CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

HEIKKI HAAHTI

Sur la théorie locale des connexions linéaires sans différentiabilité

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 11, nº 1 (1969), p. 57-71

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1969__11_1_57_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

Vol. XI, 1

SUR LA THEORIE LOCALE DES CONNEXIONS LINEAIRES SANS DIFFERENTIABILITE

par Heikki HAAHTI

D'après un théorème classique bien connu l'annulation de la torsion et du tenseur de courbure d'une connexion linéaire de classe C^2 est nécessaire et suffisante pour que la connexion soit localement plate. Ce théorème résulte de la théorie des équations aux dérivées partielles. Dans la suite on donne une preuve directe et élémentaire d'une généralisation de ce théorème.

CHAPITRE I.

1. Soit $\mathfrak{M}$ une variété différentiable de classe C^p, $(p \geq 1)$, modelée sur un espace de Banach E et de dimension ≥ 2. En chaque point $p \in \mathfrak{M}$ l'espace tangent $\mathfrak{M}_p$ est un espace vectoriel topologique banachique. Toute carte $(\varphi, \mathfrak{U})$ d'un voisinage $\mathfrak{U}$ de p détermine une application linéaire et bijective $\varphi_p : \mathfrak{M}_p \to E$ qui à un vecteur quelconque fait correspondre sa «représentante contravariante» dans l'espace E de telle façon que, pour deux cartes $(\varphi, \mathfrak{U})$ et $(\bar{\varphi}, \mathfrak{U})$, la dérivée de Fréchet $\bar{x}'(x)$ de la transformation $x \to \bar{x}(x) = (\bar{\varphi} \circ \varphi^{-1})(x)$ en $x = \varphi(p)$ s'exprime par la formule [1]

$$\bar{x}'(x) = \bar{\varphi}_p \, \varphi_p^{-1} . \tag{1}$$

La topologie de $\mathfrak{M}_p$ est déterminée par la norme rendant l'application φ_p isométrique.

2. A chaque chemin [2] l continûment différentiable par morceaux

---

[1] Nous allons supprimer le symbole $\circ$ pour les fonctions composées dans le cas des fonctions linéaires.

[2] Par un chemin continûment différentiable nous entendrons une classe d'équivalence de chemins paramétrisés continûment différentiables; dans la suite on appelle chemin un chemin continûment différentiable par morceaux.

sur la variété $\mathfrak{M}$ supposons associée une transformation linéaire et bornée[3] $T_l \in \mathfrak{L}(\mathfrak{M}_p, \mathfrak{M}_q)$ qui applique l'espace tangent $\mathfrak{M}_p$ au point de départ p du chemin dans l'espace $\mathfrak{M}_q$ en l'extrémité de l.

Appelons selon Graeub, Nevanlinna et Knebelmann ([3], [6]) la fonction $l \to T_l$ une *connexion linéaire* sur la variété $\mathfrak{M}$, et T_l le transport parallèle le long de l, si les deux axiomes suivants sont valables :

$$(I) \quad T_{ab} = T_a T_b , \qquad\qquad (II) \quad T_{l^{-1}} = T_l^{-1} .$$

Ici on note ab le produit des chemins b et a et l^{-1} le chemin inverse de l.

3. Un difféomorphisme $\bar{\varphi}$ de classe C^1 d'un ouvert $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{M}$ dans l'espace de Banach E détermine sur $\bar{\mathfrak{V}} = \bar{\varphi}(\mathfrak{U}) \subset E$ une fonction $\bar{\tau}$ des chemins, appelée la *représentante* de la connexion T dans $\bar{\mathfrak{V}}$, qui satisfait les axiomes *(I)* et *(II)*. Si, en effet, $\bar{l}$ est un chemin dans $\bar{\mathfrak{V}}$ de $\bar{y} = \bar{\varphi}(p)$ à $\bar{z} = \bar{\varphi}(q)$, il lui correspond sur $\mathfrak{M}$ un chemin l de p à q, dont $\bar{l}$ est le représentant dans $\bar{\mathfrak{V}}$ et on pose, en désignant par $\bar{\varphi}_p \in \mathfrak{L}(\mathfrak{M}_p, E)$ et $\bar{\varphi}_q \in \mathfrak{L}(\mathfrak{M}_q, E)$ les applications tangentielles associées à $\bar{\varphi}$,

$$\bar{\tau}_{\bar{l}} = \bar{\varphi}_q T_l \bar{\varphi}_p^{-1} .$$

Il est alors immédiat que la fonction $\bar{\tau} : \bar{l} \to \bar{\tau}_{\bar{l}} \in \mathfrak{L}(E)$ satisfait les axiomes *(I)* et *(II)*.

