

# CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES

LAURENT COPPEY

## Paratopologies et feuilletages

*Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques*, tome 10, n° 3 (1968), p. 271-299

[http://www.numdam.org/item?id=CTGDC\\_1968\\_\\_10\\_3\\_271\\_0](http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1968__10_3_271_0)

© Andrée C. Ehresmann et les auteurs, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

**PARATOPOLOGIES ET FEUILLETAGES.**

*par Laurent COPPEY*

**SOMMAIRE**

	Pages
<b>A. Paratopologies.</b>	
1. Définitions et Notations.....	2
2. Sommes de paratopologies.....	3
3. Questions d'ordre dans la « catégorie de base » $\mathcal{L}_a$ .....	9
4. L'espèce des paratopologies au-dessus de $(\mathcal{L}_a, <)$ .....	12
5. Quelques définitions et propriétés de « paratopologie générale »..	14
<b>B. Feuilletages paratopologiques.</b>	
1. L'espèce des feuilletages au-dessus de $\mathcal{I}(\mathcal{L}_a)$ .....	16
2. Feuilletages paratopologiques localement simples.....	18
3. Holonomie.....	22
<b>Bibliographie.</b> .....	29

## A. Paratopologies.

### 1. Définitions et Notations.

Soit  $(M, <)$  une classe ordonnée. Soit  $m \in M$ ; l'ensemble des éléments plus petits que  $m$ ,  $m$  y compris, est désigné par  $\varphi_M(m)$  (ou  $\varphi(m)$  s'il n'y a pas de confusion possible).

Soit  $B$  une partie de  $M$ ; si  $B$  admet une borne supérieure (resp. inférieure), on la note  $\cup B$  (resp.  $\cap B$ ); on dira aussi que  $B$  admet  $\cup B$  pour agrégat (resp.  $\cap B$  pour intersection). En tant que classe ordonnée,  $(B, <)$  désigne la classe ordonnée induite par  $(M, <)$  sur  $B$ .

On dit qu'une classe ordonnée  $(M, <)$  est *achevée* (« complète » dans [8]) si elle a un plus grand élément; on note celui-ci  $1_M$  (ou  $1$  simplement); si  $(M, <)$  a un plus petit élément, celui-ci est noté  $0_M$  (ou  $0$  parfois).

Pour les définitions de « classe inductive », « classe locale », « application inductive », nous renvoyons à [5a]. Soit  $\mathfrak{M}$  la catégorie pleine des applications associée à un univers  $\mathfrak{M}_0$ ; on désigne par  $\overline{\mathfrak{I}}_a$  (resp.  $\underline{\mathfrak{I}}_a$ ) la catégorie des applications inductives  $f = ((M', <), \underline{f}, (M, <))$  vérifiant les conditions suivantes :

a)  $(M, <)$  et  $(M', <)$  sont des classes inductives (resp. locales) achevées dont les classes sous-jacentes  $M$  et  $M'$  sont des éléments de  $\mathfrak{M}_0$  et ont au moins deux éléments.

b)  $f$  satisfait les égalités  $\underline{f}(1_M) = 1_{M'}$ ,  $\underline{f}(0_M) = 0_{M'}$ .

En adjoignant à  $\overline{\mathfrak{I}}_a$  un objet final  $0$ , on obtient une catégorie  $\mathfrak{I}_a$ ; l'unique morphisme de source  $e = (M, <)$  et de but  $0$  est désigné par  $r_e$ .  $\underline{\mathfrak{I}}_a$  est la sous-catégorie pleine de  $\mathfrak{I}_a$  dont les objets sont les classes locales achevées et  $0$ .

REMARQUE. Soit  $f \in \mathfrak{I}_a$ ; si  $\beta(f) = 0$ , alors  $f = r_{\alpha(f)}$ ; si  $\beta(f) \neq 0$ , alors on a aussi  $\alpha(f) \neq 0$ .

Soit  $p$  le foncteur d'oubli de  $\mathfrak{I}_a$  vers  $\mathfrak{M}$  défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} p(f) = (M', \underline{f}, M) \text{ si } f = ((M', <), \underline{f}, (M, <)), \\ p(0) = \mathcal{P}(\emptyset), \\ p(r_e) = (\mathcal{P}(\emptyset), \underline{s}, M) \text{ si } e = (M, <), \text{ avec } \underline{s}(m) = \emptyset, \forall m \in M. \end{array} \right.$$

Soit  $\mathfrak{M}^l$  la sous-catégorie de  $\mathfrak{M}$  formée des injections canoniques; soit  $\mathfrak{G}_a^r$  la sous-catégorie de  $\mathfrak{G}_a$  formée des  $(\mathfrak{M}^l, p)$ -injections (voir [ 3 ]); nous désignerons par  $\mathcal{T}(\mathfrak{G}_a)$  la catégorie  $\square(\mathfrak{G}_a; \mathfrak{G}_a^r)$  des quatuors  $(g, j', j, f)$  tels que  $j'$  et  $j \in \mathfrak{G}_a^r$  (multiplication latérale);  $\theta$  est le foncteur d'oubli de  $\mathcal{T}(\mathfrak{G}_a)$  vers  $\mathfrak{G}_a$  défini par

$$\theta(q) = g \text{ si } q = (g, j', j, f).$$

En partant de la restriction de  $p$  à  $\mathfrak{L}_a$ , on définit de la même façon  $\mathcal{T}(\mathfrak{L}_a)$  et le foncteur d'oubli de  $\mathcal{T}(\mathfrak{L}_a)$  vers  $\mathfrak{L}_a$ , encore noté  $\theta$ . Les *paratopologies* sont les éléments de la classe  $\mathfrak{L}_a^r$ , classe que l'on identifie à la classe des unités de  $\mathcal{T}(\mathfrak{L}_a)$ . Les *morphismes continus* sont les éléments de  $\mathcal{T}(\mathfrak{L}_a)$ . Pratiquement, une paratopologie est un triple  $(\Omega, M, <)$ , où  $(M, <)$  est une classe locale achevée et où  $\Omega$  est une sous-classe de  $M$  satisfaisant les conditions :

$$1_M, 0_M \in \Omega; \quad u_1, u_2 \in \Omega \implies u_1 \cap u_2 \in \Omega; \quad u_i \in \Omega, \quad \forall i \in I \implies \bigcup_{i \in I} u_i \in \Omega;$$

$(\Omega, <)$  est alors une classe locale achevée dans laquelle l'opération d'«agrégation» coïncide avec celle existant dans  $(M, <)$ , mais l'opération d'«intersection» est distincte. Un morphisme continu peut se représenter alors sous la forme d'un triplet  $((\Omega', M', <), \underline{f}, (\Omega, M, <))$ , où

$$((M', <), \underline{f}, (M, <)) \in \mathfrak{L}_a \quad \text{et} \quad \underline{f}(\Omega) \subset \Omega',$$

$(\Omega', M', <)$  et  $(\Omega, M, <)$  étant des paratopologies.

2. *Sommes de paratopologies.*

On trouvera dans [ 1 ] une construction de sommes quelconques dans la catégorie  $\mathfrak{L}_a$  (les notations ne sont pas les mêmes). Ici, nous donnons un autre procédé de construction (par récurrence transfinitive), valable seulement pour les sommes finies dans  $\mathfrak{L}_a$ ; ce même procédé de construction, appliqué dans la catégorie  $\mathfrak{G}_a$ , prouve que cette catégorie est à  $\mathfrak{L}_a$ -quasi-sommes finies. De plus nous montrons que le foncteur  $\theta$  est à sommes.

Soit  $I_n = \{ 1, 2, \dots, n \}$ . Soient  $(M_i, <)_{i \in I_n}$  une suite de  $n$  classes inductives achevées (on omettra parfois le signe d'ordre); posons

$$0_i = 0_{M_i} \quad \text{et} \quad 1_i = 1_{M_i}, \quad \forall i \in I_n;$$

soit  $(M, <)$  la classe ordonnée formée :

- des éléments  $[m] = (m_1, m_2, \dots, m_n)$  de  $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$  tels que  $m_i \neq 0_i, \forall i \in I_n$ ; l'ordre entre ces éléments est celui défini par le produit des ordres des facteurs.

- d'un plus petit élément, noté  $0$ .

$(M, <)$  est une classe inductive achevée; soit  $[m]^k = (m_1^k, m_2^k, \dots, m_n^k)$ ,  $k \in K$ , une famille d'éléments de  $M$ ; si  $\bigcap_{k \in K} m_i^k \neq 0_i, \forall i \in I_n$ , on a

$$\bigcap_{k \in K} [m]^k = (\bigcap_k m_1^k, \bigcap_k m_2^k, \dots, \bigcap_k m_n^k), \quad \text{sinon} \quad \bigcap_{k \in K} [m]^k = 0.$$

En particulier

$$\bigcap M = 0_M = 0 \quad \text{et} \quad \bigcup M = 1_M = (1_1, 1_2, \dots, 1_n).$$

Si les classes  $(M_i, <)$  sont des classes locales, il en est de même de  $(M, <)$ .

CONVENTION. Une famille  $[m]_{k \in K}^k$  d'éléments de  $M$  ne différant entre eux que par leur  $j^{\text{ème}}$  coordonnée sera notée  $[m]_j^k, k \in K$ .

Les parties  $P$  de  $M$  dont il est question maintenant sont non vides :

DEFINITIONS.  $P$  est dite saturée si

$$p \in P \implies \varphi(p) \subset P.$$

Si  $P$  est une partie quelconque de  $M$ ,  $s(P)$  désigne la plus petite partie saturée contenant  $P$ ; on a

$$s(P) = \bigcup_{p \in P} \varphi(p).$$

Soit  $\xi$  un nombre cardinal. On dit que  $P$  est  $A_j^\xi$ -stable ( $j \in I_n$ ) si la condition suivante est satisfaite :

$$\text{card } K \leq \xi, [m]_j^k \in P, \forall k \in K \implies \bigcup_{k \in K} ([m]_j^k) \in P.$$

Une partie  $A_j^\xi$ -stable,  $\forall j \in I_n$ , est dite  $A^\xi$ -stable.

Une partie  $A^\xi$ -stable,  $\forall \xi$ , est dite  $A$ -stable (i. e. « stable par agrégations partielles quelconques »).

Soit  $S$  la classe des parties de  $M$  qui sont à la fois saturées et  $A$ -stables. Munie de l'ordre défini par l'inclusion,  $S$  est une classe inductive achevée. L'intersection dans  $(S, C)$  coïncide avec l'intersection ensembliste, mais l'agrégat d'une famille  $(P_i)_{i \in I}$  d'éléments de  $S$  n'est pas leur réunion, on le notera donc ici  $\bigcup_{i \in I} P_i$ ; on a  $\bigcup_{i \in I} P_i \supset \bigcup_{i \in I} P_i$ . A toute partie  $Q$  de  $M$ , on peut faire correspondre alors sa fermeture à la Moore  $\overline{Q}$  dans  $(S, C)$ : c'est le plus petit élément de  $S$  contenant  $Q$ . On a bien sûr  $\overline{\bigcup_{i \in I} P_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{P_i}$ .

