LÍA OUBIÑA

# Teoría axiomatica de categorías

*Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques*, tome 10, nº 3 (1968), p. 375-394

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1968__10_3_375_0>

*CAHIERS DE TOPOLOGIE* *Vol. X,3*
*ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE*

# TEORIA AXIOMATICA DE CATEGORIAS (*)

*por Lía OUBIÑA*

## INTRODUCCION.

El presente trabajo tiene por objeto la construcción de una teoría general de categorías independiente de cualquier teoría de conjuntos y la obtención de una teoria de conjuntos en la cual se verifiquen los axiomas de la teoría de Bourbaki [1]. Se pretende también que los resultados de esa teoría tengan su natural verificación en la teoría usual de categorías construída en el marco de la teoría de conjuntos de Bourbaki.

En los parágrafos 1, 2 y 3 se construye una teoría matemática, según Bourbaki [1], llamada « teoría de categorías» que es en particular una teoría igualitaria en el sentido de Bourbaki [1]. En esta teoría la palabra « categoría» es estrictamente sinónima de «término» y solo se la emplea para facilitar la comprensión intuitiva de los axiomas. Se logra introducir los conjuntos, como categorías especiales, y la noción de pertenencia. Se introducen luego las « categorías completas de conjuntos» y se define una teoría mas fuerte, llamada «teoría de conjuntos» que se obtiene agregando dos axiomas esquemas análogos a los dados por Houdebine en [3]. En esta teoría se da una categoría $Z$ con cuyos objetos se puede desarrollar una teoría semejante a la teoría de conjuntos de Bourbaki. Los objetos de $Z$ son conjuntos y constituyen a su vez un conjunto que es un universo en el sentido de Grothendieck-Sonner [5].

En el parágrafo 6 se da una regla natural de traducción de assemblages de la teoría de Bourbaki a assemblages de la teoría de conjuntos. El mecanismo de traducción es completamente análogo al dado por Houdebine en [3], quien inserta la teoría de conjuntos de Bourbaki en una teoría de clases. Se demuestra que la traducción de todo teorema de Bourbaki obtenido a partir de todos los esquemas y de todos los axiomas, salvo el $A5$ (existe un conjunto infinito) es un teorema de la teoría de conjuntos. Si se quiere, puede agregarse a esta teoría la traducción de $A5$ logrando la completa inserción de la teoría de Bourbaki.

En el parágrafo 7 se dan reglas de traducción que permiten pasar de la teoría axiomática de categorías a la teoría de conjuntos de Bourbaki y se demuestra que la traducción de todo teorema de la primera es un teorema de la teoría usual de categorías. Esas reglas de traducción están inspiradas naturalmente en las ideas intuitivas que han dado lugar a la formulación de la teoría axiomática. Para facilitar la lectura del texto señalamos las principales :

(*) Resumen de la tesis de doctorado presentada en la Universidad Nacional de La Plata, Argentina (1966).

El signo «$\subseteq$» y los axiomas $A\,1$, $A\,2$ pretenden describir la relación «$x$ es subcategoría de y» en el sentido usual, en $A3$ la unión de dos subcategoriás $x$ e $y$ de una dada $z$ está referida a la subcategoría de $z$ engendrada por la unión de los morfismos de $x$ y de $y$. La categoría nula de $A\,4$ está inspirada en la categoría cuyo conjunto de morfismos es el vacío.

Al dar las definiciones de objetos y morfismos ( §2, n° 1, 2 ) de una categoría $z$ se ha pensado en sustituir un morfismo $f: e \to e'$ de $z$ por la subcategoría de $z$ cuyo conjunto de morfismos es $\{f, e, e'\}$, la cual recibe el nombre de «categoría morfismo» en ( §7, n°1). El signo sustantivo $I$ de ( §2, n°4) aplicado a un término $T$ describe al funtor idéntico sobre una categoría transformado luego en categoría morfismo.

El signo «*funt*» y los axiomas de las categorías funtoriales están sugeridos por las propiedades de las categorías de funtores, y la categoría de partes de una dada $z$ por la categoría cuyos morfismos son los funtores inclusión de $x$ en $y$, para todo par $x, y$ de subcategorías de $z$ tal que $x$ es subcategoría de $y$.

Los conjuntos, cuya definición se da en ( §4, n°1) · han sido concebidos como objetos de categorías funtoriales y son por lo tanto de la forma $I_u$. Se ha introducido en ( §3, def. 2) un operador $E$ que permite pasar de una categoría de de la forma $I_u$ a la categoría $u$ misma, y mediante el cual ha sido definida la noción de pertenencia : Si $A$ es un conjunto, en el sentido de ( §4, n°1), $x$ pertenece a $A$ si, y solo si, $x$ es objeto de $E(A)$. En particular, si $A$ tiene un único elemento, éste es $E(A)$.

Pueden consultarse en el texto completo [ 4 ] las demostraciones que aqui se han omitido por razones de espacio así como las formulaciones mas rigurosas, desde el punto de vista lógico, de las definiciones contenidas en ( §7, n°1), formulaciones necesarias para las demostraciones de los teoremas de traducción enunciados en ( §7, n°2 ). Se han introducido aquí el esquema $S\,8$ y el axioma $A\,33$ que no figuran en [ 4 ]. Este último a fin de asegurar la existencia de un funtor de subyacencia (o de olvido) de una categoría de categorías en una categoría de conjuntos.

Las convenciones metamatemáticas son las de Bourbaki [ 1 ]. Se usa el signo «$\sim$» para la negación, «$\vee$» para la disyunción y un punto para la conjunción.

Quiero expresar mi agradecimiento al Profesor J. Bosch, quien me ha propuesto el tema del trabajo original, por su eficaz ayuda en la ejecución del mismo, asi como al Profesor C. Ehresmann por sus valiosas discusiones durante la preparación del presente resumen.

## 1. Primeras nociones.

*1. LA TEORIA DE CATEGORIAS.*

La « teoría de categorías» es una teoría matemática, en el sentido de Bourbaki [ 1 ] , en la que figuran los signos relacionales $=$ , $\subseteq$, de peso 2, «*comp*» de peso 3, « *funt*» de peso 1, y los signos sustantivos «o» de peso 3, *I* y *P* de peso 1. Posee además los esquemas *S1* a *S7* de Bourbaki [ 1 ], el esquema *S8* y los axiomas explícitos *A1* a *A33* que serán introducidos en los parágrafos 1, 2, 3 y 4. Estos axiomas no contienen letras, por lo tanto, la teoría de categorías es una teoría sin constantes.

Puesto que la teoría de categorías es una teoría igualitaria en el sentido de Bourbaki ([ 1 ], pag. 44), se le podrán aplicar los resultados de ([ 1 ], chap. 1).

Para facilitar la interpretación intuitiva del texto se empleará muchas veces la palabra « categoría» que debe ser considerada estrictamente como sinónimo de «término» de la teoría.