4. Appelons la connexion T *localement plate* si, à chaque point $p_0 \in \mathfrak{M}$, on peut associer un voisinage U de p_0 et un difféomorphisme $\bar{\varphi} : \mathfrak{U} \to E$ de classe C^1 tel que la représentante $\bar{\tau}$ de la connexion T dans $\bar{\mathfrak{V}} = \varphi(\mathfrak{U})$ se réduise à l'identité; c'est-à-dire si, pour chaque chemin l, le transport parallèle $\bar{\tau}_l$ est l'application identique I de l'espace E. Le difféomorphisme $\bar{\varphi}$ est alors appelé une *transformation plate.* Dans la suite on cherche des conditions tensorielles pour que la connexion soit localement plate.

---

(3) Pour deux espaces vectoriels normés A et B on note $\mathfrak{L}(A,B)$ l'espace vectoriel topologique des homomorphismes bornés $T : A \to B$, où la topologie est définie par la norme $|T| = \sup_{|x| \leq 1} |Tx|$, et on pose $\mathfrak{L}(A, A) = \mathfrak{L}(A)$.

CHAPITRE II.

5. Etant donné un point $p_o \in \mathfrak{M}$, fixons dans la suite une carte de son voisinage, dont φ soit l'application. La détermination d'une transformation plate $\bar{\varphi}$ d'un voisinage de p_o revient à donner un C^1-difféomorphisme local $x \to \bar{x}(x) = (\bar{\varphi} \circ \varphi^{-1})(x)$ de l'espace de Banach E qui est une solution de l'équation différentielle *(3)* ci-dessous. En effet, on a, pour les représentantes de la connexion (en désignant dans la suite par le même symbole l un chemin sur $\mathfrak{M}$ et son représentant dans E)

$$\tau_l = \varphi_q T_l \varphi_p^{-1} \text{ et } \bar{\tau}_l = \bar{\varphi}_q T_l \bar{\varphi}_p^{-1} = (\bar{\varphi}_q \varphi_q^{-1})(\varphi_q T_l \varphi_p^{-1})(\varphi_p \bar{\varphi}_p^{-1}),$$

la loi de transformation

$$\bar{\tau}_l(\bar{\varphi}_p \varphi_p^{-1}) = (\bar{\varphi}_q \varphi_q^{-1})\tau_l \text{, i.e. } (2)\ \bar{\tau}_l \bar{x}'(y) = \bar{x}'(z)\tau_l,$$

où $p = \varphi^{-1}(y)$ et $q = \varphi^{-1}(z)$ sont les extrémités du chemin l. Il en résulte que l'application $x \to \bar{x}(x) = (\bar{\varphi} \circ \varphi)(x)$ est plate si, et seulement si, pour chaque chemin l du voisinage en question,

$$(3) \qquad \bar{x}'(y) = \bar{x}'(z)\tau_l .$$

Pour simplifier la terminologie, appelons dans la suite un difféomorphisme $x \to \bar{x}(x)$ une transformation plate s'il satisfait l'équation différentielle *(3)*. De même, appelons la représentante τ de T dans la carte fixée une connexion linéaire.

6. Supposons l'existence d'une transformation plate d'un voisinage $\mathfrak{W}$ de $x_o = \varphi(p_o)$. On peut supposer que $\mathfrak{W}$ est une boule ouverte de centre x_o. La condition *(3)* implique que le transport parallèle τ_l ne dépend que du couple ordonné (y, z) des extrémités du chemin $l \subset \mathfrak{W}$, ce qui est équivalent à dire que $\tau_\gamma = I$ pour tout chemin fermé γ. Etant donné que *dans une boule tout chemin fermé est homologue à zéro,* il suffit de considérer les bords ∂s des 2-simplexes (voir numéro 12). Il en résulte que le transport parallèle τ_l ne dépend que du couple ordonné des extrémités du chemin l si, et seulement si, on a pour tout 2-simplexe $s \subset \mathfrak{W}$,

$$(4) \qquad \tau_{\partial s} = I .$$

7. Désignons dans la suite par $\tau(zy)$ le transport parallèle le long de la droite orientée zy de y à z dans la boule $\mathfrak{W}$. D'après *(3)* on a

$$(3') \qquad \bar{x}'(z)\,\tau(zy) = \bar{x}'(y).$$

La transformation plate $x \to \bar{x}(x)$ étant par hypothèse continûment différentiable on déduit de $(3')$ que, si on pose $\tau(zz) = I$, la fonction $y \to \tau(zy)$ est *continue* dans la boule $\mathfrak{W}$ pour tout $z \in \mathfrak{W}$.

