

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES

HORST DIETER IBISCH

Sur la conjecture annulaire et les microfibrés stables

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 10, n° 2 (1968), p. 169-268

http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1968__10_2_169_0

© Andrée C. Ehresmann et les auteurs, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SUR LA CONJECTURE ANNULAIRE
ET LES MICROFIBRÉS STABLES**

par Horst Dieter IBISCH

INTRODUCTION

Le problème à la base de ce travail concerne la *conjecture annulaire* A_n (annulus conjecture): la région fermée entre deux sphères localement plates et disjointes de dimension $n-1$ dans S^n est-elle nécessairement homéomorphe à $S^{n-1} \times [0,1]$?

L'importance de ce problème pour la Topologie géométrique a été soulignée par J. Milnor à l'occasion du Congrès de Topologie à Seattle en 1963. Il figure dans son énumération des sept problèmes « les plus difficiles et les plus importants » de la Topologie géométrique. (Voir: *Problems in Differential and Algebraic Topology* [15], problem No. 29).

Il est bien connu que la conjecture annulaire A_n est vraie pour $n \leq 3$. Il a été démontré dans [9] que A_k est vraie pour $k \leq n$ si la région fermée entre deux sphères localement plates et disjointes de dimension $k-1$ dans S^k admet une triangulation pour $k \leq n$; il suit alors de [21] et de [1] que A_n est vraie pour $n \leq 3$.

En général (pour tout n) les conjectures annulaires analogues dans les catégories semi-linéaires ([25], chap. 3, théorème 8, cor. 3) et différentiables sont vraies. Il existe une généralisation de ces deux théorèmes [13], mais elle n'aboutit pas à la formulation de conditions suffisantes purement topologiques (elle implique une notion de normalité locale pour les couronnes des plongements de S^{n-1} dans S^n).

Dans [6] M. Brown et H. Gluck ont démontré que A_k pour $k \leq n$ est équivalente à la conjecture que tous les homéomorphismes de S^k (ou de

R^k) qui préservent l'orientation sont des homéomorphismes *stables* pour $k \leq n$. Un homéomorphisme h de S^n (ou de R^n) est stable s'il existe des homéomorphismes h_i de S^n et des sous-ensembles ouverts U_i non-vides de S^n tels que $h = h_m, \dots, h_1$ et $h_i U_i = \text{id}$ pour $i = 1, \dots, m$. Dans ce même travail, Brown et Gluck définissent les *variétés topologiques stables* comme celles dont les changements de cartes n'admettent que des homéomorphismes stables. Les variétés différentiables, semi-linéaires et triangulables sont des exemples de variétés stables. Les propriétés les plus importantes des variétés stables sont :

- leur homogénéité dans le cas où elles n'admettent qu'une seule structure stable ([6], II, théorème 19.1), et
- le fait que toute sphère localement plate de dimension 1 dans une variété stable admet un voisinage tubulaire trivial ([6], III).

Si la conjecture annulaire est vraie dans toutes les dimensions, toutes les variétés topologiques admettent des structures stables. L'intérêt des structures stables s'accroît donc avec la probabilité de l'existence de dimensions n où A_n est fausse.

Le résultat du *premier chapitre* de ce travail semble apte à renforcer cette probabilité et à justifier des études approfondies portant sur les structures stables. Nous démontrons en effet qu'une forme paramétrisée de la conjecture annulaire est fausse dans certaines dimensions. Pour obtenir cette information, on s'est inspiré de l'analogie évidente entre A_n et le théorème de Schönflies. M. Brown, partant dans [4] des idées de B. Mazur, a démontré que, pour tout couple de plongements f_1, f_2 localement plats de S^{n-1} dans S^n , il existe un homéomorphisme h de S^n tel que $hf_1 = f_2$. Par la suite, M. Morse et W. Huebsch [20] ont remarqué que le théorème de Schönflies reste valable si on y introduit un nouveau paramètre (voir chap. 3, §1). En analogie avec ce théorème de Schönflies paramétrisé nous avons formulé une *conjecture annulaire paramétrisée* $AP_{k,n}$ pour les produits $\Delta_k \times S^{n-1}$, où Δ_k est le simplexe standard de dimension k (voir chap. 1). Si $k = 0$, $AP_{0,n}$ est équivalent à la conjecture annulaire ordinaire A_n . Dans le premier chapitre, nous démontrons le *théorème 1* :

Il existe un couple $(k, n) \in (N \cup \{0\}) \times N$ tel que la conjecture annulaire paramétrisée $AP_{k,n}$ est fausse.

Plus particulièrement, nous démontrons que l'hypothèse $AP_{k,n}$ entraîne que tout espace fibré topologique de fibre R^n au-dessus d'un complexe simplicial localement fini contient un autre espace fibré de

fibre D^n , dont la projection s'obtient par limitation. Or ceci est en contradiction avec un théorème de W. Browder [3], qui, à son tour, est une conséquence de la différence non-triviale entre la k -théorie topologique et la k -théorie orthogonale établie par Milnor [18].

Le théorème 1 cité montre donc qu'il existe une différence notable entre le problème de Schönflies et la conjecture annulaire. Il appelle aussi une étude approfondie du groupe des automorphismes topologiques fibrés de $\Delta_k \times R^n$ qui figurent dans l'hypothèse de $AP_{k,n}$. C'est le groupe semi-simplicial \mathbf{G}_n^∂ des automorphismes topologiques de R^n (voir [11]). En vue du théorème 1, si on peut démontrer que tous les éléments de ce groupe pour $k \geq 1$ satisfont à la propriété $AP_{k,n}$, on aura démontré en même temps l'existence d'un n où A_n est fausse. Les premiers résultats dans cette direction sont contenus dans le chapitre 4 de ce travail (placé à la fin, car ces travaux seront poursuivis ultérieurement). L'idée essentielle (théorèmes 7, 8) est d'approcher pour $k \geq 1$ les éléments du groupe \mathbf{G}_n^∂ par des homéomorphismes fibrés semi-linéaires et de réduire ainsi la conjecture annulaire paramétrisée à la conjecture correspondante (avec condition au bord) dans la catégorie semi-linéaire (où la conjecture annulaire ordinaire a été prouvée [25]).

Dans ce but, nous modifions les techniques développées par E.H. Connell dans [7], où il est démontré que les automorphismes stables (non-paramétrisés) de R^n peuvent être approchés par des automorphismes semi-linéaires, ceci pour $n \geq 7$ et probablement pour $n \geq 5$, les cas $n \leq 3$ étant bien connus ([2] et [19]). Ces méthodes sont utilisées pour réduire l'approximation semi-linéaire des éléments de \mathbf{G}_n^∂ à deux hypothèses dans la catégorie semi-linéaire, concernant notamment une généralisation du célèbre *Engulfing Theorem* de J. Stallings [22]; elle fera l'objet d'une publication ultérieure.

A ces justifications des recherches entreprises dans le domaine des structures stables sur les variétés topologiques s'ajoute, aux chapitres 2 et 3 de ce travail, une étude des *microfibrés stables*. Ils sont associés aux variétés stables de la même manière que les microfibrés topologiques [18] sont associés aux variétés topologiques (voir chap. 2). Dans [6], II, théorème 13.1, M. Brown et H. Gluck ont démontré que les notions de stabilité locale et de stabilité globale d'un automorphisme d'une variété stable M sont équivalentes. Dans le chapitre 2, nous généralisons ce résultat pour les germes d'automorphismes des microfibrés stables (théorème 2).

Dans ce but, nous étudions l'ensemble des classes stables des plongements fibrés de $D^m \times D^n$ dans le produit d'une partie ouverte U d'une variété stable M^m avec R^n . Le fait essentiel est que cet ensemble possède une propriété d'excision.

Dans le chapitre 3, nous étudions le rapport entre les microfibrés stables de fibre R^p au-dessus d'une variété stable M^m et les microfibrés « stables-en-chaque-fibre » de fibre R^{m+p} (voir introduction du chapitre 3). Ces microfibrés stables-en-chaque-fibre constituent des éléments intermédiaires utiles entre les microfibrés stables et les microfibrés topologiques. D'une part, l'ensemble des classes stables des microfibrés stables s'applique de façon injective dans l'ensemble des classes des microfibrés stables-en-chaque-fibre. D'autre part, les bases de ces microfibrés sont indépendantes de la structure stable des fibres et peuvent donc être librement choisies. En particulier, on peut prendre pour base des complexes simpliciaux. Ceci permet d'utiliser dans la catégorie des microfibrés stables-en-chaque-fibre les méthodes développées pour l'étude des microfibrés topologiques au-dessus des complexes simpliciaux.

Comme exemple de l'efficacité de ces méthodes, nous démontrons le théorème 6, qui est l'analogue dans la catégorie stable du théorème topologique de Kister-Mazur [14]:

Toute classe de microfibrés stables au-dessus d'une variété topologique séparable et métrisable qui supporte une structure stable contient un fibré stable (c'est-à-dire: un fibré topologique au sens de Steenrod [23] muni d'une structure stable) et un seul, à une équivalence près au sens des fibrés stables.

Ceci réduit la classification des microfibrés stables à celle des fibrés stables. Les mêmes méthodes permettent de démontrer que les s -classes des microfibrés stables au-dessus d'un complexe de dimension fini constituent un groupe abélien.

Les résultats du chapitre 3 montrent en particulier qu'on retrouve dans la catégorie stable les notions fondamentales et certains résultats bien connus des catégories semi-linéaires et topologiques. Ceci permet de s'attendre à d'autres résultats (concernant notamment l'existence des microfibrés normaux), intéressants dans la mesure où la suite des recherches commencées dans le chapitre 4 permet de démontrer effectivement que A_n est fausse dans certaines dimensions.

CHAPITRE I

LA CONJECTURE ANNULAIRE PARAMÉTRISÉE

En analogie avec le théorème de Schönflies paramétrisé de M. Morse et W. Huebsch [20], nous définissons la *conjecture annulaire paramétrisée* $AP_{k,n}$ comme suit.

Soit Δ_k le simplexe euclidien standard de dimension k . Soit f un automorphisme topologique fibré de $(\Delta_k \times R^n, \Delta_k \times \{0\})$ qui induit l'identité sur la base Δ_k , tel que $f(\partial\Delta_k \times S^{n-1}) \subset \partial\Delta_k \times S^{n-1}$. Soit $a > 0$ tel que $f(\Delta_k \times D^n) \subset \Delta_k \times aD^n$, où aD^n est la boule euclidienne de rayon a autour de l'origine dans R^n .

Il existe alors un plongement fibré g de $\Delta_k \times S^{n-1} \times I$ dans $\Delta_k \times R^n$ au-dessus de la base Δ_k tel que :

- (1) $g(x, 0) = f(x)$ pour tout $x \in \Delta_k \times S^{n-1}$,
- (2) $g(\Delta_k \times S^{n-1} \times \{1\}) \subset \Delta_k \times aS^{n-1}$ où $aS^{n-1} = \partial aD^n$,
- (3) g est « rond » au-dessus du bord $\partial\Delta_k$, c'est-à-dire

$$|pr_2 \circ g(x, t)| = ta + 1 - t \text{ pour tout } (x, t) \in (\partial\Delta_k \times S^{n-1}) \times I,$$

où pr_2 est la projection $\Delta_k \times R^n \rightarrow R^n$.

REMARQUE. Si $k = 0$ et, par conséquent, $\partial\Delta_0 = \emptyset$, $AP_{0,n}$ est équivalent à la conjecture annulaire ordinaire. $AP_{0,n}$ est en effet un cas spécial de A_n . Inversement on déduit A_n de $AP_{0,n}$ à l'aide du théorème de Schönflies [4] et du théorème de la couronne de M. Brown [5]. Si $f_i : S^{n-1} \rightarrow S^r$ sont deux plongements localement plats dont les images sont disjointes, il suit du théorème de Schönflies-Brown qu'on peut prolonger f_i à des plongements de D^n dans S^n . En enlevant un point ∞ bien choisi de S^n , on peut considérer les f_i comme des plongements de D^n dans R^n tels que $f_1(D^n) \subset f_2(\overset{\circ}{D}^n)$. On choisit ensuite une boule aD^n avec $a > 0$ dans R^n telle que $f_2(D^n) \subset a\overset{\circ}{D}^n$. D'après $AP_{0,n}$ il existe deux anneaux, c'est-à-dire deux plongements $F_i : S^{n-1} \times I \rightarrow R^n$ tels que

$$F_i(x, 0) = f_i(x) \text{ et } F_i(S^{n-1} \times \{1\}) \subset aS^{n-1}.$$

D'après le théorème de la couronne [5], il existe un plongement $F_2^* : S^{n-1} \times [-1, 2] \rightarrow R^n - f_1(D^n)$, qui prolonge F_2 .

