit un monomorphisme $f \in \mathcal{H}^r$. Nous dirons que $f(\alpha(f))$ est une *sous-structure de* $\beta(f)$ *du type* $\mathcal{C}^r_{III}$, ou une *sous-structure* $\mathcal{C}^r_{III}$ de $\beta(f)$, s'il existe un recouvrement ouvert de $\alpha(f)$ tel que la restriction de f à tout ouvert de ce recouvrement soit une $(\mathcal{J}^i, p_r)$-injection.

DEFINITION 4. Si $f \in (\mathcal{J}^i, p_r)^{\frown}$, nous dirons que $f(\alpha(f))$ est une *sous-structure de* $\beta(f)$ *du type* $\mathcal{C}^r_{IV}$ ou une *sous-structure* $\mathcal{C}^r_{IV}$ *de* $\beta(f)$.

PROPOSITION 4. *Toute sous-variété* $\mathcal{C}^r$ *est une sous-structure du type* $\mathcal{C}^r_{II}$.

DEMONSTRATION. Il existe un recouvrement ouvert de $\alpha(f)$ tel que la restriction de f à tout ouvert de ce recouvrement définisse une sous-variété propre. Le résultat s'obtient alors moyennant la proposition 2.

Il existe de larges classes de sous-variétés $\mathcal{C}^r$ qui sont aussi des sous-structures du type $\mathcal{C}^r_I$, comme le montre la proposition 3, mais il n'en est pas toujours ainsi, comme le montre l'exemple de l'espace somme des feuilles d'une variété feuilletée $\mathcal{C}^r$. Une sous-structure $\mathcal{C}^r_{II}$ n'est donc pas nécessairement une sous-structure $\mathcal{C}^r_I$, bien que la réciproque soit toujours exacte. Par conséquent, entre les définitions 1 et 2, on doit opter pour la seconde, qui caractérise une classe plus large de sous-structures différentiables. Il reste à comparer les définitions 2, 3, et 4, ce qui s'obtient moyennant le résultat suivant :

LEMME 1. *Etant donné un monomorphisme* $f \in \mathcal{H}^r$ *et un point quelconque* $x \in \alpha(f)$, *il existe un voisinage ouvert* U *de* x *tel que toute relation de la forme*

$$\theta p_r(g) = \theta p_r(f \mid U).h, \quad (g \in \mathcal{H}^r,\ h \in \mathfrak{M}),$$

entraîne la continuité de h.

DEMONSTRATION. Posons $n = dim\, \alpha(f)$ et $m = dim\, \beta(f)$. On peut choisir l'ouvert U de façon que les conditions ci-après soient satisfaites.

1) Il existe une carte admissible pour la variété $\alpha(f)$, $\sigma_1 : U' \to R^n$, telle que $U \subset U'$ et que l'adhérence $\overline{\sigma_1(U)}$ soit un compact de R^n contenu dans $\sigma_1(U')$.

2) $\overline{f}(U')$ est contenu dans un ouvert de $\beta(f)$ qui est la source d'une carte admissible σ_2 pour la variété $\beta(f)$.

Posant $\theta p_r(\sigma_2 f \sigma_1^{-1} \mid \overline{\sigma_1(U)}) = \varphi_1$, $\theta p_r(\sigma_1 \mid U).h = h_1$, $\theta p_r(\sigma_2 g) = g_1$, et tenant compte de ce que $\sigma_1(\beta(h)) = \sigma_1(U) \subset \alpha(\varphi_1)$, on constate la validité de $g_1 = \varphi_1 . h_1$, le second membre étant conçu comme pseudoproduit. Soit h_2 l'application de $\alpha(h)$ dans $\alpha(\varphi_1)$ ayant même graphe que h_1, ce qui permet d'écrire $g_1 = \varphi_1 . h_2$ avec $\alpha(\varphi_1) = \beta(h_2)$. Puisque φ_1 est une application continue du compact $\alpha(\varphi_1)$ dans l'espace séparé R^m, elle est une application fermée. Comme d'ailleurs elle est injective, tout fermé F de $\alpha(\varphi_1)$ est l'image inverse $\varphi_1^{-1}(F_1)$ d'un fermé F_1 de $\beta(\varphi_1) = \beta(\sigma_2)$. La continuité de g_1 entraîne que $h_2^{-1}(F) = h_2^{-1}(\varphi_1^{-1}(F_1)) = (\varphi_1 h_2)^{-1}(F_1) = g_1^{-1}(F_1)$ est aussi fermé, et cela prouve la continuité de h_2. Par conséquent l'application h_1 est aussi continue et il en est de même pour $\theta p_r((\sigma_1 \mid U)^{-1}).h_1 = h$.

PROPOSITION 5. *Les définitions 2, 3 et 4 sont équivalentes.*

DEMONSTRATION. La validité de l'énoncé s'obtient en établissant successivement les résultats suivants :

1) *Toute sous-structure* $\mathcal{C}^r_{II}$ *est aussi une sous-structure* $\mathcal{C}^r_{III}$.
Démonstration évidente.

2) *Toute sous-structure* $\mathcal{C}^r_{III}$ *est aussi une sous-structure* $\mathcal{C}^r_{II}$.

En effet, si $f \in \mathcal{H}^r$ est un monomorphisme tel que $f(\alpha(f))$ soit une sous-structure $\mathcal{C}^r_{III}$ de $\beta(f)$, tout point $x \in \alpha(f)$ possède un voisinage ouvert W_x tel que $f \mid W_x$ soit une $(\mathcal{T}^i, p_r)$-injection. Choisissons un voisinage ouvert $U_x \subset W_x$ de x tel que toute relation de la forme

$$\theta p_r(g) = \theta p_r(f \mid U_x).h, \quad (g \in \mathcal{H}^r,\ h \in \mathfrak{M}),$$

entraîne la continuité de h, ce qui est possible, d'après le lemme 1. Alors $f \mid U_x$ est une $(\mathfrak{M}^i, \theta p_r)$-injection. Cela prouve qu'il existe un recouvrement ouvert de $\alpha(f)$ tel que la restriction de f à tout ouvert de ce recouvrement soit une $(\mathfrak{M}^i, \theta p_r)$-injection.

3) Toute sous-structure $\mathcal{C}^r_{III}$ est aussi une sous-structure $\mathcal{C}^r_{IV}$.

En effet, si $f \in \mathcal{H}^r$ est un monomorphisme tel que $f(\alpha(f))$ soit une sous-structure $\mathcal{C}^r_{III}$ de $\beta(f)$, il existe un recouvrement ouvert $\{U_j\}_{j \in J}$ de $\alpha(f)$ tel que $f \mid U_j$ soit une $(\mathcal{T}^i, p_r)$-injection pour tout $j \in J$. Soient $g \in \mathcal{H}^r$ et $h \in \mathcal{T}$ des morphismes donnant lieu à la relation $p_r(g) = p_r(f).h$. Quel que soit l'indice $j \in J$, $h^{-1}(U_j)$ est un ouvert de $\alpha(g) = \alpha(h)$ muni canoniquement d'une structure de variété $\mathcal{C}^r$, et l'on a

$$p_r(g \mid h^{-1}(U_j)) = p_r(f \mid U_j).(h \mid h^{-1}(U_j)).$$

Cela entraîne que $h \mid h^{-1}(U_j)$ est $\mathcal{C}^r$ et puisque $\{h^{-1}(U_j)\}_{j \in J}$ est un recouvrement ouvert de $\alpha(h)$, il s'ensuit que h est $\mathcal{C}^r$, donc $f \in (\mathcal{T}^i, p_r)^{\ulcorner}$.

4) Toute sous-structure $\mathcal{C}^r_{IV}$ est aussi une sous-structure $\mathcal{C}^r_{III}$.

Assertion triviale.

Bien que les définitions 2, 3 et 4 soient équivalentes, on doit opter finalement pour la définition 4, qui fait intervenir une *seule* $(\mathcal{T}^i, p_r)$-injection et se prête ainsi mieux aux études globales.

DEFINITION. Nous dirons désormais que $f(\alpha(f))$ est une *sous-structure différentiable d'ordre* r de $\beta(f)$ ou une *sous-structure* $\mathcal{C}^r$ *de* $\beta(f)$ si, et seulement si, $f \in (\mathcal{T}^i, p_r)^{\ulcorner}$.

