CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

S. LEGRAND

Transformations naturelles généralisées

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 10, n° 3 (1968), p. 351-374

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1968__10_3_351_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE *Vol. X,3*
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

TRANSFORMATIONS NATURELLES GENERALISEES

par S. LEGRAND

De façon générale les notations sont celles de [1].

1. Définitions - Exemples.

D'après ([1], ch. I) une transformation naturelle de néofoncteurs peut être identifiée à un néofoncteur dont le but est un graphe multiplicatif de quatuors muni de la multiplication latérale. On est amené à généraliser la notion de transformation naturelle.

Généralisation :

Soient $(G^{\cdot}, G^{\perp})$ un graphe multiplicatif double, $(G_o^{\cdot})^{\perp}$ le sous-graphe multiplicatif de $G^{\perp}$ défini par la classe des unités de $G^{\cdot}$, $\Phi = (G^{\perp}, \underline{\Phi}, \Gamma^{\perp})$ un néofoncteur. Soit $\alpha^{\cdot}\Phi$ (resp. $\beta^{\cdot}\Phi$) le néofoncteur de $\Gamma^{\perp}$ vers $(G_o^{\cdot})^{\perp}$ défini par :

$$(\alpha^{\cdot}\Phi)(g) = \alpha^{\cdot}(\Phi(g)) = \text{source de } \Phi(g) \text{ pour la loi } .,$$

$$(\text{resp. } \beta^{\cdot}\Phi(g) = \beta^{\cdot}(\Phi(g)) = \text{but de } \Phi(g) \text{ pour la loi } .).$$

DEFINITION. *Le couple* $((G^{\cdot}, G^{\perp}), \Phi)$ *est appelé transformation naturelle généralisée.*

De façon plus précise, ε étant un isomorphisme fixé de $(G_o^{\cdot})^{\perp}$ vers un graphe multiplicatif $C^{\perp}$, on dit que $((G^{\cdot}, G^{\perp}), \Phi)$ est une transformation naturelle généralisée de $\varepsilon \circ \alpha^{\cdot}\Phi$ vers $\varepsilon \circ \beta^{\cdot}\Phi$.

Exemple des transformations naturelles au sens habituel :

Soient $(G^{\boxminus}, G^{\boxdot})$ le graphe multiplicatif double des quatuors d'un graphe multiplicatif $C^{\perp}$ pour les multiplications longitudinale et latérale, $\varepsilon = (C^{\perp}, \underline{\varepsilon}, (G_o^{\boxdot})^{\boxminus})$ l'isomorphisme canonique de $(G_o^{\boxdot})^{\boxminus}$ vers $C^{\perp}$ défini par :

$$\varepsilon(f, \beta^{\perp}(f), \alpha^{\perp}(f), f) = f \quad \text{si} \quad f \in C.$$

Avec les notations usuelles, une transformation naturelle (F_2, τ, F_1) entre néofoncteurs de $\Gamma^{\perp}$ vers $C^{\perp}$ correspond à la transformation naturelle généralisée $((G^{\boxminus}, G^{\boxminus}), \Phi)$, où Φ est défini par

$$\Phi(h) = (F_2(h), \tau(\beta^{\perp}(h)), \tau(\alpha^{\perp}(h)), F_1(h)) \quad \text{si} \quad h \in \Gamma,$$

et par suite $F_1 = \varepsilon \circ \alpha^{\boxminus}\Phi$, $F_2 = \varepsilon \circ \beta^{\boxminus}\Phi$.

Graphe multiplicatif $\mathfrak{N}((G^{\bullet}, G^{\perp}), \Gamma^{\perp})^{\bullet}$.

Soit $\mathcal{N}'$ (resp. $\mathcal{F}$) la catégorie des néofoncteurs (resp. foncteurs) au-dessus d'une catégorie pleine d'applications $\mathcal{M}$ associée à un univers $\mathcal{M}_o$. Soient $\overline{\mathcal{N}'}(p_{\mathcal{N}'})$ et $\mathcal{F}(p_{\mathcal{F}})$ les catégories de néofoncteurs doubles et foncteurs doubles correspondantes [2].

Soient $(G^{\bullet}, G^{\perp}) \in \overline{\mathcal{N}'}(p_{\mathcal{N}'})_o$ un graphe multiplicatif double et $\Gamma^{\perp} \in \mathcal{N}'_o$ un graphe multiplicatif. Désignons par $\mathfrak{N}((G^{\bullet}, G^{\perp}), \Gamma^{\perp})$ la classe des transformations naturelles généralisées $\overline{\Phi} = ((G^{\bullet}, G^{\perp}), \Phi)$ telles que $\Phi \in \mathcal{N}'$ et $\Gamma^{\perp} = S(\overline{\Phi})$, où $S(\overline{\Phi})$ désigne la source du néofoncteur Φ.

$\mathfrak{N}((G^{\bullet}, G^{\perp}), \Gamma^{\perp})^{\bullet}$ est un graphe multiplicatif pour la loi . définie comme suit : Si $\overline{\Phi}_1 = ((G^{\bullet}, G^{\perp}), \Phi_1)$, $\overline{\Phi}_2 = ((G^{\bullet}, G^{\perp}), \Phi_2)$:

$$(\overline{\Phi}_1, \overline{\Phi}_2) \to \overline{\Phi}_1 . \overline{\Phi}_2 = ((G^{\bullet}, G^{\perp}), \Phi_1 . \Phi_2)$$

si, et seulement si, $(\Phi_1 . \Phi_2)(f) = \Phi_1(f) . \Phi_2(f)$ est défini pour chaque $f \in \Gamma$,

$$\alpha \cdot \overline{\Phi}_1 = ((G^{\bullet}, G^{\perp}), (G^{\perp}, \underline{\alpha \cdot \Phi}_1, \Gamma^{\perp}))$$
$$\beta \cdot \overline{\Phi}_1 = ((G^{\bullet}, G^{\perp}), (G^{\perp}, \underline{\beta \cdot \Phi}_1, \Gamma^{\perp})).$$

REMARQUES.

1) Si ε est un isomorphisme fixé de $(G^{\bullet}_o)^{\perp}$ sur un graphe multiplicatif $C^{\perp}$, la classe des unités de $\mathfrak{N}(G^{\bullet}, G^{\perp}), \Gamma^{\perp})^{\bullet}$ peut être identifiée à la classe des néofoncteurs de source $\Gamma^{\perp}$, de but $C^{\perp}$. Désignons par $\mathfrak{N}_{\varepsilon}((G^{\bullet}, G^{\perp}), \Gamma^{\perp})$ le graphe multiplicatif obtenu par cette identification.

2) Si $G^{\bullet}$ est une catégorie, $\mathfrak{N}((G^{\bullet}, G^{\perp}), \Gamma^{\perp})^{\bullet}$ est une catégorie.

Graphes multiplicatifs $\mathfrak{N}'((G^\bullet, G^\perp))^\bullet$ *et* $\mathfrak{N}((G^\bullet, G^\perp))^\bullet$.

Désignons par $\mathfrak{N}'((G^\bullet, G^\perp))^\bullet$ le graphe multiplicatif somme des graphes multiplicatifs $\mathfrak{N}((G^\bullet, G^\perp), \Gamma^\perp)^\bullet$ pour $\Gamma^\perp$ variant dans $\mathcal{N}'_o$, dont les éléments sont les transformations naturelles généralisées $((G^\bullet, G^\perp), \Phi)$ telles que $\Phi \in \mathcal{N}'$. Si $G^\bullet$ est une catégorie, $\mathfrak{N}'((G^\bullet, G^\perp))^\bullet$ est une catégorie.

Si $G^\perp$ est une catégorie, soit $\mathfrak{N}((G^\bullet, G^\perp))^\bullet$ le sous-graphe multiplicatif de $\mathfrak{N}'((G^\bullet, G^\perp))^\bullet$ dont les éléments sont les $((G^\bullet, G^\perp), \Phi)$ tels que $\Phi \in \mathcal{F}$. On peut comme précédemment définir $\mathfrak{N}'_\varepsilon((G^\bullet, G^\perp))^\bullet$ et $\mathfrak{N}_\varepsilon((G^\bullet, G^\perp))^\bullet$.

NOTATIONS ET CONVENTIONS. Si $\mathcal{C}^\bullet = \mathfrak{N}((G^\bullet, G^\perp), \Gamma^\perp)^\bullet$ (resp. $\mathfrak{N}'((G^\bullet, G^\perp))$, resp. $\mathfrak{N}((G^\bullet, G^\perp))$), $\overline{\Phi} \in \mathcal{C}$ sera appelée $\mathcal{C}$-transformation naturelle généralisée, et la lettre Φ désignera le foncteur ou néofoncteur Φ tel que $\overline{\Phi} = ((G^\bullet, G^\perp), \Phi)$. Dans toute la suite, sauf indication contraire, les foncteurs ou néofoncteurs Φ seront des éléments de $\mathcal{F}$ ou $\mathcal{N}'$.

Le même signe d'opération $\perp$ a été employé pour $G^\perp$ et $\Gamma^\perp$ dans $\mathfrak{N}((G^\bullet, G^\perp), \Gamma^\perp)$. Ce n'est évidemment pas nécessaire.

EXEMPLES.

1) Si $(G^{\boxdot}, G^{\boxminus})$ est le graphe multiplicatif double des quatuors d'un graphe multiplicatif $C^\perp$ et ε l'isomorphisme canonique de $(G^{\boxdot}_o)^{\boxminus}$ vers $C^\perp$, le graphe multiplicatif des transformations naturelles au sens habituel entre néofoncteurs de $\Gamma^\perp$ vers $C^\perp$ (néofoncteurs $\in \mathcal{N}'$) peut être identifié à $\mathfrak{N}_\varepsilon((G^{\boxdot}, G^{\boxminus}), \Gamma^\perp)^{\boxdot}$.

2) On peut dans l'exemple précédent remplacer G par la classe G' des quadruplets (f', g', g, f) d'éléments de $C^\perp$ tels que $\alpha^\perp(f') = \beta^\perp(g)$, $\beta^\perp(f') = \beta^\perp(g')$, $\alpha^\perp(g') = \beta^\perp(f)$ et $\alpha^\perp(g) = \alpha^\perp(f)$, $(G^{\boxdot}, G^{\boxminus})$ et ε par $(G'^{\boxdot}, G'^{\boxminus})$ et ε' jouant des rôles analogues. Soit

$$\mathcal{C}'^{\boxdot} = \mathfrak{N}_{\varepsilon'}((G'^{\boxdot}, G'^{\boxminus}), \Gamma^\perp)^{\boxdot}.$$

Soient F_1 et F_2 des néofoncteurs de source $\Gamma^\perp$ et de but $C^\perp$. Il existe une $\mathcal{C}'$-transformation naturelle généralisée de F_1 vers F_2 si, et seulement si, pour chaque $e \in \Gamma_o^{\perp}$, il existe une flèche dans $C^{\perp}$ de source $F_1(e)$ et de but $F_2(e)$.

3) Soit $(C^{\perp}, <)$ où $C^{\perp} \in \mathfrak{N}'_o$ et « < » désigne un préordre compatible avec la loi de composition et les applications source et but dans $C^{\perp}$. Soit G la sous-classe de $C \times C$ formée des couples (g, f) tels que l'on ait $g < f$. G définit un sous-graphe multiplicatif $G^{\perp}$ de $C^{\perp} \times C^{\perp}$ et une sous-catégorie $G^{\bullet}$ de la catégorie des couples de C ($(g_1, f_1).(g_2, f_2)$ est défini dans G' si et seulement si $f_1 = g_2$ et $(g_1, f_1).(g_2, f_2) = (g_1, f_2)$). On identifie $(G_o^{\bullet})^{\perp}$ à $C^{\perp}$, $(G^{\bullet}, G^{\perp})$ est un graphe multiplicatif double. Soient $\Gamma^{\perp} \in \mathfrak{N}'_o$ et $\mathcal{C}^{\bullet} = \mathfrak{N}((G^{\bullet}, G^{\perp}), \Gamma^{\perp})^{\bullet}$. $\mathcal{C}$ s'identifie à la classe des couples (F_1, F_2) de néofoncteurs de $\Gamma^{\perp}$ vers $C^{\perp}$ tels que pour chaque $h \in \Gamma$ on ait $F_1(h) < F_2(h)$.