On peut identifier  $M$  à une sous-classe de  $S$  en remarquant que,  $\forall [m] \in M$ , on a  $\varphi_M([m]) \in S$ ; on écrira alors simplement  $[m] \in S$ ; par exemple, le plus petit élément de  $(S, C)$ , qui est la partie réduite à  $0$ , sera encore noté  $0$ ; le plus grand élément de  $(S, C)$  est  $1_M$ . Cette identification respecte l'opération d'intersection, mais elle ne respecte pas l'opération d'agrégation.

On a les injections canoniques des  $(M_i, <)$  dans  $(S, C)$  suivantes :

$$\iota_i = ((S, C), \underline{\iota}_i, (M_i, <)),$$

où

$$\underline{\iota}_i(0_i) = 0,$$

et, si  $m_i \neq 0_i$ ,

$$\underline{\iota}_i(m_i) = (1_1, 1_2, \dots, 1_{i-1}, m_i, 1_{i+1}, \dots, 1_n).$$

$\iota_i \in \mathcal{I}_a, \forall i \in I_n$ .

Soit  $Q$  une partie de  $M$ ;  $A_j(Q)$  est la classe des éléments  $[m]$  de  $M$  qui peuvent s'écrire d'au moins une façon sous la forme  $0$  ou

$$[m] = \bigcup_{k \in K} ([m]_j^k), \text{ où } [m]_j^k \in Q.$$

PROPOSITION 1. Si  $Q$  est saturée et si les  $(M_i, <)$  sont des classes locales, alors  $A_j(Q)$  est saturée,  $\forall j \in I_n$ .

Démonstration facile.

D'une façon générale, on posera :

$$a_j(Q) = s(A_j(Q)), \Gamma_1(Q) = a_n(a_{n-1}(\dots(a_1(Q))\dots)),$$

et, pour tout nombre ordinal  $\lambda$ , on définit  $\Gamma_\lambda(Q)$  par induction transfinie :  $\Gamma_\mu(Q)$  étant défini  $\forall \mu < \lambda$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} - \text{ si } \lambda \text{ est de 1}^{\text{ère}} \text{ espèce, on pose } \Gamma_\lambda(Q) = \Gamma_1(\Gamma_{\lambda-1}(Q)), \\ - \text{ si } \lambda \text{ est de 2}^{\text{ème}} \text{ espèce, on pose } \Gamma_\lambda(Q) = \bigcup_{\mu < \lambda} \Gamma_\mu(Q). \end{array} \right.$$

PROPOSITION 2. *Quel que soit l'ordinal  $\lambda$ , on a  $Q \subset \Gamma_\lambda(Q) \subset \bar{Q}$  et, quel que soit le cardinal  $\xi$ , il existe un ordinal régulier  $\lambda(\xi)$  tel que  $\Gamma_{\lambda(\xi)}(Q)$  soit  $A^\xi$ -stable.*

DEMONSTRATION. On a successivement, pour une partie  $Q$  quelconque de  $M$ ,

$$s(Q) \supset Q \quad \text{et} \quad A_j(Q) \supset Q, \quad \forall j \in I_n;$$

d'où  $a_j(Q) \supset Q$ ,  $\forall j \in I_n$ ; donc  $\Gamma_1(Q) \supset Q$ ; la définition même de  $\bar{Q}$  entraîne  $\Gamma_1(Q) \subset \bar{Q}$ . On montre alors par récurrence transfinie que,  $\forall \lambda$ ,  $Q \subset \Gamma_\lambda(Q) \subset \bar{Q}$ .

Soit  $\xi$  un cardinal; soit  $\bar{\xi}$  le plus petit ordinal de la classe des ordinaux représentés par des ensembles bien ordonnés de cardinal  $\xi$ ; soit  $\lambda_{\bar{\xi}+1}$  l'ordinal d'indice  $\bar{\xi}+1$  (voir [2]);  $\lambda_{\bar{\xi}+1}$  est un ordinal régulier. En utilisant ce fait, on montre facilement que  $\Gamma_{\lambda_{\bar{\xi}+1}}(Q)$  est  $A_j^\xi$ -stable,  $\forall j \in I_n$ , c'est-à-dire  $A^\xi$ -stable.

COROLLAIRE. *Il existe un ordinal  $\alpha$  tel que  $\Gamma_\alpha(Q) = \bar{Q}$ .*

En effet, en choisissant le cardinal  $\xi$  supérieur à  $\kappa = \sup_{i \in I} (\text{card. } M_i)$ , on voit que  $\Gamma_{\lambda_{\bar{\xi}+1}}$  est  $A$ -stable, car, d'après le choix de  $\xi$ , «  $A^\xi$ -stable » est équivalent à «  $A$ -stable ». Alors  $\Gamma_\alpha(Q) \in S$ , avec  $\alpha = \lambda_{\bar{\xi}+1}$  et  $\xi > \kappa$ , donc  $\Gamma_\alpha(Q) = \bar{Q}$ .

PROPOSITION 3. *Soit  $P \in S$ ; soit  $Q$  une partie saturée de  $(M, <)$ , si les classes  $(M_i, <)$  sont des classes locales, alors on a  $\overline{P \cap Q} = P \cap \bar{Q}$ .*

On montre d'abord que,  $\forall j \in I_n$ , on a  $A_j(P \cap Q) = P \cap A_j(Q)$ , (on utilise la prop. 1). On en déduit que  $\Gamma_1(P \cap Q) = P \cap \Gamma_1(Q)$  et on peut achever la démonstration par récurrence transfinie, en utilisant le corollaire de la prop. 2 et le fait que toutes les parties qui interviennent dans le calcul sont saturées.

COROLLAIRE. Si les facteurs  $(M_i, <)$  sont des classes locales, alors  $(S, C)$  est une classe locale.

En effet, soit  $(P_k)_{k \in K}$  une famille d'éléments de  $S$  et  $P$  un autre élément de  $S$ ; on applique le résultat de la proposition 3 dans le cas où  $Q = \bigcup_k P_k$ , ce qui donne

$$P \cap \left( \bigcup_k P_k \right) = \bigcup_k (P \cap P_k).$$

THEOREME 1.  $((S, C), (\iota_i)_{i \in I_n})$  est une  $\mathcal{L}_a^{\mathcal{Q}}$ -quasi-somme des  $(M_i, <)$  dans la catégorie  $\mathcal{J}_a$ .

On sait déjà que  $(S, C)$  est un objet de  $\mathcal{J}_a$  et que les  $\iota_i$  sont des morphismes de  $\mathcal{J}_a$ . Il reste à montrer que, quels que soient les  $f_i = ((N, <), \underline{f}_i, (M_i, <))$ , éléments de  $\mathcal{J}_a$ , avec  $(N, <) \in (\mathcal{L}_a^{\mathcal{Q}})_0$ , il existe un  $g$  unique,  $g = ((N, <), \underline{g}, (S, C))$ , appartenant à  $\mathcal{J}_a$  et tel que  $g \cdot \iota_i = f_i, \forall i \in I_n$ .

Supposons donnés les  $f_i$ ; on définit  $\underline{g}$  de la façon suivante :

$$\underline{g}(P) = \bigcup_{[m]} (f_{\underline{1}}(m_1) \cap f_{\underline{2}}(m_2) \cap \dots \cap f_{\underline{n}}(m_n)),$$

l'agrégat portant sur tous les  $[m] = (m_1, m_2, \dots, m_n)$  qui sont plus petits que  $P$ . On vérifie facilement que :  $\underline{g}(0) = 0_N, \underline{g}(I_S) = I_N$ ;  $\underline{g}$  est croissante;  $\underline{g}(\iota_i(m_i)) = f_i(m_i), \forall i \in I_n$ . Ensuite, il faut prouver que :

$$\underline{g}(P_1 \cap P_2) = \underline{g}(P_1) \cap \underline{g}(P_2), \quad \forall P_1 \text{ et } P_2 \in S;$$

ceci résulte d'un calcul qui utilise essentiellement le fait que  $(N, <)$  est une classe locale et que les  $f_i$  sont des applications inductives. Enfin pour prouver que  $\underline{g}(\bigcup_k P_k) = \bigcup_k \underline{g}(P_k)$ , on doit d'abord définir  $\underline{g}(Q)$ , quelle que soit la partie non vide  $Q$  de  $M$ , comme étant l'agrégat des  $\underline{g}([m])$ , pour  $[m]$  parcourant  $Q$ , puis on montre, par un calcul, que  $\underline{g}(A_j(Q)) = \underline{g}(Q), \forall j \in I_n$ ; donc  $\underline{g}(\Gamma_{\underline{1}}(Q)) = \underline{g}(Q)$  et enfin, par récurrence transfinie  $\underline{g}(\overline{Q}) = \underline{g}(Q)$  (ceci utilise le fait que  $\underline{g}(\bigcup_i Q_i) = \bigcup_i \underline{g}(Q_i)$ ). Alors en faisant  $Q = \bigcup_k P_k$ , on obtient bien :

$$\underline{g}\left(\bigcup_k P_k\right) = \bigcup_k \underline{g}(P_k).$$

L'unicité de  $g$  résulte de la construction même de  $\underline{g}$ .

THEOREME 2. Si les  $(M_i, <)$  sont des classes locales,  $((S, \mathcal{C}), (\iota_i)_{i \in I_n})$  est une somme des  $(M_i, <)$  dans  $\mathcal{L}_a$ .

Cela résulte du Th. 1 et du corollaire de la Prop. 3.

REMARQUE. Si la famille d'unités  $(e_i)_{i \in I_n}$  de  $\mathcal{G}_a$  (ou  $\mathcal{L}_a$ ) dont on cherche la somme comporte l'élément 0, il est bien évident que la somme existe et n'est autre que 0 lui-même.

THEOREME 3. La catégorie  $\mathcal{J}(\mathcal{L}_a)$  est à sommes quelconques.

Ici, nous admettons (voir [ 1 ]) que  $\mathcal{L}_a$  est une catégorie à sommes quelconques.

Nous reprenons les notations précédentes, en remplaçant  $I_n$  par un ensemble d'indices quelconque  $I$ .

Soit  $\coprod$  un foncteur somme naturalisé dans  $\mathcal{L}_a$ . Si  $j$  est une paratopologie, on identifie  $\alpha(j)$  (resp.  $\beta(j)$ ) à la « classe locale source » (resp. « but ») de  $j$ .

Soit  $(j_i)_{i \in I}$  une famille de paratopologies. Posons :

$$(S, <) = \coprod_i \beta(j_i); \quad (\mathcal{U}, <) = \coprod_i \alpha(j_i) \quad \text{et} \quad J = \coprod_i j_i.$$

On a  $J = j.s$ , où

$$j = ((S, <), \underline{j}, (\underline{J}(\mathcal{U}), <))$$

et

$$s = ((\underline{J}(\mathcal{U}), <), \underline{s}, (\mathcal{U}, <)), \quad (\underline{s}(u) = \underline{J}(u) \text{ et } \underline{j}(v) = v).$$

Posons enfin  $q_i = (\iota_i, j, j_i, s.l_i)$ , où

$$\begin{cases} \iota_i = \text{injection canonique de } \beta(j_i) \text{ dans } (S, <) \\ \text{et } \begin{cases} l_i = \text{injection canonique de } \alpha(j_i) \text{ dans } (\mathcal{U}, <). \end{cases} \end{cases}$$

On va montrer que  $(j, (q_i)_{i \in I})$  est une somme des  $j_i$  dans  $\mathcal{J}(\mathcal{L}_a)$ .