*2. LA RELACION DE SER SUBCATEGORIA.*

Si **T** y **U** son términos, el assemblage **TU** es una relación que se anotará prácticamente en cualquiera de las formas siguientes :

$$\mathbf{T} \subseteq \mathbf{U}, \quad \mathbf{U} \supseteq \mathbf{T}, \quad (\mathbf{T}) \subseteq (\mathbf{U}), \quad \text{«}\mathbf{T} \text{ es subcategoría de } \mathbf{U}\text{»}.$$

La relación « ( **T** $\subseteq$ **U**)» se anotará **T** $\subseteq$ **U**.

*A1.* $$(\forall x)(\forall y)((x \subseteq y . y \subseteq x) \Longleftrightarrow (x = y)).$$

*A2.* $$(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x \subseteq y . y \subseteq z) \Longrightarrow (x \subseteq z)).$$

DEFINICIÓN 1. La relación designada por «$x \subseteq y . x \neq y$» se anota en cualquiera de las formas siguientes :

$$x \subset y, \quad x \text{ es subcategoría propia de } y .$$

*3. UNION DE SUBCATEGORIAS.*

*A3.* $$(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x \subseteq z . y \subseteq z) \Longrightarrow$$

$$(\exists v)(v \subseteq z . x \subseteq v . y \subseteq v . (\forall u)((u \subseteq z . x \subseteq u . y \subseteq u) \Longrightarrow (v \subseteq u)))).$$

DEFINICIÓN 2. Sea $R$ la relación

$$v \subseteq z . x \subseteq v . y \subseteq v .(\forall u)((u \subseteq z . x \subseteq u . y \subseteq u) \Longrightarrow v \subseteq u)).$$

Se llama « unión en $z$ de $x$ e $y$» y se designa con $x \underset{z}{\bigcup} y$ a la categoría $\tau_v(R)$.

PROPOSICIÓN 1.

$a) \ x \underset{z}{\bigcup} y = y \underset{z}{\bigcup} x.$

$b) \ (x \subseteq w . y \subseteq w . z \subseteq w) \Longrightarrow ((x \underset{w}{\bigcup} y) \underset{w}{\bigcup} z = x \underset{w}{\bigcup} (y \underset{w}{\bigcup} z)).$

$c) \ (x \subseteq y . y \subseteq z) \Longrightarrow (x \underset{z}{\bigcup} y = y).$

$d) \ (x \subseteq z . y \subseteq z . z \subseteq w) \Longrightarrow (x \underset{z}{\bigcup} y = x \underset{w}{\bigcup} y).$

*4. LA CATEGORIA NULA.*

*A4.* $$(\exists u)(\forall x)(u \subseteq x).$$

Puesto que la relación $(\forall x)(u \subseteq x)$ es unívoca en $u$, puede formularse la siguiente definición :

DEFINICIÓN 3. Se empleará el símbolo $\Phi$ para representar el término $\tau_u((\forall x)(u \subseteq x))$ y se llamará «categoría nula».

PROPOSICIÓN 2. $(u \subseteq \Phi) \Longleftrightarrow (u = \Phi)$.

## 2. Objetos y morfismos de una categoría.

*1. OBJETOS DE UNA CATEGORIA.*

DEFINICIÓN 1. La relación designada por

$$(x \neq \Phi).(\forall u)(u \subseteq x \Longrightarrow (u = x \vee u = \Phi))$$

se anota en cualquiera de las dos formas siguientes :

« *unit* $(x)$» , « $x$ *es unitaria*» .

DEFINICIÓN 2. La relación designada por «*unit*$(x) . x \subseteq z$» se anota : « $x$ es objeto de $z$» .

*2. MORFISMOS DE UNA CATEGORIA.*

DEFINICIÓN 3. Se designa con

« $f$ es morfismo no objeto de $z$ entre $x$ e $y$»

la relación

$x$ es objeto de $z$. $y$ es objeto de $z$. $f \subseteq z$. $(\forall u)(u \subset f \Longleftrightarrow u \subseteq x \bigcup_z y)$.

La relación «$x$ es objeto de $z$» se designa también con «$x$ es morfismo objeto de $z$ entre $x$ y $x$».

Se designa con «$f$ es morfismo de $z$ entre $x$ e $y$» o con «$f : x \underset{z}{\Longleftrightarrow} y$» (o simplemente con «$f : x \Longleftrightarrow y$», si no conduce a confusión) la relación

($x$ es objeto de $z$. $y$ es objeto de $z$. $x = y$. $f = x$) v ($f$ es morfismo no objeto de $z$ entre $x$ e $y$).

La relación $(\exists x)(\exists y)(f : x \underset{z}{\Longleftrightarrow} y)$ se designa con «$f$ es morfismo de $z$».

El signo «*comp*» es, en esta teoría, un signo relacional de peso 3, y el signo «$\circ$» es sustantivo del mismo peso. Si **T**, **U** y **Z** son términos, el assemblage «*comp* **Z T U**», que se anotará prácticamente con $\mathbf{T} \underset{\mathbf{Z}}{comp} \mathbf{U}$, es una relación, y el assemblage «$\circ$ **Z T U**», que se anotará prácticamente con «$\mathbf{T} \underset{\mathbf{Z}}{\circ} \mathbf{U}$», es un término.

DEFINICION 4. La relación «$(x \underset{z}{comp}\, y) \vee (y \underset{z}{comp}\, x)$» se designará con «$x$ e $y$ son componibles en $z$».

$A5$. $(\forall z)(\forall w)(\forall x)(\forall y)((z \subseteq w$. $x$ es morfismo de $z$. $y$ es morfismo de $z$. $x \underset{z}{comp}\, y) \Longrightarrow (x \underset{w}{comp}\, y$. $x \underset{z}{\circ} y = x \underset{w}{\circ} y))$.

$A6$. $(\forall z)(\forall x)(\forall y)((x$ es morfismo de $z$. $y$ es morfismo de $z$. $x \underset{z}{comp}\, y) \Longrightarrow (x \underset{z}{\circ} y$ es morfismo de $z))$.

$A7$. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x$ es objeto de $z$. $y$ es morfismo de $z) \Longrightarrow ((x \underset{z}{comp}\, y \Longrightarrow x \underset{z}{\circ} y = y)$. $(y \underset{z}{comp}\, x \Longrightarrow y \underset{z}{\circ} x = y)))$.

$A8$. $(\forall x)(\forall z)(\forall f)(\forall g)((f : x \underset{z}{\Longleftrightarrow} x$. $g : x \underset{z}{\Longleftrightarrow} x) \Longrightarrow f \underset{z}{comp}\, g)$.

$A9$. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall f)(\forall g)((f : x \underset{z}{\Longleftrightarrow} x,\ g : x \underset{z}{\Longleftrightarrow} y) \Longrightarrow (f$ y $g$ son componibles en $z))$.