4) Soit $\overline{\mathcal{F}}$ la catégorie des foncteurs au-dessus d'une catégorie pleine d'applications $\mathfrak{M}$ telle que la classe $\overline{\mathcal{F}} \in \mathfrak{M}_o$. Les transformations naturelles entre foncteurs $\in \overline{\mathcal{F}}$ forment une deux-catégorie $(\mathcal{G}^{\square}, \mathcal{G}^{\diamond})$ ([1] ch. II). Soit $\mathcal{H}^{\perp} \in \mathcal{F}_o$.

Si $\overline{\Phi} \in \mathfrak{N}((\mathcal{G}^{\square}, \mathcal{G}^{\diamond}), \mathcal{H}^{\perp})$, pour chaque $h \in \mathcal{H}$, $\Phi(h)$ est une transformation naturelle au sens usuel entre les foncteurs $\alpha^{\square}\Phi(h)$ et $\beta^{\square}\Phi(h)$ de source commune $\Phi(\alpha^{\perp}(h))$ et de but $\Phi(\beta^{\perp}(h))$.

2. Etude de produits, sommes, noyaux dans $\mathfrak{N}((G^{\bullet}, G^{\perp}), \Gamma^{\perp})$, dans le cas où $(G^{\bullet}, G^{\perp})$ est une catégorie double.

Soient $(G^{\bullet}, G^{\perp})$ une catégorie double ($G \in \mathfrak{M}$) et $\mathcal{J}$ une classe de classes non vides telle qu'il existe une application $\mathcal{J}$-produit naturalisé π dans $G^{\bullet}$ ([1] ch. IV).

Supposons que π soit $\perp$ compatible dans $G^{\bullet}$ c'est-à-dire que :

Pour chaque famille $(e_i)_{i \in I}$ où $I \in \mathcal{J}$ et $e_i \in G_o^{\bullet}$, si $\pi((e_i)_{i \in I}) = ((p_i)_{i \in I}, e)$, alors

$$\pi((\alpha^{\perp}(e_i))_{i \in I}) = ((\alpha^{\perp}(p_i))_{i \in I}, \alpha^{\perp}(e))$$

et $$\pi((\beta^{\perp}(e_i))_{i \in I}) = ((\beta^{\perp}(p_i))_{i \in I}, \beta^{\perp}(e)),$$

Pour chaque famille $(e'_i)_{i \in I}$ où $e'_i \in G_o^{\bullet}$ et $e'_i \perp e_i$ est défini dans $G^{\perp}$ pour chaque i, si $\pi((e'_i)_{i \in I}) = ((p'_i)_{i \in I}, e')$, alors

$$\pi((e'_i \perp e_i)_{i \in I}) = ((p'_i \perp p_i)_{i \in I}, e' \perp e).$$

Si (Π, π) est le foncteur $\mathcal{J}$-produit naturalisé associé à π, il en résulte que Π est compatible avec la structure $\perp$ dans $G^{\perp}$. En effet : soient $(g_i)_{i \in I}$ et $(g'_i)_{i \in I}$ où $I \in \mathcal{J}$ tels que $g_i \in G$, $g'_i \in G$ et $g'_i \perp g_i$ soit défini pour chaque i, $\beta^{\cdot}(g'_i) = e'_i$, $\beta^{\cdot}(g_i) = e_i$, $\alpha^{\cdot}(g'_i) = \hat{e}'_i$, $\alpha^{\cdot}(g_i) = \hat{e}_i$. Il existe $g = \Pi((g_i)_{i \in I})$ et $g' = \Pi((g'_i)_{i \in I})$ vérifiant :

$$g_i . \hat{p}_i = p_i . g \quad \text{et} \quad g'_i . \hat{p}'_i = p'_i . g' \text{ pour chaque } i\,;$$

$$\beta^{\perp}(g_i) . \beta^{\perp}(\hat{p}_i) = \beta^{\perp}(p_i) . \beta^{\perp}(g) \quad \text{et} \quad \alpha^{\perp}(g'_i) . \alpha^{\perp}(\hat{p}'_i) = \alpha^{\perp}(p'_i) . \alpha^{\perp}(g')$$

entraînent (unicité du produit) $\Pi((\beta^{\perp}(g_i))_{i \in I}) = \beta^{\perp}(g)$, $\Pi((\alpha^{\perp}(g'_i))_{i \in I}) = \alpha^{\perp}(g')$; d'où $\alpha^{\perp}(g') = \beta^{\perp}(g)$ et $g' \perp g$ est défini, $(g'_i \perp g_i).(\hat{p}'_i \perp \hat{p}_i) = (p'_i \perp p_i).(g' \perp g)$ pour chaque i, $g' \perp g = \Pi((g'_i \perp g_i)_{i \in I})$. Π commute avec la loi de composition et les applications source et but dans $G^{\perp}$.

Soit $\Gamma^{\perp} \in \mathfrak{N}'_o$, non vide. Nous allons voir que :

PROPOSITION 1. *S'il existe dans $G^{\cdot}$ une application $\mathcal{J}$-produit naturalisé $\perp$-compatible, $\mathfrak{N}((G^{\cdot}, G^{\perp}), \Gamma^{\perp})^{\cdot}$ est à $\mathcal{J}$-produits.*

DEMONSTRATION. Posons $\mathcal{C}^{\cdot} = \mathfrak{N}((G^{\cdot}, G^{\perp}), \Gamma^{\perp})^{\cdot}$. Soient $\mathcal{J}$ et π comme ci-dessus et $(\overline{F}_i)_{i \in I}$ où $I \in \mathcal{J}$, $\overline{F}_i \in \mathcal{C}^{\cdot}_o$. Pour chaque $h \in \Gamma$, posons $((p_{i,h})_{i \in I}, e_h) = \pi((F_i(h))_{i \in I})$.

L'application $h \to e_h$ définit un néofoncteur θ de $\Gamma^{\perp}$ vers $C^{\perp}$ et $\theta(\Gamma) \subset G^{\cdot}_o$. Pour chaque $i \in I$, l'application $h \to p_{i,h}$ définit un néofoncteur p_i de $\Gamma^{\perp}$ vers $G^{\perp}$. Posons $\overline{\theta} = ((G^{\cdot}, G^{\perp}), \theta)$, $\overline{p}_i = ((G^{\cdot}, G^{\perp}), p_i)$.

$((\overline{p}_i)_{i \in I}, \overline{\theta})$ est un produit naturalisé de $(\overline{F}_i)_{i \in I}$ dans $\mathcal{C}^{\cdot}$. En effet :

Soit $(\overline{\Psi}_i)_{i \in I}$ où $\overline{\Psi}_i \in \mathcal{C}$, $\alpha^{\cdot}\overline{\Psi}_i = \overline{F}$ et $\beta^{\cdot}\overline{\Psi}_i = \overline{F}_i$. Il s'agit de montrer qu'il existe $\overline{\Psi} \in \mathcal{C}$, unique, tel que pour chaque i, $\overline{\Psi}_i = \overline{p}_i . \overline{\Psi}$, c'est-à-dire $\Psi_i = p_i \circ \Psi$.

Pour chaque $h \in \Gamma$, soit $\underline{\Psi}(h)$ le produit des $(\Psi_i(h))_{i \in I}$, l'application $\underline{\Psi} : h \to \underline{\Psi}(h)$ définit un néofoncteur $(G^{\perp}, \underline{\Psi}, \Gamma^{\perp})$ car, pour chaque i :

$$\Psi_i(h) = p_i(h) . \underline{\Psi}(h) \Longrightarrow \Psi_i(\alpha^{\perp}(h)) = p_i(\alpha^{\perp}(h)) . \alpha^{\perp}(\underline{\Psi}(h))$$

et par suite

$$\alpha^{\perp}(\underline{\Psi}(h)) = \underline{\Psi}(\alpha^{\perp}(h)).$$

De même

$$\beta^{\perp}(\underline{\Psi}(h)) = \underline{\Psi}(\beta^{\perp}(h)).$$

Si $h' \perp h$ est défini dans $\Gamma^{\perp}$

$$\Psi_i(h' \perp h) = \Psi_i(h') \perp \Psi_i(h) = (p_i(h').\underline{\Psi}(h')) \perp (p_i(h).\underline{\Psi}(h)),$$

$$\Psi_i(h' \perp h) = (p_i(h') \perp p_i(h)).(\underline{\Psi}(h') \perp \underline{\Psi}(h))$$
$$= (p_i(h' \perp h)).(\underline{\Psi}(h') \perp \underline{\Psi}(h))$$

et à cause de l'unicité du produit :

$$\underline{\Psi}(h' \perp h) = \underline{\Psi}(h') \perp \underline{\Psi}(h).$$

Posons $\Psi = (G^{\perp}, \underline{\Psi}, \Gamma^{\perp})$. Ψ est le seul néofoncteur vérifiant $\Psi_i = p_i \circ \Psi$ pour chaque i.

EXEMPLE 1. Cas des transformations naturelles au sens habituel :

Soient $C^{\perp}$ une catégorie à $\mathcal{J}$-produits, (Π, π) un foncteur $\mathcal{J}$-produits naturalisé dans $C^{\perp}$, $(G^{\square\square}, G^{\boxminus})$ la catégorie double des quatuors de $C^{\perp}$. On peut construire ν = application $\mathcal{J}$-produit naturalisé $\boxminus$-compatible dans $G^{\square\square}$ de la façon suivante :

Soit $(\tilde{f}_i)_{i \in I}$, où $I \in \mathcal{J}$, $\tilde{f}_i = (f_i, \beta^{\perp}(f_i), \alpha^{\perp}(f_i), f_i) \in G^{\square\square}_o$. Si

$$((p'_i)_{i \in I}, e') = ((\beta^{\perp}(f_i))_{i \in I}), \quad ((p_i)_{i \in I}, e) = ((\alpha^{\perp}(f_i))_{i \in I}),$$
$$f = \Pi((f_i)_{i \in I}),$$

on pose :

$$\nu((\tilde{f}_i)_{i \in I}) = ((f_i, p'_i, p_i, f)_{i \in I}, f).$$

En appliquant la proposition 1 on retrouve la propriété connue : Si $C^{\perp}$ est à $\mathcal{J}$-produits, il en est de même de la catégorie des transformations naturelles entre néofoncteurs de $\Gamma^{\perp}$ vers $C^{\perp}$, quel que soit le graphe multiplicatif $\Gamma^{\perp}$ non vide.

EXEMPLE 2. Soient $C^{\perp}$ une catégorie munie d'un préordre compatible « < » et $(G^{\cdot}, G^{\perp})$ la catégorie double de couples de C associée comme page 4. Dire que $G^{\cdot}$ admet une application $\mathcal{J}$-produit naturalisé $\perp$-compatible c'est dire qu'il existe dans C une application borne supérieure $(f_i)_{i\in I} \to \underset{I\in I}{Sup}\, f_i$ pour chaque $I \in \mathcal{J}$ commutant avec la loi de composition et les applications source et but dans $C^{\perp}$. Si cette condition est vérifiée, $\mathcal{C}^{\bullet} = \mathfrak{N}((G^{\bullet}, G^{\perp}), \Gamma^{\perp})^{\bullet}$ est alors à $\mathcal{J}$-produits quel que soit $\Gamma^{\perp}$ non vide, c'est-à-dire que chaque famille $(F_i)_{i\in I}$, où $I \in \mathcal{J}$, de néofoncteurs de $\Gamma^{\perp}$ vers $C^{\perp}$ admet une borne supérieure pour le préordre défini par $\mathcal{C}^{\bullet}$ sur la classe de ces néofoncteurs.

Dualement, avec des notations analogues aux précédentes on peut énoncer :

PROPOSITION 1'. *S'il existe dans $G^{\bullet}$ une application $\mathcal{J}$-somme naturalisée $\perp$-compatible, $\mathfrak{N}((G^{\bullet}, G^{\perp}), \Gamma^{\perp})^{\bullet}$ est à $\mathcal{J}$-sommes.*

REMARQUE. Si $G^{\bullet}$ admet un objet final (resp. initial) $e \in G_o^{\perp} \cap G_o^{\bullet}$, quelle que soit $\Gamma^{\perp}$ non vide $\mathfrak{N}((G^{\bullet}, G^{\perp}), \Gamma^{\perp})^{\bullet}$ admet un objet final (respectivement final) $\overline{F} = ((G^{\bullet}, G^{+}), F)$, où F est le foncteur de $\Gamma^{\perp}$ vers $G^{\perp}$ défini par $F(h) = e$ quel que soit $h \in \Gamma$.