Soit h l'homéomorphisme de R^n défini par:

$$h|(R^n - \text{Im } F_2^*) = \text{id},$$

$$h \circ F_2^*(x, t) = F_2^*(x, 1/2 \cdot (t-1)) \quad \text{pour } -1 \leq t \leq 1, x \in S^{n-1},$$

$$h \circ F_2^*(x, t) = F_2^*(x, 2t-2) \quad \text{pour } 1 \leq t \leq 2, x \in S^{n-1}.$$

Alors $h \circ F_1$ est un plongement $S^{n-1} \times I \rightarrow R^n$ tel que:

$$h \circ F_1|S^{n-1} \times \{0\} = f_1 \quad \text{et}$$

$$h \circ F_1(S^{n-1} \times \{1\}) \subset f_2(S^{n-1}).$$

Dans la suite de ce chapitre, nous nous proposons de démontrer le

THÉORÈME 1. *Il existe un couple $(k, n) \in (N \cup \{0\}) \times N$ tel que la conjecture annulaire paramétrisée $AP_{k,n}$ est fautive.*

REMARQUES.

- Si $AP_{k,n}$ est vraie pour tout couple $(k, n) \in N \times N$, il suit du théorème 1 que la conjecture annulaire ordinaire est fautive dans au moins une dimension n .
- Si $AP_{k,n}$ est fautive pour un couple (k, n) avec $n \leq 3$, il suit de [9, 21, 1] que dans ce cas $k > 0$.
- La démonstration du théorème 1 utilise essentiellement un théorème de W. Browder [3].

DÉFINITION 1.

a) Nous notons \mathbf{G}_n le groupe semi-simplicial des automorphismes topologiques de $(R^n, 0)$; c'est-à-dire (comparer [11]) nous posons $\mathbf{G}_n = \{\mathbf{G}_{k,n}; k = 0, 1, 2, \dots\}$, et $f \in \mathbf{G}_{k,n}$ si et seulement si f est un automorphisme topologique fibré de $(\Delta_k \times R^n, \Delta_k \times \{0\})$ qui induit l'identité sur la base Δ_k .

b) Soit $\mathbf{G}_n(S^{n-1}) = \{\mathbf{G}_{k,n}(S^{n-1}); k = 0, 1, 2, \dots\}$ le sous-groupe semi-simplicial de \mathbf{G}_n qui est défini par la condition $f \in \mathbf{G}_{k,n}(S^{n-1})$ si et seulement si $f \in \mathbf{G}_{k,n}$ et $f(\Delta_k \times S^{n-1}) \subset \Delta_k \times S^{n-1}$.

c) Soit $J_n = \{J_{k,n}; k = 0, 1, 2, \dots\}$ le sous-groupe semi-simplicial des homéomorphismes f de \mathbf{G}_n qui sont isotopes au sens fibré à des éléments de $\mathbf{G}_n(S^{n-1})$. Plus précisément: pour tout $f \in J_{k,n}$ il existe une isotopie fibrée

$$h_t : (\Delta_k \times R^n, \Delta_k \times \{0\}) \rightarrow (\Delta_k \times R^n, \Delta_k \times \{0\})$$

de base Δ_k , telle que $h_t \in \mathbf{G}_{k,n}$ pour tout $t \in I$, $h_0 = f$ et $h_1 \in \mathbf{G}_{k,n}(S^{n-1})$.

d) Soit $\mathbf{G}_n^\partial = \{\mathbf{G}_{k,n}^\partial ; k = 0, 1, 2, \dots\}$ le sous-groupe semi-simplicial des homéomorphismes f de \mathbf{G}_n tels que $f(\partial\Delta_k \times S^{n-1}) \subset \partial\Delta_k \times S^{n-1}$.

e) Finalement, soit $J_n^\partial = \{J_{k,n}^\partial ; k = 0, 1, 2, \dots\}$ le sous-groupe semi-simplicial des homéomorphismes f de \mathbf{G}_n^∂ qui sont isotopes au sens fibré à des éléments de $\mathbf{G}_n(S^{n-1})$ selon une isotopie qui est relative au-dessus du bord $\partial\Delta_k$; c'est-à-dire: pour tout $f \in J_{k,n}^\partial$ il existe une isotopie fibrée

$$h_t : (\Delta_k \times R^n, \Delta_k \times \{0\}) \rightarrow (\Delta_k \times R^n, \Delta_k \times \{0\})$$

de base Δ_k telle que $h_0 = f$, $h_1 \in \mathbf{G}_{k,n}(S^{n-1})$ et $h_t \in \mathbf{G}_{k,n}^\partial$ pour tout $t \in I$.

PROPOSITION 1. Si A_n est vraie, on a $J_n = \mathbf{G}_n$.

La démonstration utilise l'« astuce d'Alexander » :

a) Si $k = 0$, $f \in \mathbf{G}_{0,n}$ est un automorphisme de $(R^n, 0)$. On choisit $a > 0$ tel que $f(D^n) \subset a\overset{\circ}{D}^n$. D'après A_n il existe un plongement $g : S^{n-1} \times I \rightarrow R^n$ tel que :

$$g(y, 0) = f(y, 0) \text{ pour } y \in S^{n-1}, \text{ et } g(S^{n-1} \times \{1\}) \subset aS^{n-1}.$$

Soit $\alpha : S^{n-1} \times I \rightarrow aD^n - \overset{\circ}{D}^n$ l'homéomorphisme $\alpha(y, t) = (t(a-1) + 1)y$. On définit un autre homéomorphisme φ de $(R^n, 0)$ par :

$$\varphi|_{D^n} = f|_{D^n}, \quad \varphi|_{(aD^n - \overset{\circ}{D}^n)} = g \circ \alpha^{-1},$$

et on prolonge φ sur $\mathcal{C}a\overset{\circ}{D}^n$ par linéarité :

$$\varphi(y) = (g \circ \alpha^{-1}(ay/|y|)) \cdot \frac{|y|}{a} \text{ pour } |y| \geq a.$$

Soit ψ l'automorphisme de $(R^n, 0)$ qui est défini sur $\mathcal{C}a\overset{\circ}{D}^n$ par $\psi|_{\mathcal{C}a\overset{\circ}{D}^n} = \varphi|_{\mathcal{C}a\overset{\circ}{D}^n}$ et qui est prolongé sur aD^n par linéarité :

$$\psi(y) = (\varphi(\frac{ay}{|y|})) \cdot \frac{|y|}{a} \text{ pour } |y| \neq 0 \text{ et } \psi(0) = 0.$$

Finalement, soit $\chi_t(y) = (\psi \circ \varphi^{-1}(\frac{y}{t})) \cdot t$ pour $(y, t) \in R^n \times (0, 1]$.

On peut prolonger χ de façon continue sur $R^n \times I$ en posant $\chi_0(y) = y$ pour $y \in R^n$. Alors $\chi_t \circ f$ est une isotopie de $\chi_0 \circ f = f$ à $\chi_1 \circ f$, et comme on a

$$|\chi_1 \circ f(y)| = |\psi \circ \varphi^{-1} \circ f(y)| = |\psi(y)| = 1 \text{ pour } |y| = 1,$$

$\chi_1 \circ f$ est un élément de $\mathbf{G}_{0,n}(S^{n-1})$.

b) Soit maintenant $k > 0$, soit $f \in \mathbf{G}_{k,n}$ et $s \in \Delta_k$. D'après a) il existe une isotopie $g : I \times R^n \rightarrow R^n$ telle que

$$g(0, y) = \text{pr}_2 f(s, y) \quad \text{et} \quad g(\{1\} \times S^{n-1}) \subset S^{n-1}.$$

On définit ensuite une application continue

$$h : (\{0,1\} \times \Delta_k \cup I \times \{s\}) \times R^n \rightarrow R^n \quad \text{par}$$

$$\begin{cases} h(0, x, y) = \text{pr}_2 \circ f(x, y) \\ h(t, s, y) = g(t, y) \\ h(1, x, y) = g(1, y) \end{cases} \quad \text{pour} \quad \begin{cases} (x, y) \in \Delta_k \times R^n \\ (t, y) \in I \times R^n \\ (x, y) \in \Delta_k \times R^n. \end{cases}$$

Soit r une rétraction de $I \times \Delta_k$ sur $\{0,1\} \times \Delta_k \cup I \times \{s\}$. On définit alors l'isotopie fibrée

$$i_t : \Delta_k \times R^n \rightarrow \Delta_k \times R^n \quad (t \in I)$$

par $i_t(x, y) = (x, h(r(t, x), y))$. Alors i_t est une isotopie fibrée de

$$i_0 = f \quad \text{à} \quad i_1 = 1 \times g_1 \in \mathbf{G}_{k,n}(S^{n-1}), \quad \text{où} \quad g_1(y) = g(1, y).$$

PROPOSITION 2. Pour tout couple $(k, n) \in (N \cup \{0\}) \times N$, $AP_{k,n}$ entraîne $J_{k,n}^{\partial} = \mathbf{G}_{k,n}^{\partial}$.

La démonstration utilise l'« astuce d'Alexander » paramétrisée.

Pour $k = 0$ l'affirmation est contenue dans la proposition 1.

Supposons $k > 0$. Soit $f \in \mathbf{G}_{k,n}^{\partial}$. Il existe alors un $a > 1$ tel que $f(\Delta_k \times D^n) \subset \Delta_k \times aD^n$. D'après $AP_{k,n}$ il existe un plongement

$$g : \Delta_k \times S^{n-1} \times I \rightarrow \Delta_k \times R^n$$

tel que

$$g(x, y, 0) = f(x, y, 0) \quad \text{pour} \quad (x, y) \in \Delta_k \times S^{n-1},$$

$$g(\Delta_k \times S^{n-1} \times \{1\}) \subset \Delta_k \times aS^{n-1}, \quad \text{et}$$

g est « rond » au-dessus du bord $\partial\Delta_k$:

$$|\text{pr}_2 \circ g(x, y, t)| = t(a-1) + 1 \quad \text{pour tout} \quad (x, y, t) \in \partial\Delta_k \times S^{n-1} \times I.$$

Soit a l'homéomorphisme de $\Delta_k \times S^{n-1} \times I$ sur $\Delta_k \times (aD^n - \overset{\circ}{D}^n)$ qui est défini par $a(x, y, t) = (x, (t(a-1) + 1)y)$. On définit un automorphisme fibré φ de $(\Delta_k \times R^n, \Delta_k \times \{0\})$ par

$$\varphi |_{\Delta_k \times D^n} = f |_{\Delta_k \times D^n}, \quad \varphi |_{\Delta_k \times (aD^n - \overset{\circ}{D}^n)} = g \circ a^{-1},$$

et on prolonge φ sur $\Delta_k \times \overset{\circ}{C} a\overset{\circ}{D}^n$ par linéarité :

$$\varphi(x, y) = (x, (\text{pr}_2 \circ g \circ a^{-1}(x, \frac{y}{|y|} a)) \cdot \frac{|y|}{a}) \quad \text{pour} \quad |y| \geq a.$$

Soit ψ l'automorphisme fibré de $(\Delta_k \times R^n, \Delta_k \times \{0\})$, qui est défini sur $\Delta_k \times \mathbb{C}a\mathring{D}^n$ par $\psi|_{\Delta_k \times \mathbb{C}a\mathring{D}^n} = \varphi|_{\Delta_k \times \mathbb{C}a\mathring{D}^n}$ et prolongé sur $\Delta_k \times aD^n$ par linéarité :

$$\psi(x, y) = (x, (\text{pr}_2 \varphi(x, \frac{y}{|y|} \cdot a)) \cdot \frac{|y|}{a}) \quad \text{pour } |y| \neq 0 \text{ et } \psi(x, 0) = (x, 0).$$

On alors $\psi \circ \varphi^{-1}|_{\Delta_k \times \mathbb{C}a\mathring{D}^n} = \text{id}$.

Soit $\chi : \Delta_k \times R^n \times (0, 1] \rightarrow \Delta_k \times R^n$ l'application définie par :

$$\chi(x, y, t) = (x, [\text{pr}_2 \circ \psi \varphi^{-1}(x, \frac{y}{t})] \cdot t).$$

Si on prolonge χ sur $\Delta_k \times R^n \times \{0\}$ par $\chi(x, y, 0) = (x, y)$, χ est aussi continue aux points $(x_0, y_0, 0)$ de $\Delta_k \times R^n \times \{0\}$; car si $\epsilon D^n(y_0)$ est une boule de rayon ϵ autour de y_0 dans R^n , si U est un voisinage ouvert de x_0 dans Δ_k et si $t_0 = \frac{\epsilon}{4a}$, on obtient

$$\chi(U \times \frac{\epsilon}{4} D^n(y_0) \times [0, t_0]) \subset U \times \epsilon \mathring{D}^n(y_0).$$

En effet, pour $|y| \geq \epsilon/4$ et $0 < t \leq t_0$ on a

$$|y|/t \geq |y|/t_0 = a \cdot |y|/(\epsilon/4) \geq a,$$

donc $\chi_t|_{\Delta_k \times \mathbb{C}\frac{\epsilon}{4}\mathring{D}^n} = \text{id}$ pour $0 \leq t \leq t_0$ et

$$|(x, y) - \chi_t(x, y)| = |y - \text{pr}_2 \circ \chi_t(x, y)| \leq \epsilon/2.$$

Si alors $|y - y_0| \leq \epsilon/4$, on a

$$|y_0 - \text{pr}_2 \circ \chi_t(x, y)| \leq |y - y_0| + |y - \text{pr}_2 \circ \chi_t(x, y)| \leq \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon,$$

ou, pour $x \in U$, $\chi_t(x, y) \in U \times \epsilon \mathring{D}^n(y_0)$.