PROPOSITION 6. *Toute sous-variété $\mathcal{C}^r$ est une sous-structure $\mathcal{C}^r$.*

La démonstration est une conséquence immédiate des propositions 4 et 5.

Le problème proposé par M. Ehresmann consiste à savoir s'il existe des sous-structures $\mathcal{C}^r$ autres que les sous-variétés $\mathcal{C}^r$. Un énoncé plus explicite est le suivant :

Reconnaître s'il existe une classe de $(\mathcal{T}^i, p_r)$-injections formée de monomorphismes singuliers; si elle n'est pas vide, déterminer les caractères spéciaux des sous-structures $\mathcal{C}^r$ qu'elle introduit.

L'étude de ce problème comporte trois cas différents suivant que la différentiabilité est d'ordre fini ou d'ordre infini ou analytique.

3. Caractérisation des sous-structures $\mathcal{C}^r$ lorsque l'ordre r est fini.

Soit $\psi : U \to R^1$ une fonction numérique satisfaisant aux conditions suivantes :

1) U est un intervalle ouvert de R^1 contenant l'origine et l'on a $\psi(0) = 0$.

2) ψ est $\mathcal{C}^{r-1}$ sur U (pour $r = 1$, cela signifie que ψ est continue sur U).

3) ψ est $\mathcal{C}^r$ sur le complémentaire de l'origine dans U.

4) La dérivée de $\psi(t)$ d'ordre r n'a pas de limite lorsque $t \to 0$, ce qui implique que, ε étant positif aussi petit que l'on veut, la restriction de ψ à l'intervalle $]-\varepsilon, \varepsilon[$ n'est pas $\mathcal{C}^r$.

5) La dérivée de $\psi(t)$ d'ordre r reste bornée quand $t \to 0$.

Désignons par Γ^r l'ensemble des fonctions qui jouissent des propriétés ci-dessus. Γ^r n'est pas vide. On obtient une fonction $\psi \in \Gamma^r$ en posant $\psi(t) = -t^r$ pour $t \leq 0$ et $\psi(t) = t^r$ pour $t \geq 0$, ou en posant $\psi(t) = t^{2r} \sin \frac{1}{t}$ pour $t \neq 0$ et $\psi(0) = 0$.

LEMME 2. *Soit φ une fonction numérique $\mathcal{C}^r$ définie sur un intervalle ouvert de R^1 contenant l'origine et telle que $\varphi'(0) = 0$. Pour tout $\psi \in \Gamma^r$, la fonction $\xi = \varphi\psi$ est $\mathcal{C}^r$ sur un intervalle ouvert de R^1 contenant l'origine.*

DEMONSTRATION. La fonction ξ étant évidemment définie sur un intervalle ouvert V de R^1 contenant l'origine, il suffit de montrer que la dérivée $\xi^{(r)}(t)$ de $\xi(t)$ tend vers une limite finie lorsque $t \to 0$. Pour $t \neq 0$, on peut écrire $\xi^{(r)}(t) = \varphi'(x) . \psi^{(r)}(t) + \zeta(t)$, où $x = \psi(t)$ et où $\zeta(t)$ est continue sur V. Par conséquent $\xi^{(r)}(t)$ tend bien vers la limite $\zeta(0)$ pour $t \to 0$. Lorsque $2 < r < \infty$ on peut aussi obtenir une fonction composée $\varphi\psi$ d'ordre r en prenant, au lieu de $\psi \in \Gamma^r$, une fonction d'ordre strictement inférieur à $r-1$, comme le montre le résultat suivant, qui est d'ailleurs valable pour $1 < r < \infty$.

LEMME 3. *Soit φ une fonction numérique $\mathcal{C}^r$ qui est définie sur un inter-*

valle ouvert de R^1 *contenant l'origine et qui satisfait à la condition* $\varphi'(0)=0$. *Soit* r_1 *le plus petit entier vérifiant la relation* $r_1 \geq \frac{r-1}{2}$, *ce qui permet de considérer la fonction* $\psi(t)=t^{\frac{5}{7}+r_1}$ *qui est* $\mathcal{C}^{r_1}$. *Si* $r \geq 2$, *la fonction* $\xi=\varphi\psi$ *est* $\mathcal{C}^r$ *sur un intervalle ouvert de* R^1 *contenant l'origine.*

DEMONSTRATION. Avec $x=\psi(t)$, la dérivée $\xi^{(s)}(t)$ d'ordre $s \leq r$ de $\xi=\varphi\psi$, pour $t \neq 0$, est donnée par l'expression

$$\varphi'(x).\psi^{(s)}(t)+\ldots+\varphi^{(s)}(t)(\psi'(t))^s. \tag{1}$$

Puisque $\psi^{(s)}(t)=\lambda_1 t^{\frac{5}{7}+r_1-s}$, où λ_1 est un facteur numérique, et que $\varphi'(0)=0$, le premier terme de (1) s'écrit

$$\lambda_1(\varphi'(x)-\varphi'(0))t^{\frac{5}{7}+r_1-s}=\lambda_1\,\varphi''(\lambda_2 x).x\,t^{\frac{5}{7}+r_1-s}=$$
$$\lambda_1\,\varphi''(\lambda_2 x).t^{\frac{3}{7}+2r_1+1-s},\quad 0<\lambda_2<1.$$

La condition $r_1 \geq \frac{r-1}{2}$ implique $\frac{3}{7}+2r_1+1-s \geq \frac{3}{7}$ pour $1 \leq s \leq r$.Comme $r \geq 2$, la dérivée $\varphi''(x)$ est continue, donc $\varphi''(\lambda_2 x)$ tend vers la valeur limite finie $\varphi''(0)$ quand $x \to 0$. Par conséquent le terme $\varphi'(x).\psi^{(s)}(t)$ tend vers zéro avec t pour $1 \leq s \leq r$. Tout autre terme de (1) est, à un facteur entier positif près, le produit d'une dérivée de $\varphi(x)$ d'ordre ≥ 2 par un produit de dérivées de $\psi(t)$ de la forme

$$\psi^{(s_1)}(t).\psi^{(s_2)}(t)\ldots\psi^{(s_\mu)}(t)\ \text{avec}\ \mu \geq 2\ \text{et}\ \sum_{i=1}^{\mu} s_i = s,$$

les entiers $s_1, s_2, \ldots, s_\mu$ n'étant pas nécessairement tous distincts. Il en résulte $\psi^{(s_1)}(t).\psi^{(s_2)}(t)\ldots\psi^{(s_\mu)}(t)=\lambda_3 t^{\mu(\frac{5}{7}+r_1)-s}$, où λ_3 est un facteur numérique et où $\mu(\frac{5}{7}+r_1)-s \geq 2.(\frac{5}{7}+r_1)-s \geq \frac{3}{7}$ pour $1 \leq s \leq r$.

Par conséquent $\xi^{(s)}(t)$, $(1 \leq s \leq r)$, tend vers zéro avec t, et cela permet d'achever facilement la démonstration du lemme.

PROPOSITION 7. *Les conditions* $0<r<\infty$, $f \in \mathcal{H}^r$, $p_r(f) \in \mathfrak{T}^i$ *et* $A_f \neq \emptyset$ *entraînent* $f \notin \overline{(\mathfrak{T}^i, p_r)}$.

DEMONSTRATION. Posant $\dim \alpha(f)=n$ et $\dim \beta(f)=n$, la condition $p_r(f) \in \mathfrak{T}^i$ entraîne $m \geq n$, d'après la proposition 1. Soit $q<n$ le rang de

f en un point $x^o \in A_f$. Il est possible de choisir des voisinages ouverts U_1 et U_2 de x^o et de $f(x^o)$ respectivement de façon que les conditions suivantes soient remplies.

1) Il existe des cartes admissibles, $\sigma_1 : U_1 \to R^n$ et $\sigma_2 : U_2 \to R^m$ telles que $\sigma_1(x^o) = O \in R^n$ et $\sigma_2(f(x^o)) = O \in R^m$.

2) $f(U_1) \subset U_2$.

3) La matrice du jet $j_o^1(\sigma_2 f \sigma_1^{-1})$ a la forme canonique

$$\begin{pmatrix} I_q & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

où I_q est la matrice unité de rang q, tous les éléments des autres blocs étant nuls.