Etude de noyaux dans $\mathfrak{N}((G^{\bullet}, G^{\perp}), \Gamma^{\perp})^{\bullet}$.

Soient $(G^{\bullet}, G^{\perp})$ une catégorie double, $\Gamma^{\perp}$ un graphe multiplicatif non vide, $\mathcal{C}^{\bullet} = \mathfrak{N}((G^{\bullet}, G^{+}), \Gamma^{\perp})^{\bullet}$. Soit K la sous-classe de $G \times G$ formée des couples (g', g) tels que $\alpha^{\bullet}(g') = \alpha^{\bullet}(g)$ et $\beta^{\bullet}(g') = \beta^{\bullet}(g)$. Une application noyau $\perp$-compatible dans $G^{\bullet}$ est une application $n : K \to G$ vérifiant les conditions suivantes :

- Quelque soit $(g', g) \in K$, $n(g', g)$ est un noyau de (g', g), $n(\alpha^{\perp}(g'), \alpha^{\perp}(g)) = \alpha^{\perp}(n(g', g))$, $n(\beta^{\perp}(g'), \beta^{\perp}(g)) = \beta^{\perp}(n(g', g))$.
- Quelque soit $(g'_1, g_1) \in K$ tel que $g'_1 \perp g$ et $g_1 \perp g$ soient définis, $n(g'_1 \perp g', g_1 \perp g) = n(g'_1, g_1) \perp n(g', g)$.

PROPOSITION 2. *S'il existe dans $G^{\bullet}$ une application noyau $\perp$-compatible, $\mathfrak{N}((G^{\bullet}, G^{\perp}), \Gamma^{\perp})^{\bullet}$ est à noyaux.*

DEMONSTRATION. Soit $(\overline{\Psi}_1, \overline{\Psi}_2) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ tel que $\alpha^{\bullet}\overline{\Psi}_1 = \alpha^{\bullet}\overline{\Psi}_2$ et $\beta^{\bullet}\overline{\Psi}_1 = \beta^{\bullet}\overline{\Psi}_2$. Pour chaque $h \in \Gamma$ posons $N_h(\Psi_1, \Psi_2) = n(\Psi_1(h), \Psi_2(h))$. L'application $h \to N_h(\Psi_1, \Psi_2)$ définit un foncteur $N(\Psi_1, \Psi_2)$ de $\Gamma^{\perp}$ vers $G^{\perp}$.

$\overline{N(\Psi_1,\Psi_2)} = ((G^\bullet, G^\perp), N(\Psi_1,\Psi_2))$ est un noyau de $(\overline{\Psi}_1, \overline{\Psi}_2)$ dans $\mathcal{C}^\bullet$. En effet, $\overline{N(\Psi_1,\Psi_2)}$ est un monomorphisme dans $\mathcal{C}^\bullet$, car $N_h(\Psi_1,\Psi_2)$ est un monomorphisme dans $G^\bullet$ pour chaque h. Posons pour simplifier $\overline{\theta} = \overline{N(\Psi_1,\Psi_2)}$. Si $\overline{\Psi}' \in \mathcal{C}$ vérifie la condition $\overline{\Psi}_1 . \overline{\Psi}' = \overline{\Psi}_2 . \overline{\Psi}'$, pour chaque $h \in \Gamma$ il existe $\underline{\Psi}''(h)$ unique tel que $\Psi'(h) = \theta(h) . \underline{\Psi}''(h)$. L'application $\underline{\Psi}''$ définit un néofoncteur $\Psi'' = (G^\perp, \underline{\Psi}'', \Gamma^\perp)$ et $\overline{\Psi}' = \overline{\theta} . \overline{\Psi}''$. $\overline{\theta}$ est bien un noyau.

REMARQUE. Soient X et H des sous-classes de G définissant des sous-catégories doubles de $(G^\bullet, G^\perp)$ telles qu'il existe dans $G^\bullet$ des $(H, X, G^\bullet)$-noyaux au sens de [2]. Soit $\mathcal{X}$ (resp. $\mathcal{H}$) la sous-classe de $\mathcal{C}$ formée des $\overline{\Psi} = ((G^\bullet, G^\perp), \Psi)$ tels que $\Psi(\Gamma) \subset X$ (resp. $\Psi(\Gamma) \subset H$). La proposition précédente peut être généralisée comme suit : S'il existe dans $G^\bullet$ une application $(H, X, G^\bullet)$-noyaux $\perp$-compatible, $\mathcal{H}^\bullet$ est à $(\mathcal{X}, \mathcal{C}^\bullet)$-noyaux.

De l'étude précédente on peut déduire des conditions suffisantes d'existence de produits et noyaux dans $\mathcal{C}^\bullet$, donc de limites projectives. Dualement, on obtient des conditions suffisantes d'existence de limites inductives.

3. Soient $p = ((G_1^\bullet, G_1^\perp), \underline{p}, (G^\bullet, G^\perp))$ un foncteur double $\in \mathcal{F}(p\mathcal{F})$ et $\Gamma^\perp$ un graphe multiplicatif non vide $\in \mathcal{N}'_o$.

Posons $\mathcal{C}^\bullet = \mathfrak{N}((G^\bullet, G^\perp), \Gamma^\perp)^\bullet$, $\mathcal{C}_1^\bullet = \mathfrak{N}((G_1^\bullet, G_1^\perp), \Gamma^\perp)^\bullet$, $\tilde{\mathcal{C}} = \mathfrak{N}((G^\bullet, G^\perp))^\bullet$, $\tilde{\mathcal{C}}_1^\bullet = \mathfrak{N}((G_1^\bullet, G_1^\perp))^\bullet$, $p^\bullet = (G_1^\bullet, \underline{p}, G^\bullet)$, $p^\perp = (G_1^\perp, \underline{p}, G^\perp)$; $p^\bullet$ et $p^\perp$ sont les foncteurs projections canoniques de p. A p on peut associer les foncteurs $\overline{p} = (\mathcal{C}_1^\bullet, \underline{\overline{p}}, \mathcal{C}^\bullet)$ et $\tilde{p} = (\tilde{\mathcal{C}}_1^\bullet, \underline{\tilde{p}}, \tilde{\mathcal{C}}^\bullet)$ définis comme suit :

$$\overline{p}\,(\overline{\Phi}) = ((G_1^\bullet, G_1^\perp), p^\perp \circ \Phi) \quad (\text{resp. } \tilde{p}(\tilde{\Phi}) = ((G_1^\bullet, G_1^\perp), p^\perp \circ \Phi))$$
$$\text{si} \quad \overline{\Phi} = ((G^\bullet, G^\perp), \Phi) \in \mathcal{C} \quad (\text{resp. } \in \tilde{\mathcal{C}}).$$

Propriétés relatives aux foncteurs $\overline{p}$ *et* $\tilde{p}$.

A. PROPOSITION 3. *Si $p^\bullet$ est un foncteur fidèle (resp. bien fidèle, d'hypermorphismes, d'homomorphismes, d'hypermorphismes saturé, d'homomorphismes saturé ([1] ch. II), $\overline{p}$ et $\tilde{p}$ jouissent de la même propriété.*

DEMONSTRATION.

1) $p^{\bullet}$ est fidèle (resp. bien fidèle) $\Longrightarrow \bar{p}$ et $\tilde{p}$ sont fidèles (resp. bien fidèles).

Montrons par exemple que : $p^{\bullet}$ est bien fidèle $\Longrightarrow \bar{p}$ est bien fidèle. $p^{\bullet}$ est bien fidèle si, et seulement si, quel que soit $(g,g') \in G \times G$, les conditions $\alpha^{\bullet}(g) = \alpha^{\bullet}(g')$ et $p^{\bullet}(g) = p^{\bullet}(g')$ entraînent $h = h'$. Supposons $p^{\bullet}$ bien fidèle. Soient $\bar{\Psi} \in \mathcal{C}$, $\bar{\Psi}' \in \mathcal{C}$ tels que $\alpha^{\bullet}\bar{\Psi} = \alpha^{\bullet}\bar{\Psi}'$ et $\bar{p}(\bar{\Psi}) = \bar{p}(\bar{\Psi}')$. Pour chaque $h \in \Gamma$, $\alpha^{\bullet}(\Psi(h)) = \alpha^{\bullet}(\Psi'(h))$ et $p^{\bullet}(\Psi(h)) = p^{\bullet}(\Psi(h'))$; par suite $\Psi(h) = \Psi(h')$. Ainsi $\bar{\Psi} = \bar{\Psi}'$.

2) $p^{\bullet}$ est un foncteur d'hypermorphismes $\Longrightarrow \bar{p}$ et $\tilde{p}$ le sont aussi.

Supposons que $p^{\bullet}$ soit un foncteur d'hypermoprhismes. D'après ([1] ch. II), $p^{\bullet}$ est bien fidèle et, pour chaque couple $(e, g_1) \in G_o^{\bullet} \times G_1$ tel que $g_1 \in p^{\bullet}(G)$ et $\alpha^{\bullet}(g_1) = p^{\bullet}(e)$, il existe $g' \in G$ unique tel que $\alpha^{\bullet}(g') = e$ et $p^{\bullet}(g') = g_1$.

$\bar{p}$ est un foncteur bien fidèle d'après 1. Montrons que $\bar{p}$ est un foncteur d'hypermorphismes : Soient $\bar{F} \in \mathcal{C}_o^{\bullet}$ et $\bar{\Phi}_1 \in \bar{p}(\mathcal{C})$ tels que $\bar{p}(\bar{F}) = \alpha^{\bullet}\bar{\Phi}_1$. Pour chaque $h \in \Gamma$, il existe $\underline{\Phi}(h) \in p(G)$ tel que $\alpha^{\bullet}(\Phi(h)) = F(h)$, $p^{\bullet}(\underline{\Phi}(h)) = \Phi_1(h)$. L'application $\underline{\Phi}$ ainsi définie détermine un foncteur $\Phi = (G^{\perp}, \underline{\Phi}, \Gamma^{\perp})$. En effet, pour chaque $h \in \Gamma$ les conditions $\alpha^{\bullet}(\underline{\Phi}(h)) = F(h)$ et $p^{\bullet}(\underline{\Phi}(f)) = \Phi_1(f)$ entraînent :

$$\alpha^{\bullet}(\alpha^{\perp}(\underline{\Phi}(h))) = F(\alpha^{\perp}(h)) = \alpha^{\bullet}(\underline{\Phi}(\alpha^{\perp}(h))$$

et
$$p^{\bullet}(\alpha^{\perp}(\Phi(h))) = \Phi_1(\alpha^{\perp}(h)) = p^{\bullet}(\underline{\Phi}(\alpha^{\perp}(h))).$$

$p^{\bullet}$ étant bien fidèle, $\underline{\Phi}(\alpha^{\perp}(h)) = \alpha^{\perp}(\underline{\Phi}(h))$. De même, $\underline{\Phi}(\beta^{\perp}(h)) = \beta^{\perp}(\underline{\Phi}(h))$.

Soit $(h', h) \in \Gamma \times \Gamma$ tel que $h' \perp h$ soit défini :

$$\alpha^{\bullet}(\underline{\Phi}(h' \perp h)) = F(h' \perp h) = F(h') \perp F(h) = \alpha^{\bullet}(\underline{\Phi}(h')) \perp \alpha^{\bullet}(\underline{\Phi}(h)).$$

Puisque $\alpha^{\perp}(\underline{\Phi}(h')) = \underline{\Phi}(\alpha^{\perp}(h')) = \underline{\Phi}(\beta^{\perp}(h)) = \beta^{\perp}(\underline{\Phi}(h))$, $\underline{\Phi}(h') \perp \underline{\Phi}(h)$ est défini, $\alpha^{\bullet}(\underline{\Phi}(h' \perp h)) = \alpha^{\bullet}(\underline{\Phi}(h') \perp \underline{\Phi}(h))$,

$$p^{\bullet}(\underline{\Phi}(h' \perp h)) = \Phi_1(h' \perp h) = \Phi_1(h') \perp \Phi_1(h) = p^{\bullet}(\underline{\Phi}(h') \perp \underline{\Phi}(h))$$

et par suite $\underline{\Phi}(h' \perp h) = \underline{\Phi}(h') \perp \underline{\Phi}(h)$.