8. En posant dans la formule $(3')$ $z = x_o = \varphi(p_o)$, on en déduit par intégration le long d'une droite orientée xx_o de x_o à x :

$$\bar{x}'(x_o)\int_{xx_o} \tau(x_o y)\,dy = \int_{xx_o} \bar{x}'(y)\,dy = \{\bar{x}(x) - \bar{x}(x_o)\}.$$

La transformation plate, si elle existe, est donc uniquement déterminée par les données

$$(5') \qquad A = \bar{x}'(x_o), \quad B = \bar{x}(x_o),$$

sous la forme

$$(5) \qquad \bar{x}(x) = A\int_{xx_o} \tau(x_o y)\,dy + B.$$

9. L'intégration le long d'un bord ∂s d'un 2-simplexe affine s (voir numéro 12) donne de même, pour chaque $z \in \mathfrak{W}$,

$$(6) \qquad \int_{\partial s} \tau(zy)\,dy = 0.$$

10. Les conditions nécessaires (4) et (6) sont même suffisantes. Nous allons démontrer :

LEMME 1. *Il existe une application plate d'un voisinage de $x_o = \varphi(p_o)$ si, et seulement si, pour tout point z d'une boule ouverte $\mathfrak{W} \subset \varphi(\mathfrak{U})$ de centre x_o, la fonction $y \to \tau(zy)$ est continue dans $\mathfrak{W}$ et si l'on a*

$$(4) \qquad \tau_{\partial s} = I \ \textit{pour tout simplexe,}$$

$$(6) \qquad \int_{\partial s} \tau(zy)\,dy = 0 \ \textit{pour tout simplexe affine de } \mathfrak{W}.$$

L'ensemble des transformations plates $x \to \bar{x}(x)$ du voisinage est donné par (5) quand (A, B) parcourt l'ensemble $G\mathfrak{L}(E) \times E$, où $G\mathfrak{L}(E)$ est le groupe des automorphismes linéaires de E, et $A = \bar{x}'(x_o)$, $B = \bar{x}(x_o)$.

Montrons que sous ces hypothèses la fonction

$$x \to \bar{x}(x) = \int_{xx_o} \tau(x_o t)\,dt$$

est une transformation plate. Pour cela considérons la différentiabilité de la fonction en $y \in \mathfrak{W}$. Pour $z \in \mathfrak{W}$, $z \neq y$, on a, d'après *(6)*,

$$\bar{x}(z) = \int_{zx_o} \tau(x_o t)\,dt = \int_{yx_o} \tau(x_o t)\,dt + \int_{zy} \tau(x_o t)\,dt,$$

et donc

$$\bar{x}(z) - \bar{x}(y) = \int_{zy} \tau(x_o t)\,dt.$$

La condition *(4)* implique que

$$\tau(x_o t) = \tau(x_o y)\tau(y t)$$

et par suite

$$\bar{x}(z) - \bar{x}(y) = \tau(x_o y)\int_{zy} \tau(yt)\,dt.$$

En posant $\tau(yt) = I + \varepsilon(t)$, on a par continuité

$$m(z) = \max_{t \in zy} |\varepsilon(t)| \to 0$$

pour $z \to y$, et l'intégration donne

$$\begin{aligned}\bar{x}(z) - \bar{x}(y) &= \tau(x_o y) \int_{zy} \{I + \varepsilon(t)\}\,dt \\ &= \tau(x_o y)(z-y) + \tau(x_o y) \int_{zy} \varepsilon(t)\,dt.\end{aligned}$$

Dans cette équation

$$|\tau(x_o y) \int_{zy} \varepsilon(t)\,dt| \leq |\tau(x_o y)| \int_{zy} |\varepsilon(t)|\,|dt| \leq |\tau(x_o y)|\,m(z)\,|z-y|,$$

et elle indique donc que la fonction $x \to \bar{x}(x) = \int_{xx_o} \tau(x_o t)\,dt$ est Fréchet différentiable en chaque point $x = y \in \mathfrak{W}$, et que

$$\bar{x}'(x) = \tau(x_o x). \tag{8}$$

La fonction $x \to \tau(x_o x)$ étant continue, $x \to \bar{x}(x)$ est même continûment différentiable. Pour tout chemin l de y à z dans la boule $\mathfrak{W}$

$$\tau(x_o z)\,\tau_l(y x_o) = I,$$

car la condition *(4)* implique que $\tau_\gamma = I$ pour tout chemin fermé γ. Il en résulte, en tenant compte de l'équation *(8)*,

$$\bar{x}'(z)\tau_l = \tau(x_o z)\tau_l = \{\tau(x_o z)\tau_l\,\tau(y x_o)\}\,\tau(x_o y) = \tau(x_o y) = \bar{x}'(y);$$

donc l'équation *(3)* est satisfaite.

En particulier on a $\bar{x}'(x_o) = I$ et la restriction de l'application $x \to \bar{x}(x)$ dans une boule ouverte $\mathfrak{O} \subset \mathfrak{W}$ de centre x_o est donc, d'après le théorème des fonctions implicites, un difféomorphisme. Notre fonction $x \to \bar{x}(x) = \int_{xx_0} \tau(x_0 t)dt$ donne donc une transformation plate.