$A10$. $(\forall f)(\forall g)(\forall h)(\forall z)((f$ es morfismo de $z$. $g$ es morfismo de $z$. $h$ es morfismo de $z) \Longrightarrow ((f \underset{z}{comp}\, g$. $g \underset{z}{comp}\, h) \Longrightarrow (f \underset{z}{\circ} g) \underset{z}{comp}\, h))$.

*A11.* $(\forall f)(\forall g)(\forall h)(\forall z)((f$ es morfismo de $z$. $g$ es morfismo de $z$. $h$ es morfismo de $z) \Longrightarrow ((f \underset{z}{comp}\, g \cdot (f \underset{z}{\circ} g) \underset{z}{comp}\, h) \Longrightarrow$
$$(g \underset{z}{comp}\, h .\ f \underset{z}{comp}\, g \circ h))).$$

*A12.* $(\forall f)(\forall g)(\forall h)(\forall z)((f$ es morfismo de $z$. $g$ es morfismo de $z$. $h$ es morfismo de $z) \Longrightarrow ((f \underset{z}{comp}\, g \cdot f \underset{z}{\circ} g \underset{z}{comp}\, h) \Longrightarrow$
$$((f \underset{z}{\circ} g) \underset{z}{\circ} h = f \underset{z}{\circ} (g \underset{z}{\circ} h)))).$$

PROPOSICION 1. *Sean $x$ e $y$ objetos distintos de una categoría $z$ y sea $f : x \underset{z}{\Longleftrightarrow} y$. Entonces vale una y solo una de las siguientes relaciones $f \underset{z}{comp}\, x$, $f \underset{z}{comp}\, y$.*

DEFINICION 5. Se designa la relación « $f : x \underset{z}{\Longleftrightarrow} y$. $f \underset{z}{comp}\, x$» con « $f$ es morfismo de $z$ de $x$ a $y$» o con $f : x \underset{z}{\rightarrow} y$ (o simplemente con $f : x \rightarrow y$ si la categoría $z$ está sobreentendida).

PROPOSICION 2. *Sean $f$ y $g$ morfismos de una categoría $w$. Entonces vale la relación « $f \underset{w}{comp}\, g$» si y solo si existen objetos $x, y, z$ de $w$ tales que $g : x \underset{w}{\rightarrow} y$, $f : y \underset{w}{\rightarrow} z$. En caso afirmativo se cumple, además, $f \underset{w}{\circ} g : x \underset{w}{\rightarrow} z$.*

PROPOSICION 3. $(f : x \underset{z}{\rightarrow} y.\ f : x' \underset{w}{\rightarrow} y') \Longrightarrow (x = x'.\ y = y')$.

DEFINICION 6. Se designa el término $\tau_u((\exists z)(\exists y)(f : u \underset{z}{\rightarrow} y))$ con «fuente de $f$» o con $\alpha(f)$, y el término $\tau_u((\exists z)(\exists x)(f : x \underset{z}{\rightarrow} u))$ con con «blanco de $f$» o con $\beta(f)$.

PROPOSICION 4. *Sean $f$ y $g$ morfismos de las categorías $w$ y $w'$. Si $f \underset{w}{comp}\, g$ se cumple también $f \underset{w'}{comp}\, g$.*

Teniendo en cuenta esta última proposición formulamos la siguiente definición :

DEFINICION 7. Se designa la relación

$$(\exists z)(f \text{ es morfismo de } z.\ g \text{ es morfismo de } z.\ f \underset{z}{comp}\, g)$$

con « $f$ *comp* $g$» .

$A13.(\forall z)(\forall w)((\forall f)(\forall g)(f$ es morfismo de $z.$ $g$ es morfismo de $z.$
$f\ comp\ g) \Longrightarrow (f$ es morfismo de $w.$ $g$ es morfismo de $w.$
$(f \underset{z}{\circ} g = f \underset{w}{\circ} g))) \Longrightarrow z \subseteq w).$

## 3. *LA CATEGORIA DE DOS MORFISMOS.*

$A14.$ $(\forall x)(\forall y)((unit(x).\ unit(y)) \Longrightarrow (\exists z)(x \subseteq z.\ y \subseteq z.$
$(\forall f)(f$ es morfismo de $z \Longrightarrow (f = x \vee f = y)))).$

Si se adjuntan los axiomas $unit(x)$, $unit(y)$ la relación

«$x \subseteq z.$ $y \subseteq z.$ $(\forall f)(f$ morfismo de $z \Longrightarrow (f = x \vee f = y))$»

es funcional en $z$ de acuerdo con $A\,13$ y $A\,14$.

DEFINICION 8. Si $R$ designa la relación

«$x \subseteq z.$ $y \subseteq z.$ $(\forall f)(f$ es morfismo de $z \Longrightarrow (f = x \vee f = y))$»,

designaremos con $[x, y]$ a la categoría $\tau_z(R)$.

Si $x = y$ convendremos en designar el término $[x, x]$ con $[x]$. Es inmediato que si $x$ es unitaria $[x] = x$.

PROPOSICION 5.

*$(x$ es objeto de $z.$ $y$ es objeto de $z) \Longrightarrow (x \underset{z}{\cup} y = [x, y]).$*

PROPOSICION 6. *Si $z$ es una categoría y $f = x \underset{z}{\to} y$ se tiene:*

*a) $x$ e $y$ son los únicos objetos de $f$.*

*b) $f$, $x$ e $y$ son los únicos morfismos de $f$.*

## 4. *LOS AXIOMAS DE LA IDENTIDAD.*

El signo $I$ es, en esta teoría, un signo sustantivo de peso 1. Si $\mathbf{T}$ es un término, el assemblage $I\mathbf{T}$ es entonces un término que se designará prácticamente con $I_{\mathbf{T}}$ o con « identidad sobre $\mathbf{T}$ ».

Los axiomas de la identidad son los siguientes

$A\,15.$ $(\forall x)(\forall y)((I_x = I_y) \Longrightarrow (x = y)).$

$A\,16.$ $(\forall x)(unit(I_x)).$

## 5. *EL ESQUEMA S8.*

*S8.* Sean $\mathbf{z}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{f}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ letras distintas y $\mathbf{R}\{\mathbf{f}\}$ una relación que no contiene las letras $\mathbf{w}, \mathbf{x}, \mathbf{y}$. Sean $\mathbf{R}_1$ y $\mathbf{R}_2$ respectivamente las relaciones :

$(\forall \mathbf{x})(\forall \mathbf{y})((\mathbf{x}$ es morfismo de $\mathbf{z}$ . $\mathbf{y}$ es morfismo de $\mathbf{z}$ . $\mathbf{x}\ comp_{\mathbf{z}}\ \mathbf{y}$. $\mathbf{R}\{\mathbf{x}\}$. $\mathbf{R}\{\mathbf{y}\}) \Longrightarrow \mathbf{R}\{\mathbf{x} \circ_{\mathbf{z}} \mathbf{y}\})$,

$(\forall \mathbf{x})((\mathbf{x}$ es morfismo de $\mathbf{z}$ . $\mathbf{R}\{\mathbf{x}\}) \Longrightarrow (\mathbf{R}\{\alpha(\mathbf{x})\}$ . $\mathbf{R}\{\beta(\mathbf{x})\}))$.