Le morphisme $\sigma_2 f \sigma_1^{-1} \in \mathcal{H}^r$ s'exprime en conséquence par des équations de la forme

$$(2) \qquad \begin{aligned} y_j &= x_j + f_j(x_1, \dots, x_n), \quad && 1 \leq j \leq q \leq n-1, \\ y_k &= f_k(x_1, \dots, x_n), && q+1 \leq k \leq m, \end{aligned}$$

les fonctions $f_j(x_1, \dots, x_n)$ et $f_k(x_1, \dots, x_n)$ ainsi que toutes leurs dérivées premières s'annulant à l'origine. Soit V un intervalle ouvert de R^1 contenant l'origine et $\tau : V \to R^n$ le morphisme défini par

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 0 \quad \text{et} \quad x_n = u \in V.$$

Prenant V suffisamment petit, le morphisme

$$\sigma_2 f \sigma_1^{-1} \tau : V \to \sigma_2(U_2)$$

est défini et, compte tenu de ce que $q \leq n-1$, s'exprime par les équations

$$y_j = f_j(0, \dots, 0, u) = \varphi_j(u), \quad 1 \leq j \leq m.$$

D'après le lemme 2, ou, si $r > 1$, d'après le lemme 3, on peut choisir un morphisme $\psi_1 \in \mathcal{H}^{r_1}$ d'ordre $r_1 < r$ tel que, posant $p_{r_1}(\psi_1) = \psi$, le morphisme $(p_r(\sigma_2 f \sigma_1^{-1} \tau)).(p_{r_1}(\psi_1)) = (\varphi_1 \psi, \varphi_2 \psi, \dots, \varphi_m \psi)$ de $\mathcal{T}$ soit $\mathcal{C}^r$. Par conséquent il existe un élément $g \in \mathcal{H}^r$ tel que

$$p_r(g) = p_r(\sigma_2^{-1}).p_r(\sigma_2 f \sigma_1^{-1} \tau).p_{r_1}(\psi_1)$$

et, puisque $h_1 = \sigma_1^{-1}\tau\psi_1 \in \mathcal{H}^{r_1}$, il s'ensuit $p_r(g) = p_r(f) \cdot p_{r_1}(h_1)$. Comme $h_1 \notin \mathcal{H}^r$, il n'y a pas de morphisme $h \in \mathcal{H}^r$ satisfaisant aux conditions $g = fh$ et $p_r(h) = p_{r_1}(h_1)$, d'où $f \notin (\mathcal{T}^i, p_r)^{\ulcorner}$.

COROLLAIRE. *La classe des sous-structures différentiables d'un ordre fini déterminé est identique à la classe des sous-variétés différentiables du même ordre.*

En effet, d'après la proposition 7, si l'ordre r est fini, la condition $f \in (\mathcal{T}^i, p_r)^{\ulcorner}$ entraîne $A_f = \emptyset$.

Nous avons ainsi caractérisé complètement les sous-structures différentiables d'ordre fini.

4. Cas des sous-structures $\mathcal{C}^\omega$.

Les lemmes 2 et 3 présupposent $0 < r < \infty$. Lorsque $r = \infty$ ou $r = \omega$, le premier est trivial, tandis que le second n'a pas de sens. Par conséquent la démonstration de la proposition 7, qui entraîne la caractérisation des sous-structures différentiables d'ordre fini, n'est pas valable pour les morphismes de $\mathcal{H}^\infty$ ou de $\mathcal{H}^\omega$. Nous limitant d'abord au cas analytique, nous allons montrer la possibilité d'exclure de larges classes de monomorphismes singuliers de la classe des $(\mathcal{T}^i, p_\omega)$-injections.

Tout monomorphisme singulier $f \in \mathcal{H}^\omega$ peut être représenté, sur un voisinage d'un point de A_f, par des équations de la forme *(3.2)* où les $f_j(x_1, \dots, x_n)$ et $f_k(x_1, \dots, x_n)$ sont des séries entières sans termes constants et sans termes du premier degré. Considérons les séries obtenues en y faisant $x_1 = x_2 = \dots = x_q = 0$,

$$\varphi_j(x_{q+1}, \dots, x_n) = f_j(0, \dots, 0, x_{q+1}, \dots, x_n), \quad 1 \leq j \leq m.$$

PROPOSITION 8. *Soit k un indice tel que $q+1 \leq k \leq n$ et supposons qu'il existe un entier $\rho > 1$, nécessairement impair, divisant les exposants de tous les termes des séries $\psi_j(x_k) = \varphi_j(0, \dots, 0, x_k, 0, \dots, 0)$, $1 \leq j \leq m$; alors $f \notin (\mathcal{T}^i, p_\omega)^{\ulcorner}$.*

DEMONSTRATION. Si ρ était pair, tous les exposants des séries $\psi_j(x_k)$ seraient aussi pairs, donc $\psi_j(x_k) = \psi_j(-x_k)$, ce qui est impossible puisque f est un monomorphisme. L'entier ρ étant impair, il s'ensuit qu'on peut définir localement un morphisme non différentiable $h \in \mathcal{T}$ par les conditions

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_q = \ldots = x_{k-1} = 0, \ x_k = \sqrt[\rho]{u}, \ x_{k+1} = \ldots = x_n = 0,$$

u variant sur un intervalle ouvert de R^1 contenant l'origine, et obtenir un morphisme $p_\omega(f).h \in \mathcal{T}$ analytique; donc $f \notin (\mathcal{T}^i, p_\omega)^\ulcorner$.

PROPOSITION 9. *Soient* $v_{j1}, v_{j2}, \ldots, v_{jl}, \ldots$ *les degrés des polynômes homogènes qui résultent du groupement des termes de* $\varphi_j(x_{q+1}, \ldots, x_n)$ *suivant leur degré d'homogénéité. S'il existe un entier* $\rho > 1$*, nécessairement impair, divisant tous les entiers* v_{jl}, $(1 \leq j \leq m;\ l = 1, 2, \ldots)$, *on a* $f \notin (\mathcal{T}^i, p_\omega)^\ulcorner$.

DEMONSTRATION. Si ρ était pair, tous les entiers v_{jl} seraient aussi pairs, et les deux points distincts

$$(x_1 = x_2 = \ldots = x_q = 0,\ x_{q+1}, \ldots, x_n)$$

$$\text{et} \quad (x_1 = x_2 = \ldots = x_q = 0,\ -x_{q+1}, \ldots, -x_n)$$

auraient une même image, ce qui est impossible. Il s'ensuit qu'on peut définir localement un morphisme non différentiable $h \in \mathcal{T}$ par les conditions $x_1 = x_2 = \ldots = x_q = 0$, $x_{q+1} = \ldots = x_n = \sqrt[\rho]{u}$, u variant sur un intervalle ouvert de R^1 contenant l'origine, et obtenir ainsi un morphisme $p_\omega(f).h \in \mathcal{T}$ analytique; par conséquent $f \notin (\mathcal{T}^i, p_\omega)^\ulcorner$.

PROPOSITION 10. *Soit* $f \in \mathcal{H}^\omega$ *un monomorphisme tel que* $\dim \alpha(f) = \dim \beta(f)$. *Si* $A_f \neq \emptyset$, *on a* $f \notin (\mathcal{T}^i, p_\omega)^\ulcorner$.

DEMONSTRATION. Se rapportant à des coordonnées locales et tenant compte du théorème de Brouwer sur l'invariance des domaines d'un espace numérique par des bijections continues, on voit que $\beta(f)$ est une réunion d'ouverts de $\overline{\beta(f)}$, donc un ouvert de $\beta(f)$ muni, en conséquence, canoniquement d'une structure de variété $\mathcal{C}^\omega$. Par suite, il existe un monomorphisme $f' \in \mathcal{H}^\omega$ tel que $\alpha(f') = \alpha(f)$, $\beta(f') = \underline{f}(\alpha(f))$ et $\underline{f'} = \underline{f}$. D'après le théorème de Brouwer, $p_\omega(f')$ est un homéomorphisme de $\alpha(f)$ sur $\underline{f}(\alpha(f))$, donc, en particulier, son inverse $(p_\omega(f'))^{-1}$ est continu. Si $j \in \mathcal{H}^\omega$ est l'injection canonique de $\underline{f}(\alpha(f))$ dans $\beta(f)$, on a $p_\omega(j) =$

$= p_\omega(f).(p_\omega(f'))^{-1}$. Supposons maintenant que f soit une $(\mathcal{T}^i, p_\omega)$-injection. Comme j est aussi une $(\mathcal{T}^i, p_\omega)$-injection, le théorème 1*, III de [1] montre qu'il existe une seule $(\mathcal{T}^i, p_\omega)$-injection g telle que $p_\omega(g) = (p_\omega(f'))^{-1}$ et $j = f.g$. Le rang de f en un point $x^o \in A_f$ étant inférieur à $dim\ \alpha(f)$, il en sera de même pour $f.g = j$ au point $f(x^o)$, ce qui est impossible, puisque le rang de j est partout égal à $dim\ \alpha(g) - dim\ \alpha(f)$. Il s'ensuit $f \notin (\mathcal{T}^i, p_\omega)^{\ulcorner}$.