Il existe donc un foncteur $\Phi = (G^{\perp}, \underline{\Phi}, \Gamma^{\perp})$ et $\bar{\Phi} = ((G^{\bullet}, G^{\perp}), \Phi)$

tels que $\alpha\cdot\overline{\Phi} = \overline{F}$ et $\overline{p}(\overline{\Phi}) = \overline{\Phi}_1$. $\overline{\Phi}$ est déterminé uniquement par ces conditions puisque, pour chaque $h \in \Gamma$, $\underline{\Phi}(h)$ est déterminé uniquement.

La démonstration s'applique au foncteur $\tilde{p}$ si, pour $\overline{\Phi}_1$ et $\overline{F}$ donnés, on pose $\Gamma^{\perp}$ = source Φ_1= source F.

Le reste de la proposition se démontre de façon analogue.

EXEMPLE. Cas des transformations naturelles au sens habituel:

Soient $q = (C_1^{\perp}, \underline{q}, C^{\perp})$ un foncteur, $(G^{\square\square}, G^{\boxminus})$ et $(G_1^{\square\square}, G_1^{\boxminus})$ les catégories doubles de quatuors de $C^{\perp}$ et $C_1^{\perp}$ respectivement, $p =$ $= ((G_1^{\square\square}, G_1^{\boxminus}), \underline{p}, (G^{\square\square}, G^{\boxminus}))$ le foncteur double associé à q défini par :

$$p(f', g', g, f) = (q(f'), q(g'), q(g), q(f)) \text{ si } (f', g', g, f) \in G.$$

On peut vérifier que, si q est fidèle (resp. bien fidèle), il en est de même pour $p^{\square\square} = (G_1^{\square\square}, \underline{p}, G^{\square\square})$ et par suite pour $\overline{p}$ et $\tilde{p}$ associés à p.

B. EXISTENCE D'UN ADJOINT DE $\overline{p}$. Soient $p = ((G_1^{\bullet}, G_1^{\perp}), \underline{p}, (G^{\bullet}, G^{\perp}))$ un foncteur double, et $\overline{p}$ associé. Soient $(G_1)_o^{\bullet}$ et $G_o^{\bullet}$ les classes des unités de $G_1^{\bullet}$ et $G^{\bullet}$ respectivement. La sous-classe de $G_o^{\bullet} \times G_1$ formée des couples (s, f_1) tels que $p(s) = \beta^{\bullet}(f_1)$ définit une sous-catégorie de $(G_o^{\bullet})^{\perp} \times G_1^{\perp}$. Soit $R(G_o^{\bullet}, G_1)^{\perp}$ cette sous-catégorie. On dira que $p^{\bullet}$ admet un *adjoint à gauche* $\perp$*-compatible* s'il existe un foncteur

$$a = (R(G_o^{\bullet}, G_1)^{\perp}, \underline{a}, ((G_1)_o^{\bullet})^{\perp})$$

tel que, pour chaque $s_1 \in (G_1)_o^{\bullet}$, $a(s_1)$ soit un $(G, p^{\bullet})$-projecteur (au sens de [3]).

PROPOSITION 4. *Si $p^{\bullet}$ admet un adjoint à gauche $\perp$-compatible, $\overline{p}$ admet un adjoint à gauche.*

DEMONSTRATION. Supposons que $p^{\bullet}$ admette un adjoint à gauche. Soit $\overline{F}_1 \in (\mathcal{C}_1)_o^{\bullet}$. Il s'agit de montrer que $\overline{F}_1$ engendre une $\overline{p}$-structure libre, c'est-à-dire qu'il existe un $(\mathcal{C}, \overline{p})$-projecteur de source $\overline{F}_1$. Pour chaque $f \in \Gamma$, posons :

$$a(F_1(f)) = (\underline{F}(f), \underline{\Psi}_1(f)).$$

Par hypothèse $\underline{F}$ et $\underline{\Psi}_1$ déterminent des foncteurs

$$\begin{tikzcd}
\overline{F} \arrow[r, "\overline{\Phi}'"] \arrow[d, dashed, no head] & \overline{F}' \arrow[d, dashed, no head] \\
\overline{p}(\overline{F}) \arrow[r] & \overline{p}(\overline{F}') \\
& \overline{F}_1 \arrow[ul, "\overline{\Psi}_1"] \arrow[u, "\overline{\Phi}'_1"']
\end{tikzcd}$$

F et Ψ_1 de $\Gamma^\perp$ vers $(G_o^\bullet)^\perp$ et $G_1^\perp$ respectivement. Posons

$$\overline{F} = ((G^\bullet, G^\perp), F), \qquad \overline{\Psi}_1 = ((G_1^\bullet, G_1^\perp), \Psi_1).$$

Il reste à montrer que $(\overline{F}, \overline{\Psi}_1)$ est un $(\mathcal{C}, \overline{p})$-projecteur. Soient $\overline{\Phi}'_1 \in \mathcal{C}_1$ et $\overline{F}' \in \mathcal{C}_o^\bullet$ tels que $\alpha^\bullet\overline{\Phi}'_1 = \overline{F}_1$, $\beta^\bullet\overline{\Phi}'_1 = \overline{p}(\overline{F}')$. Pour chaque $f \in \Gamma$ il existe $\underline{\Phi}'(f) \in G$, unique, tel que

$$p(\underline{\Phi}'(f)).\Psi_1(f) = \Phi'_1(f), \qquad \alpha^\bullet\underline{\Phi}'(f) = F(f), \qquad \beta^\bullet(\underline{\Phi}'(f)) = F'(f).$$

L'unicité de $\underline{\Phi}'(f)$, pour chaque f, entraîne comme précédemment que $\underline{\Phi}'$ définit un foncteur $\Phi' = (G^\perp, \underline{\Phi}', \Gamma^\perp)$. Il existe donc $\overline{\Phi}' = ((G^\bullet, G^\perp), \Phi') \in \mathcal{C}$, unique, tel que $\overline{p}(\overline{\Phi}').\overline{\Psi}_1 = \overline{\Phi}'_1$ et $\alpha^\bullet\overline{\Phi}' = \overline{F}$, $\beta^\bullet(\overline{\Phi}') = \overline{F}'$.

$(\overline{F}, \overline{\Psi}_1)$ est un $(\mathcal{C}, \overline{p})$-projecteur de source $\overline{F}_1$.

Dualement on définit la notion d'adjoint à droite $\perp$-compatible.

PROPOSITION 4'. *Si $p^\bullet$ admet un adjoint à droite $\perp$-compatible, $\overline{p}$ admet un adjoint à droite.*

EXEMPLE 1. Cas des transformations naturelles au sens habituel:

Soient $q = (C_1^\perp, \underline{q}, C^\perp)$ un foncteur, $\Gamma^\perp$ une catégorie, $p = ((G_1^{\square\square}, G_1^{\boxminus}), \underline{p}, (G^{\square\square}, G^{\boxminus}))$, $\overline{p} = (\mathcal{C}_1^{\square\square}, \overline{\underline{p}}, \mathcal{C}^{\square\square})$ comme dans A avec $\mathcal{C}_1^{\square\square} = \mathfrak{N}((G_1^{\square\square}, G_1^{\boxminus}), \Gamma^\perp)^{\square\square}$, $\mathcal{C}^{\square\square} = \mathfrak{N}((G^{\square\square}, G^{\boxminus}), \Gamma^\perp)$. Si q admet un adjoint à gauche (resp. à droite), $p^{\square\square}$ admet un adjoint à gauche (resp. à droite) $\boxminus$-compatible. Montrons-le lorsqu'il s'agit d'un adjoint à gauche : Soit $\tilde{h}_1 = (h_1, \beta^\bullet(h_1), \alpha^\bullet(h_1), h_1) \in (G_1)_o^{\square\square}$. Il existe des (C, q) projecteurs (s, g_1) et (s', g'_1) de sources respectives $\alpha^\perp(h_1)$ et $\beta^\perp(h_1)$, et par suite un $h \in C$ unique tel que $q(h) \perp g_1 = g'_1 \perp h_1$. L'application

$$\underline{a} : \tilde{h}_1 \mapsto ((h, \beta^\perp(h), \alpha^\perp(h), h), (q(h), g'_1, g_1, h_1))$$

définit un foncteur a de $(G_{1o}^{\square\square})^{\boxminus}$ vers $(G_o^{\square\square})^{\boxminus} \times G_1^{\boxminus}$; on vérifie que, pour chaque $\tilde{h}_1 \in (G_1)_o^{\square\square}$, $a(\tilde{h}_1)$ est un $(G, p^{\square\square})$-projecteur. La démonstration est semblable pour un adjoint à droite.

CONSEQUENCE. Si le foncteur $q = (C_1^\perp, \underline{q}, C^\perp)$ admet un adjoint à gauche (resp. à droite), pour chaque catégorie $\Gamma^\perp$ le foncteur $\overline{p}$ de la catégorie des transformations naturelles entre foncteurs de $\Gamma^\perp$ vers $C^\perp$ vers la catégorie des transformations naturelles entre foncteurs de $\Gamma^\perp$ vers $C_1^\perp$, déterminé par q, admet un adjoint à gauche (resp. à droite).

EXEMPLE 2. Soient $(C_1^{\perp}, <)$ et $(C^{\perp}, <)$ des catégories ordonnées et $q = (C_1^{\perp}, q, C^{\perp})$ un foncteur compatible avec les ordres. Désignons par $(G_1^{\bullet}, G_1^{\perp})$ et $(G^{\bullet}, G^{\perp})$ les catégories doubles de couples d'éléments de C_1 et C associées respectivement aux catégories ordonnées $(C_1^{\perp}, <)$ et $(C^{\perp}, <)$. Soit $p = ((G_1^{\bullet}, G_1^{\perp}), \underline{p}, (G^{\bullet}, G^{\perp}))$ défini par $p(f, f') = (q(f), q(f'))$ si $(f, f') \in G$.

$p^{\bullet}$ admet un adjoint à gauche $\perp$-compatible si et seulement si :

1) Pour chaque $f_1 \in C_1$, la classe $C(f_1)$ formée des $f \in C$ tels que $q(f) < f_1$ admet un élément maximum, noté $Max\ C(f_1)$ dans $(C, <)$.

2) L'application $f_1 \to Max\ C(f_1)$ commute avec la loi de composition et les applications source et but dans $C_1^{\perp}$.

Soient $\Gamma^{\perp}$ une catégorie, $\mathcal{C}^{\bullet} = \mathfrak{N}((G^{\bullet}, G^{\perp}), \Gamma^{\perp})^{\bullet}$, $\mathcal{C}_1^{\bullet} = \mathfrak{N}((G_1^{\bullet}, G_1^{\perp}), \Gamma^{\perp})^{\bullet}$ et $\overline{p} = (\mathcal{C}_1^{\bullet}, \overline{\underline{p}}, \mathcal{C}^{\bullet})$ correspondant à p. On identifie $\mathcal{C}_o^{\bullet}$ (resp. $(\mathcal{C}_1)_o^{\bullet}$) à la classe des foncteurs de $\Gamma^{\perp}$ vers $C^{\perp}$ (resp. vers $C_1^{\perp}$). $\mathcal{C}^{\bullet}$ (resp. $\mathcal{C}_1^{\bullet}$) définit un ordre sur $\mathcal{C}_o^{\bullet}$ (resp. $(\mathcal{C}_1)_o^{\bullet}$). Si les conditions 1 et 2 ci-dessus sont vérifiées, $\overline{p}$ admet un adjoint à gauche, c'est-à-dire que, pour chaque foncteur $F_1 \in (\mathcal{C}_1)_o^{\bullet}$, la classe $\mathcal{C}(F_1)$ formée des foncteurs $F \in \mathcal{C}_o^{\bullet}$ tels que $\overline{p}(F) < F_1$ admet un élément maximum dans $\mathcal{C}_o^{\bullet}$ munie de l'ordre défini par $\mathcal{C}^{\bullet}$.

On a un résultat dual si $p^{\bullet}$ admet un adjoint à droite.