Il est finalement facile de constater que, pour $A \in G\mathfrak{L}(E)$ et $B \in E$, la fonction $x \to A\bar{x}(x) + B$ est aussi une transformation plate de $\mathfrak{O}$. En tenant compte des considérations faites dans le numéro 8, il est clair qu'on obtient ainsi toutes les transformations plates de la boule. Le lemme 1 est donc démontré.

CHAPITRE III.

11. Nous allons maintenant démontrer que les conditions du lemme 1

$$(4) \quad \tau_{\partial s} - I = 0, \qquad (6) \quad \int_{\partial s} \tau(zy)dy = 0$$

peuvent être remplacées par l'annulation des «dérivées» des fonctions $s \to \tau_{\partial s} - I$ et $s \to \int_{\partial s} \tau(z\ \ y)dy$ de simplexes.

12. Introduisons d'abord quelques notations. En se plaçant toujours dans un voisinage $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{M}$ paramétrisé par la carte fixe $(\varphi, \mathfrak{U})$, nous entendrons par *2*-simplexe ordonné régulier, appelé ici simplexe, $s = f(a) \subset \mathfrak{U}$ une C^1-application $f: O \subset \mathbf{R}^2 \to \mathfrak{U}$ régulière [4] et un triplet $a = (x, y, z)$ non linéaire de points du domaine $O \subset \mathbf{R}^2$ de f. On peut supposer que O est un disque ouvert dans le plan euclidien $\mathbf{R}^2$. Le représentant de s dans $\varphi(\mathfrak{U})$ est défini de même par a et par l'application $\varphi \circ f$; désignons-le par le même symbole s. Désignons par $|a|$ l'ensemble formé des points du triangle xyz, par $|s|$ l'ensemble $f(|a|) \subset \mathfrak{U}$ et par $\Delta(s)$ l'aire de xyz. Disons que s converge vers un point fixe $\xi = f(x')$ de la surface $f(O) \subset \mathfrak{U}$, et posons $s \to \xi$, si, en tenant f fixe, $\delta = max(|x-x'|, |y-x'|, |z-x'|) \to 0$ et $\delta^2 / \Delta(s)$ reste bornée [5].

Etant donné un simplexe $s = f(a) \subset \mathfrak{U}$, toute droite orientée zy dans le domaine $O \subset \mathbf{R}^2$ de f détermine sur $\mathfrak{U}$ un chemin de $f(y)$ à $f(z)$ qui est représenté par l'application $\rho \to f(y + \rho(z-y))$, de l'intervalle $0 \le \rho \le 1$. Le chemin déterminé par un polygone orienté du disque O étant

---

(4) Ici régulière signifie que l'application tangentielle $f'(x)$ est en chaque point x une transformation linéaire injective $\mathbf{R}^2 \to \mathfrak{M}_y$, où $y = f(x)$.

(5) Cette convergence est appelée dans [7] et [4] convergence régulière.

le produit des chemins déterminés par ses côtés, désignons, pour $s = f(a)$, $a = (x, y, z)$, par ∂s le chemin fermé ayant $f(x)$ comme extrémité et déterminé par le polygone $x \to y \to z \to x$; appelons ∂s le *bord* du simplexe s.

Appelons le simplexe $s = f(a)$ *affine* sur la boule ouverte $\varphi(\mathfrak{U}) \subset E$ des paramètres si l'application $\varphi \circ f$ est affine. On peut désigner dans la suite un simplexe affine de sommets $x, y, z \in \varphi(\mathfrak{U})$ dans l'espace E des paramètres par $s = (x, y, z)$; son bord ∂s est le chemin polygonal $x \to y \to z \to x$ dans E.

13. Considérons maintenant la condition (4) $\tau_{\partial s} - I = 0$ indépendemment des autres hypothèses du lemme 1. Elle implique l'annulation

$$(11) \qquad \lim_{s \to \xi} \frac{1}{\Delta(s)} (\tau_{\partial s} - I) = 0.$$

du «tenseur de courbure» (voir Chapitre 4) en chaque point $\xi \in \mathfrak{U}$. Dans [3] et [7] on montre que la réciproque est vraie si de plus la condition de Lipschitz $|\tau_l - I| < M|l|$ est vérifiée, ($|l|$ = la longueur du chemin). Pourtant, comme la démonstration de ce fait fondamental donnée dans [7] p. 168 le laisse prévoir, la condition de Lipschitz et même la continuité, $\lim_{|l| \to 0} \tau_l = I$, de la connexion sont loin d'être des conditions nécessaires à cet effet, et on peut trouver des hypothèses plus faibles. Pour le voir rappelons ici la démonstration en la modifiant un peu.