Soient en effet  $(f_i, j', j_i, g_i)_{i \in I}$  des morphismes continus de source  $j_i$  et de but  $j'$ ; puisque  $(S, <)$  est une somme des  $\beta(j_i)$ , il existe un morphisme unique  $f \in \mathcal{L}_a$ , de source  $(S, <)$  et but  $\beta(j')$ , tel que  $f.\iota_i = f_i, \forall i \in I$ . De même, il existe un  $g$  unique de  $\mathcal{L}_a$ , de source  $(\mathcal{U}, <)$  et de but  $\alpha(j')$ , tel que  $g.l_i = g_i, \forall i \in I$ . On peut alors compléter  $(f, j', j, .)$  en un quatuor  $(f, j', j, \hat{g})$  qui est un morphisme continu:

En effet, puisque  $\amalg$  est un foncteur somme naturalisé, on sait que  $(f, j', J, g)$  est un quatuor; on définit alors  $\hat{g}$ , de source  $\beta(s)$  et de but  $\beta(J)$ , de la façon suivante : soit  $u \in J(\mathcal{U})$ ;  $\underline{s}$  étant une surjection, il existe  $u_1 \in \mathcal{U}$  tel que  $\underline{s}(u_1) = u$ ; on pose  $\underline{\hat{g}}(u) = \underline{g}(u_1)$ ; on définit bien ainsi une application de  $J(\mathcal{U})$  dans  $\alpha(j')$ , car, si  $u_1$  et  $u_2$  sont tels que  $\underline{s}(u_1) = \underline{s}(u_2) = u$ , on a  $\underline{f}(J(u_1)) = \underline{f}(j(u)) = \underline{f}(J(u_2))$  d'où, puisque  $(f, j', J, g)$  est un quatuor,  $\underline{j}'(\underline{g}(u_1)) = \underline{j}'(\underline{g}(u_2))$  et,  $j'$  étant une injection, il vient  $\underline{g}(u_1) = \underline{g}(u_2)$ . Il est évident alors que  $\hat{g} = (\alpha(j'), \underline{\hat{g}}, (J(\mathcal{U}), <)) \in \mathcal{L}_a$  et que  $(f, j', j, \hat{g})$  est un morphisme continu tel que :

$$(f, j', j, \hat{g}) \square (\iota_i, j, j_i, s.l_i) = (f_i, j', j_i, g_i) \quad \forall i \in I.$$

Soit  $(f', j', j, \hat{g}')$  un autre quatuor tel que :

$$(f', j', j, \hat{g}') \square (\iota_i, j, j_i, s.l_i) = (f_i, j', j_i, g_i) \quad \forall i \in I.$$

On a, en particulier,  $f'.\iota_i = f.\iota_i = f_i, \forall i \in I$ ; et comme  $(S, <)$  est une somme des  $\beta(j_i)$ , cela entraîne  $f = f'$ . Ensuite  $j'.\hat{g} = j'.\hat{g}' = f.j$  et le fait que  $j'$  soit une injection entraînent  $\hat{g} = \hat{g}'$ , ce qui achève de montrer que  $j$  est bien une somme des  $j_i$  dans  $\mathcal{T}(\mathcal{L}_a)$ . Les injections canoniques  $(\iota_i, j, j_i, s.l_i)$  des  $j_i$  dans  $j$  sont bien des morphismes continus, mais les éléments  $s.l_i$  n'ont aucune raison d'être des injections dans la catégorie  $\mathcal{L}_a$ .

Le foncteur  $\theta$  (foncteur d'oubli de  $\mathcal{T}(\mathcal{L}_a)$  vers  $\mathcal{L}_a$  défini par  $\theta(q) = f$ , avec  $q = (f, j', j, g)$ ) est un foncteur à sommes, parce que le but de  $j$  est bien une somme des  $\beta(j_i)$  dans  $\mathcal{L}_a$ ; par contre le foncteur  $p$  (oubli de  $\mathcal{L}_a$  vers  $\mathcal{M}$ ) n'est pas à sommes et la source de  $j$  n'est pas une somme des  $\alpha(j_i)$  dans  $\mathcal{L}_a$ .

### 3. Questions d'ordre dans la « catégorie de base » $\mathcal{L}_a$ .

L'axiome de distributivité intervient de façon essentielle dans ce qui suit (à propos des feuilletages); aussi nous nous restreignons dès maintenant à l'étude de la catégorie  $\mathcal{T}(\mathcal{L}_a)$ , bien que certaines questions s'étendent de façon évidente aux catégories  $\mathcal{J}_a$  et  $\mathcal{T}(\mathcal{J}_a)$ .

Soit  $\mathcal{L}'_a$  la sous-catégorie de  $\mathcal{L}_a$  formée :

- des « rétractions canoniques »  $r = ((\varphi(m_o), <), \underline{r}(M, <))$ , où  $m_o \in M$ ,  $m_o \neq 0_M$ , et  $\underline{r}(m) = m \cap m_o$ ,  $\forall m \in M$ .

- des éléments de but  $0 : r_e$ ,  $e \in (\mathcal{L}_a)_o$ .

$\mathcal{L}_a^r$  contient  $(\mathcal{L}_a)_o$  et définit un ordre sur cette classe (voir [3]) : on a  $e < e'$  s'il existe  $r \in \mathcal{L}_a^r$  tel que  $\beta(r) = e$  et  $\alpha(r) = e'$ . On étend cet ordre à la catégorie  $\mathcal{L}_a$  de la façon suivante :  $f < f'$ , dans  $\mathcal{L}_a$ , si et seulement si il existe un quatuor du type  $(r', f, f', r) \in \square(\mathcal{L}_a^r, \mathcal{L}_a^r, \cdot)$ .

THEOREME 1. *Muni de cet ordre, la catégorie  $(\mathcal{L}_a, <)$  est une catégorie s-ordonnée, régulière, complètement régulière à gauche, sous-locale.*

Pour la signification précise des termes de l'énoncé, nous renvoyons à [3] et [5 a].

La démonstration complète consiste surtout en des vérifications que nous ne donnons pas; nous notons seulement les résultats successifs à établir en détaillant certains d'entre eux :

-  $f < g \implies \alpha(f) < \alpha(g)$  et  $\beta(f) < \beta(g)$ .

-  $(f, f_1), (g, g_1) \in \mathcal{L}_a * \mathcal{L}_a$  et  $f < g$ ,  $f_1 < g_1 \implies f \cdot f_1 < g \cdot g_1$ .

-  $f' < f$ ,  $f'' < f$ ,  $[\beta, \alpha](f') = [\beta, \alpha](f'') \implies f' = f''$ .

-  $\forall f \in \mathcal{L}_a$ , on a  $0 < f$ , et  $\forall r \in \mathcal{L}_a^r$ , on a  $\beta(r) < r < \alpha(r)$ .

- Si  $e \in (\mathcal{L}_a)_o$  et si  $g < e$ , on a :  $g \in \mathcal{L}_a^r$ .

- Soit  $f < g$ ; alors, on a :  $1_{\beta(f)} < \underline{g}(1_{\alpha(f)})$  ( $f$  et  $g \neq 0$ ).

-  $((\mathcal{L}_a)_o, <)$  est une classe sous-locale. Précisons quelle est l'intersection d'une famille d'unités  $(e_i)_{i \in I}$ , majorée par  $e = (M, <)$  (on suppose les  $e_i$  différents de 0, sinon  $\bigcap e_i = 0$ ) : Soit  $e_i = (\varphi(m_i), <)$ , où  $m_i \in M$ ; si  $\bigcap_i m_i \neq 0_M$  (intersection prise dans  $(M, <)$ ), on a

$$\bigcap_i e_i = (\varphi(\bigcap_i m_i), <);$$

si au contraire  $\bigcap_i m_i = 0_M$ , on montre que  $\bigcap_i e_i$  existe et vaut 0. Le e-agrégat de la famille  $(e_i)_{i \in I}$  est la classe locale  $(\varphi(\bigcup_i m_i), <)$ . Si  $(\bigcup_i^e e_i) \cap e'$  est défini,  $e'$  étant une autre unité de  $\mathcal{L}_a$ ,  $\bigcup_i^e (e_i \cap e')$  est aussi défini et on a l'égalité :

$$(\bigcup_i^e e_i) \cap e' = \bigcup_i^e (e_i \cap e').$$

-  $(\mathcal{L}_a, <)$  est une classe sous-inductive. Ici aussi, nous allons préciser quelle est l'intersection d'une famille  $(f_i)_{i \in I}$  d'éléments de  $\mathcal{L}_a$ , majorée par  $f$ : on suppose  $f_i$  et  $f \neq 0$ . Posons

$$\alpha(f) = (M, <) \quad \text{et} \quad \alpha(f_i) = (\varphi(m_i), <), \quad m_i \in M;$$

on a, par définition de  $1_{M_i}$ ,  $1_{M_i} = m_i$ . L'intersection d'une famille d'unités dans  $(\mathcal{L}_a, <)$  est encore une unité et c'est l'intersection prise dans  $((\mathcal{L}_a)_o, <)$ ; on a  $\beta(f_i) < \beta(f)$ ,  $\forall i \in I$ , donc  $\bigcap_i \beta(f_i)$  existe; de même  $\bigcap_i \alpha(f_i) = e$  existe;

- si  $\bigcap_i \beta(f_i) = 0$ , on vérifie que  $\bigcap_i f_i$  existe et vaut  $r_e$ ;

- si  $\bigcap_i \beta(f_i) \neq 0$ , soit  $e'' = (\varphi(f(\bigcap_i m_i)), <)$  ou  $0$  selon que  $\underline{f}(\bigcap_i m_i) \neq 0_{\beta(f)}$  ou  $= 0_{\beta(f)}$ ; on montre que :

$$\sim \text{si } e'' \cap (\bigcap_i \beta(f_i)) = 0, \bigcap_i f_i \text{ vaut } r_e,$$

$\sim$  si  $e'' \cap (\bigcap_i \beta(f_i)) = e_1 \neq 0$ ,  $\bigcap_i f_i = g =$  l'unique morphisme de  $\mathcal{L}_a$ , plus petit que  $f$ , de source  $e$  et de but  $e_1$ .

On remarque que  $\alpha(\bigcap_i f_i) = \bigcap_i \alpha(f_i)$  dans tous les cas. Par contre, en général, on a seulement :  $\beta(\bigcap_i f_i) < \bigcap_i \beta(f_i)$ . Cependant, si  $I$  est fini,

$$\underline{f}(\bigcap_i m_i) = \bigcap_i \underline{f}(m_i) > \bigcap_i 1_{\beta(f_i)}, \quad \text{d'où } e_1 = \bigcap_i \beta(f_i)$$

et l'on a bien  $\beta(\bigcap_i f_i) = \bigcap_i \beta(f_i) = e_1$ .