$\chi_t \circ f : \Delta_k \times R^n \rightarrow \Delta_k \times R^n$ ($t \in I$) est alors une isotopie qui possède les propriétés suivantes :

- $\chi_0 \circ f = f$,

- pour $|y| = 1$ on a

$$|\text{pr}_2 \circ \chi_1 \circ f(x, y)| = |\text{pr}_2 \circ \psi \circ \varphi^{-1} \circ f(x, y)| = |\text{pr}_2 \circ \psi(x, y)| = 1,$$

et $\chi_t \circ f$ est une isotopie relative au-dessus du bord $\partial\Delta_k$; en effet, si $y \in S^{n-1}$, on a $|\text{pr}_2 \circ f(x, y)| = 1$ pour tout $x \in \partial\Delta_k$, donc, si on pose $z = \text{pr}_2 \circ f(x, y)$, on obtient pour $t > 0$:

$$\begin{aligned} |\text{pr}_2 \circ \chi_t \circ f(x, y)| &= |\text{pr}_2 \circ \psi \varphi^{-1}(x, \frac{z}{t})| \cdot t, \text{ avec } \frac{|z|}{t} \geq 1, \\ &= |\text{pr}_2 \circ \varphi^{-1}(x, \frac{z}{t})| \cdot t, \text{ car } |\text{pr}_2 \psi(x, y)| = |y| \\ &\quad \text{pour tout } (x, y) \in \Delta_k \times R^n, \\ &= \left\{ \begin{array}{l} |\text{pr}_2 a g^{-1}(x, \frac{z}{t})| \cdot t \text{ pour } 1 \leq \frac{|z|}{t} \leq a \\ |\frac{z}{t}| \cdot t = 1 \text{ pour } \frac{|z|}{t} \geq a \end{array} \right\} \text{ et } x \in \partial\Delta_k. \end{aligned}$$

En outre, on a pour $1 \leq |v| \leq a$ et pour $x \in \partial\Delta_k$, d'après la condition au bord pour g ,

$$g \circ a^{-1}(x, v) = g\left(x, \frac{v}{|v|}, \frac{|v|-1}{a-1}\right) \text{ et } |\text{pr}_2 g \circ a^{-1}(x, v)| = \frac{|v|-1}{a-1}(a-1) + 1 = v.$$

En posant $v = \frac{z}{t}$, ceci entraîne

$$|\text{pr}_2 \circ a \circ g^{-1}\left(x, \frac{z}{t}\right)| \cdot t = \left|\frac{z}{t}\right| \cdot t = 1 \quad \text{pour } t > 0.$$

On a donc $|\text{pr}_2 \circ \chi_t \circ f(x, y)| = 1$ pour $(x, y) \in \partial\Delta_k \times S^{n-1}$ et $t > 0$; pour $t = 0$ cela est évident.

DÉFINITION 2. Nous appelons *fibré topologique de fibre* $(R^n, 0)$ un « fibre bundle » au sens de Steenrod [23] de fibre $(R^n, 0)$, dont le groupe est le groupe des homéomorphismes de l'espace euclidien R^n qui laissent fixe l'origine; ce groupe est muni de la topologie de la convergence compacte (« compact-open topology »).

Un *fibré topologique relatif de fibre* $(R^n, D^n, \{0\})$ est un « fibre bundle » de fibre $(R^n, D^n, \{0\})$, dont le groupe est le groupe des automorphismes topologiques relatifs de $(R^n, D^n, \{0\})$, muni de la topologie de la convergence compacte.

DÉFINITION 3. Si ξ, ξ' sont deux espaces fibrés au-dessus de B ayant les projections $p: E(\xi) \rightarrow B$, $p': E(\xi') \rightarrow B$, on dira que ξ contient ξ' , si $E(\xi') \subset E(\xi)$ et si $p|E(\xi') = p'$.

PROPOSITION 3. Si $J_n = \mathbf{G}_n$ et $J_n^\partial = \mathbf{G}_n^\partial$, tout fibré topologique de fibre $(R^n, \{0\})$ au-dessus d'un complexe simplicial euclidien localement fini K contient un fibré topologique relatif de fibre $(R^n, D^n, \{0\})$.

DÉMONSTRATION.

a) L'affirmation de la proposition 3 est triviale pour les complexes K de dimension 0.

Le cas de la dimension 1 suit facilement de l'hypothèse $J_{0,n} = \mathbf{G}_{0,n}$, donc, d'après la proposition 1, de A_n . En effet, si ζ est un fibré topologique au-dessus de K , $\zeta|K^0$ est un fibré topologique relatif trivial. Soit σ un simplexe de dimension 1 de K . Nous allons prolonger $\zeta|K^0$ en un fibré relatif η au-dessus de $K^0 \cup \sigma$ qui est contenu dans $\zeta|K^0 \cup \sigma$, tel que $E(\eta) = E(\zeta|K^0 \cup \sigma)$. $\zeta|\sigma$ est trivial.

Si on identifie σ à $[-1, +1]$, on a une trivialisat

$$h_\sigma : [-1, +1] \times R^n \rightarrow E(\zeta|\sigma)$$

et, provenant de $\zeta|K^0$, deux trivialisat

$$h_{\pm 1} : \{\pm 1\} \times R^n \rightarrow E(\zeta|\{\pm 1\}).$$

On pose

$$g_\pm(y) = \text{pr}_2 \circ h_\sigma^{-1} \circ h_\pm(\pm 1, y) \quad \text{pour tout } y \in R^n.$$

Si on choisit $0 < a < 1$, on déduit de $J_{0,n} = \mathbf{G}_{0,n}$ l'existence des isotopies

$i_t^\pm : R^n \rightarrow R^n$ pour $t \in [a, 1]$ ou $t \in [-1, -a]$ telles que

$$i_{\pm 1}^\pm(y) = g_\pm(y) \text{ et } i_{\pm a}^\pm(S^{n-1}) = S^{n-1}.$$

On définit alors les deux trivialisat

$$d_\pm(x, y) = \begin{cases} h_\sigma(x, i_x^\pm(y)) & \text{pour } x \in [a, 1] \text{ ou } x \in [-1, -a] \\ h_\sigma(x, i_{\pm a}^\pm(y)) & \text{pour } x \in (-a, a] \text{ ou } x \in [-a, a] \end{cases} \text{ et } y \in R^n.$$

On vérifie facilement que les deux homéomorphisme

$$d_+ : (-a, +1] \times R^n \rightarrow E(\zeta|(-a, +1])$$

et

$$d_- : [-1, a) \times R^n \rightarrow E(\zeta|[-1, a))$$

prolongent h_+ et h_- et que la transformation

$$d_-^{-1} \circ d_+(x, y) = (1 \times (i_{-a}^-)^{-1} \circ (i_a^+))(x, y) \quad \text{pour } (x, y) \in (-a, a) \times R^n$$

a la propriété $(d_-^{-1} \circ d_+)_x(S^{n-1}) = S^{n-1}$ pour tout $x \in (-a, a)$. On obtient ainsi un fibré relatif η au-dessus de $K^0 \cup \sigma$ qui prolonge $\zeta|K^0$. De la même manière on prolonge $\zeta|K^0$ au-dessus de tout K .

b) Ensuite on vérifie facilement l'affirmation suivante pour $k > 0$.

Soit $B = \{0\} \times D^k \cup l \times S^{k-1}$ et soit g un automorphisme topologique fibré de $(B \times R^n, B \times \{0\})$ qui induit l'identité sur la base B , tel que

$$g(\{1\} \times S^{k-1} \times S^{n-1}) \subset \{1\} \times S^{k-1} \times S^{n-1}.$$

Il suit alors de l'hypothèse $J_n^\partial = \mathbf{G}_n^\partial$ qu'on peut prolonger g en un automorphisme topologique fibré g' de $((l \times D^k) \times R^n, (l \times D^k) \times \{0\})$ qui induit l'identité sur la base $l \times D^k$, tel que

$$g'(\{1\} \times D^k \times S^{n-1}) \subset \{1\} \times D^k \times S^{n-1}.$$

En effet, on choisit un homéomorphisme a de $l \times D^k$ sur lui-même qui applique $(B, \{1\} \times S^{k-1})$ sur $(\{0\} \times D^k, \{0\} \times S^{k-1})$, $\{1\} \times (D^k - \frac{1}{2}D^k)$ sur $l \times S^{k-1}$ et $\{1\} \times \frac{1}{2}D^k$ sur $\{1\} \times D^k$.

On pose

$$\beta = a \times 1 : l \times D^k \times R^n \rightarrow l \times D^k \times R^n, \beta_0 = \beta|_{B \times R^n} \text{ et } h_0 = \beta_0 \circ g \circ \beta_0^{-1}.$$

Comme $J_{k,n}^\partial = \mathbf{G}_{k,n}^\partial$ d'après l'hypothèse, on peut prolonger h_0 en un automorphisme topologique fibré h de $((l \times D^k) \times R^n, (l \times D^k) \times \{0\})$ qui induit l'identité sur la base $l \times D^k$, tel que

$$h(l \times S^{k-1} \times S^{n-1}) = l \times S^{k-1} \times S^{n-1} \text{ et } h(\{1\} \times D^k \times S^{n-1}) = \{1\} \times D^k \times S^{n-1}.$$

$\beta^{-1} \circ h \circ \beta$ est alors un homéomorphisme fibré de $(l \times D^k) \times R^n$ sur lui-même tel que

$$\beta^{-1} \circ h \circ \beta|_{B \times R^n} = g \text{ et } \beta^{-1} \circ h \circ \beta(\{1\} \times D^k \times S^{n-1}) = \{1\} \times D^k \times S^{n-1}.$$

c) Soit maintenant $k > 1$ et supposons que tout fibré topologique ξ de fibre $(R^n, \{0\})$ au-dessus d'un complexe localement fini de dimension $k-1$ contient un fibré topologique relatif η de fibre $(R^n, D^n, \{0\})$ et qu'en plus $E(\xi) = E(\eta)$.

Soit alors K un complexe localement fini de dimension k et soit ζ un fibré topologique de fibre $(R^n, \{0\})$ au-dessus de K , avec la projection $\pi_\zeta : E(\zeta) \rightarrow K$. D'après l'hypothèse de récurrence, nous pouvons supposer qu'il existe un fibré topologique relatif η de fibre $(R^n, D^n, 0)$ et de base K^{k-1} , qui est contenu dans $\zeta|_{K^{k-1}}$, et en plus que $E(\eta) = E(\zeta|_{K^{k-1}})$.

La proposition 3 résultera alors de l'affirmation suivante :

Il existe un fibré topologique relatif δ de fibre $(R^n, D^n, \{0\})$ au-dessus de K^{k-1} , qui est équivalent à η au sens strict [23, p. 8] des fibrés relatifs ; δ peut être prolongé en un fibré topologique relatif ω de fibre $(R^n, D^n, 0)$ au-dessus de K , qui est contenu dans ζ ; de plus, $E(\omega) = E(\zeta)$.