COROLLAIRE. *Si un monomorphisme singulier $f \in \mathcal{H}^\omega$ est tel que $\underline{\beta(f)}$ soit une partie d'un sous-ensemble de $\beta(f)$ muni d'une structure de sous-variété $\mathcal{C}^\omega$, de dimension $n = dim\ \alpha(f)$, on a $f \notin (\mathcal{T}^i, p_\omega)^{\ulcorner}$.*

DEMONSTRATION. Posant $n = dim\ \alpha(f)$ et $m = dim\ \beta(f)$, on a $m \geq n$, Soit $x^o \in A_f$. Choisissons un voisinage ouvert U de $f(x^o)$ pour la topologie interne de la sous-variété, et aussi un voisinage ouvert W de $f(x^o)$ pour la topologie de $\beta(f)$ de façon que les conditions suivantes soient satisfaites :

1) $U \subset W$.

2) Il existe une carte admissible $\sigma : W \to R^m$ telle que $\sigma(U)$ soit défini par $x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = x_m = 0$.

Identifions à R^n le sous-espace de R^m défini par $x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = x_m = 0$. Choisissant un voisinage ouvert V de x^o tel que $f(V) \subset U$, on voit que le résultat s'obtient par application de la proposition 10 au monomorphisme $\sigma f \mid V : V \to R^n$. Il est à noter que, en vertu du théorème de Brouwer, $\underline{f}(\alpha(f))$ est un ouvert de la sous-variété pour sa topologie interne, donc aussi une sous-variété $\mathcal{C}^\omega$ de $\beta(f)$.

REMARQUE 1. Le corollaire ci-dessus n'est pas toujours exact lorsque la sous-variété considérée est *d'ordre fini*. Par exemple, le monomorphisme singulier $f : R^1 \to R^2$, qui s'obtient par les équations $y_1 = t^3$ et $y_2 = t^5$, est une $(\mathcal{T}^i, p_\omega)$-injection suivant la proposition 12. Puisque $y_2 = y_1^{5/3}$ le sous-ensemble $\underline{\beta(f)}$ est muni dans ce cas d'une structure de sous-variété $\mathcal{C}^1$

REMARQUE 2. La proposition 10 et son corollaire sont évidemment valables pour la catégorie $\mathcal{H}^\infty$. Il en est de même pour toute catégorie $\mathcal{H}^r$

d'ordre fini, mais dans ce cas on a déjà un résultat plus fort, à savoir la proposition 7 .

Les résultats précédents concernent l'aspect négatif du problème de la caractérisation des sous-structures $\mathcal{C}^{\omega}$. Il est plus difficile d'aborder le problème sous son aspect positif, c'est-à-dire de reconnaître s'il existe des sous-structures $\mathcal{C}^{\omega}$ autres que les sous-variétés $\mathcal{C}^{\omega}$. Nous allons démontrer l'existence de telles sous-structures moyennant certaines propriétés des séries formelles sur le corps des réels.

LEMME 4. *Soient A et B deux séries formelles telles que $A^{\nu} = B^{\nu}$, où ν est un entier impair. Alors $A = B$.*

DEMONSTRATION. Supposons d'abord que A soit inversible, cas dans lequel B est aussi inversible. Il existe une série formelle A_1 telle que $A_1A = 1$, donc $A_1^{\nu} B^{\nu} = 1$ ou $(A_1B)^{\nu} = 1$. Cette relation n'est possible que si A_1B se réduit au terme constant a_o, ce qui implique ensuite $a_o = 1$ ou $A_1B = 1$ et $A = A_1^{-1} = B$. Dans le cas général, pour éviter des calculs fastidieux, nous ferons usage du fait que l'anneau des séries formelles sur le corps des réels (comme aussi sur tout autre corps) est factoriel [2]. Par rapport à un système représentatif P d'éléments extrémaux, on a les décompositions uniques

$$A = e_1 \prod_{p_i \in P} p_i^{m_i} \qquad \text{et} \qquad B = e_2 \prod_{p_j \in P} p_j^{m_j},$$

où les éléments e_1 et e_2 sont inversibles; par suite

$$e_1^{\nu} \prod_{p_i \in P} p_i^{\nu m_i} = e_2^{\nu} \prod_{p_j \in P} p_j^{\nu m_j}$$

Les deux membres ayant les mêmes facteurs non inversibles, pour tout i, il existe un seul j tel que $p_i = p_j$ et $\nu m_i = \nu m_j$ ou $m_i = m_j$, et inversement. En outre $e_1^{\nu} = e_2^{\nu}$, d'où, d'après le cas particulier, déjà considéré, $e_1 = e_2$. Il en résulte $A = B$.

LEMME 5. *Soient deux entiers positifs, ν_1 et ν_2, premiers entre eux et deux séries formelles à n indéterminées, $\xi_1(X_1, \dots, X_n)$ et $\xi_2(X_1, \dots, X_n)$, sans termes constants* (*) *et telles que*

(*) Si les termes constants ne sont pas nuls, l'assertion est triviale.

$$(\xi_1(X_1,\dots,X_n))^{\nu_2} = (\xi_2(X_1,\dots,X_n))^{\nu_1}.$$

Alors il existe une série formelle unique $\xi(X_1,\dots,X_n)$ *satisfaisant aux conditions* $\xi_j(X_1,\dots,X_n) = (\xi(X_1,\dots,X_n))^{\nu_j}$, $(j = 1, 2)$.

DEMONSTRATION. Pour abréger, nous écrirons ξ_j et ξ au lieu de $\xi_j(X_1,\dots,X_n)$ et $\xi(X_1,\dots,X_n)$. Par rapport à un système représentatif P d'éléments extrémaux, on a les décompositions uniques

$$\xi_1 = e_1 \prod_{p_i \in P} p_i^{m_i} \quad \text{et} \quad \xi_2 = e_2 \prod_{p_j \in P} p_j^{m_j},$$

où e_1 et e_2 sont des éléments inversibles et où les m_i, m_j sont des entiers positifs, nuls sauf un nombre fini d'entre eux. La relation $\xi_1^{\nu_2} = \xi_2^{\nu_1}$ entraîne

$$e_1^{\nu_2} \prod_{p_i \in P} p_i^{\nu_2 m_i} = e_2^{\nu_1} \prod_{p_j \in P} p_j^{\nu_1 m_j}.$$

Les deux membres représentent une même série formelle ayant une décomposition unique par rapport à P; il s'ensuit que, pour tout i, il existe un seul j tel que $p_i = p_j$ et $\nu_2 m_i = \nu_1 m_j$, et réciproquement; en outre $e_1^{\nu_2} = e_2^{\nu_1}$.

Les entiers ν_1 et ν_2 étant premiers entre eux, la condition $\nu_2 m_i = \nu_1 m_j$ entraîne l'existence d'un entier positif μ_i tel que $m_i = \nu_1 \mu_i$ et $m_j = \nu_2 \mu_i$.