- Soit  $(e_i)_{i \in I}$  une famille d'unités, majorée par  $f \in \mathcal{L}_a$ ; les  $e_i$  sont majorés aussi par  $\alpha(f)$  et on vérifie que le  $f$ -agrégat des  $e_i$  dans  $(\mathcal{L}_a, <)$  est égal au  $\alpha(f)$ -agrégat des  $e_i$  dans  $((\mathcal{L}_a)_o, <)$ ; c'est donc une unité; on montre alors que le  $f$ -agrégat d'une famille  $(f_i)_{i \in I}$ , majorée par  $f$ , est l'unique morphisme de  $\mathcal{L}_a$ , de source  $\bigcup_i^{\alpha(f)} \alpha(f_i)$  et de but  $\bigcup_i^{\beta(f)} \beta(f_i)$ , plus petit que  $f$ .

- On montre ensuite que  $(\mathcal{L}_a * \mathcal{L}_a, <)$  est une classe sous-inductive; soit  $(f_i, g_i)_{i \in I}$  une famille d'éléments de  $\mathcal{L}_a * \mathcal{L}_a$ , majorée dans  $(\mathcal{L}_a * \mathcal{L}_a, <)$  par  $(f, g)$ ;  $\bigcap_i f_i$  et  $\bigcap_i g_i$  sont définis; soit  $e = \beta(\bigcap_i g_i)$ ;  $e$  est plus petit que

$$\bigcap_i \beta(g_i) = \bigcap_i \alpha(f_i) = \alpha(\bigcap_i f_i);$$

$(\mathcal{L}_a, <)$  étant une catégorie régulière,  $\bigcap_i f_i$  induit sur  $e$  un élément  $f_1$  et un seul, de source  $e$ ; on peut vérifier alors que l'intersection des  $(f_i, g_i)$  dans  $(\mathcal{L}_a * \mathcal{L}_a, <)$  est l'élément  $(f_1, \bigcap_i g_i)$ ; en général,  $\bigcap_i (f_i, g_i) \neq \neq (\bigcap_i f_i, \bigcap_i g_i)$  (d'ailleurs  $(\bigcap_i f_i, \bigcap_i g_i) \notin \mathcal{L}_a * \mathcal{L}_a$ ); si  $I$  est fini,  $e = = \bigcap_i \beta(g_i)$  et  $f_1 = \bigcap_i f_i$ , de sorte que  $\bigcap_i (f_i, g_i) = (\bigcap_i f_i, \bigcap_i g_i)$ .

- On doit vérifier enfin que  $[\beta, \alpha]$  et  $\kappa$  sont des applications sous-inductives.

REMARQUES SUR LE PSEUDO-PRODUIT DANS  $(\mathcal{L}_a, <)$ .

- Le pseudo-produit de deux éléments  $f$  et  $g$  est défini si  $\beta(f) \cap \alpha(g)$  est défini; le pseudo-produit est associatif (voir [6]).

- Soient  $e$  et  $e_1 \in (\mathcal{L}_a)_o$ ; supposons  $e_1 < e$  et soit  $r$  l'élément de  $\mathcal{L}_a^r$  tel que  $\alpha(r) = e$  et  $\beta(r) = e_1$ ; on a  $e_1 e = r$  et  $ee_1 = e_1$ .

- Soient  $e, e_1, e_2$  trois unités de  $\mathcal{L}_a$  telles que  $e_1 < e$  et  $e_2 < e$ ; on a  $e_1 e \cap e_2 e = (e_1 \cap e_2) e$ .

- Soit  $f \in \mathcal{L}_a$ ,  $\alpha(f) = (M, <)$ ,  $e = (\varphi(m), <) < \alpha(f)$  ( $m \in M$ ); on a  $fe = ((\varphi(\underline{f}(m)), <), \underline{\hat{f}}, (\varphi(m), <))$ , où  $\underline{\hat{f}}$  est la restriction de  $\underline{f}$  à  $\varphi(m)$ .

- Soit  $e_1 < \beta(f)$ ; on a  $e_1 f = e_1 \beta(f) \cdot f$ .

-  $(\mathcal{L}_a, <)$  est une catégorie vérifiant la condition (P) (voir [5b]).

4. L'espèce des paratopologies au-dessus de  $(\mathcal{L}_a, <)$ .

La catégorie  $\mathcal{L}_a$  est une catégorie d'opérateurs sur la classe  $\widehat{\mathcal{L}_a}$  des paratopologies (que l'on a identifiée à la classe  $\mathcal{T}_o(\mathcal{L}_a)$  des unités de  $\mathcal{T}(\mathcal{L}_a)$ ): en effet, soit  $j \in \widehat{\mathcal{L}_a}$  et  $f \in \mathcal{L}_a$  avec  $\alpha(f) = \beta(j) = (M, <)$ ; posons  $\beta(f) = (N, <)$  et  $\alpha(j) = (\mathcal{U}, <)$ ;  $(\underline{f}(\mathcal{U}), <)$  est une sous-classe inductive faible de  $(N, <)$ , de sorte que

$$j' = ((N, <), \underline{\mathcal{L}}, (\underline{f}(\mathcal{U}), <))$$

est une paratopologie; nous posons  $j' = f + j$ ; les axiomes d'une catégorie d'opérateurs sont bien vérifiés. Posons  $\hat{f} = ((\underline{f}(\mathcal{U}), <), \underline{\hat{f}}, (\mathcal{U}, <))$ , où  $\underline{\hat{f}}$  est la restriction de  $\underline{f}$  à  $\mathcal{U}$ ;  $(f, f + j, j, \hat{f}) \in \mathcal{T}(\mathcal{L}_a)$ ; soit

$$\eta_o = (\mathcal{L}_a, \theta_o, \mathcal{T}_o(\mathcal{L}_a))$$

l'espèce de structures sur  $\mathcal{L}_a$  correspondant à l'opération  $+$ ; la catégorie des hypermorphisms  $\mathcal{T}_+(\mathcal{L}_a)$  associée à  $\eta_o$  s'identifie canoniquement à une sous-catégorie de  $\mathcal{T}(\mathcal{L}_a)$  qui contient le groupoïde des éléments inversibles de  $\mathcal{T}(\mathcal{L}_a)$ : à l'hypermorphisme  $(f, j)$  on fait correspondre le quatuor  $(f, f + j, j, f)$  défini ci-dessus. A  $\eta_o$  est associée la catégorie d'homomorphismes saturée suivante :  $(\mathcal{L}_a, \theta, \mathcal{T}(\mathcal{L}_a), \mathcal{T}_+(\mathcal{L}_a))$ .

Ce qui suit constitue un exemple de ce qui est exposé dans la première partie de [4]. Nous employons les mêmes symboles  $\rho, \bar{\rho}$  et  $\alpha$  sans en rappeler la signification générale :

- Soient  $j$  et  $j' \in \mathcal{L}_a^{\leftarrow}$ ; on a  $j \rho j'$  si, et seulement si, il existe  $k \in \mathcal{L}_a^{\leftarrow}$  tel que  $j = j'.k$ ;  $\rho$  est une relation d'ordre telle que, si  $j \rho j'$ , alors  $\theta_o(j) = \theta_o(j')$ ; de plus  $(\mathcal{T}_o(\mathcal{L}_a), \rho)$  est une classe sous-inductive; quand on « compose » des unités de  $\mathcal{T}(\mathcal{L}_a)$ , il est bien entendu qu'on regarde ces unités comme éléments de  $\mathcal{L}_a^{\leftarrow}$ , sous-catégorie de  $\mathcal{L}_a$ .

- Soient  $j$  et  $j_1 \in \mathcal{L}_a^{\leftarrow}$ ; on a  $j_1 \bar{\rho} j$  si, et seulement si, il existe un quatuor  $(r, j_1, j, s)$  tel que  $r \in \mathcal{L}_a^r$ ;  $s$  n'appartient pas forcément à  $\mathcal{L}_a^r$ ;  $\bar{\rho}$  induit sur  $\theta_o^{-1}(e)$  la relation d'ordre opposée à  $\rho$ ,  $\forall e \in (\mathcal{L}_a)_o$ ; de plus  $(\mathcal{T}_o(\mathcal{L}_a), \bar{\rho})$  est aussi une classe sous-inductive.

*Structures paratopologiques « induites ».*

Soit  $j \in \mathcal{L}_a^{\leftarrow}$ ; les ouverts de  $j$  sont, par définition, les éléments de la classe locale  $\alpha(j)$ . On dira que la paratopologie  $j_1$  est induite par  $j$  et on écrira  $j_1 \alpha j$  si, et seulement si, il existe  $r \in \mathcal{L}_a^r$  tel que  $j_1 = r + j$ ;  $j_1 \alpha j$  entraîne  $j_1 \bar{\rho} j$  et l'hypermorphisme  $(r, j)$  s'identifie dans  $\mathcal{T}(\mathcal{L}_a)$  à un quatuor  $(r, r + j, j, s)$  qui est une  $(\mathcal{L}_a^r, \theta)$ -surjection;  $s$  est parfaitement déterminé par  $r$  et  $j$ , mais n'appartient pas à  $\mathcal{L}_a^r$ , en général; si  $s \in \mathcal{L}_a^r$ , cela signifie que  $1_{\beta(j_1)}$  est un ouvert de  $j$ ; on dira alors, abusivement, que  $\beta(j_1)$  est un ouvert de  $j$ .

$(\mathcal{L}_a, \theta, \mathcal{T}(\mathcal{L}_a), \mathcal{T}_+(\mathcal{L}_a))$  est une catégorie d'homomorphismes résolvente à gauche et à droite.

MORPHISMES INDUITS DANS  $(\mathcal{T}(\mathcal{L}_a), <)$ .

Soit  $\mathcal{R}(\mathcal{L}_a)$  la catégorie longitudinale des quatuors  $\square(\mathcal{L}_a; \mathcal{L}_a^r)$ ;

$\mathcal{R}(\mathcal{L}_a)$  est une catégorie d'opérateurs sur la classe  $\mathcal{I}(\mathcal{L}_a)$  : soit

$$q = (g, r', r, f) \in \mathcal{R}(\mathcal{L}_a) \quad \text{et} \quad F = (f, j', j, \hat{f}) \in \mathcal{I}(\mathcal{L}_a),$$

de sorte que  $\alpha^{\square}(q) = \beta^{\square}(F)$ ;  $r' \perp j'$  et  $r \perp j$  sont bien définis (voir « structures induites »); il existe un morphisme unique  $\hat{g}$  de source  $\alpha(r \perp j)$  et de but  $\alpha(r' \perp j')$  tel que

$$q' = (g, r' \perp j', r \perp j, \hat{g}) \in \mathcal{I}(\mathcal{L}_a).$$

On pose  $q' = q \perp F$  et on dit que  $q \perp F$  est le *morphisme induit par F* sur  $\beta^{\square}(q)$ ; en général, on n'a pas  $\hat{g} < \hat{f}$ , mais si  $\beta(r \perp j)$  est un ouvert de  $j$  et  $\beta(r' \perp j')$  un ouvert de  $j'$ , alors on a aussi  $\hat{g} < \hat{f}$ . On écrira  $F_1 \propto F$  si, et seulement si, il existe  $q \in \mathcal{R}(\mathcal{L}_a)$  tel que  $q \perp F = F_1$ ;  $\propto$  est une relation d'ordre dans  $\mathcal{I}(\mathcal{L}_a)$  qui induit sur  $\mathcal{I}_o(\mathcal{L}_a)$  la relation d'ordre définie au paragraphe précédent.  $(\mathcal{I}(\mathcal{L}_a), \propto)$  est une catégorie sous-inductive au-dessus de  $(\mathcal{L}_a, <)$  (voir [5a]).