La siguiente relación es un axioma :

$(\forall \mathbf{z})((\mathbf{R}_1 . \mathbf{R}_2) \Longrightarrow (\exists \mathbf{w})(\mathbf{w} \subseteq \mathbf{z}$ . $(\forall \mathbf{f})(\mathbf{f}$ es morfismo de $\mathbf{w} \Longleftrightarrow (\mathbf{f}$ es morfismo de $\mathbf{z}$ . $\mathbf{R}))))$ .

Aplicando el esquema *S 8* a la relación $R\{u\}$ : « $u$ es objeto de $z$ » se obtiene :

PROPOSICION 7. *$(\forall z)(\exists y)(\forall u)(u$ es morfismo de $y \Longleftrightarrow u$ es objeto de $z)$.*

De acuerdo con esta última proposición y el axioma *A 13* se tiene que la relación

$$(\forall u)(u \text{ es morfismo de } y \Longleftrightarrow u \text{ es objeto de } z)$$

es funcional en $y$.

DEFINICION 9. Sean $z$ una categoría y $R$ la relación

$$(\forall u)(u \text{ es morfismo de } y \Longleftrightarrow u \text{ es objeto de } z).$$

El término $\tau_y(R)$ se llama «categoría de los objetos de $z$» y se anota $O(z)$.

## 3. Categorías funtoriales.

*1. LAS CATEGORIAS FUNTORIALES.*

El signo « *funt* » es, en la teoría de categorías, un signo relacional de peso 1. Si $\mathbf{T}$ es un término, el assemblage « *funt* $\mathbf{T}$ » es una relación que se designará también con « $\mathbf{T}$ *funtorial* » o con « $\mathbf{T}$ *es categoría funtorial* » . Si $\mathbf{S}$ es un término, la relación « *funt* $\mathbf{T}$ . *funt* $\mathbf{S}$ » se designará muchas veces con « $\mathbf{T}$ y $\mathbf{S}$ son categorías funtoriales » ( o simplemente « $\mathbf{T}$ y $\mathbf{S}$ son funtoriales » ) .

*A 17* $\quad (\forall x)(\forall y)((funt\ x .\ y \subseteq x) \Longrightarrow (funt\ y))$.

*A 18* $\quad (\forall x)(\forall y)((funt\ x .\ funt\ y) \Longrightarrow (\exists z)(funt\ z .\ x \subseteq z .\ y \subseteq z .$
$(\forall u)((funt\ u .\ x \subseteq u .\ y \subseteq u) \Longrightarrow z \subseteq u)))$.

*A 19.* $(\forall x)(\mathit{funt}\ I_x)$.

*A 20.* $(\forall x)(\forall z)((\mathit{funt}\ z\ .\ x \text{ objeto de } z) \Longrightarrow (\exists u)(I_u = x))$.

Es inmediato que la relación

$$«\mathit{funt}\ z\ .\ x \subseteq z\ .\ y \subseteq z\ .\ (\forall u)\ ((\mathit{funt}\ u\ .\ x \subseteq u\ .\ y \subseteq u) \Longrightarrow z \subseteq u)»$$

es unívoca en $z$. Teniendo en cuenta *A18*, formulamos la siguiente definición :

DEFINICION 1. Sea $R$ la relación

$$«\mathit{funt}\ z\ .\ x \subseteq z\ .\ y \subseteq z\ .\ (\forall u)((\mathit{funt}\ u\ .\ x \subseteq u\ .\ y \subseteq u) \Longrightarrow z \subseteq u)».$$

Se llama « unión de $x$ e $y$» y se designa con $x \vee y$ a la categoría $\tau_z(R)$.

PROPOSICION 1.

$a)\ (\mathit{funt}\ x\ .\ \mathit{funt}\ y\ .\ \mathit{funt}\ z\ .\ x \subseteq z\ .\ y \subseteq z) \Longrightarrow (x \vee y = x \underset{z}{\cup} y)$.

$b)\ (\mathit{funt}\ x\ .\ \mathit{funt}\ y\ .\ \mathit{unit}(x)\ .\ \mathit{unit}(y)) \Longrightarrow ([x\ .\ y] = x \vee y)$.

PROPOSICION 2. *Si $x$, $y$, $z$ son categorías funtoriales, valen las siguientes relaciones :*

$a)\ x \vee y = y \vee x$.

$b)\ (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$.

$c)\ x \subseteq y \Longrightarrow (x \vee y = y)$.

La relación $I_u = x$ es unívoca en $u$ de acuerdo con *A 15*.

DEFINICION 2. Designaremos con $E(x)$ al término $\tau_u(I_u = x)$.

PROPOSICION 3. *Para toda categoría $z$, $E(I_z) = z$, y si $z$ es objeto de una categoría funtorial, $I_{E(z)} = z$. Si $x$ e $y$ son objetos de categorias funtoriales, la relación « $E(x) = E(y)$» es equivalente a «$x = y$».*

## 2. *FUNTORES.*

DEFINICION 3. Designaremos con «$f$ es funtor» a la relación $(\exists z)(\mathit{funt}\ z\ .\ f$ es morfismo de $z)$, y con «$f$ es funtor de $x$ en $y$», o con «$f : x \to y$», a la relación $(\exists z)(\mathit{funt}\ z\ .\ f : x \underset{z}{\to} y)$.

DEFINICION 4. Si $f$ es funtor, llamaremos « dominio de $f$», y anotaremos $d(f)$, al término $E(\alpha(f))$, y llamaremos « codominio de $f$», y anotaremos $c(f)$, al término $E(\beta(f))$. (ver §2, nº 2, def. 6).

PROPOSICION 4. *Si $f$ y $g$ son morfismos de las categorías funtoriales $z$ y $w$ tales que $f$ comp $g$ (§2, nº 2, def. 7), se cumple $f \underset{z}{\circ} g = f \underset{w}{\circ} g$.*

Teniendo en cuenta esta útima proposición formulamos :

DEFINICION 5. Si $f$ y $g$ son funtores tales que $f$ *comp* $g$, se llama «composición de $f$ y $g$» y se anota $f \circ g$, al funtor $f \underset{z}{\circ} g$, donde $z$ designa la categoría $f \vee g$.

Como consecuencia del axioma *A 13* y de la proposición 4 resulta :

PROPOSICION 6. *Si $z$ y $z'$ son categorías funtoriales, entonces $z \subseteq z'$ si, y solo si, todo morfismo de $z$ lo es de $z'$.*

*3. LA CATEGORIA DE PARTES.*

El signo $P$ es, en esta teoría, un signo sustantivo de peso 1. Si $\mathbf{T}$ es un término, el assemblage $P\mathbf{T}$ es un término que se designará practicamente con $P(\mathbf{T})$ o con « categoría de partes de $\mathbf{T}$ » .

*A 21.* $(\forall x)(\mathit{funt}\ P(x))$.