Nous supposons, ce qui est loisible, que ν_1 est impair. Soit $a_o \neq 0$ le terme constant de e_1, ce qui permet d'écrire $e_1 = a_o + A = a_o(1 + a_o^{-1}A)$. Développant $a_o^{\frac{1}{\nu_1}}(1 + a_o^{-1}A)^{\frac{1}{\nu_1}}$ suivant les puissances de $a_o^{-1}A$ au moyen de la formule du binôme, puis remplaçant A par son expression, on trouve une série formelle inversible e telle que $e^{\nu_1} = e_1$. Il s'ensuit que la série formelle $\xi = e \prod_{p_i \in P} p_i^{\mu_i}$ vérifie la condition $\xi_1 = \xi^{\nu_1}$. Etant donné que $(e^{\nu_1})^{\nu_2} = e_2^{\nu_1}$ ou $(e^{\nu_2})^{\nu_1} = e_2^{\nu_1}$, on aura, d'après le lemme 4, $e^{\nu_2} = e_2$, donc ξ vérifie aussi la condition $\xi_2 = \xi^{\nu_2}$.

LEMME 6. *Soit* $\xi_1(X_1,\dots,X_n)$ *une série formelle sans terme constant et telle que la série entière correspondante* $\xi_1(u_1,\dots,u_n)$ *possède un domaine de convergence absolue* $D_1 \neq \emptyset$. *S'il existe une série formelle*

$\xi(X_1,\dots, X_n)$ telle que

$$(\xi(X_1,\dots, X_n))^{\nu_1} = \xi_1(X_1,\dots, X_n),$$

ν_1 étant un entier positif, la série entière correspondante $\xi(u_1,\dots, u_n)$ possède aussi un domaine de convergence absolue $D \neq \emptyset$, $D \subset D_1$.

DEMONSTRATION. Mettant en évidence les parties homogènes de $\xi(X_1,\dots,X_n)$ suivant l'ordre de degrés croissants, on peut écrire

$$\xi(X_1,\dots, X_n) = \sum_{q=1}^{\infty} \psi_{m_q}(X_1,\dots, X_n) \text{ avec } 0 < m_1 < m_2 < \dots < m_q < \dots,$$

$\psi_{m_q}(X_1,\dots, X_n)$ étant un polynôme homogène de degré m_q pour $q = 1,2,\dots$ Introduisant les nouvelles indéterminées $T, Y_1,\dots, Y_n$ par les relations $X_j = T(c_j + Y_j)$, $(j = 1, 2,\dots, n)$, où $c_1, c_2,\dots, c_n$ sont des nombres réels quelconques, on obtient la série formelle

$$\xi(T(c_1 + Y_1),\dots, T(c_n + Y_n)) = \sum_{q=1}^{\infty} T^{m_q} \psi_{m_q}(c_1 + Y_1,\dots, c_n + Y_n).$$

On a évidemment

$$\psi_{m_q}(c_1 + Y_1,\dots, c_n + Y_n) = \varphi_{m_q}(Y_1,\dots, Y_n) + \psi_{m_q}(Y_1,\dots, Y_n),$$

où $\varphi_{m_q}(Y_1,\dots, Y_n)$ est un polynôme non homogène de degré strictement inférieur à m_q. Il s'ensuit

$$\xi(T(c_1 + Y_1),\dots, T(c_n + Y_n)) = \sum_{q=1}^{\infty}(T^{m_q} \varphi_{m_q}(Y_1,\dots,Y_n) + \psi_{m_q}(TY_1,\dots,TY_n)).$$

Pour toute valeur de q, on constate que les monômes qui interviennent dans $\psi_{m_q}(TY_1,\dots, TY_n)$ ne se retrouvent pas ailleurs dans la dernière somme formelle. En effet, d'une part les monômes de $T^{m_q}\varphi_{m_q}(Y_1,\dots, Y_n)$ sont de degré inférieur à $2m_q$, d'autre part les monômes de

$$T^{m_p} \varphi_{m_p}(Y_1,\dots, Y_n) + \psi_{m_p}(TY_1,\dots, TY_n),\ p \neq q,$$

contiennent T à la puissance $m_p \neq m_q$. Nous pouvons donc écrire

$$\xi(T(c_1 + Y_1),\dots, T(c_n + Y_n)) = \varphi(T, Y_1,\dots, Y_n) + \xi(TY_1,\dots, TY_n),$$

les monômes intervenant dans la série $\xi(TY_1,\dots, TY_n)$ ne se retrouvant pas dans $\varphi(T, Y_1,\dots, Y_n)$.

Nous supposons désormais les réels $c_1,\dots, c_n$ choisis de façon que $\psi_{m_1}(c_1,\dots, c_n) \neq 0$. Posant $a_o = \psi_{m_1}(c_1,\dots, c_n)$ on a la relation évidente

$$\xi(T(c_1+Y_1),\dots,T(c_n+Y_n)) = T^{m_1}(a_o+\sigma(T,Y_1,\dots,Y_n)),$$

où $\sigma(T,Y_1,\dots,Y_n)$ est une série formelle sans terme constant. La condition $(\xi(X_1,\dots,X_n))^{\nu_1} = \xi_1(X_1,\dots,X_n)$ donne ensuite

$$\xi_1(T(c_1+Y_1),\dots,T(c_n+Y_n)) = T^{m_1\nu_1}(a_o^{\nu_1}+\sigma_1(T,Y_1,\dots,Y_n)),$$

où la série $\sigma_1(T,Y_1,\dots,Y_n)$ est aussi sans terme constant. Si l'on passe maintenant des indéterminées $X_1,\dots,X_n,T,Y_1,\dots,Y_n$ aux variables $x_1,\dots,x_n,t,y_1,\dots,y_n$ et si l'on considère le changement $x_j = t(c_j+y_j)$, $(j=1,2,\dots,n)$, la série $\xi_1(t(c_1+y_1),\dots,t(c_n+y_n))$ converge absolument pourvu que $|t|(|c_j|+|y_j|)$, $(j=1,2,\dots,n)$, soient suffisamment petites. Comme

$$\xi_1(t(c_1+y_1),\dots,t(c_n+y_n)) = t^{m_1\nu_1}(a_o^{\nu_1}+\sigma_1(t,y_1,\dots,y_n)),$$

la série $a_o^{\nu_1}+\sigma_1(t,y_1,\dots,y_n)$ converge absolument pour les mêmes valeurs des variables $t,y_1,\dots,y_n$. La condition $a_o \neq 0$ permet d'en conclure que la série

$$(a_o^{\nu_1}+\sigma_1(t,y_1,\dots,y_n))^{1/\nu_1} = a_o+\sigma(t,y_1,\dots,y_n),$$

donc aussi la série

$$t^{m_1}(a_o+\sigma(t,y_1,\dots,y_n)) = \xi(t(c_1+y_1),\dots,t(c_n+y_n)) =$$
$$= \varphi(t,y_1,\dots,y_n)+\xi(ty_1,\dots,ty_n),$$

converge absolument pourvu que $|t|,|y_1|,\dots,|y_n|$ soient suffisamment petites. Puisque les monômes intervenant dans $\xi(ty_1,\dots,ty_n)$ ne figurent pas dans $\varphi(t,y_1,\dots,y_n)$, la série des valeurs absolues des termes de $\varphi(t,y_1,\dots,y_n)+\xi(ty_1,\dots,ty_n)$ contient la série des valeurs absolues des termes de $\xi(ty_1,\dots,ty_n)$. Cela prouve que cette dernière converge pour les mêmes valeurs des $|t|,|y_1|,\dots,|y_n|$. Posant $ty_j = u_j$, $(j=1,2,\dots,n)$, on voit que la série $\xi(u_1,\dots,u_n)$ possède un domaine de convergence absolue.

REMARQUE. Lorsque $n=1$ la validité du lemme 6 est évidente.

PROPOSITION 11. *Soient deux entiers positifs, ν_1 et ν_2, premiers entre* *eux et deux séries formelles à n indéterminées,* $\xi_1(X_1,\dots,X_n)$ *et* $\xi_2(X_1,\dots,X_n)$, *satisfaisant à la relation*

$$(\xi_1(X_1,\dots,X_n))^{\nu_2} = (\xi_2(X_1,\dots,X_2))^{\nu_1}.$$

Si l'une des deux séries entières correspondantes, $\xi_1(u_1,\dots,u_n)$ *et* $\xi_2(u_1,\dots,u_n)$, *possède un domaine de convergence absolue non vide, il en sera de même de l'autre et il existera une série entière unique* $\xi(u_1,\dots,u_n)$ *possédant aussi un domaine de convergence absolue* $D \neq \emptyset$ *et donnant lieu aux relations*

$$\xi_j(u_1,\dots,u_n) = (\xi(u_1,\dots,u_n))^{\nu_j}, \; (j = 1, 2),$$

sur D.