REMARQUE.  $\mathcal{L}_a^{\frown}$ , en tant que sous-catégorie de  $\mathcal{L}_a$  est munie de l'ordre  $<$ , et en tant que classe des unités de  $\mathcal{I}(\mathcal{L}_a)$ , elle est munie de l'ordre  $\propto$ ; ces deux ordres sont distincts; on a la relation suivante entre eux :

$$j_1 < j \iff j_1 \propto j \quad \text{et} \quad \beta(j_1) \text{ est un ouvert de } j.$$

##### 5. Quelques définitions et propriétés de « Paratopologie générale ».

On ne donne ici que ce qui sera utile pour l'étude des feuilletages.

Soit  $j = ((M, <), \perp, (\mathcal{U}, <))$  une paratopologie.

- Une famille  $R$  d'éléments de  $\mathcal{U}$  telle que  $\bigcup R = I_M$  s'appelle un *recouvrement ouvert* de  $j$ ; dans ce qui suit, nous écrirons simplement « recouvrement ».

- Un recouvrement  $R$  est dit *localisant* si, pour tout  $u \in \mathcal{U}$ ,  $u$  est un agrégat d'éléments de  $R$ .

- Un recouvrement  $R$  est dit *clos* si  $R$  est une partie saturée par induction dans  $(\mathcal{U}, <)$ . Un recouvrement clos est toujours localisant (d'après l'axiome de distributivité), mais l'inverse n'est pas vrai.

- Un ouvert  $u$  de  $j$  est dit *connexe* s'il satisfait la condition suivante :

$$u \neq 0_M, u = u_1 \cup u_2, u_1 \text{ et } u_2 \in \mathcal{U}, u_1 \cap u_2 = 0_M \implies \\ u_1 = 0_M \text{ ou } u_2 = 0_M.$$

- Une paratopologie  $j$  est dite *localement connexe* (en abrégé : loc. c.) s'il existe un recouvrement localisant  $R$  de  $j$ , qui soit constitué d'ouverts connexes.

LEMME 1. Soit  $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  une famille d'ouverts connexes d'une paratopologie  $j$ ; on suppose que  $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ , on a  $u_{\lambda_1} \cap u_{\lambda_2} \neq 0_M$ ; alors  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} u_\lambda$  est un ouvert connexe.

La démonstration est simple.

Soit  $j$  une paratopologie loc. c.; soit  $R$  la famille de tous les ouverts connexes de  $j$ ; on désigne par  $C(j)$  la classe des ouverts connexes de  $j$ , qui sont des éléments maximaux de  $(R, <)$ ; ces éléments existent d'après le lemme 1, car l'agrégat des ouverts connexes dont l'intersection avec un ouvert connexe  $u$  est différente de  $0_M$  est un tel ouvert connexe maximal. De plus, on a :  $\bigcup C(j) = 1_M$ , c'est-à-dire que  $C(j)$  est un recouvrement de  $j$ . Soient  $c$  et  $c' \in C(j)$ ; on a :

$$c \cap c' \neq 0_M \iff c = c'.$$

SATURATION.

Soit toujours  $j$  une paratopologie loc. c.; soit  $C(j)$  la classe des ouverts connexes maximaux, ou *composantes connexes*; soit  $m \in M$ ,  $M$  étant la classe sous-jacente à  $\beta(j)$ ; on désigne par  $\rho(m)$  l'agrégat des composantes connexes de  $j$  dont l'intersection avec  $m$  est  $\neq 0_M$ ; on pose  $\rho(0_M) = 0_M$ ; on a les propriétés évidentes :

- a)  $\rho(m) = 0_M \iff m = 0_M$ .
- b)  $m < \rho(m), \forall m \in M$ .
- c)  $m_1 < m_2 \implies \rho(m_1) < \rho(m_2)$ .
- d)  $\rho(\rho(m)) = \rho(m), \forall m \in M$ .
- e)  $\rho(\bigcup_i m_i) = \bigcup_i \rho(m_i)$ .

En général, on a seulement  $\rho(m_1 \cap m_2) < \rho(m_1) \cap \rho(m_2)$ . On dira que  $\rho(m)$  est le saturé de  $m$ . Enfin, on aura à utiliser le lemme suivant:

LEMME 2. Soit  $j \in \mathcal{L}_a^{\leftarrow}$ ; soit  $R$  un recouvrement clos de  $j$  et  $R'$  un

recouvrement localisant de  $j$ ;  $R \cap R'$  est non vide et c'est encore un recouvrement localisant de  $j$ . De plus, si on suppose que  $j$  est loc. c. et que  $R'$  est constitué de tous les ouverts connexes de  $j$ , on a la propriété suivante :

Soit  $c \in C(j)$ ,  $u_1$  et  $u_2 \in R \cap R'$  avec  $u_1 < c$  et  $u_2 < c$ ; alors il existe une suite finie  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  d'éléments de  $R \cap R'$  telle que  $v_1 = u_1$ ,  $v_n = u_2$  et  $v_i \cap v_{i+1} \neq \emptyset_M, \forall i=1, \dots, n-1$ .

La démonstration est simple.

## B. Feuilletages paratopologiques.

### 1. L'espèce des feuilletages au-dessus de $\mathcal{I}(\mathcal{L}_a)$ .

DEFINITION. Un feuilletage paratopologique est un couple  $(j, j')$  de paratopologies satisfaisant les conditions suivantes :

a)  $\beta(j) = \beta(j') = (M, <)$ .

b)  $j'$  est une paratopologie loc. c. .

c) Il existe un recouvrement  $R'$  de  $j'$  tel que les paratopologies induites par  $j$  et  $j'$  sur un élément quelconque de  $R'$  soient identiques.

On montre facilement qu'on peut supposer  $R'$  clos et que l'on a  $j \rho j'$  (voir A-4); tout ouvert de  $j$  est donc un ouvert de  $j'$ .

ESPACE TRANSVERSE.

Soit  $(j, j')$  un feuilletage et  $C(j')$  la classe des composantes connexes de  $j'$ ; une partie  $V$  de  $C(j')$  sera dite ouverte si  $\cup V = v$  est un ouvert de la paratopologie  $j$ ; on définit bien ainsi une topologie sur la classe  $C(j')$ ; munie de cette topologie, la classe  $C(j')$  s'appelle l'espace transverse du feuilletage  $(j, j')$  et se note alors  $C(j', j)$ . Un élément de  $C(j')$  s'appelle aussi une feuille.

MORPHISMES DE FEUILLETAGES.

Un morphisme de feuilletages paratopologiques est un triplet  $((j_1, j'_1), f, (j, j'))$  tel que :

a)  $(j, j')$  et  $(j_1, j'_1)$  sont des feuilletages paratopologiques.

b)  $\beta(j) = \beta(j') = \alpha(f)$  et  $\beta(j_1) = \beta(j'_1) = \beta(f)$ .

c) On a  $(f^+ j) \rho j_1$  et  $(f^+ j') \rho j'_1$ , ce qui signifie aussi que

les triplets  $(f, j_1, j)$  et  $(f, j'_1, j')$  peuvent être complétés à droite en des quatuors qui soient éléments de  $\mathcal{F}(\mathcal{L}_a)$ ; on dira simplement que  $f \in \mathcal{L}_a$  est *continu pour les couples*  $(j_1, j)$  et  $(j'_1, j')$ .

Posons  $\alpha(f) = (M, <)$  et  $\beta(f) = (N, <)$ . Soit  $c_1 \in C(j'_1)$ ; on va montrer qu'il existe une composante connexe  $c$  de  $j'$  et une seule telle que  $c_1 < \underline{f}(c)$ ; en effet, on a

$$\begin{aligned} c_1 &= c_1 \cap I_N = c_1 \cap \underline{f}(I_M) = c_1 \cap \underline{f}( \cup C(j') ) = \\ &= c_1 \cap ( \bigcup_{c \in C(j')} \underline{f}(c) ) = \bigcup_{c \in C(j')} (c_1 \cap \underline{f}(c)); \end{aligned}$$

donc la classe des  $c \in C(j')$  tels que  $c_1 \cap \underline{f}(c) \neq 0_N$  n'est pas vide; soit  $c_o$  un tel élément et soit  $C'$  la classe, supposée non vide, des autres éléments de  $C(j')$  ayant la même propriété; on a

$$c_1 = (c_1 \cap \underline{f}(c_o)) \cup ( \bigcup_{c \in C'} (c_1 \cap \underline{f}(c)) );$$

$c_1 \cap \underline{f}(c_o)$  et  $\bigcup_{c \in C'} (c_1 \cap \underline{f}(c))$  sont deux ouverts de  $j'_1$  dont l'agrégat est  $c_1$  et dont l'intersection est  $0_N$ ; comme  $c_1$  est connexe, et que  $c_1 \cap \underline{f}(c) \neq 0_N, \forall c \in C' \cup \{c_o\}$ , on obtient une contradiction, donc la classe  $C'$  est vide et il n'existe bien qu'un seul élément  $c_o$  tel que  $c_1 \cap \underline{f}(c_o) \neq 0_N$ ; on a alors  $c_1 < \underline{f}(c_o)$ ; ceci définit une application de  $C(j'_1)$  dans  $C(j')$ , que l'on note  $\check{f}$ . On montre ensuite que,  $\forall c \in C(j')$ , l'agrégat de la classe  $\check{f}^{-1}(c)$ , supposée non vide, est exactement égal à  $\underline{f}(c)$  et ceci permet, par un calcul simple, de prouver que  $\check{f}$  est une application continue de l'espace topologique  $C(j'_1, j_1)$  dans l'espace topologique  $C(j', j)$ .

Soit  $\mathcal{F}(\mathcal{L}_a)$  la catégorie des morphismes de feuilletages  $\tilde{f} = ((j_1, j'_1), f, (j, j'))$  (avec la loi de composition évidente). On identifie  $\mathcal{F}_o(\mathcal{L}_a)$  à la classe des feuilletages paratopologiques; l'application qui à  $\tilde{f}$  fait correspondre l'application continue  $\check{f}$ , construite ci-dessus, définit un foncteur contravariant de  $\mathcal{F}(\mathcal{L}_a)$  vers  $\mathcal{F}$  (catégorie des applications continues associée à  $\mathfrak{M}_o$ ). On notera ce foncteur par le symbole  $C$ , de sorte qu'avec les identifications déjà faites, on a :

$$C((j, j')) = C(j', j) \quad \text{et} \quad \check{f} = C(\tilde{f}).$$

$C$  s'appellera le *foncteur transverse*.