*A 22.* $(\forall x)(\forall u)(u \subseteq x \Longleftrightarrow I_u$ es objeto de $P(x))$.

*A23.* $(\forall x)(\forall y)(x \subseteq y \Longrightarrow P(x) \subseteq P(y))$ .

De *A 22* resulta $P(x) = P(y)$ si, y solo si, $x = y$.

Si $R$ es una relación, la relación

«$(\exists x)R$ y a lo sumo un $x$ tal que $R$»

será designada por $(\exists | x)R$.

*A 24* $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x \subseteq y.\ y \subseteq z) \Longrightarrow (\exists | f)(f : I_x \xrightarrow[P(z)]{} I_y))$.

*A25* $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((\exists f)\ (f : I_x \xrightarrow[P(z)]{} I_y) \Longrightarrow (x \subseteq y))$.

DEFINICION 6. Si $x$ e $y$ son categorías tales que $x \subseteq y$, se designa al término $\tau_f(f : I_x \xrightarrow[P(y)]{} I_y)$ con $I_{xy}$ o con «funtor inclusión de $x$ en $y$»).

Resulta inmediátamente de *A 24* que $I_{xx} = I_x$ .

*A 26* $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall g)((x \subseteq z.\ y \subseteq z . g : I_x \rightarrow I_y .$

$(I_{xz} = I_{yz} \circ g)) \Longrightarrow (x \subseteq y.\ g = I_{xy}))$.

El axioma $A\,26$ expresa que, si el diagrama

$$\begin{tikzcd} I_x \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "I_{xz}"'] & I_y \arrow[d, "I_{yz}"] \\ & I_z \end{tikzcd}$$

es conmutativo, entonces «$x \subseteq y$. $g = I_{xy}$».

Por aplicación de $S\,8$ (§2, nº 5) a la categoría $P(z)$ se obtiene:

PROPOSICION 7. *Para toda categoría $z$ existe una única categoría $M(z) \subseteq P(z)$ tal que $u$ es morfismo de $M(z)$ si, y solo si, existe un morfismo $f$ de $z$ tal que $u = I_f$. Se la llama «categoría de los morfismos de $z$».*

*4. IMAGEN POR UN FUNTOR.*

$A27\ (\forall f)(f \text{ funtor} \Longrightarrow (\exists g)(R_1 . R_2))$, donde $R_1$ designa la relación:

$$g \text{ funtor}.\ (d(g) = d(f)).\ (c(g) \subseteq c(f)).\ (I_{c(g)c(f)} \circ g = f),$$

y $R_2$ la relación:

$$(\forall h)((h \mid g)R_1 \Longrightarrow ((c(g) \subseteq c(h)).\ (I_{c(g)c(h)} \circ g = h))).$$

*(§3, nº 2, def. 4).*

La relación «$R_1 . R_2$» resulta unívoca en $g$. Formulamos entonces la siguiente definición:

DEFINICION 7. Sean $f$ un funtor, $x$ su dominio (§3, nº 2, def. 4), $R_1$ y $R_2$ las relaciones de $A\,27$ y $R$ la relación «$R_1 . R_2$». Se llama «imagen de $f$», y se anota $f(x)$, al codominio del funtor $\tau_g(R)$, y se llama al funtor $\tau_g(R)$ «restricción de $f$ a su imagen».

DEFINICION 8. Sean $f$ un funtor, $x$ su dominio y $u \subseteq x$. Se llama «imagen por $f$ de $u$», y se anota $f(u)$, a la imagen del funtor $f \circ I_{ux}$, y se llama «restricción de $f$ a $u$ y a $f(u)$» a la restricción de $f \circ I_{ux}$ a su imagen.

NOTA. Puesto que $f \circ I_{xx} = f$, resulta que la imagen por $f$ de $x$ es igual a la imagen de $f$, y la restricción de $f$ a $x$ y a $f(x)$ es igual a la restricción de $f$ a su imagen.

PROPOSICION 8. *Sean $x$ e $y$ categorías tales que* $x \subseteq y$, y sea $u \subseteq x$. *Entonces la imagen de $u$ por $I_{xy}$ es $u$ y la restricción de $I_{xy}$ a $u$ y a $I_{xy}(u)$ es $I_u$.*

PROPOSICION 9. *Sean $f$ un funtor, $x$ su dominio y $g$ la restriccion de $f$ a su imagen. Entonces, $g(x) = f(x)$ y la restricción de $g$ a su imagen coincide con $g$.*

PROPOSICION 10. *Si $f$ es un funtor, $u$ y $v$ subcategorías de su dominio tales que $u \subseteq v$, y si $g$ y $h$ designan respectivamente las restricciones de $f$ a $u$ y a $f(u)$ y a $v$ y a $f(v)$, se tiene $f(u) \subseteq f(v)$ y $I_{f(u)f(v)} \circ g = h \circ I_{uv}$.*

*5. RELACIONES ENTRE UN FUNTOR Y SUS IMAGENES.*

A 28 $(\forall f)(\forall u)((f \text{ funtor. } unit(u).\ u \subseteq d(f)) \Longrightarrow unit(f(u)))$.

Por lo tanto, si $f$ es un funtor y $x$ un objeto de $d(f)$, entonces $f(x)$ es objeto de $c(f)$.

A 29 $(\forall f)(\forall h)((f \text{ funtor. } h$ es morfismo de $d(f)) \Longrightarrow f(h)$ es morfismo de $c(f))$.

A 30 $(\forall f)(\forall g)(\forall h)((f \text{ funtor. } g$ es morfismo de $d(f)$. $h$ es morfismo de $d(f)$. $g \text{ comp } h) \Longrightarrow (f(g) \text{ comp } f(h).\ f(g \underset{d(f)}{\circ} h) = f(g) \underset{c(f)}{\circ} f(h)))$.

PROPOSICION 11. *Si $f$ es un funtor y $h : x \xrightarrow[d(f)]{} y$, entonces $f(h) : f(x) \xrightarrow[c(f)]{} f(y)$.*

A 31 $(\forall f)(\forall g)(\forall u)((f \text{ funtor. } g \text{ funtor. } f \text{ comp } g.\ u \subseteq d(g)) \Longrightarrow (f(g(u)) \subseteq f \circ g(u)))$.

A32 $(\forall f)(\forall g)((f \text{ funtor. } g \text{ funtor. } d(f) = d(g).\ c(f) = c(g).$ $(\forall u)(u$ morfismo de $d(f) \Longrightarrow f(u) = g(u))) \Longrightarrow (f = g))$.

PROPOSICION 12. *Sean $f$ y $g$ funtores tales que $f$ comp $g$. Para toda categoría $u$ tal que $u \subseteq d(g)$, se cumple $f(g(u)) = f \circ g(u)$.*

## 4. Conjuntos.

*1. DEFINICION DE CONJUNTO. EL CONJUNTO VACIO.*

DEFINICION 1. Se dice que una categoría unitaria $X$ es un « conjunto» si es funtorial y si $E(X)$ ( § 3, def. 2) tiene solamente morfismos objetos. A los funtores entre conjuntos se los llama « funciones ».