C. PROPRIETES CONCERNANT LES PRODUITS ET LES NOYAUX. Soient $p = ((G_1^{\bullet}, G_1^{\perp}), \underline{p}, (G^{\bullet}, G^{\perp}))$ et $\overline{p}$ comme précédemment. Soit $\mathcal{J}$ une classe de classes non vides et $\Gamma^{\perp}$ un graphe multiplicatif non vide.

PROPOSITION 5. *S'il existe dans $G_1^{\bullet}$ une application $\mathcal{J}$-produit naturalisé $\perp$-compatible π_1, si $p^{\bullet}$ est π_1-compatible et bien fidèle, il existe dans $\mathcal{C}_1^{\bullet}$ une application $\mathcal{J}$-produit naturalisé $\overline{\pi}_1$ telle que $\overline{p}$ soit $\overline{\pi}_1$-compatible.*

PROPOSITION 6. *S'il existe dans $G_1^{\bullet}$ une application noyau n_1 $\perp$-compatible, si $p^{\bullet}$ est n_1-compatible et bien fidèle, $\overline{p}$ est à noyaux.*

($p^{\bullet}$ est π_1-compatible (resp. n_1-compatible) signifie : Il existe une application $\mathcal{J}$-produit π (resp. noyau n) telle que $\underline{p} \circ \pi = \pi_1$ (resp. $\underline{p} \circ n = n_1$)).

Les démonstrations de ces propositions, voisines des précédentes, sont omises.

D. ETUDE DE $(\tilde{\mathcal{C}}'_1, \tilde{p})$-INJECTIONS, $(\tilde{\mathcal{C}}''_1, \tilde{p})$-SURJECTIONS (au sens de [1] ch. III). Reprenons les notations du début de cette partie **3** :

$$p = ((G_1^{\bullet}, G_1^{\perp}), \underline{p}, (G^{\bullet}, G^{\perp})), \qquad \tilde{\mathcal{C}}^{\bullet} = \mathfrak{N}((G^{\bullet}, G^{\perp}))^{\bullet},$$
$$\tilde{\mathcal{C}}_1^{\bullet} = \mathfrak{N}((G_1^{\bullet}, G_1^{\perp}))^{\bullet}, \qquad \tilde{p} = (\tilde{\mathcal{C}}_1^{\bullet}, \underline{\tilde{p}}, \tilde{\mathcal{C}}^{\bullet}).$$

Soit $G_1'^{\bullet}$ (resp. $G_1''^{\bullet}$) une sous-catégorie de $G_1^{\bullet}$ formée de monomorphismes (resp. d'épimorphismes). Soit $\tilde{\mathcal{C}}'_1$ (resp. $\tilde{\mathcal{C}}''_1$) la sous-classe de $\tilde{\mathcal{C}}_1$ formée des $\overline{\Psi}_1 = ((G_1^{\bullet}, G_1^{\perp}), \Psi_1)$ tels que $\Psi_1(S(\overline{\Psi}_1)) \subset G'_1$ (resp. $\Psi_1(S(\overline{\Psi}_1)) \subset G''_1$), où $S(\overline{\Psi}_1)^{\perp}$ désigne la source de Ψ_1. $\tilde{\mathcal{C}}'_1$ et $\tilde{\mathcal{C}}''_1$ définissent des sous-catégories de $\tilde{\mathcal{C}}_1^{\bullet}$ et sont formées respectivement de monomorphismes et d'épimorphismes de $\tilde{\mathcal{C}}_1^{\bullet}$.

Si $\overline{\Psi} \in \tilde{\mathcal{C}}$, $C^{\perp}$ est une sous-catégorie de $S(\overline{\Psi})^{\perp}$ et

$$\Psi_C = (G^{\perp}, \underline{\Psi}\iota, C^{\perp})$$

est la restriction du foncteur Ψ à $C^{\perp}$, désignons par $\overline{\Psi}_C$ l'élément de $\mathcal{C}$ défini par $\overline{\Psi}_C = ((G^{\bullet}, G^{\perp}), (G^{\perp}, \underline{\Psi}_C, C^{\perp}))$.

PROPOSITION 7. *Soit $\overline{\Psi} \in \tilde{\mathcal{C}}$. Pour que toute restriction $\overline{\Psi}_C$ de $\overline{\Psi}$ soit une $(\tilde{\mathcal{C}}'_1, \tilde{p})$-injection (resp. une $(\tilde{\mathcal{C}}''_1, \tilde{p})$-surjection), il faut et il suffit que, pour chaque $f \in S(\overline{\Psi})$, $\Psi(f)$ soit une $(G'_1, p^{\bullet})$-injection (resp. une $(G''_1, p^{\bullet})$-surjection).*

La démonstration, facile, est omise.

E. ETUDE DE SOUS-STRUCTURES ENGENDREES (au sens de [2] ch.II). Soient p, $\tilde{\mathcal{C}}$, $\tilde{\mathcal{C}}_1$, $\tilde{p}$ comme dans D. Soient $(H^{\bullet}, H^{\perp})$ et $(X^{\bullet}, X^{\perp})$ des sous-catégories doubles de $(G^{\bullet}, G^{\perp})$ telles que $H^{\bullet}$ soit pleine dans $G^{\bullet}$ et que X soit formée de $(R_g(G_1^{\bullet}), p^{\bullet})$-injections, où $R_g(G_1^{\bullet})$ désigne la classe des monomorphismes de $G_1^{\bullet}$. Soit K_1 une sous-classe de $R_g(G_1^{\bullet})$ définissant une sous-catégorie de $G_1^{\perp}$. Soit $R'(G_o^{\bullet}, K_1)^{\perp}$ la sous-catégorie de $(G_o^{\bullet})^{\perp} \times K^{\perp}$ formée des couples (s, f_1) tels que $p(s) = \alpha^{\bullet}(f_1)$. On dira que p est *compatiblement $(K_1, X, H^{\bullet})$-engendrant* s'il existe un foncteur $j = (G^{\perp}, \underline{j}, R'(G_o^{\bullet}, K_1)^{\perp})$ tel que, pour chaque

$(s, k_1) \in R'(G_o^{\bullet}, K_1)$, $j(s, k_1)$ soit un (X, H)-sous-morphisme de s engendré par k_1, relativement au foncteur $p^{\bullet}$ ([2], déf. 2, ch. 2). Rappel: $j(s, k_1)$ est un (X, H)-sous-morphisme de s engendré par k_1, relativement au foncteur $p^{\bullet}$ signifie :

$$j(s, k_1) \in X, \qquad \beta^{\bullet}(j(s, k_1)) = s, \qquad \alpha^{\bullet}(j(s, k_1)) \in H_o^{\bullet},$$

$$\text{il existe } k'_1 \in K_1 \text{ tel que } k_1 = p^{\bullet}(j(s, k_1)).k'_1,$$

et, pour tout $g \in G$ vérifiant les mêmes conditions, il existe $h \in H$ tel que $j(s, k_1) = g.h$.

Soient $\mathcal{K}_1$ la sous-classe de $\mathcal{C}_1$ formée des $\overline{\Psi}_1$ tels que $\Psi_1(\Gamma) \subset K_1$, $\mathcal{X}$ (resp. $\mathcal{H}$) la sous-classe de $\mathcal{C}$ formée des $\overline{\Psi}$ tels que $\Psi(\Gamma) \subset X$ (resp. $\Psi(\Gamma) \subset H$). On a $\mathcal{K}_1 \subset R_g(\mathcal{C}_1^{\bullet})$ = classe des monomorphismes de $\mathcal{C}_1^{\bullet}$, $\mathcal{X}$ est formé de $(R_g(\mathcal{C}_1^{\bullet}), \overline{p})$-injections, $\mathcal{H}^{\bullet}$ est pleine dans $\mathcal{C}^{\bullet}$.

PROPOSITION 9. *Si p est compatiblement $(K_1, X, H^{\bullet})$-engendrant, $\overline{p}$ est $(\mathcal{K}_1, \mathcal{X}, \mathcal{H})$-engendrant.*

DEMONSTRATION. Supposons p compatiblement $(K_1, X, H^{\bullet})$-engendrant et soit $j = (G^{\perp}, \underline{j}, R'(G^{\bullet}, K_1)^{\perp})$ le foncteur associé. Soient $\overline{F} \in \mathcal{C}_o^{\bullet}$, $\overline{\Psi}_1 \in \mathcal{K}_1$ tels que $\overline{p}(\overline{F}) = \alpha^{\bullet}\overline{\Psi}_1$. Pour chaque $f \in \Gamma$, $j(F(f), \Psi_1(f))$ est un (X, H) sous-morphisme de $F(f)$ engendré par $\Psi_1(f)$. Posons

$$\underline{\theta}(f) = j(F(f), \Psi_1(f));$$

$\underline{\theta}$ définit un foncteur $\theta = (G^{\perp}, \underline{\theta}, C^{\perp})$; soit $\overline{\theta} = ((G^{\bullet}, G^{\perp}), \theta)$ la $\mathcal{C}$-transformation naturelle correspondante. On vérifie facilement que $\overline{\theta}$ est un $(\mathcal{X}, \mathcal{H})$-sous-morphisme de $\overline{F}$ engendré par $\overline{\Psi}_1$.

Le théorème reste vrai si on remplace $\mathcal{C}^{\bullet}$, $\mathcal{C}_1^{\bullet}$, $\overline{p}$ respectivement par $\tilde{\mathcal{C}}^{\bullet}$, $\tilde{\mathcal{C}}_1^{\bullet}$, $\tilde{p}$, et $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{X}$, $\mathcal{H}$ par les classes $\tilde{\mathcal{K}}_1$, $\tilde{\mathcal{X}}$, $\tilde{\mathcal{H}}$ jouant le même rôle.

EXEMPLE. Cas des transformations naturelles au sens habituel:

Soient, avec les notations de A, $\Gamma^{\perp}$ une catégorie, $q = (C_1^{\perp}, \underline{q}, C^{\perp})$ un foncteur, $p = ((G_1^{\square\square}, G_1^{\boxminus}), \square q, (G^{\square\square}, G^{\boxminus}))$,

$$\mathcal{C}_1^{\square\square} = \mathfrak{N}((G_1^{\square\square}, G_1^{\boxminus}), \Gamma^{\perp})^{\square\square}, \qquad \mathcal{C}^{\square\square} = \mathfrak{N}((G^{\square\square}, G^{\boxminus}), \Gamma^{\perp})^{\square\square},$$

$$\overline{p} = (\mathcal{C}_1^{\square\square}, \underline{\overline{p}}, \mathcal{C}^{\square\square}).$$

Hypothèses : $C_1'^{\perp}$, $X'^{\perp}$, $H'^{\perp}$ sont des sous-catégories données de $C_1^{\perp}$, $C^{\perp}$, $C^{\perp}$ respectivement telles que q soit (C_1', X', H')-engendrant, et q vérifie la condition : Quels que soient $f_1 \in q(C)$, $x_1' \in q(X' \perp H_o'^{\perp})$, $x_1 \in q(X' \perp H_o'^{\perp})$ vérifiant $\beta^{\perp}(x_1) = \alpha^{\perp}(f_1)$, $\beta^{\perp}(x_1') = \beta^{\perp}(f_1)$, il existe $h_1 \in C_1$ tel que $f_1 \perp x_1 = x_1' \perp h_1$.

Soient alors K_1 la sous-classe de G_1 formée des quatuors (f_1', g_1', g_1, f_1'') tels que $g_1' \in C_1'$ et $g_1 \in C_1'$, X (resp. H) la sous-classe de G formée des quatuors (f', g', g, f) tels que $g' \in X'$, $g \in X'$ (resp. $f' \in H'$, $f \in H'$). On peut montrer que p est compatiblement $(K_1, X, H^{\boxplus})$-engendrant et par suite, avec les notations du début de E, que $\overline{p}$ est $(\mathcal{K}_1, \mathcal{X}, \mathcal{H})$-engendrant.

Exemple d'application des parties **2** *et* **3** *:*

Soient $p = ((G_1^{\bullet}, G_1^{\perp}), p, (G^{\bullet}, G^{\perp}))$, $\mathcal{C}^{\bullet} = \mathfrak{N}((G^{\bullet}, G^{\perp}), \Gamma^{\perp})^{\bullet}$, $\mathcal{C}_1^{\bullet} = \mathfrak{N}((G_1^{\bullet}, G_1^{\perp}), \Gamma^{\perp})^{\bullet}$, $\overline{p} = (\mathcal{C}_1^{\bullet}, \overline{\underline{p}}, \mathcal{C}^{\bullet})$, $H, K_1, X, \mathcal{H}, \mathcal{K}_1, \mathcal{X}$ définis comme au début de E. On suppose que $G^{\bullet}$ admet un objet final $\in H_o^{\bullet}$.