Supposons donné un simplexe $s = f(a) \subset \mathfrak{U}$, où $a = (x, y, z)$ désigne un triplet de points du domaine $O \subset \mathbf{R}^2$ de f. En gardant f fixe dans les considérations suivantes réservons dans ce numéro le symbole $\tau(yx)$ pour le transport parallèle le long du chemin déterminé par f et par la droite orientée $yx \subset \mathbf{R}^2$, et posons pour tout $X \in \mathfrak{L}(E)$

$$(12) \qquad \tau^*(yx)X = \tau^{-1}(yx)X\,\tau(yx),$$

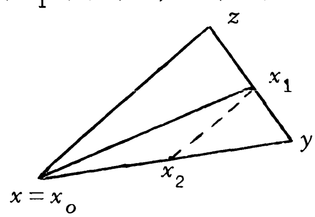
$\tau^*(yx)$ étant ainsi un automorphisme de l'espace de Banach $\mathfrak{L}(E)$.

Considérons dans le triangle $xyz \subset \mathbf{R}^2$ le centre x_1 du côté zy et désignons par $\partial s'$ et $\partial s''$ les bords des deux simplexes ayant $f(x_1)$ comme extrémité et déterminés par (x_1, x, y) et (x_1, z, x) respectivement. Alors

$$\mathcal{T}\partial_s = \mathcal{T}(x x_1)\mathcal{T}\partial_{s''}\,\mathcal{T}\partial_{s'}\,\mathcal{T}(x_1 x)$$

et, en posant $u(s) = \mathcal{T}\partial_s - I$, on a par (12) :

$$(13) \qquad u(s) = \mathcal{T}^*(x_1 x)\{u(s') + u(s'') + u(s')u(s'')\}.$$



Notons s_1 celui des deux simplexes s' et s'' tel que $|u(s_1)| = max(|u(s')|, |u(s'')|)$ (en cas d'égalité on prendra $s_1 = s'$).

Alors

$$|u(s)| \leq |\mathcal{T}^*(x_1 x)|\, 2\, |u(s_1)|\, (1 + \frac{|u(s_1)|}{2})$$

et, comme $\Delta(s) = 2\,\Delta(s_1)$, on a

$$\frac{|u(s)|}{\Delta(s)} \leq |\mathcal{T}^*(x_1 x)|\, exp(|u(s_1)|)\, \frac{|u(s_1)|}{\Delta(s_1)}.$$

Les considérations ci-dessus peuvent être répétées avec le simplexe s_1 en désignant par x_2 le centre du côté opposé à x_1 dans le triangle correspondant, etc... En posant $x = x_o$ on aboutit ainsi à la condition

$$(14) \quad \frac{|u(s)|}{\Delta(s)} \leq \prod_{\nu=1}^{n} |\mathcal{T}^*(x_\nu x_{\nu-1})|\, exp\{\sum_{\mu=1}^{n} |u(s_\mu)|\}\, \frac{|u(s_n)|}{\Delta(s_n)},$$

pour $n = 1, 2, \ldots$

La suite des simplexes $s, s_1, s_2, \ldots$ converge vers un point $\xi \in |s|$, et on a par (11), pour $\varepsilon > 0$ donné,

$$\frac{|u(s_\nu)|}{\Delta(s_\nu)} = \frac{2^\nu}{\Delta(s)}\, |u(s_\nu)| < \varepsilon$$

pour $\nu > n_\varepsilon$, et donc

$$\sum_{\nu=n_\varepsilon}^{n} |u(s_\nu)| \leq \varepsilon\, \Delta(s) \sum_{\nu=n_\varepsilon}^{n} 2^{-\nu},$$

ce qui montre que $\overset{\infty}{\Sigma} |u(s_v)|$ converge. De *(14)* il résulte donc que, *si* $\overset{\infty}{\Pi} |\tau^*(x_v\, x_{v-1})|$ *converge, on a* $|u(s)| = 0$, c'est-à-dire $\tau_{\partial s} = I$. Une condition suffisante pour la convergence du produit est, comme nous allons le montrer, la condition *(15)* ci-dessous. Nous avons donc :

LEMME 2. *Supposons qu'il existe une constante* $M > 0$ *telle que, étant donné un chemin* $l \subset \mathfrak{W}$, *l'automorphisme*

(15) $\tau_l^* : X \to \tau_l^{-1} X \tau_l$ *de l'espace* $\mathfrak{L}(E)$ *satisfait l'inégalité* $|\tau_l^*| < exp\,(M\,|l|)$,

où $|l|$ *est la longueur du chemin.*

Si, pour chaque $\xi \in \mathfrak{U} = \varphi^{-1}(\mathfrak{W})$,

$$\lim_{s \to \xi} \frac{1}{\Delta(s)}(\tau_{\partial s} - I) = 0, \tag{11}$$

on a $\tau_{\partial s} = I$ *pour chaque simplexe* $s \subset \mathfrak{U}$.