On construit d'abord le fibré relatif δ . Si σ est un simplexe quelconque de dimension k de K , on identifie $(\sigma, \partial\sigma)$ à (D^k, S^{k-1}) , et on choisit sur $\partial\sigma$ deux disques ronds D_σ, D'_σ de dimension $k-1$ tels que $\overset{\circ}{D}_\sigma \cup \overset{\circ}{D}'_\sigma = \partial\sigma$ et que $D_\sigma \cap D'_\sigma$ soit homéomorphe à $S^{k-2} \times I$. Pour tout σ , les deux ensembles

$$0_\sigma = K^{k-1} - (\partial\sigma - \overset{\circ}{D}_\sigma) \text{ et } 0'_\sigma = K^{k-1} - (\partial\sigma - \overset{\circ}{D}'_\sigma)$$

constituent un recouvrement ouvert de K^{k-1} . Soit $\{W\}$ l'atlas des cartes ouvertes de K^{k-1} , au-dessus desquelles η est trivial. Soit $\{st P\}$ le recouvrement ouvert de K^{k-1} donné par les étoiles ouvertes $st P$ des sommets P de K^{k-1} . On choisit un recouvrement ouvert $\{V\}$ plus fin que $\{W\}$ et $\{st P\}$. Soit ensuite $\{U\}$ la famille des intersections

$$\{V \cap (\bigcap_{\sigma} Q_{\sigma}) : \sigma \in K, \dim \sigma = k, Q_{\sigma} = 0_{\sigma} \text{ ou } Q_{\sigma} = 0'_{\sigma}, V \in \{V\}\}.$$

Chaque intersection $V \cap (\bigcap_{\sigma} Q_{\sigma})$ de cette famille est un ensemble ouvert; en effet, comme pour tout V il existe un sommet P de K tel que $V \subset \text{st } P$ et comme K est localement fini, $V \cap \partial\sigma \neq \emptyset$ pour un nombre fini seulement de simplexes σ de dimension k de K , et si τ est un simplexe de dimension k de K tel que $V \cap \partial\tau = \emptyset$, on obtient

$$V = V \cap (K^{k-1} - \partial\tau) = V \cap (K^{k-1} - (\partial\tau - \dot{D}_{\tau})) = V \cap 0_{\tau} \text{ et } V = V \cap 0'_{\tau}.$$

De plus, $\{U\}$ est un recouvrement de K^{k-1} , car si $x \in K^{k-1}$, il existe un V tel que $x \in V$ et, pour tout σ , on a soit $x \in 0_{\sigma}$ soit $x \in 0'_{\sigma}$. Pour tout σ de dimension k de K et pour tout U de $\{U\}$ on a, soit $U \subset 0_{\sigma}$, soit $U \subset 0'_{\sigma}$, et $\{U\}$ est évidemment un recouvrement plus fin que $\{V\}$. On appellera δ le fibré topologique relatif de fibre $(R^n, D^n, \{0\})$ au-dessus de K^{k-1} , dont l'espace total est $E(\eta)$, la projection π_{η} et dont les trivialisations sont les trivialisations de η limitées aux sources $\{U \times R^n\}$.

Prolongement de δ au-dessus de $K^{k-1} \cup \sigma$. Soit σ un simplexe de dimension k de K : $\zeta|\sigma$ est trivial; soit $h_{\sigma} : \sigma \times R^n \rightarrow E(\zeta|\sigma)$ une trivialisation correspondante. Nous abrégeons $D_{\sigma} = D, D'_{\sigma} = D'$. $\delta|D$ et $\delta|D'$ sont des fibrés relatifs triviaux, ayant comme trivialisations les homéomorphismes

$$h : D \times R^n \rightarrow E(\delta|D) \text{ et } h' : D' \times R^n \rightarrow E(\delta|D').$$

Pour tout $x \in D \cap D', (h^{-1} \circ h)_x$ est un automorphisme topologique de $(R^n, D^n, \{0\})$. Soit $0 < a < 1$. On identifie $l \times D$ et $\{x \in D^k : \frac{x}{|x|} \in D, |x| \geq a\}$ de telle manière que $\{0\} \times D \cong D$. De façon analogue, on identifie $l \times D'$ avec $\{x \in D^k : \frac{x}{|x|} \in D', |x| \geq a\}$. Soit g l'automorphisme topologique de $(D \times R^n, D \times \{0\})$ qui est défini par $g(x, y) = h_{\sigma}^{-1} \circ h(x, y)$. Du fait de l'hypothèse $J_{k-1, n} = \mathbf{G}_{k-1, n}$, il existe une isotopie fibrée

$$i_t : (D \times R^n, D \times \{0\}) \rightarrow (D \times R^n, D \times \{0\}) \quad (t \in I)$$

telle que $i_0 = g$ et $i_{1, x}(S^{n-1}) = S^{n-1}$ pour tout $x \in D$, et que i_t induise l'identité sur la base D pour tout $t \in I$. On définit alors l'automorphisme topologique fibré H de $l \times D \times R^n$ au-dessus de la base $l \times D$ par $H(t, x, y) = (t, i_t(x, y))$. De manière analogue à la définition de g , on définit l'automorphisme g' de $(D' \times R^n, D' \times \{0\})$ par $g'(x, y) = h_{\sigma}^{-1} \circ h'(x, y)$. On a alors, pour tout $u \in D \cap D'$,

$$(g'^{-1} \circ g)_u (S^{n-1}) = (h'^{-1} \circ h)_u (S^{n-1}) = S^{n-1}.$$

On définit un homéomorphisme fibré de $(\{0\} \times D' \cup I \times (D \cap D')) \times R^n$ sur lui-même par $(0, g'(x, y))$ sur $\{0\} \times D' \times R^n$ et par

$$(t, i_t \circ g'(x, y)) \quad \text{pour } (t, x, y) \in I \times (D \cap D') \times R^n ;$$

comme $i_{1,x} (S^{n-1}) = S^{n-1}$ pour tout $x \in D$, on a

$$(i_1 \circ g^{-1} \circ g')_x (S^{n-1}) = (i_1 \circ h^{-1} \circ h')_x (S^{n-1}) = S^{n-1}$$

pour tout $x \in D \cap D'$.

Il suit alors de la partie *b*) de cette démonstration qu'on peut prolonger cet homéomorphisme en un automorphisme topologique fibré H' de $(I \times D' \times R^n, I \times D' \times \{0\})$ qui induit l'identité sur la base $I \times D'$, de telle manière que $H'_{1,x} (S^{n-1}) = S^{n-1}$ pour tout $x \in D'$.

On pose $A = aD^k \cup (I \times D)$, $A' = aD^k \cup (I \times D')$ et on définit des trivialisations pour l'espace $E(\zeta | K^{k-1} \cup \sigma)$ de la manière suivante :

1° $d : \overset{\circ}{A} \times R^n \rightarrow E(\zeta | \overset{\circ}{A})$ est défini par

$$d | (aD^k \cap \overset{\circ}{A}) \times R^n = h_\sigma | (aD^k \cap \overset{\circ}{A}) \times R^n \quad \text{et}$$

$$d(t, x, y) = h_\sigma \circ H \circ (1 \times H_1^{-1})(t, x, y) \quad \text{pour } (t, x, y) \in (0, 1] \times \overset{\circ}{D} \times R^n,$$

où $H_1(x, y) = H(1, x, y)$.

2° $d' : \overset{\circ}{A}' \times R^n \rightarrow E(\zeta | \overset{\circ}{A}')$ est défini par

$$d' | (aD^k \cap \overset{\circ}{A}') \times R^n = h_\sigma | (aD^k \cap \overset{\circ}{A}') \times R^n \quad \text{et}$$

$$d'(t, x, y) = h_\sigma \circ H' \circ (1 \times H_1'^{-1})(t, x, y) \quad \text{pour } (t, x, y) \in (0, 1] \times \overset{\circ}{D}' \times R^n.$$

3° Soit $f : U \times R^n \rightarrow E(\delta | U)$ une trivialisation de δ telle que $U \subset \overset{\circ}{0}_\sigma$. On pose $N = U \cap \partial\sigma$; N peut être vide. On a alors $N \subset \overset{\circ}{D}$ et $U \cup N \times [0, 1)$ est un ensemble ouvert de $K^{k-1} \cup \sigma$, car

$$\mathcal{C}(U \cup N \times [0, 1)) = (K^{k-1} - U) \cup (\sigma - N \times [0, 1))$$

est fermé dans $K^{k-1} \cup \sigma$.

On définit alors une trivialisation

$$e : (U \cup N \times [0, 1)) \times R^n \rightarrow E(\zeta | U \cup N \times [0, 1))$$

par $e | U \times R^n = f$ et par

$$e(t, x, y) = h_\sigma \circ H \circ (1 \times h^{-1} \circ f)(t, x, y) \quad \text{pour } (t, x, y) \in [0, 1) \times N \times R^n.$$

4° De manière analogue, si $f' : U' \times R^n \rightarrow E(\delta | U')$ est une trivialisation de δ telle que $U' \subset \overset{\circ}{0}'_\sigma$, on pose $N' = U' \cap \partial\sigma$, où N' peut encore être vide. On a aussi $N' \subset \overset{\circ}{D}'$, et $U' \cup N' \times [0, 1)$ est un ensemble ouvert de $K^{k-1} \cup \sigma$. On définit une trivialisation

$$e' : (U' \cup N' \times [0, 1)) \times R^n \rightarrow E(\zeta | U' \cup N' \times [0, 1))$$

par $e' | U' \times R^n = f'$ et par

$$e'(t, x, y) = h_\sigma \circ H' \circ (1 \times h'^{-1} \circ f')(t, x, y) \quad \text{pour } (t, x, y) \in [0, 1] \times N' \times R^n.$$

On vérifie alors que les homéomorphismes d, d', e, e' sont les trivialisations d'un fibré topologique relatif ω_σ de fibre $(R^n, D^n, \{0\})$ au-dessus de $K^{k-1} \cup \sigma$, qui est contenu dans $\zeta | K^{k-1} \cup \sigma$ (tel que $E(\omega_\sigma) = E(\zeta | K^{k-1} \cup \sigma)$) et qui prolonge δ . En particulier, pour montrer que ω_σ est un fibré relatif, on doit vérifier la relativité des transformations :

- (1) $d'^{-1} \circ d : (\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{A}') \times R^n \rightarrow (\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{A}') \times R^n$,
- (2) $e'^{-1} \circ e : ((U \cap U') \cup [0, 1] \times (N \cap N')) \times R^n \rightarrow ((U \cap U') \cup [0, 1] \times (N \cap N')) \times R^n$,
- (3) $e^{-1} \circ d : (0, 1) \times N \times R^n \rightarrow (0, 1) \times N \times R^n$,
- (4) $e'^{-1} \circ d' : (0, 1) \times N' \times R^n \rightarrow (0, 1) \times N' \times R^n$,
- (5) $e'^{-1} \circ d : (0, 1) \times (\overset{\circ}{D} \cap N') \times R^n \rightarrow (0, 1) \times (\overset{\circ}{D} \cap N') \times R^n$,
- (6) $d'^{-1} \circ e : (0, 1) \times (\overset{\circ}{D}' \cap N) \times R^n \rightarrow (0, 1) \times (\overset{\circ}{D}' \cap N) \times R^n$.

Cas (1) : Pour $(x, y) \in (\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{A}' \cap aD^k) \times R^n$ on a

$$d'^{-1} \circ d(x, y) = h_\sigma^{-1} \circ h_\sigma(x, y);$$

en outre, $(t, x, y) \in (0, 1] \times (\overset{\circ}{D} \cap \overset{\circ}{D}') \times R^n$ entraîne

$$\begin{aligned} d'^{-1} \circ d(t, x, y) &= (1 \times H'_1) \circ H'^{-1} \circ h_\sigma^{-1} \circ h_\sigma \circ H \circ (1 \times H_1^{-1})(t, x, y) \\ &= (1 \times H'_1) \circ (H'^{-1} \circ H) \circ (1 \times H_1^{-1})(t, x, y) \\ &= (1 \times H'_1) \circ (1 \times g'^{-1} \circ g) \circ (1 \times H_1^{-1})(t, x, y), \end{aligned}$$

$$\text{car } H'^{-1} \circ H(t, x, y) = (t, g' \circ g \circ i_t^{-1} \circ i_t(x, y)) = (1 \times g'^{-1} \circ g)(t, x, y)$$

pour $(t, x, y) \in (0, 1] \cap (\overset{\circ}{D} \cap \overset{\circ}{D}') \times R^n$.

Comme $H_{1,x}, H'_{1,x}$ et $(g'^{-1} \circ g)_x$ sont relatifs pour $x \in D \cap D'$, on trouve $(d'^{-1} \circ d)_{t,x}(S^{n-1}) = S^{n-1}$ pour $(t, x) \in (0, 1] \times (\overset{\circ}{D} \cap \overset{\circ}{D}')$.

Cas (2) : Au-dessus de $U \cap U'$ on a $e'^{-1} \circ e = f'^{-1} \circ f$, c'est-à-dire une transformation relative dans chaque fibre.

Si $(t, x, y) \in (0, 1) \times (N \cap N') \times R^n$, (t, x, y) est aussi un élément de $(0, 1) \times (\overset{\circ}{D} \cap \overset{\circ}{D}') \times R^n$ et

$$\begin{aligned} e'^{-1} \circ e(t, x, y) &= (1 \times f'^{-1} \circ h') \circ H'^{-1} \circ h_\sigma^{-1} \circ h_\sigma \circ H \circ (1 \times h^{-1} \circ f)(t, x, y) \\ &= (1 \times f'^{-1} \circ h') \circ (1 \times g'^{-1} \circ g) \circ (1 \times h^{-1} \circ f)(t, x, y); \end{aligned}$$

$(f'^{-1} \circ h')_x$ et $(h^{-1} \circ f)_x$ sont relatifs, car les f, f', h, h' sont des trivialisations de δ .

Cas (3): $e^{-1} \circ d = (1 \times f^{-1}h) \circ (1 \times H_1^{-1})$ au-dessus de $(0,1) \times N$.

Cas (4): $e'^{-1} \circ d' = (1 \times f'^{-1} \circ h') \circ (1 \times H_1'^{-1})$ au-dessus de $(0,1) \times N'$.