Si $x$ es una categoría tal que todos sus morfismos son morfismos objetos, entonces $I_x$ es un conjunto puesto que $I_x$ es unitaria y funtorial y además $E(I_x) = x$. Se puede formular entonces la siguiente definición:

DEFINICION 2. Se llama « conjunto vacío» y se designa con $\emptyset$ a la identidad $I_\Phi$ sobre la categoría nula. ( § 1, nº 4).

## 2. *LAS RELACIONES DE PERTENENCIA E INCLUSION.*

DEFINICION 3. La relación designada por « $x$ es objeto de $E(X)$» se anota en cualquiera de las formas siguientes : «$x \in X$», «$x$ pertenece a $X$» «$x$ es elemento de $X$». La relación « $\sim (x \in X)$» se anota « $x \notin X$ ».

DEFINICION 4. Si $X$ e $Y$ son conjuntos, se designa la relación : « $E(X) \subseteq E(Y)$» en cualquiera de las formas siguientes : « $X \subseteq Y$», « $X$ es subconjunto de $Y$», «$X$ es parte de $Y$».

PROPOSICION 1. *Si $X$ e $Y$ son conjuntos, la relación « $X \subseteq Y$» es equivalente a $(\forall z)(z \in X \Longrightarrow z \in Y)$.*

Como la relación « $X = Y$» para dos conjuntos $X$ e $Y$ es equivalente a «$X \subseteq Y$. $Y \subseteq X$», resulta $X = Y$ si y solo si $(\forall z)(z \in X \Longleftrightarrow z \in Y)$.

PROPOSICION 2. $(\forall x)(x \notin \emptyset)$.

## 3. *CONJUNTOS UNITARIOS. CONJUNTO DE DOS ELEMENTOS. PAR ORDENADO.*

DEFINICION 5. Se dice que un conjunto $X$ es «unitario» si $unit(E(X))$.

PROPOSICION 3. *Un conjunto es unitario si, y solo si, tiene un único elemento. Si $X$ es unitario su único elemento es $E(X)$.*

Puesto que $E(I_x) = x$, si $x$ es una categoría unitaria, entonces $I_x$ es un conjunto unitario cuyo único elemento es $x$.

DEFINICION 6. Si $x$ es una categoría unitaria, designaremos con $\{x\}$ al conjunto unitario $I_x$. Luego, $x \in \{x\}$.

Si $x$ e $y$ son categorías unitarias, existe la categoría $[x, y]$ ( § 2, nº 3) cuyos únicos morfismos son $x$ e $y$. Luego, $I_{[x,y]}$ es un conjunto, que, además, tiene a $x$ e $y$ como únicos elementos.

DEFINICION 7. Designaremos la categoría $I_{[x,y]}$ con $\{x, y\}$. En particular, si $x$ es unitaria y $x = y$, se tiene $\{x, x\} = I_{[x,x]} = I_x = \{x\}$.

DEFINICION 8. Se designa el término $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ con $(x,y)$ o con «par ordenado $xy$».

PROPOSICION 4. *Si $x$ e $y$ son categorías unitarias, $(x, y)$ es un conjunto y, si también $x'$ e $y'$ son categorías unitarias, la relación $(x, y) = (x', y')$ es equivalente a « $x = x'$. $y = y'$ ».*

## 4. EL CONJUNTO DE PARTES DE UN CONJUNTO.

PROPOSICION 5. *Si $x$ es una categoría y si se designa con $z$ al término $I_{0(P(E(x)))}$ (§2, nº 5), vale la relación:*

*« $z$ es conjunto. $(\forall u)(u \in z \Longleftrightarrow unit(u).\ funt\, u.\ E(u) \subseteq E(x))$ ».*

DEFINICION 9. Se designará al conjunto $I_{0(P(E(x)))}$ con $B(x)$ o con « conjunto de partes de $x$ ».

COROLARIO 1. Si $X$ es conjunto, la relación « $Y \in B(X)$ » es equivalente a « $Y$ es conjunto. $Y \subseteq X$ ».

## 5. FUNTORES DE SUBYACENCIA O DE OLVIDO.

Puesto que la categoría $M(z)$ de los morfismos de $z$ (§3, prop. 7) tiene solamente morfismos objetos, $I_{M(z)}$ es un conjunto.

DEFINICION 10. Llamaremos «conjunto de los morfismos de $z$», y anotaremos $\mathfrak{M}(z)$, a la identidad $I_{M(z)}$ sobre la categoría de los morfismos de $z$.

*A 33* $(\forall z)(z$ es funtorial $\Longrightarrow (\exists p)(p$ es funtor. $d(p) = z.\ R_1.\ R_2))$,

donde $R_1$ y $R_2$ designan respectivamente las relaciones siguientes:

$$(\forall u)(u \text{ objeto de } z \Longrightarrow p(u) = \mathfrak{M}_{E(u)}),$$

$$(\forall f)(f : u \underset{z}{\rightarrow} u' \Longrightarrow (\forall b)(b \text{ morfismo de } E(u) \Longrightarrow p(f)(I_b) = I_{f(b)})).$$

Diremos que un funtor es de subyacencia o de olvido si su dominio es una categoría funtorial $z$ y si verifica además las relaciones $R_1$ y $R_2$ de *A 33*.

## 5. La teoria de conjuntos.

La siguiente teoría de conjuntos es una teoría matemática en la que figuran los signos específicos y los axiomas de la teoría de categorías y los esquemas *S9* y *S10* que se introducen en este mismo número.

DEFINICION 1. Se dice que $u$ es una categoría completa de conjuntos si

1) *funt* $u$.

2) $(\forall x)(x$ es objeto de $u \Longrightarrow x$ es conjunto$)$.

3) $(\forall x)(\forall y)(x$ es objeto de $u \Longrightarrow (y \in x \Longrightarrow y$ es objeto de $u))$.

4) $(\forall x)(\forall y)((x$ es objeto de $u$ . $y$ es objeto de $u) \Longrightarrow (\{x, y\}$ es objeto de $u))$.

5) $(\forall x)(x$ es objeto de $u \Longrightarrow B(x)$ es objeto de $u)$.

La categoría nula verifica las relaciones precedentes: es verdadera la relación $(\exists u)(u$ es una categoría completa de conjuntos$)$.

DEFINICION 2. Designaremos con $Z$ al término $\tau_u$ $(u$ es una categoría completa de conjuntos$)$.