D'après l'inégalité $|\tau_l^*| \leq |\tau_l^{-1}|\,|\tau_l| = |\tau_l|^{-1}|\tau_l|$, la condition

$$|\tau_l| < exp(M'|l|), \quad M' > 0, \tag{15'}$$

implique *(15)*. De $|\tau_l| \leq 1 + |\tau_l - I|$ il résulte que la condition de Lipschitz

$$|\tau_l - I| < M''|l|, \quad M'' > 0, \tag{15''}$$

implique *(15')* et donc *(15)*. La condition *(15)* est valable si par exemple τ_l est, pour tout l, isométrique, car alors $|\tau_l| \equiv 1$. En particulier *(15)* n'implique pas la continuité $\lim\limits_{|l| \to 0} \tau_l = I$ de la connexion.

Démonstration du lemme 2. Etant donné un simplexe $s = f(a)$, il suffit d'après *(14)* de montrer que le produit $\overset{\infty}{\Pi} |\tau^*(x_v\, x_{v-1})|$ converge. D'après la construction aboutissant à l'inégalité *(14)*, le polygone $x_0 \to x_1 \to x_2 \ldots$ converge et sa longueur $\sum\limits_1^\infty |x_v - x_{v-1}|$ est finie.

En posant, pour l'application $\psi = \varphi \circ f$, $N = max|\psi'(x)|$, $x \in |a|$, on a, pour la longueur $|l|$ du chemin $l \subset \mathfrak{W}$ déterminé par ψ et par la droite $x_v\, x_{v-1}$,

$$|l| = \int_{x_v x_{v-1}} |d\psi| \leq N\,|x_v - x_{v-1}|.$$

D'après *(15)* on a donc

$$\prod_{\nu=1}^{n} |\tau^*(x_\nu x_{\nu-1})| < exp(MN \sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu - x_{\nu-1}|),$$

d'où la convergence du produit.

14 . Revenons aux notations du numéro 7 en entendant dans la suite par $\tau(xy)$ le transport parallèle le long de la droite xy dans la boule des paramètres $\mathfrak{W} = \varphi(\mathfrak{U})$, et considérons maintenant l'autre condition

$$(6) \qquad \int_{\partial s} \tau(zy)\, dy = 0$$

du Lemme 1 , p. 14 .

Dans le numéro précédent on a vu que

$$(11) \qquad \lim_{s \to x} \frac{1}{\Delta(s)} (\tau_{\partial s} - I) = 0$$

implique $\tau_{\partial s} = I$. Démontrons de même :

LEMME 3 . *Supposons que la condition de Lipschitz (15") p. 9 et la condition (11) soient vérifiées. Alors pour tout* $z \in \mathfrak{W}$ *la 1-forme* $y \to \tau(zy)$ *est continue dans* $\mathfrak{W}$, *et si*

$$(16) \qquad \lim \frac{1}{\Delta(s)} \int_{\partial s} \tau(xy) dy = 0,$$

pour les simplexes affines convergents vers x, alors (6) est valable pour tout simplexe affine s.

Remarquons que l'annulation de la «torsion» S (voir §4) implique la condition *(16)*.

DEMONSTRATION DU LEMME 3 . Etant donné $x, z \in \mathfrak{W}$ on a, pour tout $y \in \mathfrak{W}$, en tenant compte de ce que, d'après le lemme 2, $\tau_{\partial s} = I$ pour $s = (y, z, x)$:

$$\tau(zy) = \tau(zx)\, \tau(xy),$$

et par suite

$$|\tau(zy) - \tau(zx)| \leq |\tau(zx)|\, |\tau(xy) - I| .$$

D'après la condition de Lipschitz *(15")*

$$|\tau(xy) - I| < M|y - x| ,$$

d'où la continuité de la fonction $t \to \tau(zt)$ en x.

Etant donné un simplexe affine s, et un point $z \in \mathfrak{W}$, la «construction de Goursat» faite dans le numéro précédent donne

$$(17) \qquad \frac{1}{\Delta(s)} \left| \int_{\partial s} \tau(zy)dy \right| \leq \frac{1}{\Delta(s_n)} \left| \int_{\partial s_n} \tau(zy)dy \right| .$$

La suite des simplexes affines s_n converge vers un point x et l'on a, en tenant compte du Lemme 2, $\tau(zy) = \tau(zx)\,\tau(xy)$, donc

$$(18) \qquad \frac{1}{\Delta(s_n)} \int_{\partial s_n} \tau(zy)dy = \frac{\tau(zx)}{\Delta(s_n)} \int_{\partial s_n} \tau(xy)dy .$$

Le Lemme 3 résulte de (16), (18).