Cas (5) et cas (6): Ils s'obtiennent de $e'^{-1} \circ d' = (e'^{-1} \circ d') \circ (d'^{-1} \circ d)$ au-dessus de $(U' \cup N' \times [0,1)) \cap \overset{\circ}{A} = (U' \cup N' \times [0,1)) \cap \overset{\circ}{A}' \overset{\circ}{\cap} \overset{\circ}{A}$ et de $d'^{-1} \circ e = (d'^{-1} \circ d) \circ (d^{-1} \circ e)$ au-dessus de $(U \cup N \times [0,1)) \cap \overset{\circ}{A} \overset{\circ}{\cap} \overset{\circ}{A}'$, et de (1), (3), (4). Ceci montre que le prolongement de δ au-dessus de $K^{k-1} \cup \sigma$ est relatif.

d) Soit $\{\sigma_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ l'ensemble des simplexes de dimension k de K . Nous supposons que Λ est muni d'une structure d'ensemble bien ordonné (\leq). Pour tout $\lambda \in \Lambda$ on définit $L_\lambda = K^{k-1} \cup \bigcup_{\nu \leq \lambda} \sigma_\nu$. Soit $\kappa \in \Lambda$. Pour $\lambda < \kappa$, nous supposons que δ a été prolongé en un fibré relatif ω_λ au-dessus de L_λ et que ω_λ est trivial au-dessus des ensembles d'un recouvrement ouvert $\{U^{(\lambda)}\}$ de L_λ , ayant la propriété que $U^{(\lambda)} \cap \sigma_\nu \neq \emptyset$ pour un nombre fini seulement de $\nu \in \Lambda$. Nous supposons de plus que, pour tout $U^{(\lambda)}$ et pour tout $\mu > \lambda$, on a

$$U^{(\lambda)} \subset L_\lambda - (\partial\sigma_\mu - \overset{\circ}{D}_{\sigma_\mu}) \text{ ou } U^{(\lambda)} \subset L_\lambda - (\partial\sigma'_\mu - \overset{\circ}{D}'_{\sigma'_\mu}).$$

Soit $U^{(\lambda)} \cap \sigma_{\nu_i} \neq \emptyset$ et $\lambda < \nu_i < \kappa$ pour $i = 1, 2, \dots, m$. En faisant la construction c) successivement pour les simplexes $\sigma_{\nu_1}, \dots, \sigma_{\nu_m}$ on obtient, à partir de $U^{(\lambda)}$, une famille $\{U_j^{(\lambda)}\}$ d'ensembles qui sont ouverts dans $K^{k-1} \cup \bigcup_{\nu < \kappa} \sigma_\nu = M_\kappa$. $\mathfrak{U} = \bigcup_{\lambda < \kappa} \{U_j^{(\lambda)}\}$ est alors un recouvrement ouvert de M_κ et il existe un espace fibré relatif δ_κ au-dessus de M_κ dont l'espace total est $\bigcup_{\lambda < \kappa} E(\omega_\lambda)$ et qui est trivial au-dessus de chaque élément de \mathfrak{U} .

De plus, pour tout $\mu \geq \kappa$ et tout $U_j^{(\lambda)}$ de \mathfrak{U} on a

$$U_j^{(\lambda)} \subset M_\kappa - (\partial\sigma_\mu - \overset{\circ}{D}_{\sigma_\mu}) \text{ ou } U_j^{(\lambda)} \subset M_\kappa - (\partial\sigma'_\mu - \overset{\circ}{D}'_{\sigma'_\mu}).$$

En appliquant la construction c) au simplexe σ_κ et au recouvrement \mathfrak{U} on obtient un recouvrement $\{U^{(\kappa)}\}$ de L_κ tel que, pour tout $\mu > \kappa$,

$$U^{(\kappa)} \subset L_\kappa - (\partial\sigma_\mu - \overset{\circ}{D}_{\sigma_\mu}) \text{ ou } U^{(\kappa)} \subset L_\kappa - (\partial\sigma'_\mu - \overset{\circ}{D}'_{\sigma'_\mu})$$

et que $U^{(\kappa)} \cap \sigma_\nu \neq \emptyset$ pour un nombre fini seulement de $\nu \in \Lambda$. De plus, cette construction prolonge δ_κ en un fibré topologique relatif ω_κ de fibre $(R^n, D^n, \{0\})$ au-dessus de L_κ .

Par récurrence transfinitie, on obtient ainsi un fibré topologique

relatif ω de fibre $(R^n, D^n, \{0\})$ au-dessus de K qui est contenu dans ζ , tel que $E(\omega) = E(\zeta)$. Ceci démontre la proposition 3.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.

Si la conjecture annulaire paramétrisée $AP_{k,n}$ est vraie pour tout couple $(k,n) \in (N \cup \{0\}) \times N$, on a $J_n = \mathbf{G}_n$ pour tout $n \in N$ d'après la proposition 1 et $J_n^\partial = \mathbf{G}_n^\partial$ pour tout $n \in N$ d'après la proposition 2. Il suit alors de la proposition 3 que tout fibré topologique ξ de fibre $(R^n, \{0\})$ au-dessus d'un complexe localement fini K contient un fibré topologique relatif η de fibre $(R^n, D^n, \{0\})$. Si $f_\lambda: U_\lambda \times R^n \rightarrow E(\eta|U_\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, sont les trivialisations relatives de η , alors $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(U_\lambda \times D^n) \subset E(\eta)$ est l'espace total d'un fibré topologique ζ de fibre $(D^n, \{0\})$ contenu dans ξ , ayant les trivialisations $f_\lambda|U_\lambda \times D^n$.

Mais l'existence d'un tel fibré ζ est en contradiction avec un théorème de W. Browder [3, theorem 1] qui assure l'existence d'un complexe fini L et d'un fibré topologique de fibre $(R^n, \{0\})$ au-dessus de L qui ne contient pas de fibré topologique de fibre $(D^n, \{0\})$.

La conjecture annulaire paramétrisée $AP_{k,n}$ est donc fautive pour au moins un couple $(k,n) \in (N \cup \{0\}) \times N$.

CHAPITRE II

LES AUTOMORPHISMES DES MICROFIBRÉS STABLES

Ce chapitre contient le théorème 2 selon lequel la stabilité locale et la stabilité globale des germes d'automorphismes des microfibrés stables sont des propriétés équivalentes. On obtient le corollaire que tout germe d'automorphismes stables peut s'écrire sous une forme canonique : comme produit de deux germes d'automorphismes dont chacun est l'identité dans un voisinage ouvert d'un point de la section zéro.

2.0. Notations

Soit \mathfrak{M}_0 la catégorie des données fibrées topologiques (E, B, i, j) , dont les morphismes $f: (E, B, i, j) \rightarrow (E', B', i', j')$ sont les applications continues de E dans E' qui sont compatibles avec les projections $j: E \rightarrow B$, $j': E' \rightarrow B'$ et les sections $i: B \rightarrow E$, $i': B' \rightarrow E'$. Soit \mathfrak{M} la catégorie des microfibrés topologiques et de leurs germes d'homéomorphismes fibrés [18]. La première partie de ce chapitre se situe dans la catégorie \mathfrak{M}_0 , la deuxième dans la catégorie \mathfrak{M} . Dans ce qui suit, la base des objets de \mathfrak{M}_0 sera toujours une variété topologique connexe M de dimension m . La base des objets de \mathfrak{M} sera de plus *stable* dans le sens de M. Brown et H. Gluck [6].

Soit U une partie ouverte et connexe de M . On note $G(M, U; n)$ le groupe des automorphismes de la donnée fibrée triviale $(M \times R^n, M, \times 0, \text{pr}_1)$, qui appliquent $U \times R^n$ sur lui-même. On appellera g un *élément spécial* de $G(M, U; n)$ s'il existe une partie ouverte V de $U \times R^n$ telle que

$$V \cap (U \times \{0\}) \neq \emptyset \text{ et } g|_V = \text{id}.$$

Soit $SG(M, U; n)$ le sous-groupe normal de $G(M, U; n)$ qui est engendré par les éléments spéciaux de G . Nous dirons que les éléments de $SG(M, U; n)$ sont des automorphismes (*globalement*) *stables* dans $U \times R^n$ (comparer [6]). Soit $SG_0(M, U; n)$ le sous-groupe des éléments de $SG(M, U; n)$ qui sont égaux à l'identité en dehors d'une partie $K \times R^n$ de $U \times R^n$, K compact dans U . On note $G(M, M; n)$ par $G(M; n)$, $SG(M, M; n)$ par $SG(M; n)$, $G(R^m; n)$ par $G_{m, n}$, $SG(R^m; n)$ par $SG_{m, n}$.

A ces définitions dans \mathfrak{M}_0 correspondent les définitions suivantes dans \mathfrak{M} : soit \mathfrak{x} un microfibré topologique donné par (E, M, i, j) . Soit $\mathfrak{G}(\mathfrak{x})$ le groupe des germes d'homéomorphismes, c'est-à-dire des automorphismes

topologiques de \mathcal{X} qui induisent l'identité sur la base M . Si \mathcal{X} est le micro-fibré trivial $(M \times R^n, M, \times 0, pr_1)$, on note $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ par $\mathcal{G}(M; n)$. On appelle g un élément *spécial* de $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ s'il existe un point p dans $i(M)$ et s'il existe pour chaque représentant de g un voisinage ouvert de p dans E où ce représentant est égal à l'identité. Soit $\mathcal{S}\mathcal{G}(\mathcal{X})$ (ou $\mathcal{S}\mathcal{G}(M; n)$) le sous-groupe normal de \mathcal{G} qui est engendré par les éléments spéciaux ; on l'appellera le groupe des *automorphismes stables* du microfibré \mathcal{X} . Soit $\mathcal{S}\mathcal{G}_0(\mathcal{X})$ le sous-groupe des éléments de $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ qui sont égaux à l'identité en dehors de $j^{-1}(K)$, où K est une partie compacte de M .

2.1. L'équivalence annulaire et l'équivalence stable des boules fibrées

Pour démontrer le théorème 2 on doit résoudre le problème suivant : Peut-on modifier un élément $g \in SG(M; n)$ de telle manière que g reste inchangé dans un voisinage d'un point de $M \times \{0\}$ et que g se transforme en l'identité en dehors d'un produit $K \times R^n$, K compact dans M ? Dans ce but, on regarde l'opération de $SG(M; n)$ sur les boules fibrées dans $M \times R^n$.

Soit $\text{Hom}(D^m, M)$ l'ensemble des plongements de la boule unité D^m de R^m dans M qui appliquent le bord S^{m-1} de D^m de façon localement plate (comparer [5], [6]). Soit $\text{Hom}_0(D^m, M)$ le sous-ensemble de $\text{Hom}(D^m, M)$ formé des plongements qui appliquent 0 sur 0.

DÉFINITION 3. Soit U dans M comme dans 2.0. On note $\text{Fib}(M, U; n)$ l'ensemble des plongements $f: D^m \times D^n \rightarrow U \times R^n$ qui s'écrivent sous la forme

$$f = g \circ (p \times q) \quad \text{où } p \in \text{Hom}(D^m, M), \quad q \in \text{Hom}_0(D^n, R^n), \quad g \in G(M; n).$$

(On écrit $f(x, y) = (\hat{f}(x), \bar{f}(x, y))$.)

Si V est ouvert et connexe dans U , on a

$$\text{Fib}(M, V; n) \subset \text{Fib}(M, U; n) \subset \text{Fib}(M; n).$$

Le groupe $G(M, U; n)$ opère sur les éléments de $\text{Fib}(M, U; n)$.

Remarque concernant la factorisation de boules fibrées :

Soit $f: D^m \times D^n \rightarrow M \times R^n$ un plongement fibré tel que $\bar{f}(x, 0) = 0$. On pose $\hat{f}(D^m) = A$ et on définit

$$f_1 : A \times D^n \rightarrow A \times R^n \quad \text{par } f_1(a, y) = (a, \bar{f}(\hat{f}^{-1}(a), y)).$$

En introduisant un paramètre dans un théorème de M. Brown [4], on peut

prolonger f_1 en un plongement fibré f_2 de $A \times R^n$ dans $A \times R^n$. Si U est un voisinage ouvert assez petit de $A \times S^{n-1}$ dans $A \times R^n$, on peut prolonger $f_2|_U$ en un homéomorphisme fibré g_1 de $A \times R^n$ sur lui-même grâce au théorème de Schönflies paramétrisé de M. Morse et W. Huebsch [20]. De plus, on peut prolonger $g_1^{-1} \circ f_1$ en un homéomorphisme g_2 de $A \times R^n$ sur lui-même. On pose $g = g_1 \circ g_2$. Avec l'inclusion $i: A \times R^n \subset M \times R^n$ on obtient alors

$$f = i \circ f_1 \circ (f \times 1) = i \circ g \circ (f \times 1).$$

Soient $p, p' \in \text{Hom}(D^m, M)$. D'après [6, II], on dit que p, p' sont strictement équivalents de façon annulaire, $p \underset{A}{\sim} p'$ ou $p' \underset{A}{\sim} p$, si $p(D^m) \subset p'(D^m)$ et s'il existe un plongement $F: S^{m-1} \times I \rightarrow M$ tel que

$$F(s, 0) = p(s), \quad F(s, 1) = p'(s), \quad s \in S^{m-1}.$$

p, p' sont équivalents de façon annulaire, $p \underset{a}{\sim} p'$, s'il existe une suite finie $p_\kappa \in \text{Hom}(D^m, M)$, $\kappa = 1, \dots, k$, telle que

$$p = p_1 \underset{A}{\sim} p_2 \underset{A}{\sim} \dots \underset{A}{\sim} p_k = p'.$$

L'équivalence annulaire est une vraie relation d'équivalence.