*S9*. Si $\mathbf{R}$ es una relación y $\mathbf{x}$ una letra, la siguiente relación es verdadera

$$\tau_{\mathbf{x}}(\mathbf{x} \text{ es objeto de } Z . \mathbf{R}) \text{ es objeto de } Z.$$

*S10*. Si $\mathbf{R}$ es una relación, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ letras distintas, $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ letras distintas de $\mathbf{x}$ y de $\mathbf{y}$ y que no figura en $\mathbf{R}$ y $\mathbf{W}$ una letra distinta de $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{Y}$ y que no figura en $\mathbf{R}$, vale la relación :

$$(\forall \mathbf{y})(\exists \mathbf{X})(\mathbf{X} \text{ es objeto de } Z . (\forall \mathbf{x})(\mathbf{R} \Longrightarrow \mathbf{x} \in \mathbf{X})) \Longrightarrow$$
$$(\forall \mathbf{Y})(\mathbf{Y} \text{ es objeto de } Z \Longrightarrow (\exists \mathbf{W})(\mathbf{W} \text{ es objeto de } Z .$$
$$(\forall \mathbf{x})(\mathbf{x} \in \mathbf{W} \Longleftrightarrow (\exists \mathbf{y})(\mathbf{y} \in \mathbf{Y} . \mathbf{R})))).$$

## 6. Interpretación de la teoría de conjuntos de Bourbaki en la teoría de conjuntos.

### 1. *TRADUCCION DE ASSEMBLAGES.*

En este parágrafo designaremos con $\mathcal{T}_1$ a la teoría de conjuntos precedente, y con $\mathcal{T}_0$ a la teoría de conjuntos de Bourbaki [1].

DEFINICION 1. Si **A** es un assemblage de una construcción formativa $\mathcal{C}$ de $\mathcal{T}_o$ llamaremos «traducción de **A** en $\mathcal{C}$» e indicaremos con **A'** el assemblage de $\mathcal{T}_1$ obtenido empleando la regla de recurrencia siguiente:

Si **A** es una letra (resp. «**B** $\vee$ **C**», «$\sim$ **B**», «**B** $=$ **C**», «**B** $\in$ **C**», «(**B**, **C**)», «$\tau_x$(**B**)»), entonces **A'** es la misma letra (resp. «**B'** $\vee$ **C'**», «$\sim$ **B'**», «**B'** $=$ **C'**», «**B'** $\varepsilon$ **C'**», «$\tau_x$($x$ es objeto de $Z$.**B'**)»).

PROPOSICION 1. *La traducción* **A'** *de* **A** *es independiente de la construcción formativa en la que se efectúa.*

PROPOSICION 2. *La traducción de una relación (resp. de un término) de de* $\mathcal{T}_o$ *es una relación (resp. un término) de* $\mathcal{T}_1$.

PROPOSICION 3. *Si* **x** *es una letra,* **A** *y* **B** *assemblages de* $\mathcal{T}_o$, *la traducción de* «(**B** | **x**)**A**» *es* «(**B'** | **x**)**A'**», *donde* **A'** *y* **B'** *designan las traducciones de* **A** *y* **B** *respectivamente.*

En la proposición siguiente se designa con «$(\overline{\forall} x)$**R**» (resp. «$(\overline{\exists} x)$**R**») a la relación «$(\forall x)$($x$ es objeto de $Z$.**R**)» (resp. «$(\exists x)$ ($x$ es objeto de $Z$.**R**)»).

PROPOSICION 4. *Si* **R** *es una relación de* $\mathcal{T}_o$ *de la forma*

$$(Q_1 \mathbf{x}_1)(Q_2 \mathbf{x}_2)\dots(Q_n \mathbf{x}_n)\mathbf{S}$$

*donde cada* $Q_i$ *es un cuantificador, la traducción* **R'** *de* **R** *es equivalente en* $\mathcal{T}_1$ *a*

$$(\overline{Q}_1 \mathbf{x}_1)(\overline{Q}_2 \mathbf{x}_2)\dots(\overline{Q}_n \mathbf{x}_n)\mathbf{S}'.$$

## 2. *TRADUCCION DE LOS ESQUEMAS Y AXIOMAS EXPLICITOS DE LA TEORIA DE CONJUNTOS DE BOURBAKI.*

PROPOSICION 5. *Las traducciones de los axiomas implícitos de* $\mathcal{T}_o$ *formados por aplicación de los esquemas de las teorías igualitarias son teoremas de* $\mathcal{T}_1$.

PROPOSICION 6. *La traducción de los axiomas implícitos de* $\mathcal{T}_o$ *obtenidos por aplicación del esquema de selección y reunión son teoremas de* $\mathcal{T}_1$. *Las traducciones de los axiomas explícitos* $A_1, \dots, A_4$ *de* $\mathcal{T}_o$ *son teoremas de* $\mathcal{T}_1$.

COROLARIO 1. *La traducción de un teorema de* $\mathcal{T}_0$ *obtenido empleando todos los esquemas y los axiomas explícitos* $A_1, \dots, A_4$ *de esa teoría es un teorema de* $\mathcal{T}_1$.

## 7. Interpretación de la teoría de categorías en la teoría de conjuntos de Bourbaki.

*1. CATEGORIAS.*

En todo este número se razonará en la teoría de conjuntos de Bourbaki [ 1 ] .

CONVENCIONES. Se adoptará la definición de categoría de [2] con la salvedad que, si el par $(C, K)$ es una categoría, $C$ es un conjunto y $K$ designa la gráfica de una ley de composición parcialmente definida sobre $C$ y no la ley de composición misma. Siguiendo las notaciones de ([ 1 ], pag. 68), designaremos con $pr_1 z$ (resp. $pr_2 z$) el término

$$\tau_x((\exists y)(z = (x, y))) \text{ (resp. } \tau_y((\exists x)(z = (x, y)))).$$

Si $z = (C, K)$ es una categoría, las aplicaciones fuente y blanco (source et but en [2]) se designan con $\alpha_z$ y $\beta_z$ respectivamente. Si $(g, f)$ es un par de elementos componibles, se anotará « $g \underset{z}{comp} f$» y su composición se indicará con $g \underset{z}{\circ} f$. Los elementos de $C$ se llamarán morfismos de $z$. Si $z'$ es una subcategoría de $z$ se designará con $I_{zz'}$ al funtor inclusión de $z$ en $z'$, y si $z = z'$ se designará con $I_z = I_{zz}$ al funtor idéntico sobre $z$.

DEFINICION 1. Sean $z$ una categoría y $f$ un morfismo de $z$. Se designará con $\tilde{f}_z$ (o con $\tilde{f}$ si la categoría $z$ está sobre entendida) a la subcategoría de $z$ cuyo conjunto de morfismos es $\{\alpha_z(f), f, \beta_z(f)\}$. Se designará con « $x$ es categoría morfismo de $z$» la relación $(\exists f)(f$ es morfismo de $z . x = \tilde{f}_z)$.

PROPOSICION 1. *Sea $z$ una categoría. La relación « $x$ es categoría morfismo de $z$» es colectivizante en $x$ ([ 1 ], pag. 62). Designando con $\tilde{C}$ al conjunto de categorías morfismo de $z$ y con $\tilde{K}$ al conjunto de pares $((\tilde{f}, \tilde{g}), \widetilde{f \underset{z}{\circ} g})$ tales que $f \underset{z}{comp}\, g$, el par $(\tilde{C}, \tilde{K}) = \tilde{z}$ es una categoría.*

DEFINICION 2. Diremos que una categoría es «funtorial» si sus morfismos son funtores y la ley de composición es la ordinaria entre funtores.