## 2. Feuilletages paratopologiques localement simples.

### FEUILLETAGE INDUIT.

Soit  $(j, j')$  un feuilletage; posons  $\beta(j) = \beta(j') = (M, <)$ ; soit  $m \neq 0_M$ ,  $m \in M$  et soit  $r_m$  la rétraction canonique de  $(M, <)$  sur  $(\varphi(m), <)$ . Si  $m$  est un ouvert de  $j'$  (a fortiori, si c'est un ouvert de  $j$ ), on peut définir un feuilletage « induit » par  $(j, j')$  sur  $m$ : En effet, lorsque  $m$  est un ouvert de  $j'$ ,  $r_m + j'$  est une paratopologie loc. c. et le couple  $(r_m + j, r_m + j')$  est un feuilletage, appelé *feuilletage induit* par  $(j, j')$  sur  $m$ ; si  $m$  est un ouvert appartenant à  $R'$  (voir condition c de la définition en B-1), alors le feuilletage « induit » sur  $m$  est trivial :

$$r_m + j = r_m + j'.$$

Dans tous les cas, il est évident que  $((r_m + j, r_m + j'), r_m, (j, j'))$  est un morphisme de feuilletages paratopologiques, qu'on désignera par  $\tilde{r}_m$ ; le feuilletage but de  $\tilde{r}_m$  est désigné en abrégé par  $(j_m, j'_m)$ ; on pose  $\tilde{\gamma}_m = C(\tilde{r}_m)$ ; c'est une application continue de  $C(j'_m, j_m)$  dans  $C(j', j)$ .

### COUPLES DISTINGUES.

Soient  $u$  et  $v$  deux ouverts de  $j$  tels que  $u < v$ ; le feuilletage induit par  $(j_v, j'_v)$  sur  $u$  est identique au feuilletage induit par  $(j, j')$  sur  $u$ :  $(j_u, j'_u)$ ; on désigne par  $r_{v,u}$  la rétraction canonique de  $(\varphi_M(v), <)$  sur  $(\varphi_M(u), <)$ , par  $\tilde{r}_{v,u}$  le morphisme de feuilletages associé; on pose  $\tilde{\gamma}_{v,u} = C(\tilde{r}_{v,u})$ ; c'est une application continue de  $C(j'_u, j_u)$  dans  $C(j'_v, j_v)$ .

On dira que le couple  $(u, v)$  est *distingué* si  $\tilde{\gamma}_{v,u}$  est un homéomorphisme de  $C(j'_u, j_u)$  sur un ouvert de  $C(j'_v, j_v)$ . Un ouvert  $u$  de  $j$  est dit *distingué* si  $(u, I_M)$  est un couple distingué.

### FEUILLE PROPRE.

Soit  $c \in C(j')$  une feuille de  $(j, j')$ ; c'est une *feuille propre* si le feuilletage induit par  $(j, j')$  sur  $c$  est trivial, i. e.  $r_c + j = r_c + j'$ .

### FEUILLE SIMPLE.

Une feuille  $c$  est dite *simple* si elle vérifie la condition suivante :

Pour tout ouvert  $u$  de  $j$  tel que  $c \cap u \neq 0_M$ , il existe une famille  $(u_i)_{i \in I}$  d'ouverts de  $j$  satisfaisant :

$$\alpha) u_i < u, \quad \forall i \in I.$$

$$\beta) (u_i, l_M) \text{ est un couple distingué, } \forall i \in I.$$

$$\gamma) \left( \bigcup_i u_i \right) \cap c = u \cap c.$$

FEUILLETAGE SIMPLE.

$C$  est un feuilletage dont toute feuille est simple.

LEMME. Pour que  $(j, j')$  soit simple, il faut et il suffit qu'il existe un recouvrement localisant de  $j$  formé d'ouverts distingués.

FEUILLETAGE LOCALEMENT SIMPLE.

$(j, j')$  est dit *localement simple* (en abrégé l. s.) s'il existe un recouvrement  $R^S$  de  $j$  tel que tout feuilletage induit par  $(j, j')$  sur un élément de  $R^S$  soit simple.  $R^S$  désignera alors la classe de tous les *ouverts simples* de  $j$ , i. e. les ouverts sur lesquels  $(j, j')$  induit un feuilletage simple.

La définition d'un feuilletage l. s. indique seulement que  $R^S$  est un recouvrement de  $j$ . On va montrer dans ce qui suit que  $R^S$  est en fait un recouvrement clos de  $j$ .

1.  $D(j)$  désigne la classe de tous les couples distingués du feuilletage  $(j, j')$ , supposé l. s.; munie de la loi de composition ordinaire des couples,  $D(j)$  est une sous-catégorie du groupoïde des couples  $(u, v)$  d'ouverts de  $j$ ; la classe des unités de  $D(j)$  s'identifie à  $\alpha(j)$ ; munie de l'ordre

$$(u, v) < (u', v') \text{ si, et seulement si, } u < u' \text{ et } v < v',$$

$(D(j), <)$  est une catégorie  $s$ -ordonnée.

2. Soient  $(u, v)$  et  $(w, v) \in D(j)$  avec  $w < u$ ; alors  $(w, u) \in D(j)$  (ceci est vrai pour tout feuilletage  $(j, j')$ ).

3. Soit  $(u, v) \in D(j)$  et  $v \in R^S$ , alors  $u \in R^S$ .

DEMONSTRATION. Soit  $w$  un ouvert de  $j_u$ , c'est-à-dire un ouvert de  $j$  tel que  $w < u$ ; on a aussi  $w < v$ ; donc, puisque  $v \in R^S$ ,  $w = \bigcup_i w_i$  avec  $(w_i, v) \in D(j)$ ; d'après 2, on a alors  $(w_i, u) \in D(j)$ , donc  $u \in R^S$ .

4.  $R^S$  est localisant; en effet : Soit  $u$  un ouvert de  $j$ ; on a

$$u = u \cap I_M = u \cap (\cup R^S) = \bigcup_{u_S \in R^S} (u \cap u_S);$$

$u \cap u_S < u_S$  entraîne

$$u \cap u_S = \bigcup_{i \in I_S} u_{i,S}, \text{ avec } (u_{i,S}, u_S) \in D(j), \forall i \in I_S;$$

d'où  $u = \bigcup_{u_S} (\bigcup_{i \in I_S} u_{i,S})$ ; or, d'après 3,  $u_{i,S} \in R^S$ , donc  $R^S$  est bien localisant.

5. Soit  $v$  un ouvert de  $j$ ;  $\rho_v$  désigne l'opération de saturation associée à la paratopologie loc. c.  $j'_v$  (voir A-5). Soient  $u$  et  $v$  deux ouverts de  $j$  tels que  $u < v$ ; supposons  $v \in R^S$  et  $u < v$ , alors  $\rho_v(u)$  est un ouvert de  $j$ . En effet, on a

$$u = \bigcup_i u_i \text{ avec } (u_i, v) \in D(j), \text{ et } \rho_v(u) = \bigcup_i \rho_v(u_i);$$

puisque  $(u_i, v) \in D(j)$ , on a  $\rho_v(u_i) = \cup \mathfrak{r}_{v, u_i}(C(j'_{u_i}))$ , ce qui prouve que  $\rho_v(u_i)$  est un ouvert de  $j$ , donc  $\rho_v(u)$  aussi.

6. Si  $(u, v) \in D(j)$ , alors  $(\rho_v(u), v) \in D(j)$ ; c'est une conséquence de 5.

7. Si  $(u, v) \in D(j)$  et si  $v \in R^S$ , alors  $\rho_v(u) \in R^S$ ; c'est une conséquence de 6 et 3.

8. PROPOSITION. Si  $(j, j')$  est l. s., le saturé  $\rho(u)$  d'un ouvert quelconque  $u$  de  $j$  est encore un ouvert de  $j$ .

DEMONSTRATION. Soit  $u$  un ouvert de  $j$  quelconque; on sait que  $u$  est agrégat d'ouverts simples, car  $R^S$  est localisant d'après 4; soit  $u = \bigcup_{i \in I} u_i$ ,  $u_i \in R^S$ ; puisque  $\rho(u) = \bigcup_i \rho(u_i)$ , on est ramené à démontrer la proposition pour un ouvert simple; supposons donc que  $u$  est simple.

Par définition,  $\rho(u)$  est l'agrégat des  $c \in C(j')$  tels que  $c \cap u \neq \emptyset$ ; soit  $c$  une telle feuille; soit  $R'(c)$  la classe des ouverts de  $j'_c$  qui sont connexes, qui appartiennent à  $R'$  (voir définition d'un feuilletage en B-1) et tels qu'il existe un ouvert simple plus grand; on applique le lemme 2 de A-5 deux fois pour montrer que  $R'(c)$  est un recouvrement localisant de  $j'_c$ ; soit alors  $u' \in R'(c)$  avec  $u' < c \cap u$  (on sait que

$c \cap u$  est un ouvert de  $j'_c$ , donc agrégat d'ouverts tels que  $u'$ , car  $R'(c)$  est localisant). Soit  $u''$  un autre ouvert de  $j'_c$  appartenant à  $R'(c)$ ; toujours d'après le lemme 2 de A-5, il existe une suite finie d'éléments de  $R'(c)$ , soit  $(u'_1, u'_2, \dots, u'_n)$ , telle que

$$u'_1 = u', \quad u'_n = u'' \quad \text{et} \quad u'_i \cap u'_{i+1} \neq 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Soit  $v_2$  un ouvert simple tel que  $v_2 > u'_2$  (il en existe, car  $u'_2 \in R'(c)$ ); on a  $v_2 \cap u \neq 0$ , car

$$u'_1 = u' < u \cap c < u \quad \text{et} \quad u'_2 < v_2, \quad \text{donc} \quad v_2 \cap u > u'_1 \cap u'_2 \neq 0;$$

posons  $u_2 = \rho_{v_2}(u \cap v_2)$ . Puisque  $u \cap v_2$  est un ouvert de  $j$  et que  $v_2$  est simple, on sait, d'après 5, que  $u_2$  est un ouvert de  $j$ . De plus, on a  $u_2 > u'_2$ , car

$$u_2 > u \cap v_2 > u'_1 \cap u'_2 \neq 0 \quad \text{entraîne} \quad u_2 \cap u'_2 \neq 0,$$

et comme  $u_2$  est saturé dans  $v_2$  et  $u'_2$  connexe, plus petit que  $v_2$ , on a bien  $u_2 > u'_2$ . Enfin, par construction, on a  $u_2 < \rho(u)$ . De proche en proche, on construit une suite d'ouverts de  $j$ , soit  $(u_i)$ , telle que :

$$u_i > u'_i \quad \text{et} \quad u_i < \rho(u), \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

En particulier, il existe un ouvert de  $j$ , soit  $u_n$ , tel que

$$u_n > u'_n = u'' \quad \text{et} \quad u_n < \rho(u).$$

Soit  $u(c)$  un agrégat de tels ouverts  $u_n$ , lorsque  $u''$  parcourt  $R'(c)$ ;  $u(c)$  est un ouvert de  $j$  satisfaisant les inégalités évidentes :

$$c < u(c) < \rho(u);$$

$\rho(u)$  étant l'agrégat des  $c$  tels que  $c \cap u \neq 0$ , et compte tenu de l'inégalité précédente, on voit que  $\rho(u)$  peut s'écrire comme agrégat d'ouverts du type  $u(c)$  et c'est donc bien un ouvert de  $j$ .