En utilisant les propositions 1, 2, 9, on obtient des *conditions suffisantes pour que :*

1) La classe $(\beta \cdot \overline{\Psi})_{\overline{\Psi} \in I_{\overline{F}}}$, où $I_{\overline{F}}$ est la classe des $\overline{\Psi} \in \mathcal{C}$ de source $\overline{F}$ et dont le but appartient à $\mathcal{H}$, admette un produit $\hat{\Psi}$. (On désigne par $\hat{F}$ le but de $\hat{\Psi}$ dans $\mathcal{C}^{\bullet}$).

2) Les conditions de la proposition 6 de ([2], ch. 2) soient remplies et que par suite $\overline{F}$ *admette une* $(\mathcal{H}, \mathcal{C}^{\bullet})$*-projection.*

Les conditions énoncées dans la proposition 6 de ([2], ch. 2) s'écrivent :

$\overline{p}$ est $(\mathcal{K}_1, \mathcal{X}, \mathcal{H})$-engendrant, où $\mathcal{K}_1 \subset R_g(\mathcal{C}_1^{\bullet})$, $\mathcal{X}^{\bullet}$ est une sous-catégorie de $\mathcal{C}^{\bullet}$ formée de $(R_g(\mathcal{C}_1^{\bullet}), \overline{p})$-injections, $\hat{F} \in \mathcal{X}_o^{\bullet}$, $\overline{p}(\hat{F}.\mathcal{X}.\mathcal{H}_o^{\bullet}) \subset \mathcal{K}_1$, $\mathcal{H}$ est à $(\mathcal{X}, \mathcal{C}^{\bullet})$-noyaux et $\hat{p}(\hat{\Psi})$ admet une $(\mathcal{K}_1, \mathcal{C}_1^{\bullet}, \mathcal{C}_1)$-image.

Pour que ces conditions soient vérifiées, il suffit que l'on ait :

-Il existe dans $G^{\bullet}$ une application $\mathcal{I}_F$-produit naturalisé $\perp$-compatible, où $\mathcal{I}_F$ est la classe des sous-classes des classes

$$I_{F(f)} = H_o^{\bullet}.G.F(f)$$

pour $f \in \Gamma$. (Ceci entraîne l'existence de $\hat{\Psi}$ et $\hat{F}$).

-p est compatiblement $(K_1, X, H^\bullet)$-engendrant et, pour chaque $f \in \Gamma$, $\hat{F}(f) \in X$, $p(\hat{F}(f).X.H_o^\bullet) \subset K_1$.

-Il existe dans $G^\bullet$ une application $(H, X, G^\bullet)$-noyau $\perp$-compatible.

-Il existe une application μ de la classe $(p(\hat{\Psi}(f)))_{f \in \Gamma}$ dans G, compatible avec la structure $\perp$, telle que $\mu(p(\hat{\Psi})(f))$ soit une $(K_1, G_1^\bullet, G_1)$-image de $p(\hat{\Psi}(f))$ pour chaque $f \in \Gamma$.

4. Transformations naturelles généralisées n-uples (n entier ≥ 1).

Rappelons qu'un graphe multiplicatif n-úple, noté $(G^{\perp n}, \ldots, G^{\perp 1})$ ou $(G^{\perp i})_{i \leqslant n}$, est une classe G munie de n structures $\perp_i$ de telle sorte que pour chaque $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $j < i$, $(G^{\perp i}, G^{\perp j})$ soit un graphe multiplicatif double.

$\Phi = ((G^{\perp i})_{i \leqslant n}, \underline{\Phi}, (\Gamma^{\perp i})_{i \leqslant n})$ est un néofoncteur n-uple si, et seulement si, $(G^{\perp i}, \underline{\Phi}, \Gamma^{\perp i})$ est un néofoncteur pour chaque i.

Soient $(G^\bullet, G^{\perp n}, \ldots, G^{\perp 1})$ un graphe multiplicatif $(n+1)$-uple, $(\Gamma^{\perp n}, \ldots, \Gamma^{\perp 1})$ un graphe multiplicatif n-uple, $\Phi = ((G^{\perp i})_{i \leqslant n}, \underline{\Phi}, (\Gamma^{\perp i})_{i \leqslant n})$ un néofoncteur n-uple. Alors $((G_o^\bullet)^{\perp i})_{i \leqslant n}$ est un graphe multiplicatif n-uple et

$$(((G_o^\bullet)^{\perp i})_{i \leqslant n}, \underline{\alpha \cdot \Phi}, (\Gamma^{\perp i})_{i \leqslant n}) \quad \text{et} \quad (((G_o^\bullet)^{\perp i})_{i \leqslant n}, \underline{\beta \cdot \Phi}, (\Gamma^{\perp i})_{i \leqslant n})$$

sont des néofoncteurs n-uples, notés $\alpha \cdot \Phi$ et $\beta \cdot \Phi$.

DEFINITION. *Le couple $((G^\bullet, G^{\perp n}, \ldots, G^{\perp 1}), \Phi)$ est appelé transformation n-uple généralisée.*

Pour simplifier, écrivons

$$(G^\bullet, (G^{\perp i})_{i \leqslant n})$$

pour désigner $(G^\bullet, G^{\perp n}, \ldots, G^{\perp 1})$. Si ε est un isomorphisme de graphes multiplicatifs n-uples de $((G_o^\bullet)^{\perp i})_{i \leqslant n}$ vers $(C^{\perp i})_{i \leqslant n}$, on dit que $\overline{\Phi} = ((G^\bullet, (G^{\perp i})_{i \leqslant n}), \Phi)$ est *une transformation naturelle généralisée n-uple de* $\varepsilon_o\, \alpha \cdot \Phi$ vers $\varepsilon_o\, \beta \cdot \Phi$.

On peut définir comme précédemment des graphes multiplicatifs ou catégories de transformations naturelles généralisées n-uples

$$\mathcal{C}^{\bullet} = \mathfrak{N}_n((G^{\bullet}, (G^{\perp i})_{i\leqslant n}), (\Gamma^{\perp i})_{i \leqslant n})^{\bullet}$$

et, si $(G^{\bullet}, (G^{\perp i})_{i\leqslant n})$ est une catégorie $(n+1)$-uple,

$$\tilde{\mathcal{C}}^{\bullet} = \mathfrak{N}_n((G^{\bullet}, (G^{\perp i})_{i\leqslant n}))^{\bullet},$$

dont les éléments sont les transformations $\overline{\Phi} = ((G^{\bullet}, (G^{\perp i})_{i\leqslant n}), \Phi)$ telles que Φ soit un foncteur n-uple dont l'application sous-jacente $(G, \underline{\Phi}, \Gamma)$ appartienne à la catégorie pleine d'applications $\mathfrak{M}$.

Si $p = ((G_1^{\bullet}, (G_1^{\perp i})_{i\leqslant n}), \underline{p}, (G^{\bullet}, (G^{\perp i})_{i\leqslant n}))$ est un foncteur $(n+1)$-uple, on peut, comme dans le cas $n = 1$, lui faire correspondre un foncteur $\overline{p}$ (resp. un foncteur $\tilde{p}$) de $\mathcal{C}^{\bullet}$ vers $\mathcal{C}_1^{\bullet} = \mathfrak{N}_n((G_1^{\bullet}, (G_1^{\perp i})_{i\leqslant n}), (\Gamma^{\perp i})_{i\leqslant n})$ [resp. de $\tilde{\mathcal{C}}^{\bullet}$ vers $\tilde{\mathcal{C}}_1^{\bullet} = \mathfrak{N}_n((G_1^{\bullet}, (G_1^{\perp i})_{i\leqslant n}))$]. Les propriétés étudiées dans **2** et **3** se généralisent. Par exemple, la proposition 1 devient :

Si $(G^{\bullet}, (G^{\perp i})_{i\leqslant n})$ est une catégorie $(n+1)$-uple, $(\Gamma^{\perp i})_{i\leqslant n}$ un graphe multiplicatif n-uple non vide, s'il existe dans $G^{\bullet}$ une application $\mathcal{J}$-produit naturalisé $\perp_i$-compatible pour chaque $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\mathfrak{N}_n((G^{\bullet}, (G^{\perp i})_{i\leqslant n}), (\Gamma^{\perp i})_{i\leqslant n})^{\bullet}$$

est à $\mathcal{J}$-produits.

EXEMPLES. Dans les deux exemples suivants, $\boxminus\!\!\!\!\square$ (resp. $\boxminus$) désigne la multiplication longitudinale (resp. latérale) dans la classe de quatuors considérée.

EXEMPLE 1. Soit $\mathfrak{N}'^{(n)}$ la catégorie des néofoncteurs n-uples au-dessus de $\mathfrak{M}$. Il existe un foncteur $\square_n$ de $\mathfrak{N}'$ vers $\mathfrak{N}'^{(n)}$ défini par récurrence comme suit :

Si $X^{\bullet} \in \mathfrak{N}'^{o}$, $\square_1(X^{\bullet}) = X^{\bullet}$;

Si $\square_{p-1}(X^{\bullet}) = (X_{p-1}^{\perp p-1}, \ldots, X_{p-1}^{\perp 1})$, $\square_p(X^{\bullet}) = (X_p^{\perp p}, \ldots, X_p^{\perp 1})$ est défini par : $X_p = \square(X_{p-1}^{\perp 1})$=classe des quatuors de X_{p-1} pour la loi $\perp_1$, $X_p^{\perp 1} = X_p^{\boxminus}$, $X_p^{\perp 2} = X_p^{\square\!\square}$, $X_p^{\perp i}$ pour $i > 2$ est le sous-graphe multiplicatif de $(X_{p-1}^{\perp i-1})^4$ défini par X_p.

$\square_n(X^{\bullet}) = (X_n^{\perp i})_{i\leqslant n}$ ainsi obtenu est un graphe multiplicatif n-uple. Si F est un néofoncteur, $\square_n(F)$ est défini par récurrence par

$$\square_1(F) = F \quad \text{et} \quad \square_p(F) = \square(\square_{p-1} F)$$

où :

$\Box(\Box_{p-1} F)(f', g', q, f) =$
$= ((\Box_{p-1}(F))(f'), (\Box_{p-1}(F))(g'), (\Box_{p-1}(F))(g), (\Box_{p-1}(F))(f)),$

si (f', g', g, f) est un quatuor d'éléments de la source de $\Box_{p-1}(F)$.

Soit $\mathcal{F}_n$ la sous-catégorie pleine de $\overline{\mathfrak{N}}'^{(n)}$ formée des foncteurs n-uples; on déduit un foncteur de $\mathcal{F}$ vers $\mathcal{F}_n$ à partir de $\Box_n$.

Soient $F = (X'^{\bullet}, \underline{F}, X^{\bullet})$ et $F' = (X'^{\bullet}, \underline{F}', X^{\bullet})$ des néofoncteurs tels qu'il existe une transformation naturelle au sens habituel de F vers F'. Avec les notations précédentes, cela signifie qu'il existe

$$\overline{\varphi} = ((X'^{\perp 2}_2, X'^{\perp 1}_2), \varphi),$$

où

$$\varphi = (X'^{\perp 1}_2, \underline{\varphi}, X^{\perp 1}_1), \quad X^{\perp 1}_1 = X^{\bullet} \quad \text{et} \quad X'^{\perp 1}_2 = (\Box X^{\bullet})^{\boxminus}.$$

Posons

$$(X'^{\perp i}_{n+1})_{i \leqslant n+1} = \Box_{n+1}(X'^{\bullet}) \quad \text{et} \quad (X^{\perp i}_n)_{i \leqslant n} = \Box_n(X^{\bullet}).$$

$(X'_{n+1})^{\perp i}_{i \leqslant n} = (X'^{\perp n}_{n+1}, \dots, X'^{\perp 1}_{n+1})$ obtenu en ne tenant pas compte de la structure $\perp_{n+1}$ est le graphe multiplicatif n-uple $\Box_n(X'^{\perp 1}_2)$. Par suite

$$\varphi_n = \Box_n(\varphi) = ((X'^{\perp i}_{n+1})_{i \leqslant n}, \underline{\varphi_n}, (X^{\perp i}_n)_{i \leqslant n})$$

est un néofoncteur n-uple et

$$\overline{\varphi}_n = ((X'^{\perp n+1}_{n+1}, (X'^{\perp i}_{n+1})_{i \leqslant n}), \varphi_n)$$

est une transformation n-uple généralisée.