PROPOSICION 2. *Sea z una categoría. Si R designa la relación*

$(\exists x)(\exists y)(x$ *es subcategoría de* $y$. $y$ *es subcategoría de* $z$. $f = I_{xy})$,

*R es colectivizante en f. Si K es la gráfica de la ley de composición ordinaria entre funtores de* $\mathfrak{S}_f(R)$ *([1], pag. 63), el par* $(\mathfrak{S}_f(R), K)$ *es una categoría a la que llamaremos « categoría de partes de z» y designaremos con* $P(z)$.

*2. TRADUCCION DE LOS AXIOMAS DE LA TEORIA DE CATEGORIAS.*

En este número designaremos con $\mathcal{T}$ a la teoría de categorías tal cual ha sido expuesta en los parágrafos 1, 2, 3, 4 y con $\mathcal{T}'_o$ a la teoría obtenida agregando a la teoría de conjuntos de Bourbaki el esquema siguiente

*S*. Si **R** es una relación y **x** una letra, la relación

$$«\tau_{\mathbf{x}}(\mathbf{x} \text{ es categoría. } \mathbf{R}) \text{ es categoría}»$$

es un axioma.

DEFINICION 1. Si **A** es un assemblage de una construcción formativa *C* de $\mathcal{T}$ llamaremos «traducción de **A** en *C*» e indicaremos con **A'** el assemblage de $\mathcal{T}'_o$ obtenido empleando la regla de recurrencia siguiente :

Si **A** es una letra, **A'** es la misma letra,

si **A** es el assemblage « $\mathbf{B} \vee \mathbf{C}$», **A'** es « $\mathbf{B'} \vee \mathbf{C'}$»,

si **A** es el assemblage « $\sim \mathbf{B}$» , **A'** es « $\sim \mathbf{B'}$»,

si **A** es el assemblage « $\mathbf{B} = \mathbf{C}$», **A'** es « $\mathbf{B'} = \mathbf{C'}$»,

si **A** es el assemblage « $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{C}$», **A'** es «**B'** es subcategoría de **C'**» ,

si **A** es el assemblage « $\mathbf{B} \underset{\mathbf{D}}{comp} \mathbf{C}$» , **A'** es « $\mathbf{B'} \underset{\tilde{\mathbf{D}}'}{comp} \mathbf{C'}$» (nº 1, prop. 1 ),

si **A** es el assemblage « $\mathbf{B} \underset{\tilde{\mathbf{D}}}{\circ} \mathbf{C}$» , **A'** es « $\tau_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}$ es categoría. $((\mathbf{B'}, \mathbf{C'}), \mathbf{x}) \in pr_2 \mathbf{D'})$», donde **x** es una letra que no figura en **B** , ni en **C** , ni en **D** ,

si **A** es el assemblage « *funt* **B**», **A'** es «**B'** es funtorial»,

si **A** es el assemblage « $I_{\mathbf{B}}$», **A'** es « $\tilde{I}_{\mathbf{B'}}$», si $\mathbf{A}$ es el assemblage « $P(\mathbf{B})$ », $\mathbf{A}'$ es « $P(\mathbf{B}')$ »,

si $\mathbf{A}$ es el assemblage $\tau_{\mathbf{x}}(\mathbf{B})$, $\mathbf{A}'$ es el assemblage $\tau_{\mathbf{x}}$ ( $\mathbf{x}$ es categoría. $\mathbf{B}'$ )».

PROPOSICION 3. *La traducción* $\mathbf{A}'$ *de* $\mathbf{A}$ *es independiente de la construcción formativa en la que se efectúa.*

PROPOSICION 4. *Si* $\mathbf{x}$ *es una letra,* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *assemblages de* $\mathfrak{T}$, *la traducción de* « $(\mathbf{B} \mid \mathbf{x})\mathbf{A}$ » *es* « $(\mathbf{B}' \mid \mathbf{x})\mathbf{A}'$ ».

Si $\mathbf{R}$ es una relación de $\mathfrak{T}'_o$ se designará con «$(\overline{\exists} x)\mathbf{R}$» (resp. $(\overline{\forall} x)\mathbf{R}$») la relación

$$(\forall x)(x \text{ es categoría} \Longrightarrow \mathbf{R}) \text{ (resp. } (\exists x)(x \text{ es categoría. } \mathbf{R}))).$$

PROPOSICION 5. *Si* $\mathbf{R}$ *es una relación de* $\mathfrak{T}$ *de la forma*

$$(Q_1 \mathbf{x}_1)(Q_2 \mathbf{x}_2) \ldots (Q_n \mathbf{x}_n)\mathbf{S}$$

*donde cada* $Q_i$ *es un cuantificador, la traducción* $\mathbf{R}'$ *de* $\mathbf{R}$ *es equivalente en* $\mathfrak{T}'_o$ *a*

$$(\overline{Q}_1 \mathbf{x}_1)(\overline{Q}_2 \mathbf{x}_2) \ldots (\overline{Q}_n \mathbf{x}_n)\mathbf{S}'.$$

PROPOSICION 6. *Las traducciones de los axiomas implícitos de* $\mathfrak{T}$ *formados por aplicación de los esquemas de las teorías igualitarias* ( [ *1* ], *pag. 44* ) *son teoremas de* $\mathfrak{T}'_o$.

PROPOSICION 7. *Las traducciones de los axiomas de* $\mathfrak{T}$ *son teoremas de* $\mathfrak{T}'_o$.

COROLARIO 1. *La traducción de un teorema de* $\mathfrak{T}$ *es un teorema de* $\mathfrak{T}'_o$.

NOTA. Volviendo a la categoría $Z$ definida en la «teoría de conjuntos» (§**5**), si se toma la categoría $O(Z)$ de los objetos de $Z$ (§**2**, def. 9) se obtiene una categoría que tiene solamente morfismos objetos, de donde, $I_{O(Z)} = U$ es un conjunto y vale la relación :

$$x \text{ es objeto de } Z \Longleftrightarrow x \in U.$$

Se cumple además que $U$ es un universo en el sentido de Grothendieck-Sonner [ 5 ].

**Referencias.**

[1] N. BOURBAKI. *Théorie des ensembles,* chap. 1, 2. Hermann, 1960.

[2] C. EHRESMANN. *Catégories et structures,* Dunod, 1965.

[3] J. HOUDEBINE. *Théorie des ensembles dans le cadre d'une théorie des classes,* Comptes Rendus Acad. Sc. 260, (1965).

[4] L. OUBIÑA. *Teoría logico-axiomática de categorías,* Tesis de doctorado, Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de La Plata Argentina, 1966.

[5] J. SONNER. *On the formal definition of categories,* Math. Zeitschr. 80 (1962), 163-176.