DEMONSTRATION. D'après le lemme 5, il existe une série formelle unique $\xi(X_1,\dots,X_n)$ telle que $\xi_j(X_1,\dots,X_n) = (\xi(X_1,\dots,X_n))^{\nu_j}, (j = 1, 2)$. Si la série $\xi_1(u_1,\dots,u_n)$, par exemple, converge absolument sur un voisinage ouvert de l'origine, la relation $\xi_1(X_1,\dots,X_n) = (\xi(X_1,\dots,X_n))^{\nu_1}$ entraîne, suivant le lemme 6, que $\xi(u_1,\dots,u_n)$ possède un domaine de convergence absolue $D \neq \emptyset$. La série $(\xi(u_1,\dots,u_n))^{\nu_2} = \xi_2(u_1,\dots,u_n)$ converge aussi absolument sur D.

COROLLAIRE. *Soient deux entiers positifs,* ν_1 *et* ν_2, *premiers entre eux et deux séries entières à n variables,* $\xi_1(u_1,\dots,u_n)$ *et* $\xi_2(u_1,\dots,u_n)$. *Soit* D_j, *supposé non vide, le domaine de convergence absolue de* $\xi_j(u_1,\dots,u_n)$, $(j = 1, 2)$. *Si la relation* $(\xi_1(u_1,\dots,u_n))^{\nu_2} = (\xi_2(u_1,\dots,u_n))^{\nu_1}$ *est valable sur un voisinage de l'origine, il existera une série entière* $\xi(u_1,\dots,u_n)$ *possédant un domaine de convergence absolue* $D \neq \emptyset$, $D \subset D_1 \cap D_2$, *et donnant lieu aux relations*

$$\xi_j(u_1,\dots,u_n) = (\xi(u_1,\dots,u_n))^{\nu_j}, \; (j = 1, 2),$$

sur D.

Cet énoncé, qui est non trivial lorsque $\nu_1 \geq 2$, $\nu_2 \geq 2$ et que les séries sont sans termes constants, est une simple conséquence de la proposition 11. Il est aussi susceptible d'une démonstration directe. En effet, l'anneau des germes à l'origine de fonctions analytiques réelles de n

variables étant factoriel (*), nous pouvons considérer les décompositions des $\xi_j(u_1,\dots,u_n)$ $(j=1,2)$ en séries irréductibles absolument convergentes et raisonner ensuite comme dans le lemme 5.

PROPOSITION 12. *Considérons un morphisme* $f: R^1 \to R^2$ *de* $\mathcal{H}^\omega$ *défini par les équations* $y_1 = t^{\nu_1}$ *et* $y_2 = t^{\nu_2}$, $(\nu_1 \geq 2,\ \nu_2 \geq 2)$. *Pour qu'il soit une* $(\mathcal{T}^i, p_\omega)$*-injection, il faut et il suffit que les entiers* ν_1 *et* ν_2 *soient premiers entre eux.*

DEMONSTRATION. D'après la proposition 8, la condition est nécessaire. Supposons-la satisfaite. Alors f est une $(\mathcal{T}^i, p_\omega)$-injection si, et seulement si, toute relation de la forme

$$p_\omega(g) = p_\omega(f).h,\quad (g \in \mathcal{H}^\omega,\ h \in \mathcal{T}),$$

entraîne que h est analytique. Cette relation se traduit localement par la donnée d'une fonction numérique continue $h(u_1,\dots,u_n)$ et de deux séries entières, $\xi_1(u_1,\dots,u_n)$ et $\xi_2(u_1,\dots,u_n)$, satisfaisant aux conditions $\xi_j(u_1,\dots,u_n) = (h(u_1,\dots,u_n))^{\nu_j}$, $(j=1,2)$, ce qui donne

$$(\xi_1(u_1,\dots,u_n))^{\nu_2} = (\xi_2(u_1,\dots,u_n))^{\nu_1}.$$

Il suffit évidemment de considérer le cas non trivial où les séries sont sans termes constants. Conformément au corollaire de la proposition 11, il existe une série entière $\xi(u_1,\dots,u_n)$ possédant un domaine de convergence absolue $D \neq \emptyset$ et donnant lieu aux relations

$$\xi_j(u_1,\dots,u_n) = (\xi(u_1,\dots,u_n))^{\nu_j},\quad (j=1,2),$$

sur D. Par conséquent $h(u_1,\dots,u_n) = \xi(u_1,\dots,u_n)$ est analytique sur ce domaine, d'où $f \in (\mathcal{T}^i, p_\omega)^{\frown}$.

Les résultats suivants généralisent la proposition 12.

PROPOSITION 13. *Soit* $f: R^1 \to R^q$ *un morphisme analytique défini par les équations*

$$y_j = t^{\mu_j},\quad (j = 1,2,\dots,m;\ q \geq m \geq 2),$$
$$y_k = 0,\quad (k = m+1,\dots,q).$$

(*) Cette propriété nous a été signalée par M. Michel Hervé.

Pour qu'il soit une $(\mathcal{T}^i, p_\omega)$*-injection, il faut et il suffit que les entiers* $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ *soient premiers entre eux.*

DEMONSTRATION. La condition étant nécessaire, nous allons montrer qu'elle est aussi suffisante, c'est-à-dire que, si $g_j(u_1, \dots, u_n)$ sont des fonctions analytiques s'annulant à l'origine et satisfaisant aux conditions

$$g_j(u_1, \dots, u_n) = (h(u_1, \dots, u_n))^{\mu_j}, \quad (j = 1, 2, \dots, m),$$

alors $h(u_1, \dots, u_n)$ est aussi analytique.

L'un au moins des exposants $\mu_1, \dots, \mu_m$, soit μ_1, est impaire. Soit $\mu_{12} = (\mu_1, \mu_2)$ le p.g.c.d. des μ_1, μ_2, et posons

$$\frac{\mu_1}{\mu_{12}} = \nu_1, \quad \frac{\mu_2}{\mu_{12}} = \nu_2,$$

ce qui entraîne $(\nu_1, \nu_2) = 1$. Comme μ_{12} est impair, de la relation évidente $(g_1(u_1, \dots, u_n))^{\mu_2} = (g_2(u_1, \dots, u_n))^{\mu_1}$ il résulte

$$(g_1(u_1, \dots, u_n))^{\nu_2} = (g_2(u_1, \dots, u_n))^{\nu_1}.$$

D'après le corollaire de la proposition 11, il existe une fonction analytique $\varphi_2(u_1, \dots, u_n)$ telle que

$$g_1(u_1, \dots, u_n) = (\varphi_2(u_1, \dots, u_n))^{\nu_1} \text{ et } g_2(u_1, \dots, u_n) = (\varphi_2(u_1, \dots, u_n))^{\nu_2}.$$

Cela permet de remplacer les conditions

$$g_1(u_1, \dots, u_n) = (h(u_1, \dots, u_n))^{\mu_1} \text{ et } g_2(u_1, \dots, u_n) = (h(u_1, \dots, u_n))^{\mu_2}$$

par la seule relation $\varphi_2(u_1, \dots, u_n) = (h(u_1, \dots, u_n))^{\mu_{12}}$. Prenant le p.g.c.d. $\mu_{13} = (\mu_{12}, \mu_3)$, nous pouvons remplacer ensuite les conditions

$$\varphi_2(u_1, \dots, u_n) = (h(u_1, \dots, u_n))^{\mu_{12}} \text{ et } g_3(u_1, \dots, u_n) = (h(u_1, \dots, u_n))^{\mu_3}$$

par une seule relation $\varphi_3(u_1, \dots, u_n) = (h(u_1, \dots, u_n))^{\mu_{13}}$, la fonction $\varphi_3(u_1, \dots, u_n)$ étant analytique. Continuant de la sorte on arrive finalement à un indice j tel que $\mu_{1j} = 1$, donc aussi à une relation $\varphi_j(u_1, \dots, u_n) = (h(u_1, \dots, u_n))^{\mu_{1j}} = h(u_1, \dots, u_n)$ prouvant que $h(u_1, \dots, u_2)$ est analytique.