Cette proposition généralise le fait que, dans le cas topologique, la relation d'équivalence sous-jacente à un feuilletage l.s. est ouverte.

**9. COROLLAIRE.** Soient  $u$  et  $v$  deux ouverts de  $j$  tels que  $u < v$ ; alors, sans autre hypothèse cette fois, on voit que  $\rho_v(u)$  est un ouvert de  $j$ , car le feuilletage induit par  $(j, j')$  sur  $v$  est encore l.s. .

**10. PROPOSITION.** *Le recouvrement  $R^S$  est clos.*

DEMONSTRATION. Soit  $u \in R^S$  et  $v < u$ ; soit  $w < v$ ; on a

$$w = \bigcup_{i \in I} w_i, \text{ avec } (w_i, u) \in D(j), \quad \forall i \in I;$$

pour que  $v$  soit simple, il suffit de montrer que  $(w_i, v) \in D(j)$ ; soit donc  $w < v < u$  avec  $(w, u) \in D(j)$ ; la différence avec le paragraphe 2 est que  $(v, u)$  n'est pas un couple distingué en général; on a  $\mathfrak{Y}_{u,w} = \mathfrak{Y}_{u,v} \cdot \mathfrak{Y}_{v,w}$  et, puisque  $\mathfrak{Y}_{u,w}$  est injective,  $\mathfrak{Y}_{v,w}$  est une application continue injective. Montrons qu'elle est ouverte; soit  $A$  un ouvert de  $C(j'_w, j_w)$ , c'est-à-dire que  $\cup A$  est un ouvert de  $j_w$ , ou, ce qui revient au même,  $\cup A$  est un ouvert de  $j$ , plus petit que  $w$ ; on a  $\rho_w(\cup A) = \cup A$ , car  $A \subset C(j'_w)$ ;

$$\text{donc } \cup \mathfrak{Y}_{v,w}(A) = \rho_v(\rho_w(\cup A)) = \rho_v(\cup A);$$

ici intervient l'hypothèse que le feuilletage est l. s. : En effet, on sait d'après 9 que  $\rho_v(\cup A)$  est un ouvert de  $j$ , ce qui signifie bien que  $\mathfrak{Y}_{v,w}(A)$  est un ouvert de  $C(j'_v, j_v)$ ; donc  $\mathfrak{Y}_{v,w}$  est un homéomorphisme sur un ouvert de  $C(j'_v, j_v)$  et le couple  $(w, v)$  est distingué; donc l'ouvert  $v$  est bien simple. ■

En général  $(v, u) \notin D(j)$  bien que  $v$  et  $u$  soient simples et  $v < u$ ; on peut seulement dire que  $\mathfrak{Y}_{u,v}$  est un étalement de l'espace  $C(j'_v, j_v)$  dans l'espace  $C(j'_u, j_u)$ .

11. Soient  $w < v < u$ ,  $(w, u) \in D(j)$ ; alors  $(\rho_v(w), u) \in D(j)$ . Démonstration simple, maintenant que l'on sait que  $\rho_v(w)$  est bien un ouvert de  $j$ .

**12. COROLLAIRE.** *Soit  $(v, u) \in D(j)$  et soit  $w$  un ouvert saturé de  $j_v$ , c'est-à-dire que  $\rho_v(w) = w$ ; alors on a  $(w, u) \in D(j)$ .*

### 3. Holonomie.

Dans ce qui suit, nous écrivons souvent des définitions ou des remarques très proches de celles qui se trouvent dans [6] ou [7]; nous renvoyons le plus souvent possible à ces deux articles, mais nous ne pourrons pas éviter parfois de redire des choses très semblables afin que les définitions ou propositions plus générales que nous avons en vue ne

soient pas isolées de leur contexte.

Soit toujours  $(j, j')$  un feuilletage l.s. .

CHAINONS.

Un *chaînon simple* est un triplet  $(u_1, u_2, c_{12})$  tel que  $u_1$  et  $u_2 \in R^S$  et  $c_{12} \in C(j'_{u_1} \cap u_2)$ .

Un *chaînon pur* est un triplet  $(u_1, u_2, u_{12})$  tel que :

$$(u_{12}, u_1), (u_{12}, u_2) \in D(j), \quad u_1 \text{ et } u_2 \in R^S, \quad \rho_{u_1}(u_{12}) = u_1 \\ \text{et } \rho_{u_2}(u_{12}) = u_2.$$

PROPOSITION 1. Soit  $(u_1, u_2, c_{12})$  un *chaînon simple*; il existe un *chaînon pur*  $(w_1, w_2, w_{12})$  tel que :

$$w_1 < u_1, \quad w_2 < u_2 \text{ et } c_{12} < w_{12}.$$

DEMONSTRATION. On a d'abord

$$u_1 \cap u_2 = \bigcup_{k \in K} u_{1k}, \quad \text{avec } (u_{1k}, u_1) \in D(j), \quad \forall k \in K,$$

et

$$u_1 \cap u_2 = \bigcup_{l \in L} u_{2l}, \quad \text{avec } (u_{2l}, u_2) \in D(j), \quad \forall l \in L,$$

car  $u_1$  et  $u_2$  sont simples. Puisque  $c_{12} = c_{12} \cap (u_1 \cap u_2)$ , on voit qu'il existe  $k_o \in K$  et  $l_o \in L$  tels que les trois conditions suivantes soient vérifiées :

$$(u_{1k_o}, u_1) \in D(j), \\ (u_{2l_o}, u_2) \in D(j), \\ u_{1k_o} \cap u_{2l_o} \cap c_{12} \neq 0.$$

Posons  $\hat{u}_1 = u_{1k_o}$  et  $\hat{u}_2 = u_{2l_o}$ ; soit  $v_1 = \rho_{u_1} \cap u_2(\hat{u}_1)$  et  $v_2 = \rho_{u_1} \cap u_2(\hat{u}_2)$ ; d'après B-2-11, on a  $(v_1, u_1)$  et  $(v_2, u_2) \in D(j)$ ; évidemment  $v_1 \cap v_2 > c_{12}$  et de plus  $v_1 \cap v_2$  est saturé dans  $u_1 \cap u_2$ .

On a alors:  $v_1 < u_1 \cap u_2$  entraîne

$$\rho_{v_1}(v_1 \cap v_2) < \rho_{u_1 \cap u_2}(v_1 \cap v_2) = v_1 \cap v_2,$$

$$\text{d'où } \rho_{v_1}(v_1 \cap v_2) = v_1 \cap v_2;$$

de même, on a  $\rho_{v_2}(v_1 \cap v_2) = v_1 \cap v_2$ ; d'après B-2 - 12, on voit alors que  $(v_1 \cap v_2, u_1)$  et  $(v_1 \cap v_2, u_2) \in D(j)$ ; en posant  $w_{12} = v_1 \cap v_2$ ,  $w_1 = \rho_{u_1}(w_{12})$  et  $w_2 = \rho_{u_2}(w_{12})$ , on vérifie facilement que  $(w_1, w_2, w_{12})$  est un chaînon pur satisfaisant aux conditions cherchées. ■

Soit  $(u, v, w)$  un chaînon pur;  $\gamma_{u,w}$  et  $\gamma_{v,w}$  sont des isomorphismes; le composé  $i = \gamma_{u,w} \cdot \gamma_{v,w}^{-1}$  est appelé *isomorphisme canonique associé au chaînon pur*  $(u, v, w)$ .

A partir de là, on a les définitions des chaînes simples ou pures, comme dans [7], et la première proposition de la p. 112 de [7] est encore valable ici; elle se démontre de la même façon, par récurrence, en utilisant le résultat analogue déjà démontré pour les chaînons. A toute chaîne pure est aussi associé un isomorphisme canonique, obtenu en composant les isomorphismes canoniques associés aux chaînons purs qui composent la chaîne pure.

#### GRUPOÏDE DES ISOMORPHISMES TRANSVERSES.

C'est le grupoïde  $\mathcal{G}$  des triplets  $(u', f, u)$ , où  $u$  et  $u'$  sont des ouverts simples de  $j$  et  $f$  un isomorphisme de  $C(j'_u, j_u)$  sur  $C(j'_{u'}, j_{u'})$ ; la loi de composition est évidente;  $\mathcal{G}$  est muni de la relation d'ordre suivante :

$$(u', f, u) < (u'_1, f_1, u_1) \text{ si, et seulement si, } (u, u_1) \text{ et } (u', u'_1) \in D(j) \\ \text{et si } \gamma_{u'_1, u'} \cdot f = f_1 \cdot \gamma_{u_1, u}.$$

On définit aussi le grupoïde d'holonomie  $H'$ , comme dans [6]: les couples  $(u, v)$  de  $D(j)$ , tels que  $u$  et  $v$  soient simples et  $\rho_v(u) = v$ , s'identifient canoniquement à des éléments de  $H'$ .  $H'$  contient aussi les inverses « formels » de ces couples, c'est-à-dire les couples  $(v, u)$  tels que  $(u, v)$  soit distingué,  $u$  et  $v \in R^S$ , et  $\rho_v(u) = v$ ;  $H'$  est engendré dans  $\mathcal{G}$  par ces éléments.

Muni de l'ordre induit par celui de  $\mathcal{G}$ ,  $(H', <)$  est un grupoïde ordonné régulier; on identifie, dans la suite, les deux classes  $H'_0$  et  $R^S$ .

Rappelons le résultat suivant, dont nous aurons besoin :

PROPOSITION (H). Soit  $f \in H'$  et soit  $u < \alpha(f)$ ; le pseudoproduit  $fu$

est défini et  $\beta(fu)$  est un ouvert saturé dans  $\beta(f)$ : c'est l'agrégat des composantes connexes de  $j'_{\beta(f)}$  qui sont images par  $f$  des composantes connexes de  $j'_{\alpha(f)}$  qui « rencontrent »  $u$ ;  $\beta(fu) = \cup (f \cdot r'_{\alpha(f),u})(C(j'_u))$ .

De même, si  $v < \beta(f)$ ,  $\alpha(vf)$  est défini et  $\alpha(vf)$  est un ouvert saturé dans  $\alpha(f)$ : c'est l'agrégat des composantes connexes de  $j'_{\alpha(f)}$  qui sont images par  $f^{-1}$  des composantes connexes de  $j'_{\beta(f)}$  qui « rencontrent »  $v$ .

GRUPOIDE D'HOLONOMIE COMPLET.

On donne une définition des  $f$ -agrégats admissibles qui généralise celle de [6] et avec laquelle les propositions 2, 3, 4 de [6] (p. 231 et 232) seront encore valables.