DÉFINITION 4. Soient $q, q' \in \text{Hom}_0(D^n, R^n)$. On dit que q, q' sont strictement isotopes, $q \underset{J}{\sim} q'$ ou $q' \underset{J}{\sim} q$, s'il existe une isotopie $J: (D^n \times I, \{0\} \times I) \rightarrow (R^n, \{0\})$ telle que

$$J|_{D^n \times \{0\}} = q, \quad J|_{D^n \times \{1\}} = q'$$

et telle que $J|_{S^{n-1} \times I}$ induit une équivalence annulaire stricte $q \underset{A}{\sim} q'$.

On écrit $q \underset{i}{\sim} q'$ s'il existe une suite finie $q_\lambda \in \text{Hom}_0(D^n, R^n)$, $\lambda = 1, \dots, l$, telle que $q = q_1 \underset{J}{\sim} q_2 \underset{J}{\sim} \dots \underset{J}{\sim} q_l = q'$; en particulier q, q' sont alors isotopes, $q \underset{a}{\sim} q'$ et i est une relation d'équivalence.

DÉFINITION 5. On dit que $f, f' \in \text{Fib}(M, U; n)$ sont strictement équivalents de façon annulaire dans $U \times R^n$, s'il existe $g \in G(M; n)$, $p, p' \in \text{Hom}(D^m, \tilde{g}^{-1}(U))$ et $q, q' \in \text{Hom}_0(D^n, R^n)$ ayant les propriétés :

- (i) $f = g \circ (p \times q)$, $f' = g \circ (p' \times q')$,
- (ii) $p \underset{a}{\sim} p'$ dans $\tilde{g}^{-1}(U)$,
- (iii) $q \underset{i}{\sim} q'$ dans R^n .

Dans ce cas nous écrivons $f \underset{A}{\sim} f'$.

f, f' sont équivalents de façon annulaire dans $U \times R^n$ s'il existe une suite finie $f_\kappa \in \text{Fib}(M, U; n)$, $\kappa = 1, \dots, k$, telle que

$$f = f_1 \underset{A}{\approx} f_2 \underset{A}{\approx} \dots \underset{A}{\approx} f_k = f'$$

dans $U \times R^n$. On écrit $f \underset{A}{\approx} f'$. L'équivalence annulaire d'éléments de $\text{Fib}(M, U; n)$ dans $U \times R^n$ est une relation d'équivalence.

On note $\text{Fib}_\alpha(M, U; n)$ l'ensemble des classes d'équivalence annulaire de $\text{Fib}(M, U; n)$. On introduira maintenant une deuxième relation d'équivalence dans $\text{Fib}(M, U; n)$ et on démontrera qu'elle induit la même partition de $\text{Fib}(M, U; n)$.

DÉFINITION 6. On dit que $f, f' \in \text{Fib}(M, U; n)$ sont *stablement équivalents* dans $U \times R^n$ s'il existe un élément $h \in \text{SG}(M, U; n)$ tel que $hf' = f$. On écrit $f \underset{s}{\approx} f'$ et on note $\text{Fib}_s(M, U; n)$ l'ensemble des classes d'équivalence stable.

LEMME 1. Soit $f \in \text{Fib}(M, U; n)$ et soit V ouvert dans $U \times R^n$ tel que $V \cap U \times \{0\} \neq \emptyset$. Il existe alors un élément $f' \in \text{Fib}(M, U; n)$ tel que $f'(D^m \times D^n) \subset V$ et $f \underset{A}{\approx} f'$ dans $U \times R^n$.

DÉMONSTRATION. Soit $f = g \circ (p \times q)$ et soit $A \times B$ une partie ouverte de $g^{-1}(V) \subset g^{-1}(U) \times R^n$, telle que $0 \in B$. D'après [6, II, lemme 3.1], il existe un $p_1 \in \text{Hom}(D^m, g^{-1}(U))$ tel que $p \underset{a}{\sim} p_1$ dans $g^{-1}(U)$ et $p_1(D^m) \subset A$; on utilise ici le fait que U est connexe. Comme $q(0) = 0 \in R^n$, il existe une petite boule fermée de rayon $c > 0$ autour de 0 dans D^n telle que $q(D_c^n) \subset B$. On définit une isotopie $J: D^n \times I \rightarrow D^n$ par $J(x, t) = x \cdot (tc - t + 1)$ pour $x \in D^n$, $t \in I$; elle a les propriétés

$$J|_{D^n \times \{0\}} = \text{id} \text{ et } J|_{(D^n \times \{1\})} = D_c^n,$$

et $J|_{S^{n-1} \times I}$ est un plongement dans D^n . Il en résulte que $q_t = q \circ J_t: D^n \rightarrow R^n$ est une isotopie telle que $q_0 = q$, $q_1(D^n) \subset B$, donc $q \underset{J}{\sim} q_1$ dans R^n , $(p_1 \times q_1)(D^m \times D^n) \subset A \times B$, d'où

$g \circ (p_1 \times q_1)(D^m \times D^n) \subset V$ et $g \circ (p \times q) \underset{A}{\approx} g \circ (p_1 \times q_1)$
dans $U \times R^n$.

PROPOSITION 4. Si les plongements $f, f' \in \text{Fib}(M, U; n)$ sont stablement équivalents dans $U \times R^n$, ils sont aussi équivalents de façon annulaire dans $U \times R^n$.

DÉMONSTRATION

a) Soit $h \in SG(M, U; n)$ égal à l'identité sur l'ensemble ouvert

$$V \subset U \times R^n, \quad V \cap (U \times \{0\}) \neq \emptyset,$$

et soit $f = g \circ (p \times q)$, $f' = h \circ f$. D'après le lemme 1, il existe alors un élément $f_1 \in \text{Fib}(M, U; n)$ tel que $f_1(D^m \times D^n) \subset V$ et $f \underset{A}{\approx} f_1$ dans $U \times R^n$.

Il en résulte que $h \circ f \underset{A}{\approx} h \circ f_1$ dans $U \times R^n$, car, si $f_1 = g \circ (p_1 \times q_1)$, la relation $p_1 \underset{\alpha}{\sim} p$ dans $\dot{g}^{-1}(U)$ entraîne que $p_1 \underset{\alpha}{\sim} p$ dans $(\dot{h} \circ \dot{g})^{-1}(U) = \dot{g}^{-1}(U)$.

On obtient donc

$$f \underset{A}{\approx} f_1 = h \circ f_1 \underset{A}{\approx} h \circ f$$

dans $U \times R^n$, ou $f \underset{\alpha}{\approx} h \circ f$ dans $U \times R^n$.

b) Soit h le produit $h_k \circ \dots \circ h_1$ des éléments spéciaux $h_k \in SG(M, U; n)$ qui sont égaux à l'identité sur $V_k \subset U \times R^n$. D'après a) on a

$$f \underset{\alpha}{\approx} h_1 \circ f \underset{\alpha}{\approx} h_2 \circ h_1 \circ f \underset{\alpha}{\approx} \dots \underset{\alpha}{\approx} h_k \circ \dots \circ h_1 \circ f = h \circ f$$

dans $U \times R^n$, d'où $f \underset{\alpha}{\approx} h \circ f$ dans $U \times R^n$.

PROPOSITION 5. Soient $f, f' \in \text{Fib}(M, U; n)$ équivalents de façon annulaire dans $U \times R^n$. Ils sont alors aussi stablement équivalents dans $U \times R^n$; en outre, il existe un homéomorphisme stable H de $SG_0(M, U; n)$ tel que $H \circ f = f'$.

DÉMONSTRATION

a) Soit d'abord $f \underset{A}{\approx} f' \in \text{Fib}(M, U; n)$ dans $U \times R^n$ par rapport aux représentations $f = g \circ (p \times q)$, $f' = g \circ (p' \times q')$. Comme $p \underset{\alpha}{\sim} p'$ dans $\dot{g}^{-1}(U)$, il résulte de [6, II, theorem 5.2, corollary] qu'il existe un homéomorphisme $\varphi \in SH_0(\dot{g}^{-1}(U))$ tel que $p' = \varphi \circ p$; φ est alors l'identité en dehors d'une partie compacte de $\dot{g}^{-1}(U)$ et on peut prolonger φ par l'identité en un homéomorphisme φ de M sur M . En outre, on a $q \underset{i}{\sim} q'$ dans R^n ; il existe donc $q_k \in \text{Hom}_0(D^n, R^n)$ tels que

$$q = q_1 \underset{j}{\sim} q_2 \underset{j}{\sim} \dots \underset{j}{\sim} q_k = q'$$

Supposons que $q_2(D^n) \subset q_1(\overset{\circ}{D}^n)$. D'après [5] il existe des couronnes \tilde{p} et \tilde{q}_1 pour p et pour q_1 , c'est-à-dire des plongements (localement plats)

$$\tilde{p}: D^m \cup S^{m-1} \times I \rightarrow \dot{g}^{-1}(U) \quad \text{et} \quad \tilde{q}_1: D^n \cup S^{n-1} \times I \rightarrow R^n$$

tels que $\tilde{p}|_{D^m} = p$, $\tilde{q}_1|_{D^n} = q_1$.

On construit alors un homéomorphisme fibré $h_1 \in SG_0(M, \dot{g}^{-1}(U); n)$ ayant les propriétés suivantes :

- (i) $h_1 \circ (p \times q_1) = p \times q_2,$
- (ii) $h_1 | (M \times R^n - Im(\tilde{p} \times \tilde{q}_1)) = id.$

Soit $J : D^n \times I \rightarrow R^n$ une isotopie stricte (définition 4) telle que $J_0 = q_2,$ $J_1 = q_1.$ On définit alors h_1 par :

$$\begin{aligned}
 h_1(p(x), q_1(y)) &= (p(x), q_2(y)) && \text{pour } (x, y) \in D^m \times D^n, \\
 h_1(p(x), \tilde{q}_1(y, t)) &= (p(x), \tilde{q}_1(y, 2t-1)) && \text{pour } (x, y) \in D^m \times S^{n-1} \text{ et } t \in [\frac{1}{2}, 1], \\
 h_1(p(x), \tilde{q}_1(y, t)) &= (p(x), J(y, 2t)) && \text{pour } (x, y) \in D^m \times S^{n-1} \text{ et } t \in [0, \frac{1}{2}], \\
 h_1(\tilde{p}(x, s), q_1(y)) &= (\tilde{p}(x, s), J(y, s)) && \text{pour } (x, y) \in S^{m-1} \times D^n \text{ et } s \in I, \\
 h_1(\tilde{p}(x, s), \tilde{q}_1(y, t)) &= (\tilde{p}(x, s), J(y, 2t+s)) && \text{pour } (x, y) \in S^{m-1} \times S^{n-1} \text{ et } s \in I, \\
 &&& 0 \leq t \leq (1-s)/2, \\
 h_1(\tilde{p}(x, s), \tilde{q}_1(y, t)) &= (\tilde{p}(x, s), \tilde{q}_1(y, (2t+s-1)/(1+s))) && \\
 &&& \text{pour } (x, y) \in S^{m-1} \times S^{n-1} \text{ et } s \in I, (1-s)/2 \leq t \leq 1, \\
 h_1 | (M \times R^n - Im(\tilde{p} \times \tilde{q}_1)) &= id.
 \end{aligned}$$

h_1 ainsi défini a les propriétés :

$$h_1(p(x), 0) = (p(x), 0) \text{ pour } (x, y) \in D^m \times D^n$$

et

$$h_1(\tilde{p}(x, s), 0) = (\tilde{p}(x, s), J(0, s)) = (\tilde{p}(x, s), 0).$$

L'homéomorphisme composé $(\varphi \times 1) \circ h_1$ applique $\dot{g}^{-1}(U) \times R^n$ sur lui-même. Il en résulte que $g \circ (\varphi \times 1) \circ h_1 \circ g^{-1}$ applique $U \times R^n$ sur lui-même et est égal à l'identité sur $M \times R^n - K_1 \times R^n$, où K_1 est compact dans U .