PROPOSITION 14. *Pour chaque* $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, $m \geq 2$, *soit* $\varphi_j(u)$ *une série entière d'une variable sans terme constant et ayant le terme de pre-*

mier degré non nul. Soit $f \in \mathcal{H}^\omega$ *un monomorphisme tel que dim* $\alpha(f) = 1$ *et que* A_f *se réduise à un point* x^o. *Si* f *est représenté, sur un voisinage de* x^o, *par les équations* $y_j = \varphi_j(t^{\mu_j})$, $(\mu_j \geq 2,\ 1 \leq j \leq m)$, *alors on a* $f \in (\mathcal{T}^i, p_\omega)^\Gamma$ *si, et seulement si, les entiers* $\mu_1, \dots, \mu_m$ *sont premiers entre eux.*

DEMONSTRATION. Soient $g_j(u_1, \dots, u_n)$ des fonctions analytiques s'annulant à l'origine et vérifiant les conditions $g_j(u_1, \dots, u_n) = \varphi_j(t^{\mu_j})$. L'équation $g_j(u_1, \dots, u_n) = \varphi_j(t^{\mu_j})$ se résout par rapport à t^{μ_j}, ce qui donne $t^{\mu_j} = \psi_j(u_1, \dots, u_n)$, $(j = 1, 2, \dots, m)$, la fonction $\psi_j(u_1, \dots, u_n)$ étant analytique. On se ramène donc à la proposition précédente.

La proposition 14 détermine une classe de sous-structures $\mathcal{C}^\omega$ qui ne sont pas des sous-variétés $\mathcal{C}^\omega$. Nous avons ainsi obtenu le résultat ci-après.

PROPOSITION 15. *La classe des sous-structures analytiques est plus large que la classe des sous-variétés analytiques.*

Bien que nous ayons déjà prouvé l'existence de monomorphismes singuliers de $\mathcal{H}^\omega$ qui ne sont pas des $(\mathcal{T}^i, p_\omega)$-injections, nous n'avons pas obtenu leur caractérisation complète. Cela entraîne que le problème de la caractérisation complète des sous-structures $\mathcal{C}^\omega$ est aussi en suspens.

5. Cas des sous-structures $\mathcal{C}^\infty$.

Ce cas aussi est difficile à étudier d'une façon complète. On ignore s'il existe une $(\mathcal{T}^i, p_\infty)$-injection f telle que $A_f \neq \emptyset$. Comme dans le cas analytique, on peut pourtant obtenir des résultats concernant l'aspect négatif du problème, c'est-à-dire celui qui consiste à exclure certaines classes de monomorphismes singuliers de la classe des $(\mathcal{T}^i, p_\infty)$-injections.

LEMME 7. *Soit* $\varphi(x)$ *une fonction numérique* $\mathcal{C}^\infty$ *définie sur un intervalle ouvert* U *de* R^1 *contenant l'origine. Supposons que* $\varphi(x)$ *ainsi que ses dérivées de tout ordre soient nulles pour* $x = 0$. *Soit* $\psi : R^1 \to R^1$ *l'homéomorphisme défini par* $\psi(t) = t^{\frac{1}{2p+1}}$, p *entier* ≥ 1. *Alors* $\xi = \varphi\psi$ *est* $\mathcal{C}^\infty$ *sur l'intervalle* $\psi^{-1}(U)$ *qui contient l'origine. En outre* $\xi(t)$ *ainsi* *que ses dérivées de tout ordre sont nulles pour* $t = 0$.

DEMONSTRATION. La dérivée d'ordre s de $\xi(t)$ est donnée par *(3.1)*, dont le terme général est un produit d'un facteur numérique par une expression de la forme

$$\varphi^{(r)}(x).\psi^{(s_1)}(t).\psi^{(s_2)}(t)\ldots\psi^{(s_\mu)}(t)$$

$$\text{avec } x = \psi(t),\ 1 \leq r \leq s \text{ et } s_1 + s_2 + \ldots + s_\mu = s.$$

L'entier n étant aussi grand que l'on veut, $\varphi(x)$ se met sous la forme $x^n h(x)$ où la fonction $h(x)$ est $\mathcal{C}^\infty$, nulle ainsi que ses dérivées de tout ordre pour $x = 0$. Le terme général de *(3.1)* devient donc un produit de

$$t^{\frac{n-r}{2p+1}}.t^{\frac{1}{2p+1}-s_1}.t^{\frac{1}{2p+1}-s_2}\ldots t^{\frac{1}{2p+1}-s_\mu} = t^{\frac{n-r+\mu-(2p+1)s}{2p+1}}$$

par une expression qui tend vers zéro pour $t \to 0$. Comme on peut prendre $n > (2p+2)s$, il s'ensuit que $\xi^{(s)}(t)$ tend vers zéro pour $t \to 0$, quel que soit l'ordre s. Cela prouve d'abord que $\xi(t)$ est $\mathcal{C}^1$. De même $\xi'(t)$ est $\mathcal{C}^1$, donc $\xi(t)$ est $\mathcal{C}^2$ etc.. Pour tout ordre s, la fonction est $\mathcal{C}^s$, donc elle est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\psi^{-1}(U)$.

Tout monomorphisme singulier $f \in \mathcal{H}^\infty$ peut être représenté, sur un voisinage d'un point de A_f, par des équations de la forme *(3.2)* où les fonctions $f_j(x_1,\ldots,x_n)$ et $f_k(x_1,\ldots,x_n)$ sont $\mathcal{C}^\infty$ et aussi nulles ainsi que toutes leurs dérivées premières à l'origine.

PROPOSITION 16. *S'il existe un indice* k *tel que* $q+1 \leq k \leq n$ *et que les dérivées de tout ordre des fonctions* $f_j(0,\ldots,0,x_k,0,\ldots,0)$, $(j = 1,2,\ldots,m)$, *soient nulles à l'origine, on a* $f \notin (\mathcal{T}^i, p_\infty)$.

DEMONSTRATION. Si V est un intervalle ouvert de R^1 contenant l'origine, on considère l'application $\tau : V \to R$ définie par $x_j = 0$ pour $j \neq k$ et $x_k = \psi(t) = t^{\frac{1}{2p+1}}$, $(t \in V,\ p$ entier $\geq 1)$. Cette application n'est pas différentiable, mais la composée $\{f_j \tau\}_{j \in \{1,2,\ldots,m\}}$ qui est défini pour V suffisamment petit, est $\mathcal{C}^\infty$, d'après le lemme 7.

EXEMPLE. Soit $f :]-1,+1[\to R^2$ un morphisme de $\mathcal{H}^\infty$ tel que, posant $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$, on ait

$$(f_1(t), f_2(t)) = (\exp(-t^{-2}), \exp(-t^{-3})) \quad \text{pour } t > 0,$$
$$(f_1(0), f_2(0)) = (0, 0),$$
$$(f_1(t), f_2(t)) = (\exp(-t^{-2}), \exp(t^{-5})) \quad \text{pour } t < 0.$$

On démontre que $f(t_1) = f(t_2)$ si, et seulement si, $t_1 = t_2$. Par conséquent f est un monomorphisme de $\mathcal{H}^\infty$ et puisque les dérivées de tout ordre des $f_1(t)$ et $f_2(t)$ sont nulles pour $t = 0$, il en résulte $f \notin (\mathcal{T}^i, p_\infty)^\Gamma$.

Dans certains cas où la proposition 16 n'est pas applicable,on peut tout de même obtenir une conclusion précise moyennant des raisonnements analogues. U étant un intervalle ouvert de R^1 contenant l'origine, considérons,par exemple, un monomorphisme $f: U \to R^2$, défini par les équations

$$y_1 = f_1(u), \quad y_2 = f_2(u) = u^{2p+1}, \ p \text{ entier} \geq 1,$$

où $f_1(u)$ est $\mathcal{C}^\infty$ et aussi nulle ainsi que toutes ses dérivées pour $u = 0$. Composant (f_1, f_2) avec l'application $t \to u = t^{\frac{1}{2p+1}}$ qui n'est pas différentiable, on obtient encore une application $\mathcal{C}^\infty$. Par conséquent $f \notin (\mathcal{T}^i, p_\infty)^\Gamma$.