15. Des Lemmes 1, 3 il résulte, en tenant compte du Chapitre 1:

THEOREME. *Supposons que, dans une carte d'un voisinage de chaque point* $p_o \in \mathfrak{M}$ *de la variété* $\mathfrak{M}$, *la condition de Lipschitz* (15") *p.* 9 *soit vérifiée. Alors les conditions* (11) *et* (16) *sont nécessaires et suffisantes pour que la connexion* T *soit localement plate.*

Les deux conditions peuvent être remplacées par l'annulation de la «torsion» S et celle du «tenseur de courbure» R définis dans le § 4.

CHAPITRE IV.

16. Les considérations faites dans les paragraphes précédents nous conduisent à la notion de torsion et à celle de tenseur de courbure d'une connexion linéaire, qui peuvent être définies comme «dérivées par rapport à l'aire» de certaines fonctions de 2-simplexes; de telles définitions se trouvent essentiellement déjà dans Hermann Weyl et Elie Cartan (6) ([1], [2], [8]). Introduisons dans la suite rapidement les définitions, en suivant dans le cas du tenseur de courbure [3] et [4], et en employant les notations du numéro 13.

17. Etant donné un point $p_o \in \mathfrak{M}$ de la variété $\mathfrak{M}$, construisons deux fonctions de «cobords» $d\Sigma$ et dU des 2-simplexes d'un voisinage de p_o. Considérons pour cela un simplexe $s = f(a)$, tel que $p_o = f(x_o)$ appartienne à l'image $f(O)$ de l'application $f: \mathbf{R}^2 \to \mathfrak{M}$. Pour $q = f(t)$ désignons par $T(p_o q)$ le transport parallèle de q à p_o le long du chemin déterminé sur la surface $f(O)$ par la droite orientée $x_o t \subset \mathbf{R}^2$. En suppo-

(6) Je suis reconnaissant à M. Peter Dombrowski d'avoir attiré mon attention sur ces articles.

sant que la 1-forme ainsi définie $q \to T(p_o q)$ est intégrable sur $f(O)$, posons

$$d\Sigma(s) = 2\int_{\partial s} T(p_o q)\,dq\,. \tag{19}$$

$(\varphi, \mathfrak{U})$ étant une carte d'un voisinage de p_o, posons

$$dU(s) = 2\,\varphi_{p_o}^{-1}(\tau_{\partial s} - I)\,\varphi_{p_o}\,, \tag{20}$$

où τ désigne la représentante de la connexion dans la carte.

Pour le simplexe $s = f(a)$ avec $a = (x, y, z)$, posons encore

$$h = f(x_o)(y - x), \qquad k = f'(x_o)(z - y),$$

où $f'(x_o)$ est l'application tangentielle $\mathbf{R}^2 \to \mathfrak{M}_{p_o}$.

Disons que la connexion linéaire T a une torsion S, resp. un tenseur de courbure R, en p_o s'il existe une fonction sectionnellement bilinéaire [(7)] *et bornée*

$$S(p_o) : \mathfrak{M}_{p_o} \times \mathfrak{M}_{p_o} \to \mathfrak{M}_{p_o}, \ \textit{resp.}\ R(p_o) : \mathfrak{M}_{p_o} \times \mathfrak{M}_{p_o} \to \mathfrak{L}(\mathfrak{M}_{p_o}),$$

telle que, pour tout choix du simplexe s,

$$\lim_{s \to p_o} \frac{1}{\Delta(s)} \{ d\Sigma(s) - S(p_o)hk \} = 0, \tag{21}$$

resp.

$$\lim_{s \to p_o} \frac{1}{\Delta(s)} \{ dU(s) - R(p_o)hk \} = 0. \tag{22}$$

Il est facile de voir que $S(p_o)$ et $R(p_o)$ sont des fonctions uniquement déterminées et alternées et que la définition du tenseur de courbure ne dépend pas du choix de la carte employée, si la variété est de classe C^1 ([5]).

18. Les considérations du Chapitre II aboutissant à l'égalité *(6)*, qui indique l'annulation de $d\Sigma(s)$ pour simplexes affines, montrent de même que, si la connexion est localement plate, alors on a $d\Sigma(s) = 0$

---

(7) Ici sectionellement bilinéaire indique que la restriction de la fonction à chaque sous-espace $L \subset \mathfrak{M}_{p_o}$ de dimension deux est bilinéaire. Dans la définition du tenseur de courbure donnée en [4] (voir aussi [5]), on considère plus généralement une approximation *homogène* de degré deux de la fonction $1/2\ dU$. Du « Hilfssatz 2 », p. 15 [4], il résulte pourtant que les deux définitions sont (au facteur 2 près) équivalentes.