De la même manière, on construit des homéomorphismes $h_\kappa \in SG_0(M, \dot{g}^{-1}(U); n), \kappa = 2, \dots, k-1,$ tels que $h_\kappa \circ (p \times q_\kappa) = p \times q_{\kappa+1},$ appliquant $\dot{g}^{-1}(U) \times R^n$ sur lui-même et qui sont égaux à l'identité en dehors de $K_\kappa \times R^n$, où K_κ est compact dans $\dot{g}^{-1}(U)$. On pose alors

$$h = g \circ (\varphi \times 1) \circ h_{k-1} \circ \dots \circ h_1 \circ g^{-1};$$

h est un élément de $SG_0(M, U; n)$ tel que $h \circ f = f'.$

b) Si $f \approx_{\tilde{A}} f'$ dans $Fib(M, U; n)$ et si

$$f = f_1 \underset{\tilde{A}}{\approx} f_2 \underset{\tilde{A}}{\approx} \dots \underset{\tilde{A}}{\approx} f_l = f',$$

on obtient comme dans a) des homéomorphismes $h_\lambda, \lambda = 1, \dots, l-1,$ tels que $h_\lambda \circ f_\lambda = f_{\lambda+1}$ et on pose $H = h_{l-1} \circ \dots \circ h_1, H \in SG_0(M, U; n).$

On résume les propositions 4 et 5 dans la

PROPOSITION 6. *Deux éléments de $\text{Fib}(M, U; n)$ sont équivalents de façon annulaire dans $U \times R^n$ si et seulement s'ils sont stablement équivalents dans $U \times R^n$. Si f, f' de $\text{Fib}(M, U; n)$ sont stablement équivalents dans $U \times R^n$, il existe un homéomorphisme $H \in \text{SG}_0(M, U; n)$ tel que $H \circ f' = f$.*

Nous avons démontré que $\text{Fib}_\alpha(M, U; n) = \text{Fib}_s(M, U; n)$. De plus, une équivalence annulaire de deux éléments de $\text{Fib}_\alpha(M, U; n)$ dans $U \times R^n$ entraîne la même propriété dans $M \times R^n$. Il résulte alors de la proposition 6 que l'inclusion $j: U \times R^n \subset M \times R^n$ induit une application

$$j_*: \text{Fib}_s(M, U; n) \rightarrow \text{Fib}_s(M; n).$$

Il résulte du lemme 1 que j_* est une application surjective. On démontrera maintenant que $\text{Fib}_s(M; n)$ possède une propriété d'*excision*.

PROPOSITION 7. *Si E est une boule fermée de dimension m dans M dont le bord est localement plat, alors*

$$j_*: \text{Fib}_s(M, (M-E); n) \rightarrow \text{Fib}_s(M; n)$$

est une bijection.

DÉMONSTRATION. Soient $f, f' \in \text{Fib}(M, M-E; n)$ équivalents (de façon annulaire) dans $\text{Fib}(M; n)$.

Il existe alors $g \in G(M; n)$, $p, p' \in \text{Hom}(D^m, \dot{g}^{-1}(M-E)) = \text{Hom}(D^m, M-\dot{g}^{-1}(E))$, $q, q' \in \text{Hom}_0(D^n, R^n)$ tels que

$$f = g \circ (p \times q), \quad f' = g \circ (p' \times q')$$

et $p \underset{\alpha}{\sim} p'$ dans M , $q \underset{i}{\sim} q'$ dans R^n . D'après [6, II, theorem 6.1], on a même $p \underset{\alpha}{\sim} p'$ dans $M-\dot{g}^{-1}(E)$, donc $f \underset{A}{\approx} f'$ dans $(M-E) \times R^n$.

La proposition suivante caractérise les automorphismes (globalement) stables d'une donnée fibrée triviale; elle correspond à la proposition [6, II, 6.2) pour les variétés topologiques.

PROPOSITION 8. *Soit h un homéomorphisme de $\text{SG}(M; n)$, $f: D^m \times D^n \rightarrow M \times R^n$ un plongement de $\text{Fib}(M; \dot{n})$, E une boule (localement plate au bord) de dimension m dans M . Si l'intersection de $\text{pr}_1(f(D^m \times D^n) \cup hf(D^m \times D^n))$ avec E dans M est vide, il existe un élément $h' \in \text{SG}(M; n)$ qui coïncide avec h sur $f(D^m \times D^n)$ et qui est égal à l'identité sur $E \times R^n$.*

DÉMONSTRATION. f et hf sont stablement équivalents dans $M \times R^n$. D'après la proposition 7 ils ont la même propriété dans $(M-E) \times R^n$. D'après la proposition 6 il existe un homéomorphisme stable $h_0 \in SG_0(M, (M-E); n)$ tel que $h_0 \circ f = h \circ f$. h_0 est égal à l'identité en dehors d'un produit $K \times R^n$ dans $(M-E) \times R^n$, donc en particulier sur $E \times R^n$.

PROPOSITION 9. Soit $h \in SG(M, U; n)$ tel que $\dot{h}|U = \text{id}$. Alors h est le produit de deux éléments spéciaux $h_i \in SG(M, U; n)$ tels que $\dot{h}_i|U = \text{id}$.

DÉMONSTRATION. D'après la proposition 8 il existe des éléments spéciaux $g_i \in SG(M; n)$, $i = 1, 2$, et dans $U \times R^n$ des voisinages ouverts $P_i \times Q_i$ de points de $U \times \{0\}$ tels que $h = g_1 \circ g_2$ et $g_i|P_i \times Q_i = \text{id}$. On pose

$$h_1 = g_1 \circ (\dot{g}_2 \times 1), \quad h_2 = (\dot{g}_2^{-1} \times 1) \circ g_2.$$

On a alors $h = h_1 \circ h_2$, $\dot{h}_2 = \text{id}$ et $\dot{h}_1|U = \dot{h}|U = \text{id}$. Comme $g_2|P_2 \times Q_2 = \text{id}$, on a $\dot{g}_2|P_2 = \text{id}$, d'où $h_2|P_2 \times Q_2 = \text{id}$. De plus on déduit, de $g_2|U = \dot{g}_2^{-1}|U$ et de $g_1|P_1 = \text{id}$, que

$$\dot{g}_2|P_1 = \text{id}, \quad (\dot{g}_2 \times 1)|P_1 \times Q_1 = \text{id} \quad \text{et} \quad h_1|P_1 \times Q_1 = \text{id}.$$

COROLLAIRE. Soit $h \in SG(M, U; n)$ tel que $\dot{h} = \text{id}$. h est alors le produit de deux éléments spéciaux $h_i \in SG(M, U; n)$ tels que $\dot{h}_i = \text{id}$.

PROPOSITION 10. Soient $f, f' \in \text{Fib}(M, U; n)$ et soit $h \in SG(M, U; n)$ un homéomorphisme stable tel que $h \circ f = f'$ et $\dot{h}|U = \text{id}$. Il existe alors un élément $h_0 \in SG_0(M, U; n)$ tel que $\dot{h}_0 = \text{id}$ et $h_0 \circ f = f'$.

DÉMONSTRATION

a) Soit d'abord $h \in SG(M, U; n)$ un élément spécial tel que $h|V = \text{id}$, et $f = g \circ (p \times q)$. D'après le lemme 1, il existe alors un élément $f_1 = g \circ (p_1 \times q_1) \in \text{Fib}(M, U; n)$ tel que $\text{Im } f_1 \subset V$ et que $f \underset{A}{\approx} f_1$ dans $U \times R^n$ par une isotopie stricte $q \underset{f}{\approx} q'$. Comme dans la démonstration de la proposition 5, on construit pour f, f_1 des homéomorphismes $\varphi \in SH_0(\dot{g}^{-1}(U))$ et $h_1 \in SG_0(M, \dot{g}^{-1}(U); n)$ ayant la propriété suivante :

Si on pose $g \circ (\varphi \times 1) \circ h_1 \circ g^{-1} = H$, on a $H \circ f = f_1$ et $H \in SG_0(M, U; n)$.

Il en suit que H^{-1} , $h \circ H^{-1} \circ h^{-1}$ et $h \circ H^{-1} \circ h^{-1} \circ H$ sont également des éléments de $SG_0(M, U; n)$ et $H \circ f = f_1 = h \circ f_1 = h \circ H \circ f$ entraîne

$$h \circ H^{-1} \circ h^{-1} \circ H \circ f = h \circ H^{-1} \circ h^{-1} \circ h \circ H \circ f = h \circ f.$$

Si on pose $h_0 = h \circ H^{-1} \circ h^{-1} \circ H$, il résulte de $\dot{h}|U = \text{id}$ que $\dot{h}_0|U = \text{id}$, donc $\dot{h}_0 = \text{id}$.

b) D'après la proposition 9, tout $h \in SG(M, U; n)$ tel que $\dot{h}|U = \text{id}$ est le produit de deux éléments spéciaux $h_i \in SG(M, U; n)$ tels que $\dot{h}_i|U = \text{id}$. D'après a) il existe un $(h_2)_0 \in SG_0(M, U; n)$ tel que $(h_2)_0 \circ f = h_2 \circ f$ et $(h_2)_0^* = \text{id}$, et un $(h_1)_0 \in SG_0(M, U; n)$ tel que

$$(h_1)_0 \circ (h_2)_0 \circ f = h_1 \circ (h_2)_0 \circ f = h_1 \circ h_2 \circ f = h \circ f \text{ et } (h_1)_0^* = \text{id}.$$

Il s'ensuit que :

$$h_0 = (h_1)_0 \circ (h_2)_0 \in SG_0(M, U; n) \text{ et } \dot{h}_0 = \text{id}.$$

2.2. Les microfibrés stables

DÉFINITION 7. Les isomorphismes (localement) stables des microfibrés triviaux.

a) *Cas spécial.* Soient U, V ouverts dans R^n . On dit qu'un isomorphisme $f: (U \times R^n, U, \times 0, \text{pr}_1) \rightarrow (V \times R^n, V, \times 0, \text{pr}_1)$ dans la catégorie des microfibrés topologiques est *stable au point* $x \in U$ si f contient un homéomorphisme F défini sur un voisinage ouvert E_U de $U \times \{0\}$ dans $U \times R^n$ qui coïncide dans un voisinage ouvert de $(x, 0)$ dans E_U avec un élément $g \in SG_{m, n}$.

On dit que f est (localement) *stable*, si f est stable dans tous les points de U . D'après cette définition, l'ensemble des points où f est stable est un ensemble ouvert.

b) *Exemples.*

(1) Soit $h: U \rightarrow V$ un homéomorphisme stable au point $x_0 \in U$ ([6]). h induit un homéomorphisme produit $h \times 1$ de $U \times R^n$ sur $V \times R^n$, donc aussi un isomorphisme de microfibrés topologiques triviaux. Comme h coïncide dans un voisinage ouvert U_0 de x_0 dans U avec un homéomorphisme stable $\gamma \in SH(R^m)$ (voir [6]), $h \times 1$ coïncide dans $U_0 \times R^n$ avec l'homéomorphisme $\gamma \times 1$ de $R^m \times R^n$.

(2) Soit encore $h: U \rightarrow V$ un homéomorphisme stable au point $x_0 \in U$. Soit σ l'homéomorphisme de $R^m \times R^m$ qui est défini par $\sigma(x, y) = (x, y + x)$. Soit $E_U = \sigma^{-1}(U \times U) \supset U \times \{0\}$, $E_V = \sigma(V \times V)$. Sur E_U on définit un homéomorphisme

$$F(x, y) = \sigma^{-1} \circ (h \times h) \circ \sigma(x, y) = (h(x), h(y + x) - h(x)),$$

donc aussi un isomorphisme f de microfibrés topologiques triviaux.

Or h coïncide dans U_0 avec un $\gamma \in SH(R^m)$, c'est-à-dire, pour $(x, y) \in \sigma^{-1}(U_0 \times U_0)$, on a $F(x, y) = (\gamma(x), \gamma(y+x) - \gamma(x))$. Si on pose

$$g(x, y) = (\gamma(x), \gamma(y+x) - \gamma(x)) \text{ pour tout } (x, y) \in R^m \times R^m,$$

on obtient $g \in SG_{m,m}$, car $\gamma = \gamma_r \circ \dots \circ \gamma_1$; avec $\gamma_\rho | U_\rho = \text{id}$, et si on pose

$$g_\rho(x, y) = (\gamma_\rho(x), \gamma_\rho(y+x) - \gamma_\rho(x)),$$

on a

$$g = g_r \circ \dots \circ g_1 \text{ et } g_\rho | \sigma^{-1}(U_\rho \times U_\rho) = \text{id}.$$

c) *Cas général.* Soient M et N des variétés stables de dimension m munies des structures stables \mathfrak{S} et \mathfrak{t} . On dit qu'un isomorphisme topologique au sens des microfibrés $f: (M \times R^n, M, \times 0, \text{pr}_1) \rightarrow (N \times R^n, N, \times 0, \text{pr}_1)$ est *localement stable au point* $x \in M$ s'il existe des cartes $\varphi: 0 \rightarrow U \subset M$ de \mathfrak{S} et $\psi: P \rightarrow V \subset N$ de \mathfrak{t} telles que $x \in U$, $\dot{f}(x) \in V$ et que l'isomorphisme au sens des microfibrés topologiques

$$(\psi^{-1} \times 1) \circ f \circ (\varphi \times 1) : (\varphi^{-1}(U \cap \dot{f}^{-1}(V)) \times R^n \rightarrow (\psi^{-1}(V \cap \dot{f}^{-1}(U))) \times R^n$$

est stable au point $\varphi^{-1}(x)$ dans le sens de la définition 7 a).