De plus, on peut définir, par récurrence sur n, un isomorphisme ε_n de graphes multiplicatifs n-uples de $((X'_{n+1})^{\perp n+1}_{o})^{\perp i})_{i \leqslant n}$ vers $(X'^{\perp i}_n)_{i \leqslant n}$ de telle sorte que

$$\Box_n(F) = \varepsilon_n \circ \alpha^{\bullet} \varphi_n \quad \text{et} \quad \Box_n(F') = \varepsilon_n \circ \beta^{\bullet} \varphi_n .$$

$\overline{\varphi}_n$ est une transformation naturelle généralisée n-uple de $\Box_n(F)$ vers $\Box_n(F')$.

La classe des transformations naturelles généralisées n-uples $\overline{\varphi}_n$ obtenue de cette façon à partir de transformations naturelles $\overline{\varphi}$ définit une sous-catégorie de $\mathfrak{N}_n((X'_{n+1}{}^{\perp n+1}, (X'_{n+1}{}^{\perp i})_{i \leqslant n}), (X_n{}^{\perp i})_{i < n})^{\perp n+1}$.

EXEMPLE 2. Soient $(C^{\perp 1}, C^{\perp 2})$ une catégorie double, $G_1 = \square C^{\perp 1}$, $G_2 = \square C^{\perp 2}$, et G la sous-classe de $G_1 \times G_2$ formée des couples (Q_1, Q_2) tels que

$$\alpha^{\boxbar} Q_1 \text{ (dans } G_1^{\boxbar}) = \alpha^{\boxbar} Q_2 \text{ (dans } G_2^{\boxbar}),$$

$$\beta^{\boxbar} Q_1 \text{ (dans } G_1^{\boxbar}) = \beta^{\boxbar} Q_2 \text{(dans } G_2^{\boxbar}),$$

c'est-à-dire de la forme $((f', g'_1, g_1, f), (f', g'_2, g_2, f))$, $f', g'_1, g'_2, f, g_1, g_2 \in C$.

$$(G_1^{\boxbar} \times G_2^{\boxbar}, G_1^{\boxminus} \times G_2^{(\perp 1)^{\text{ц}}}, G_1^{(\perp 2)^{\text{ц}}} \times G_2^{\boxminus})$$

est une catégorie triple, où $G_2^{(\perp 1)^{\text{ц}}}$ (resp. $G_1^{(\perp 2)^{\text{ц}}}$) désigne la sous-catégorie de $C^{\perp 1} \times C^{\perp 1} \times C^{\perp 1} \times C^{\perp 1}$ (resp. $C^{\perp 2} \times C^{\perp 2} \times C^{\perp 2} \times C^{\perp 2}$) définie par G_2 (resp. par G_1).

G définit une sous-catégorie triple $(G^{\overline{\boxbar}}, G^{\overline{\boxminus} 1}, G^{\overline{\boxminus} 2})$ de la catégorie triple précédente. On définit un isomorphisme ε de catégories doubles de $((G_o^{\overline{\boxbar}})^{\overline{\boxminus} 1}, (G_o^{\overline{\boxbar}})^{\overline{\boxminus} 2})$ vers $(C^{\perp 1}, C^{\perp 2})$ par

$$\varepsilon(Q_1, Q_2) = f, \text{ si } (Q_1, Q_2) = ((f, \beta^{\perp 1} f, \alpha^{\perp 1} f, f), (f, \beta^{\perp 2} f, \alpha^{\perp 2} f, f))^{\bullet}.$$

Soit $\overline{\Phi} = ((G^{\overline{\boxbar}}, G^{\overline{\boxminus} 1}, G^{\overline{\boxminus} 2}), \Phi)$, où

$$\Phi = ((G^{\overline{\boxminus} 1}, G^{\overline{\boxminus} 2}), \underline{\Phi}, (\Gamma^{\perp 2}, \Gamma^{\perp 1}))$$

est un foncteur double. Posons $F_1 = \varepsilon \circ \alpha^{\overline{\boxminus}} \Phi$, $F_2 = \varepsilon \circ \beta^{\overline{\boxminus}} \Phi$; $\overline{\Phi}$ est une transformation généralisée double entre les foncteurs doubles F_1 et F_2.

5. Limites généralisées.

A. LIMITES INDUCTIVES GENERALISEES. D'après ([1], App. 1) une limite inductive d'un foncteur F de $\Gamma^{\perp}$ vers $C^{\perp}$ est une $(C, \mathfrak{N}(C^{\perp}, \Gamma^{\perp})^{\boxbar})$-projection de F, où $\mathfrak{N}(C^{\perp}, \Gamma^{\perp})^{\boxbar}$ désigne la catégorie des transformations naturelles entre foncteurs appartenant à $\mathcal{F}$, de $\Gamma^{\perp}$ vers $C^{\perp}$, la classe des transformations naturelles constantes étant identifiée à C.

On peut généraliser cette définition en remplaçant $\mathfrak{N}(C^{\perp}, \Gamma^{\perp})^{\boxbar}$ par une catégorie de transformations naturelles généralisées

$$\mathcal{C}^{\bullet} = \mathfrak{N}((G^{\bullet}, G^{\perp}), \Gamma^{\perp})^{\bullet},$$

et la catégorie des transformations naturelles constantes par une sous-catégorie $\mathcal{C}'^{\bullet}$ de $\mathcal{C}^{\bullet}$. En particulier, on peut prendre pour $\mathcal{C}'$ la sous-classe de $\mathcal{C}$ formée des $\mathcal{C}$-transformations naturelles $\overline{\Phi}'$ à valeurs dans G', où $G'^{\bullet}$ est une sous-catégorie de $G^{\bullet}$ (c'est-à-dire telles que $\Phi'(\Gamma) \subset G'$). Si $G'^{\bullet}$ est pleine dans $G^{\bullet}$, $\mathcal{C}'^{\bullet}$ est pleine dans $\mathcal{C}^{\bullet}$.

DEFINITIONS. *Soit $\overline{F} \in \mathcal{C}_o^{\bullet}$. Une $(\mathcal{C}', \mathcal{C}^{\bullet})$-projection $\overline{F}'$ de $\overline{F}$ est appelée limite inductive généralisée relative à $\mathcal{C}'$, ou, en abrégé, $\mathcal{C}'$-limite inductive de $\overline{F}$.*

Si μ est un isomorphisme donné de $(G_o^{\bullet})^{\perp}$ vers un graphe multiplicatif $C^{\perp}$, on dit aussi que $(C^{\perp}, \mu \circ \underline{F}', \Gamma^{\perp})$ est une *$\mathcal{C}'$-limite inductive de $(C^{\perp}, \mu \circ \underline{F}, \Gamma^{\perp})$.*

Si $\Gamma^{\perp}$ est discrète, $\overline{F}'$ est appelée *$\mathcal{C}'$-somme de $\overline{F}$*.

EXEMPLE 1. Soient $\mathcal{C}^{\bullet} = \mathfrak{N}((G^{\bullet}, G^{\perp}), \Gamma^{\perp})^{\bullet}$, où $G^{\bullet}$ est une catégorie, et $\mathcal{C}'^{\bullet}$ la sous-catégorie de $\mathcal{C}^{\bullet}$ formée des $\mathcal{C}$-transformations naturelles à valeurs dans $G_o^{\perp}$. Si $e \in \Gamma_o^{\perp}$ et si Γ_e est la composante de e dans $\Gamma^{\perp}$, quel que soit $\overline{\Phi}' \in \mathcal{C}'$, la restriction Φ'/Γ_e de Φ' à $(\Gamma_e)^{\perp}$ est un néofoncteur constant.

Soit $\overline{F} \in \mathcal{C}_o^{\bullet}$. Alors $\overline{F}$ admet une $\mathcal{C}'$-limite inductive si, et seulement si, il existe $\overline{\Phi} \in \mathcal{C}'^{\bullet}_o . \mathcal{C} . \overline{F}$ vérifiant les conditions suivantes :

Pour chaque $\overline{\Psi} \in \mathcal{C}'^{\bullet}_o . \mathcal{C} . \overline{F}$ et pour chaque composante Γ_e de $\Gamma^{\perp}$ ($e \in \Gamma_o^{\perp}$ choisi dans cette composante), il existe $g_{\Gamma_e} \in G_o^{\perp}$ unique, tel que, pour chaque $f \in \Gamma_e$, on ait $\Psi(f) = g_{\Gamma_e} . \Phi(f)$. Si $\Gamma^{\perp}$ est discrète, ceci s'écrit $\Psi(e) = g_{\{e\}} . \Phi(e)$, Γ_e ayant un seul élément e.

En particulier :

1) Si $(G^{\square}, G^{\boxminus})$ joue le rôle de $(G^{\bullet}, G^{\perp})$, où $(G^{\square}, G^{\boxminus})$ est la catégorie double des quatuors d'une catégorie $C^{\perp}$, et si μ est l'isomorphisme canonique de $(G_o^{\square})^{\boxminus}$ vers $C^{\perp}$, $\overline{F}'$ est une $\mathcal{C}'$-limite inductive de $\overline{F}$ si, et seulement si, pour chaque composante Γ_e de $\Gamma^{\perp}$, $(\mu \circ \underline{F}')(e)$ est une limite inductive au sens usuel de $(C^{\perp}, \mu \circ \underline{F}/\Gamma_e, (\Gamma_e)^{\perp})$.

2) Si $(G^{\bullet}, G^{\perp})$ est le graphe multiplicatif double associé à un graphe multiplicatif muni d'un préordre compatible $(C^{\perp}, <)$ (Exemple 3, partie 1), $\overline{F}'$ est une $\mathcal{C}'$-limite inductive de $\overline{F}$ si, et seulement si, pour

chaque composante Γ_e de $\Gamma^{\perp}$, $F'(e)$ est un maximum de la classe des minorants appartenant à $C_o^{\perp}$ des éléments $F(f)$ pour $f \in \Gamma_e$.

EXEMPLE II. Soit, avec les notations précédentes, $\mathcal{C}''$ la sous-classe de $\mathcal{C}$ formée des transformations naturelles constantes. $\mathcal{C}''^{\bullet}$ est une sous-catégorie de $\mathcal{C}'^{\bullet}$, identique en particulier à $\mathcal{C}'^{\bullet}$ si $\Gamma^{\perp}$ est connexe. Si $\overline{F}$ admet une $\mathcal{C}'$-limite inductive $\overline{F'}$, $\overline{F}$ admet aussi une $\mathcal{C}''$-limite inductive si, et seulement si, la classe $(F'(e_i))_{\Gamma_i \in I}$, où I est la classe des composantes de $\Gamma^{\perp}$ et e_i est choisi dans la composante Γ_i, admet une somme au sens usuel dans $(G_o^{\bullet})^{\perp}$.

1) Si, comme dans l'exemple I_1, $(G^{\boxdot}, G^{\boxminus})$ joue le rôle de $(G^{\bullet}, G^{\perp})$, $\overline{F''}$ est une $\mathcal{C}''$-limite inductive de $\overline{F}$ si, et seulement si, $\overline{F''}$ est constant, de valeur $\varepsilon \in G_o^{\boxdot} \cap G_o^{\boxminus}$ et si $\mu(\varepsilon)$ est une limite inductive au sens usuel de $(C^{\top}, \mu \circ \underline{F}, \Gamma^{\perp})$.

2) Si $(\overline{G}^{\bullet}, G^{\perp})$ est, comme dans l'exemple I_2, associé au graphe multiplicatif $C^{\perp}$ muni d'un préordre compatible, $\overline{F''}$ est une $\mathcal{C}''$-limite inductive de $\overline{F}$ si, et seulement si, F'' est constant de valeur ε, où ε est un maximum de la classe des minorants appartenant à $C_o^{\perp}$ des éléments $F(f)$ pour $f \in \Gamma$.