pour *chaque* simplexe du voisinage en question. Nous pouvons donc formuler le théorème p.11, pour une connexion linéaire vérifiant la condition de Lipschitz, comme suit :

THEOREME. *L'existence et l'annulation de la torsion S et du tenseur de courbure R en chaque point de la variété banachique $\mathfrak{M}$ de classe C^1 est nécessaire et suffisante pour que T soit localement plate. Les applications plates sont alors de classe C^1.*

19. Pour définir encore la *différentiabilité* d'une connexion linéaire T, considérons une carte $(\varphi, \mathfrak{U})$. Etant donné un chemin quelconque l dans $\varphi(\mathfrak{U}) \subset E$ dont x est le point de départ, soit $t \to x(t)$, $t \in [0, r]$ $(r > 0)$, sa représentation paramétrique et soit $h = x'(0)$ le vecteur tangent au point de départ. Pour $t \in [0, r]$, notons $\tau(t)$ le transport parallèle le long du chemin déterminé par l'intervalle $[0, t]$ et posons $\tau(0) = I$.

On dit que la connexion linéaire T sur la C^{m+1}-variété $\mathfrak{M}$ est de classe C^m $(m \geq 1)$ si, pour chaque carte $(\varphi, \mathfrak{U})$, il existe dans $\varphi(\mathfrak{U}) \subset E$ une C^{m-1}-fonction Γ, dont les valeurs $\Gamma(x)$ sont des fonctions bilinéaires et bornées (8) $E \times E \to E$ et telle que la représentante τ de la connexion en tout $x \in \varphi(\mathfrak{U})$ vérifie $\tau'(0) = -\Gamma(x)h$, où τ' désigne la dérivée de la fonction $t \to \tau(t)$. La loi $\tau_{ab} = \tau_a \tau_b$ implique que $\tau(t)$ est la solution de l'équation différentielle

$$dz + \Gamma(x)dx\, z = 0,$$

obtenue par intégration le long du chemin l, avec la valeur initiale $I \in \mathfrak{L}(E)$.

Désignons par $\tau(xy)$ le transport parallèle le long de la droite de y à x dans $\varphi(\mathfrak{U})$. On peut montrer ([5]) que, si la connexion est de classe C^1, alors la fonction $y \to \tau(xy)$ est Fréchet-différentiable en x, la dérivée de Fréchet étant $\Gamma(x)$.

Dans [7] et [5] on montre :

LEMME 4. *La torsion S, resp. le tenseur de courbure R, existe en chaque*

(8) Si la dimension de la variété $\mathfrak{M}$ est finie et si $(e_i)_1^n$ désigne une base de l'espace des paramètres E, alors on a, avec les notations courantes,

$$\Gamma(x)e_i e_j = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k e_k.$$

point de la variété $\mathfrak{M}$ *si la connexion linéaire est de classe* C^1, *resp.* C^2. $S(p)$, *resp.* $R(p)$, *est représentée dans une carte d'un voisinage de* $p = \varphi(x)$ *par la fonction bilinéaire qui transforme la paire* $(h, k) \in E \times E$ *en le vecteur*

$$\Gamma(x)hk - \Gamma(x)kh \in E,$$

resp. en la transformation linéaire

$$(\Gamma'(x)hk + \Gamma(x)h\Gamma(x)k) - (\Gamma'(x)kh - \Gamma(x)k\,\Gamma(x)h) \in \mathfrak{L}(E).$$

Bibliographie.

[1] E. CARTAN, Sur une généralisation de la notion de courbure de Riemann et les espaces à torsion, *C.R.A.S. Paris*, 174 (1922), p. 593.

[2] E. CARTAN, Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée, *Ann. Ec. Norm.* 41 (1924).

[3] W. GRAEUB und R. NEVANLINNA, Zur Grundlegung der affinen Differentialgeometrie, *Ann. Acad. Sci. Finn,* AI 224 (1956).

[4] H. HAAHTI, Uber verschiebungsinvariante Volumenmetriken und zugeordnete Tensoren auf einer affin zusammenhängenden Mannigfaltigkeit, *Ann. Acad. Sci. Finn.*, AI 352, (1964).

[5] H. HAAHTI und E. MÄÄTTÄ, Zur Theorie des linearen Zusammenhangs (en préparation).

[6] M.S. KNEBELMANN, Spaces of relative parallellism, *Ann. of Math.* 53, (1951), p. 387 - 399.

[7] F. und R. NEVANLINNA, *Absolute Analysis,* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 102, Springer Verlag, (1959).

[8] H. WEYL, *Raum, Zeit, Materie,* Berlin (1918).

[9] H. WHITNEY, *Geometric Integration Theory,* Princeton Mathematical Series, Princeton, (1957).

H. HAAHTI

Lähderanta 5 A F - (Finland)