DEFINITION. Soit  $C$  une sous-classe saturée par induction de  $(H', <)$ ; on dira que  $f \in H'$  est un sous-agrégat admissible de  $C$  si les conditions suivantes sont vérifiées :

-  $C$  est majorée par  $f$ .

- Soit  $c_f \in C(j'_{\alpha(f)})$ ; soit  $d_f = f(c_f)$ ;  $\forall m < c_f$  et  $\forall p < d_f$ ,  $m$  et  $p \neq 0$ , il existe une sous-classe  $C_1$  de  $C$  ayant les propriétés suivantes :  $\forall g \in C_1$ , on a  $\alpha(g) \cap m \neq 0$ ,  $\beta(g) \cap p \neq 0$  et  $\cup \alpha(C_1) > m$ ,  $\cup \beta(C_1) > p$ .

Cette définition coïncide avec celle de [6], dans le cas topologique.

PROPOSITION 2. *Enoncé et notations de la prop. 2, p. 231, [6].*

Soit  $f'$  un majorant de  $C$  tel que  $f' < f$ ; pour chaque  $c_f \in C(j'_{\alpha(f)})$ , il existe une sous-classe  $C_{c_f}$  de  $C$  telle que  $\cup \alpha(C_{c_f}) > c_f$  (faire  $m = c_f$  et  $p = f(c_f)$  dans la définition d'un  $f$ -agrégat admissible). On voit donc que  $\cup \alpha(C) > \alpha(f)$  et, comme  $C$  est majorée par  $f$ , on a en fait  $\cup \alpha(C) = \alpha(f)$ ;  $f'$  étant un majorant de  $C$ , on a  $\cup \alpha(C) < \alpha(f')$ , et  $f' < f$  entraîne  $\alpha(f') < \alpha(f)$ ; d'où  $\alpha(f) = \alpha(f')$ ; de même  $\beta(f) = \beta(f')$ . On en déduit que  $f = f'$ .

LEMME. Soit  $u \in R^S$ ,  $(u_1, u)$  et  $(u_2, u) \in D(j)$ , avec  $u_1 \cap u_2 \neq 0$ ; soit  $c \in C(j'_u)$  et  $m < c$ ,  $m \neq 0$ ;  $m < u_1 \cap u_2$ ; il existe un ouvert simple  $v$  tel que

$(v, u_1), (v, u_2) \in D(j)$ , avec  $v \cap m \neq 0$ ; on peut même trouver une famille  $(v_i)_{i \in I}$  de tels ouverts, «recouvrant  $m$ », i. e.  $\bigcup_{i \in I} v_i > m$ .

La démonstration a été pratiquement déjà faite au cours de la démonstration de la proposition 1 (B-3).

PROPOSITION 3. *Énoncé et notations de la prop. 3, p. 232, [6].*

Soit  $c_f \in C(j'_{\alpha(f)})$ ; soit  $d_f = f(c_f)$  et  $e_f = (f'.f)(c_f) = f'(d_f)$ ; soit  $m < c_f$  et  $q < e_f$ . Puisque  $f'$  est un sous-agrégat admissible de  $C'$ , il existe une sous-classe  $C'_{d_f, q}$  de  $C'$  telle que,  $\forall g' \in C'_{d_f, q}$  on ait :

$$\alpha(g') \cap d_f \neq 0, \quad \beta(g') \cap q \neq 0;$$

de plus,

$$\cup' \alpha(C'_{d_f, q}) > d_f \quad \text{et} \quad \cup' \beta(C'_{d_f, q}) > q;$$

choisissons un élément  $g'$  dans  $C'_{d_f, q}$  et posons  $p = \alpha(g') \cap d_f$ ; puisque  $f$  est un sous-agrégat admissible de  $C$ , il existe une sous-classe  $C_{m, p}$  de  $C$  telle que,  $\forall g \in C_{m, p}$ , on ait :  $\alpha(g) \cap m \neq 0$ ,  $\beta(g) \cap p \neq 0$ ; de plus,

$$\cup \alpha(C_{m, p}) > m \quad \text{et} \quad \cup \beta(C_{m, p}) > p;$$

d'après le lemme précédent, il existe un ouvert  $u_g$  de  $j$  tel que

$$(u_g, \alpha(g')), (u_g, \beta(g)) \in D(j),$$

avec  $u_g \cap p \neq 0$ ; les pseudoproduits  $g'u_g$  et  $u_g g$  sont définis et, d'après la proposition (H), on a :

$$\beta(g'u_g) > \beta(g') \cap q \neq 0 \quad \text{et} \quad \alpha(u_g g) > \alpha(g) \cap m \neq 0;$$

de plus

$$b = (g'u_g) \cdot (u_g g) \in C' \cdot C, \quad \text{et} \quad \alpha(b) \cap m \neq 0, \quad \beta(b) \cap q \neq 0;$$

pour chaque  $g \in C_{m, p}$ , on peut construire un tel élément  $b_g$  de  $C' \cdot C$ , ayant ces deux propriétés :

$$\beta(b_g) \cap q > \beta(g') \cap q \neq 0 \quad \text{et} \quad \alpha(b_g) \cap m > \alpha(g) \cap m \neq 0;$$

on a alors :

$$\left( \bigcup_{g \in C_{m, p}} \alpha(b_g) \right) \cap m > \bigcup_{g \in C_{m, p}} (\alpha(g) \cap m) = m,$$

car  $\cup \alpha(C_{m,p}) > m$ . On fait alors varier  $g'$  dans  $C'_{d_f, q}$  pour obtenir ainsi une famille d'éléments de  $C' \cdot C$  qui satisfait aux conditions voulues pour que  $f' \cdot f$  soit un sous-agrégat admissible de la classe  $C' \cdot C$ .

La définition d'une sous-classe complète de  $(H', <)$  est la même que celle de [6], p. 232.

PROPOSITION 4. *Enoncé et notations de la prop. 4, p. 232, [6].*

Il suffit de montrer que  $\bar{C}$  est saturée par induction. Soit  $f \in \bar{C}$ ,  $f =$  sous-agrégat admissible de  $C' \subset C$ ; soit  $f' < f$ ; soit

$$C'' = \{ g' \in C', g' < f' \}.$$

Soient

$$c'_{f'} \in C(j'_{\alpha(f')}) \text{ et } d'_{f'} = f'(c'_{f'}), \quad m < c'_{f'}, \quad p < d'_{f'};$$

comme  $\alpha(f')$  est distingué dans  $\alpha(f)$ , il existe une composante connexe et une seule  $c_f$  de  $j'_{\alpha(f)}$  telle que  $c'_{f'} < c_f$ ; de plus, on a aussi  $d'_{f'} < f(c_f) = d_f$ ;  $f$  étant un sous-agrégat admissible de  $C' \subset C$ , il existe alors une sous-classe  $C_1$  de  $C'$  telle que,  $\forall g \in C_1$ , on ait :  $\alpha(g) \cap m \neq 0$ ,  $\beta(g) \cap p \neq 0$ , avec

$$\cup \alpha(C_1) > m \quad \text{et} \quad \cup \beta(C_1) > p;$$

soit  $g$  un élément fixé de  $C_1$ ; d'après le lemme précédant la prop. 3, il existe une famille  $(u_i)_{i \in I}$  d'ouverts de  $j$  satisfaisant les conditions suivantes :

$$(u_i, \alpha(g)) \quad \text{et} \quad (u_i, \alpha(f')) \in D(j), \quad u_i \cap m \neq 0;$$

$gu_i$  est défini et  $\beta(gu_i) \cap p \neq 0$  d'après la proposition (H), car  $\alpha(gu_i) = u_i$  et  $u_i \cap m \neq 0$ ; enfin, on a  $\bigcup_i u_i > \alpha(g) \cap m$ , et, toujours d'après la proposition (H), cela entraîne  $\bigcup_i \beta(gu_i) > \beta(g) \cap p$ . Pour chaque  $u_i$ , on peut de la même façon trouver une famille  $(v_{i,k})$ ,  $k \in K_i$ , d'ouverts de  $j$  telle que,  $\forall k \in K_i$ ,  $v_{i,k}$  soit distingué dans  $\beta(f')$  et dans  $\beta(gu_i)$  (donc aussi dans  $\beta(g)$ ); de plus  $\bigcup_{k \in K_i} v_{i,k} > \beta(gu_i) \cap p$  et, d'après la proposition (H),  $\bigcup_{k \in K_i} \alpha(v_{i,k} gu_i) > u_i \cap m$ ; les éléments  $v_{i,k} gu_i$  appartiennent maintenant à  $C''$  et on a les relations suivantes :

$$\alpha(v_{i,k} gu_i) \cap m \neq 0, \quad \beta(v_{i,k} gu_i) \cap p \neq 0,$$

$$\bigcup_i \left( \bigcup_{k \in K_i} \alpha(v_{i,k} g u_i) \right) > \alpha(g) \cap m,$$

$$\bigcup_i \left( \bigcup_{k \in K_i} \beta(v_{i,k} g u_i) \right) > \beta(g) \cap p.$$

En faisant varier  $g$  dans la classe  $C_1$ , on voit que l'on peut construire une sous-classe  $C_1^n$  de  $C^n$ , formée de la réunion des classes  $\{v_{i,k} g u_i\}$ , telle que,  $\forall g' \in C_1^n$ , on ait :

$$\alpha(g') \cap m \neq 0, \quad \beta(g') \cap p \neq 0,$$

$\cup \alpha(C_1^n) > m$ ,  $\cup \beta(C_1^n) > p$ , de sorte que  $f'$  est bien un sous-agrégat admissible de  $C^n$ . ■

On peut alors construire le groupoïde d'holonomie complet  $(\overline{H'}, <)$  comme dans [6], puisque les propositions 5 et 6 et le théorème 1 (p. 233) de [6] sont valables, sans aucune modification.

**Bibliographie.**

- [ 1 ] J. BENABOU. *Treillis locaux et paratopologies*, Séminaire de Topo. et Géo. diff. (C. Ehresmann), 1 (1957 - 58), n° 2.
- [ 2 ] N. BOURBAKI. *Nombres ordinaux (en exercices)*.
- [ 3 ] C. EHRESMANN. *Sous-structures et catégories ordonnées*, Fund. Math. LIV (1964).
- [ 4 ] C. EHRESMANN. *Catégories structurées*, Ann. Ec. Norm. Sup, 80 (1963), p. 349 - 426.
- [ 5 ] C. EHRESMANN. a) Ann. Inst. Fourier, 10 (1960), p. 307 - 332.  
b) Ann. Inst. Fourier, 15, 2(1964), p. 129.
- [ 6 ] C. EHRESMANN. *Catégories ordonnées, Holonomie et Cohomologie*, Ann. Inst. Fourier 14 (1964), parties 1, 2 et 3.
- [ 7 ] C. EHRESMANN. *Structures feuilletées*, Proc. 5 th. Can. Math. Congress (1961), p. 109 et suivantes.
- [ 8 ] L. COPPEY. C. R. A. S. 264, (1967), p. 924 - 927.