EXEMPLE III. Soit $\mathcal{C}^{\bullet} = \mathfrak{N}((G^{\bullet}, G^{\perp}), \Gamma^{\perp})^{\bullet}$. Soit G' la sous-classe de G formée des g tels que $\alpha^{\perp} g = \beta^{\perp} g$ et que $\alpha^{\bullet} g$ et $\beta^{\bullet} g$ soient inversibles dans $G^{\perp}$. G' définit une sous-catégorie de $G^{\bullet}$. Soit $\mathcal{C}'$ formée des $\mathcal{C}$-transformations naturelles à valeurs dans G'. Soit $\overline{F} \in \mathcal{C}_o^{\bullet}$:

1) Supposons comme dans les exemples I_1 et II_1 que $(G^{\boxdot}, G^{\boxminus})$ joue le rôle de $(G^{\bullet}, G^{\perp})$. Soient μ et ν les isomorphismes canoniques de $(G_o^{\boxdot})^{\boxminus}$ et $(G_o^{\boxminus})^{\boxdot}$ respectivement vers $C^{\perp}$. Si $\overline{F}$ admet une $\mathcal{C}'$-limite inductive, il existe une transformation naturelle au sens usuel du foncteur $(C^{\perp}, \mu \circ \underline{F}, \Gamma^{\perp})$ vers un foncteur appliquant chaque composante Γ_e de $\Gamma^{\perp}$ dans une sous-catégorie de $C^{\perp}$ formant un groupe. Si $\overline{\Phi}$ est un $(\mathcal{C}', \mathcal{C}^{\bullet})$-projecteur de source $\overline{F}$ et si $\overline{\Psi} \in \mathcal{C}'^{\bullet}.\mathcal{C}.\overline{F}$, il existe $\overline{\Psi'} \in \mathcal{C}'$ unique tel que, pour chaque $f \in \Gamma_e$, on ait

$$\Psi(f) = \Psi'(f) \boxdot \Phi(f) \text{ avec } \alpha^{\boxminus}\Psi'(f) = \beta^{\boxminus}\Psi'(f) = \Psi'(e).$$

Posons $g_{\Gamma_e} = \nu(\Psi'(e))$; alors

$$\Psi'(f) = (\mu(\beta^{\boxminus}\Psi(f)), g_{\Gamma_e}, g_{\Gamma_e}, \mu(\beta^{\boxminus}\Phi(f))).$$

2) Prenons pour jouer le rôle de $(G^{\bullet}, G^{\perp})$ la deux-catégorie $(G^{\boxminus}, G^{\Diamond})$ des transformations naturelles de foncteurs $\in \overline{\mathfrak{F}}$, où $\overline{\mathfrak{F}}$ est la catégorie des foncteurs au-dessus de $\overline{\mathfrak{M}}$, $\overline{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{M}_o$, $\overline{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}_o$ (Exemple 4, partie **1**). Si G' est défini comme ci-dessus, $G'^{\boxminus}$ est pleine dans $G^{\boxminus}$. En effet, si $\varepsilon \in G' \cap G_o^{\boxminus}$, $g \in G$, $\beta^{\boxminus} g \in G'$ et $\alpha^{\boxminus} g = \varepsilon$, comme $G_o^{\Diamond} \subset G_o^{\boxminus}$, on a :

$$\alpha^{\Diamond}(g) = \alpha^{\Diamond}(\alpha^{\boxminus} g) = \beta^{\Diamond}(\alpha^{\boxminus} g) = \beta^{\Diamond}(g) \text{ et } g \in G'.$$

Pour que $\overline{F}$ admette une $\mathcal{C}'$-limite inductive, donc pour qu'il existe un $(\mathcal{C}', \mathcal{C})$-projecteur Φ de source $\overline{F}$, il est nécessaire que, pour chaque $f \in \Gamma$, $\alpha^{\Diamond}(\Phi(f)) = \beta^{\Diamond}(\Phi(f))$. En effet :

$$\alpha^{\Diamond}(\Phi(f)) = \alpha^{\boxminus}(\alpha^{\Diamond}(\Phi(f))) = \beta^{\boxminus}(\alpha^{\Diamond}(\Phi(f))),$$

$$\alpha^{\Diamond}(\Phi(f)) = \alpha^{\Diamond}(F(f)) = \alpha^{\Diamond}(\beta^{\boxminus}\Phi(f)),$$

$$\beta^{\Diamond}(\Phi(f)) = \beta^{\Diamond}(F(f)) = \beta^{\Diamond}(\beta^{\boxminus}\Phi(f))$$

et, puisque $\alpha^{\Diamond}(\beta^{\boxminus}\Phi(f)) = \beta^{\Diamond}(\beta^{\boxminus}\Phi(f))$, $\alpha^{\Diamond}(F(f)) = \beta^{\Diamond}(F(f))$.

Si $e \in \Gamma_o^{\perp}$ et si Γ_e est la composante connexe de e dans $\Gamma^{\perp}$, pour chaque $f \in \Gamma_e$, $F(f)$ est un foncteur de la catégorie $F(e)$ vers elle-même.

S'il existe un $(\mathcal{C}', \mathcal{C}^{\bullet})$-projecteur de source $\overline{F}$ et de but $\overline{F}'$, pour chaque $f \in \Gamma_e$, $\Phi(f)$ est une transformation naturelle au sens usuel du foncteur $F(f)$ vers l'isomorphisme $F'(f)$ de la catégorie $F(e)$ sur elle-même.

Conditions suffisantes d'existence pour certaines limites inductives généralisées :

Soit $\mathcal{C}^{\bullet} = \mathfrak{N}((G^{\bullet}, G^{\perp}), \Gamma^{\perp})^{\bullet}$, où $(G^{\bullet}, G^{\perp})$ est une catégorie double et $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$. On connait des conditions suffisantes d'existence de $(\mathcal{C}', \mathcal{C}^{\bullet})$-projections lorsque $\mathcal{C}'^{\bullet}$ est une sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}^{\bullet}$ (c'est le cas des exemples I_1, I_2, III_2). Des conditions ont été données à la fin de la partie **3** , on peut les utiliser; $\mathcal{C}'$ joue le rôle de $\mathcal{H}$ et p est le foncteur identité sur $(G^{\circ}, G^{\perp})$:

Soit $\overline{F} \in \mathcal{C}_o^{\cdot}$. Supposons que $\mathcal{C}'$ soit la sous- classe de $\mathcal{C}^{\cdot}$ formée des transformations naturelles généralisées à valeurs dans une sous-catégorie pleine $G'^{\cdot}$ de $G^{\cdot}$ et que $G^{\cdot}$ admette un objet final appartenant à $G' \cap G_o^{\perp}$. Pour que $\overline{F}$ admette une $\mathcal{C}'$-limite inductive, c'est-à-dire une $(\mathcal{C}', \mathcal{C}^{\cdot})$-projection, il suffit que les conditions suivantes soient remplies :

1) Il existe dans $G^{\cdot}$ une application $\mathcal{I}_F$-produit naturalisé $\perp$-compatible, où $\mathcal{I}_F$ est la classe des sous-classes des classes $I_{F(f)} = G_o'^{\cdot} . G . F(f)$, où $f \in \Gamma$. (D'où l'existence de $\hat{\Phi}$ produit de la classe des $\overline{\Psi} \in \mathcal{C}_o'^{\cdot} . \mathcal{C} . \overline{F}$). Soit $\hat{F} = \beta \cdot \hat{\Phi}$.

2) Il existe dans $G^{\cdot}$ une application $(G', X, G^{\cdot})$-noyau $\perp$-compatible, où $X \subset R_g(G^{\cdot})$ et $\hat{F}(f) \in X_o^{\cdot}$ pour chaque f.

3) Chaque $\hat{\Phi}(f)$ admet une $(X . G_o'^{\cdot}, G^{\cdot}, G)$-image $\underline{\Phi}(f)$ telle que l'application $f \to \underline{\Phi}(f)$ définisse un foncteur Φ de $\Gamma^{\perp}$ vers $G^{\perp}$.

Alors $\overline{F}' = \alpha \cdot \overline{\Phi}$, où $\overline{\Phi} = ((G^{\cdot}, G^{\perp}), \Phi)$, est une $\mathcal{C}'$-limite inductive de $\overline{F}$. Si par exemple, avec les notations de l'exemple I_1, $(G^{\boxdot}, G^{\boxminus})$ joue le rôle de $(G^{\cdot}, G^{\perp})$ avec $G = \square C^{\perp}$, si pour chaque $e \in \Gamma_o^{\perp}$, toute sous-classe de $\beta^{\perp}(C \perp F(e))$ admet un produit dans $C^{\perp}$, si $C^{\perp}$ est à noyaux, les conditions précédentes 1 et 2 sont vérifiées.

B. LIMITES PROJECTIVES GENERALISEES. Soient comme dans A $\mathcal{C}^{\cdot} = \mathfrak{N}((G^{\cdot}, G^{\perp}), \Gamma^{\perp})$ et $\mathcal{C}'^{\cdot}$ une sous-catégorie de $\mathcal{C}^{\cdot}$. Par dualité on définit la notion de $\mathcal{C}'$-limite projective.

DEFINITION. *Soit* $\overline{F} \in \mathcal{C}_o^{\cdot}$. *Une* $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}')$*-éjection de* $\overline{F}$ *est appelée* $\mathcal{C}'$*-limite projective de* $\overline{F}$.

Si μ est un isomorphisme de $(G_o^{\cdot})^{\perp}$ vers un graphe multiplicatif $C^{\perp}$, $(C^{\perp}, \mu \circ \underline{F}', \Gamma^{\perp})$ est appelé aussi $\mathcal{C}'$-*limite projective de* $(C^{\perp}, \mu \circ \underline{F}, \Gamma^{\perp})$.

Si $\Gamma^{\perp}$ est discrète, $\overline{F}'$ est appelé $\mathcal{C}'$*-produit.*

Les exemples I, II, III se dualisent immédiatement.

C. LIMITES GENERALISEES n-UPLES. Avec les notations de la partie **3**, soit $\mathcal{C}^{\cdot} = \mathfrak{N}_n((G^{\cdot}, (G^{\perp i})_{i \leqslant n}), (\Gamma^{\perp i})_{i \leqslant n})$ une catégorie de transformations naturelles généralisées n-uples (on suppose que $G^{\bullet}$ est une catégorie). Soit $\mathcal{C}'^{\bullet}$ une sous-catégorie de $\mathcal{C}^{\bullet}$.

DEFINITION. *Soit* $\overline{F} \in \mathcal{C}^{\bullet}_{o}$. *Une* $(\mathcal{C}', \mathcal{C}^{\bullet})$*-projection de* $\overline{F}$ *est appelée* $\mathcal{C}'$*-limite inductive* n*-uple de* $\overline{F}$.

EXEMPLE. Soient $G' = \bigcap_{i \in \{1,\ldots,n\}} G_o^{\perp i}$ la classe des sommets de $(G^{\perp i})_{i \leqslant n}$ et $\mathcal{C}'^{\bullet}$ la sous-catégorie de $\mathcal{C}^{\bullet}$ correspondant à G' formée des $\overline{\Phi}' \in \mathcal{C}$ tels que $\Phi(\Gamma) \subset G'$. Si $\overline{\Phi}' \in \mathcal{C}'$, la restriction de Φ' à toute partie Γ' de Γ contenue dans une composante d'un des graphes multiplicatifs $\Gamma^{\perp}i$ est constante, et on est dans une situation analogue à celle de l'exemple *1* de A.

La sous-catégorie $\mathcal{C}''^{\bullet}$ de $\mathcal{C}^{\bullet}$ formée des $\mathcal{C}$-transformations naturelles généralisées n-uples constantes est une sous-catégorie de $\mathcal{C}'^{\bullet}$, identique à $\mathcal{C}'^{\bullet}$ si l'un des graphes multiplicatifs $\Gamma^{\perp i}$ est connexe.

On définit de même les limites projectives généralisées n-uples.

Références.

C. EHRESMANN :

[1] *Catégories et Structures,* Dunod, 1965.

[2] *Structures quasi-quotient,* Math. Ann. 171 (1967).

[3] *Sur l'existence de structures libres et de foncteurs adjoints,* Cahiers de Topologie et Géométrie différentielle, IX (1967).