Dans le cas particulier où le monomorphisme singulier $f \in \mathcal{H}^\infty$ est susceptible d'être représenté, sur un voisinage d'un point de A_f, par des équations de la forme *(3.2)* analytiques, les propositions 8 et 9 se traduisent d'une façon évidente : S'il existe un entier $\rho > 1$, nécessairement impair, divisant les exposants de tous les termes des séries $\psi_j(x_k)$, $(j = 1, 2, .., m)$, on a $f \notin (\mathcal{T}^i, p_\infty)^\Gamma$. De même, s'il existe un entier $\rho > 1$, nécessairement impair, divisant tous les entiers ν_{jl}, $(j = 1, 2, ..:, m; \ l = 1, 2, ...)$, considérés dans la proposition 9, on a $f \notin (\mathcal{T}^i, p_\infty)^\Gamma$. Le résultat suivant est le pendant de la proposition 10.

PROPOSITION 17. *Soit* $f \in \mathcal{H}^\infty$ *un monomorphisme tel que* $\dim \alpha(f) = \dim \beta(f)$. *Si* $A_f \neq \emptyset$, *on a* $f \notin (\mathcal{T}^i, p_\infty)^\Gamma$.

COROLLAIRE. *Si un monomorphisme singulier* $f \in \mathcal{H}^\infty$ *est tel que* $\beta(\underline{f})$ *soit une partie d'un sous-ensemble de* $\beta(f)$ *muni d'une structure de sous-variété* $\mathcal{C}^\infty$ *de dimension* $\dim \alpha(f)$, *on a* $f \notin (\mathcal{T}^i, p_\infty)^\Gamma$.

Les considérations précédentes au sujet des $(\mathcal{T}^i, p_\infty)$-injections se limitent à l'aspect négatif du problème. La question de savoir s'il existe des $(\mathcal{T}^i, p_\infty)$-injections définies par des monomorphismes singuliers, est en suspens. Nous allons en expliciter les difficultés sur un exemple simple.

EXEMPLE. Considérons le monomorphisme $f : R^1 \to R^2$, défini par les équations $y_1 = t^{\nu_1}$ et $y_2 = t^{\nu_2}$, $(\nu_1 \geq 2,\ \nu_2 \geq 2)$. Pour qu'il soit une $(\mathcal{T}^i, p_\infty)$-injection, il faut évidemment que les entiers ν_1 et ν_2 soient premiers entre eux. Supposons cette condition remplie. Alors f sera une $(\mathcal{T}^i, p_\infty)$-injection si, et seulement si, les fonctions numériques $g_1(u_1, \dots, u_n)$ et $g_2(u_1, \dots, u_n)$ étant $\mathcal{C}^\infty$, une fonction $h(u_1, \dots, u_n)$, nécessairement continue, satisfaisant aux conditions $g_j(u_1, \dots, u_n) = (h(u_1, \dots, u_n))^{\nu_j}$, $(j = 1, 2)$, est $\mathcal{C}^\infty$. Supposons, ce qui est loisible, que ν_1 est impair, et considérons le cas non trivial où les fonctions $g_j(u_1, \dots, u_n)$, $(j = 1, 2)$, s'annulent à l'origine. *Il s'ensuit que f sera une $(\mathcal{T}^i, p_\infty)$-injection si, et seulement si, la donnée d'une fonction numérique indéfiniment dérivable $g_1(u_1, \dots, u_n)$ s'annulant à l'origine et telle que $(g_1(u_1, \dots, u_n))^{\nu_2/\nu_1}$ soit aussi $\mathcal{C}^\infty$, entraîne que $(g_1(u_1, \dots, u_2))^{1/\nu_1}$ est $\mathcal{C}^\infty$.*

Soit ξ_j le développement formel taylorien de $g_j(u_1, \dots, u_n)$, $(j=1, 2)$, en un point quelconque. Comme la condition $(g_1(u_1, \dots, u_n))^{\nu_2} = (g_2(u_1, \dots, u_n))^{\nu_1}$ entraîne $\xi_1^{\nu_2} = \xi_2^{\nu_1}$, il existe, d'après le lemme 5, une série formelle ξ telle que $\xi_1 = \xi^{\nu_1}$ et $\xi_2 = \xi^{\nu_2}$. Cela permet d'associer canoniquement à $(g_1(u_1, \dots, u_n))^{1/\nu_1}$ un champ de séries formelles, mais nous ne pouvons pas affirmer que ce champ représente une fonction $\mathcal{C}^\infty$. La difficulté subsiste même dans le cas d'une fonction $g_1(u)$ d'une seule variable. En effet, *si $g_1(u)$ est $\mathcal{C}^\infty$ et si $(g_1(u))^{\nu_2/\nu_1}$ est aussi $\mathcal{C}^\infty$, on ne peut pas en conclure que $(g_1(u))^{1/\nu_1}$ admet des dérivées de tout ordre pour $u = 0$, quand $g_1(0)$ et les dérivées de $g_1(u)$ sont nulles pour $u = 0$ sans que $g_1(u)$ soit identiquement nulle sur n'importe quel voisinage de l'origine.* Pour bien rendre explicite cette difficulté, supposons $\nu_2 < \nu_1$ et considérons la partie W de la source de $g_1(u)$ définie par la condition $u \in W \Longleftrightarrow g_1(u) \neq 0$. La relation $(g_2(u))^{\nu_1} = (g_1(u))^{\nu_2}$ permet de montrer, moyennant des dérivations successives, que toutes les dérivées de $g_2(u) = (g_1(u))^{\nu_2/\nu_1}$ sont aussi nulles pour

$u = 0$. Par conséquent

$$g'_2(u) = \frac{\nu_2}{\nu_1} (g_1(u))^{\frac{\nu_2}{\nu_1}-1} g'_1(u)$$

tend vers zéro lorsque u tend vers zéro par des valeurs appartenant à W. L'entier positif p étant aussi grand que l'on veut, on peut écrire $g_1(u) = u^p \chi(u)$ où la fonction $\chi(u)$ est $\mathcal{C}^\infty$, nulle ainsi que ses dérivées de tout ordre pour $u = 0$. Par conséquent $\frac{(g_1(u))^{1/\nu_1}}{u}$ tend vers zéro avec u. En d'autres termes la dérivée première de $(g_1(u))^{1/\nu_1}$ existe et est nulle à l'origine. Comme cette dérivée doit être partout continue, il faut que l'expression

$$((g_1(u))^{1/\nu_1})' = \frac{1}{\nu_1} (g_1(u))^{\frac{1}{\nu_1}-1} g'_1(u)$$

tende vers zéro lorsque u tend vers zéro par des valeurs appartenant à W. Cela ne résulte cependant pas de la relation établie tout à l'heure, à savoir

$$\lim_{\substack{u \to o \\ u \in W}} ((g_1(u))^{\frac{\nu_2}{\nu_1}-1} \cdot g'_1(u)) = 0.$$

REMARQUE. Si les dérivées de $g_1(u)$ ne sont pas toutes nulles pour $u = 0$, il existe un entier positif μ tel que $g_1(u) = u^\mu(a_o + g(u))$ avec $a_o \neq 0$ et $g(0) = 0$, $g(u)$ étant C^∞. Comme $(g_1(u))^{\nu_2/\nu_1}$ est par hypothèse C^∞, il faut que $\mu = \nu\nu_1$, ν étant encore un entier positif. Par conséquent $(g_1(u))^{1/\nu_1} = u^\nu (a_o + g(u))^{1/\nu_1}$ est aussi C^∞ sur un voisinage de l'origine.

Bibliographie.

[1] C. EHRESMANN, *Catégories et structures,* Dunod, Paris, 1965.

[2] N. BOURBAKI, *Algèbre commutative,* Chapitre 7, Hermann, Paris 1965.

[3] M. HERVE, *Fonctions de plusieurs variables complexes, Ensembles analytiques,* Secrétariat mathématique, 11 rue Pierre-Curie, Paris, 1966.

Remerciements.

Je suis heureux de pouvoir remercier M. Charles Ehresmann qui m'a proposé le sujet du présent article et qui m'a toujours prodigué ses précieux conseils. Il m'a accordé de nombreux et fructueux entretiens et a porté son attention bienveillante sur l'élaboration de ce mémoire. Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

Je tiens aussi à remercier M. Michel Hervé qui a bien voulu m'indiquer des simplifications dans la preuve d'une proposition de cette étude.

N. STAVROULAKIS
105, rue de la Convention,
Paris XV ème.