D'après cette définition, l'ensemble des points de M , où f est stable, est un ensemble ouvert. On dit que f est *localement stable* dans M si f est stable dans tous les points de M .

PROPOSITION 11. *L'isomorphisme f de la définition 7 a) est localement stable dans la composante connexe de x dans U .*

DÉMONSTRATION. D'après [16, §9, corollary], on peut représenter f par un homéomorphisme global F de $U \times R^n$ sur $V \times R^n$. Supposons que F n'est pas stable au point $x \in U$. Soit D^m une boule euclidienne de dimension m autour de $\dot{F}(x)$ dans V , D_1^m une boule euclidienne autour de x dans $\dot{F}^{-1}(D^m)$. Le bord de $\dot{F}(D_1^m)$ est alors localement plat dans $D^m \subset R^m$ et, d'après le théorème de Schönflies [4], il existe un homéomorphisme α de R^m sur lui-même qui applique $\dot{F}(D_1^m)$ sur D^m . On peut alors prolonger l'homéomorphisme $\alpha \circ \dot{F}: D_1^m \rightarrow D^m$ par extension radiale en un homéomorphisme F_1 de R^m sur lui-même et on a $\alpha^{-1} \circ F_1 | D_1^m = \dot{F} | D_1^m$. De plus, on peut prolonger l'inclusion $D_1^m \subset \dot{F}^{-1}(D^m)$ en un homéomorphisme β de R^m dans $\dot{F}^{-1}(D^m)$. On définit l'homéomorphisme H de $R^m \times R^n$ par

$$H(x, y) = (\alpha^{-1} \circ F_1(x), \bar{F}(\beta(x), y)).$$

Si $(x, y) \in D_1^m \times R^n$, $H(x, y) = F(x, y)$ et $H \in G_{m,n}$. Supposons que H est

stable en un point $x_1 \in \overset{\circ}{D}_1^m$; H coïncide donc dans un voisinage ouvert W de $(x_1, 0)$ avec un élément $g \in SG_{m,n}$. Mais

$$H = g \circ (g^{-1} \circ H) \quad \text{et} \quad g^{-1} \circ H|_W = \text{id},$$

donc $H \in SG_{m,n}$, et H et F sont stables en chaque point de $\overset{\circ}{D}_1^m$, donc aussi au point x , ce qui contredit la première supposition. Si F n'est pas stable au point x , F ne peut donc être stable en aucun point de $\overset{\circ}{D}_1^m$. On en déduit que l'ensemble des points où f n'est pas stable est un ensemble ouvert.

DÉFINITION 8. Microfibrés stables. Soit $\mathfrak{z} = (E, M, i, j)$ un microfibré topologique ayant pour base une variété stable de dimension m .

Soit $\{\varphi_\kappa : 0_\kappa \rightarrow U_\kappa \subset M\}$ un système de cartes stables de M tel que $h_\kappa : (U_\kappa \times R^n, U_\kappa, \times 0, \text{pr}_1) \rightarrow (E_{U_\kappa}, U_\kappa, i, j)$ soient des trivialisations locales de \mathfrak{z} .

On dit que \mathfrak{z} est un microfibré stable si, pour tout couple (U_κ, U_λ) de cartes avec $U_\kappa \cap U_\lambda \neq \emptyset$, l'automorphisme $h_{\lambda^{-1}} \circ h_\kappa$ du microfibré trivial $(U_\kappa \cap U_\lambda \times R^n, U_\kappa \cap U_\lambda, \times 0, \text{pr}_1)$ est stable au sens de la définition 7c).

EXEMPLE: Le microfibré tangent d'une variété stable. Soit $\mathfrak{t} = (M \times M, M, \Delta, \text{pr}_1)$ le microfibré tangent topologique d'une variété M muni d'un système $\{\varphi_\kappa : 0_\kappa \rightarrow U_\kappa \subset M\}$ de cartes stables. Les germes de trivialisations

$$h_\kappa : (U_\kappa \times R^n, U_\kappa, \times 0, \text{pr}_1) \rightarrow (U_\kappa \times M, U_\kappa, \Delta, \text{pr}_1)$$

sont définis par des homéomorphismes $H_\kappa(u, x) = (u, \varphi_\kappa(x + \varphi_\kappa^{-1}(u)))$. On vérifie que le germe $h_{\lambda^{-1}} \circ h_\kappa$ d'homéomorphismes du microfibré trivial $(U_\kappa \cap U_\lambda \times R^m, U_\kappa \cap U_\lambda, \times 0, \text{pr}_1)$ qui contient l'homéomorphisme

$$H_{\lambda^{-1}} \circ H_\kappa(u, x) = (u, \varphi_{\lambda^{-1}} \circ \varphi_\kappa(x + \varphi_\kappa^{-1}(u)) - \varphi_{\lambda^{-1}}(u))$$

est localement stable: $\varphi_{\lambda^{-1}} \circ \varphi_\kappa$ coïncide dans une partie ouverte O de $\varphi_{\lambda^{-1}}(U_\kappa \cap U_\lambda)$ avec un $\gamma \in SH(R^m)$; $g(x, \gamma) = (\gamma(x), \gamma(\gamma + x) - \gamma(x))$ coïncide dans un voisinage ouvert de $O \times \{O\}$ dans $\varphi_{\lambda^{-1}}(U_\kappa \cap U_\lambda) \times R^m$ avec $(\varphi_{\lambda^{-1}} \times 1) \circ H_{\lambda^{-1}} \circ H_\kappa \circ (\varphi_\kappa \times 1)$ et $g \in SG_{m,m}$ (voir définition 7, exemples).

DÉFINITION 9. Les isomorphismes localement stables des microfibrés stables. Soient \mathfrak{z} et \mathfrak{z}' des microfibrés stables au-dessus des variétés stables M et M' de dimension m , munis des systèmes $\{\varphi_\kappa : 0_\kappa \rightarrow U_\kappa \subset M\}$ et $\{\psi_\lambda : P_\lambda \rightarrow V_\lambda \subset M'\}$ de cartes stables. Soient h_κ et h'_λ des trivialisations

tions stables de $\mathfrak{X}, \mathfrak{X}'$ au-dessus des cartes données. Soit finalement $f: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}'$ un isomorphisme au sens des microfibrés topologiques. On dit que f est *stable au point* $x \in M$, s'il existe des cartes $\varphi_\kappa: O_\kappa \rightarrow U_\kappa$ et $\psi_\lambda: P_\lambda \rightarrow V_\lambda$ telles que $x \in U_\kappa$, $f(x) \in V_\lambda$ et que l'isomorphisme

$$h_\lambda^{-1} \circ f \circ h_\kappa : (U_\kappa \cap f^{-1}(V_\lambda) \times R^n, U_\kappa \cap f^{-1}(V_\lambda), \times O, \text{pr}_1) \rightarrow (f(U_\kappa) \cap V_\lambda \times R^n, f(U_\kappa) \cap V_\lambda, \times O, \text{pr}_1)$$

soit stable au point x dans le sens de la définition 7 c).

Cette définition ne dépend pas du choix des cartes U_κ, V_λ . L'ensemble des points de M , où f est stable, est un ensemble ouvert. D'où résulte, compte tenu de la proposition 11, la

PROPOSITION 12. *Si M est connexe, la stabilité locale de l'isomorphisme $f: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}'$ en un point de M entraîne la stabilité locale de f dans chaque point de M .*

On démontrera maintenant que la stabilité globale d'un automorphisme topologique du microfibré stable \mathfrak{X} (voir 2.0) a comme conséquence la stabilité locale.

Soit $f \in \mathcal{G}\mathcal{G}(\mathfrak{X})$ un automorphisme globalement stable du microfibré stable $\mathfrak{X} = (E, M^m, i, j)$ qui est égal à l'identité dans un voisinage ouvert W de $i(x)$ dans E . Soit $x \in U \subset M$ et soit $h: (U \times R^n, U, \times O, \text{pr}_1) \rightarrow (E_U, U, i, j)$ une trivialisat ion stable. $h^{-1} \circ f \circ h$ est alors un automorphisme du microfibré trivial $(U \times R^n, U, \times O, \text{pr}_1)$ qui contient un automorphisme global h' d'après [16]. Soit $\varphi: R^m \rightarrow U$ une carte de la structure stable de M .

$$(\varphi^{-1} \times 1) \circ h' \circ (\varphi \times 1) : R^m \times R^n \rightarrow R^m \times R^n$$

est alors un élément spécial de $SG_{m,n}$ et f est localement stable au point x . Il résulte alors de la proposition 12 :

PROPOSITION 13. *Tout automorphisme globalement stable d'un microfibré stable qui induit l'identité sur la base est localement stable.*

A l'aide des résultats du paragraphe 2.1 on peut aussi démontrer la réciproque :

PROPOSITION 14. *Tout automorphisme localement stable d'un microfibré stable qui induit l'identité sur la base est globalement stable.*

DÉMONSTRATION. Soit f un automorphisme localement stable du microfibré stable \mathfrak{X} de base M tel que $\dot{f} = \text{id}$ et soit h une trivialisatıon stable de \mathfrak{X} au-dessus d'une carte stable $\varphi : R^m \rightarrow U \subset M$. L'automorphisme $h^{-1} \circ f \circ h$ du microfibré trivial $(U \times R^n, U, \times, O, \text{pr}_1)$ est alors localement stable. Si F est un représentant de $h^{-1} \circ f \circ h$, $(\varphi^{-1} \times 1) \circ F \circ (\varphi \times 1)$ coıncide dans un voisinage ouvert $P \times Q$ d'un point $(\varphi^{-1}(x), O) \in R^m \times R^n$, $x \in U$ avec un élément $g \in SG_{m,n}$. On a donc $g|_P = \text{id}$ et $g \in SG(R^m, P; n)$. Soit $f_1 \in \text{Fib}(R^m, P; n)$ tel que

$$f_1(0,0) = (\varphi^{-1}(x), 0) \quad \text{et} \quad \text{Im } f_1 \subset P \times Q.$$

f_1 et $g \circ f_1$ sont alors stablement équivalents dans $P \times R^n$ et, d'après la proposition 9, il existe un $g_0 \in SG_0(R^m, P; n)$ tel que $\dot{g}_0 = \text{id}$ et $g_0 \circ f_1 = g \circ f_1$. D'où résulte que $f_0 = (\varphi \times 1) \circ g_0 \circ (\varphi^{-1} \times 1)$ est un automorphisme contenu dans $SG_0(U; n)$, tel que $\dot{f}_0 = \text{id}$, qui coıncide avec F dans la boule $(\varphi \times 1) \circ f_1$ autour de $(x, 0)$ et qui est égal à l'identité en dehors de $K \times R^n$, où K est une partie compacte de U . L'automorphisme $h \circ f_0 \circ h^{-1}$ de $\mathfrak{X}|_U$ coıncide donc dans un voisinage ouvert de $i(x)$ avec $f|(\mathfrak{X}|_U)$ et est égal à l'identité en dehors de $j^{-1}(K)$. On peut donc prolonger $h \circ f_0 \circ h^{-1}$ par l'identité en un automorphisme $f' \in (\mathcal{C}\mathcal{G}_0)(\mathfrak{X})$. Comme $f'^{-1} \circ f$ est égal à l'identité dans un voisinage ouvert de $i(x)$, $f = f' \circ (f'^{-1} \circ f)$ est globalement stable.

Les propositions 13 et 14 se résument dans le

THEOREME 2. *Tout automorphisme topologique d'un microfibré stable (qui induit l'identité sur la base) est globalement stable si et seulement s'il est localement stable.*

La démonstration de la proposition 14 permet d'énoncer le

COROLLAIRE. *Tout automorphisme stable d'un microfibré stable (qui induit l'identité sur la base) peut s'écrire comme produit de deux automorphismes dont chacun est égal à l'identité dans un voisinage ouvert d'un point de la section zéro.*

CHAPITRE III

LES MICROFIBRÉS STABLES-EN-CHAQUE-FIBRE ET LES ESPACES FIBRÉS STABLES

3.0. Comme il a été annoncé dans l'Introduction, nous étudions dans ce chapitre le rapport entre les microfibrés stables de fibre R^p au-dessus d'une variété stable M^m et les microfibrés « stables-en-chaque-fibre ». Ces derniers sont définis comme suit. Soit $SG_{m,p}$ le groupe des automorphismes stables de $R^m \times R^p$, défini au paragraphe 2.0; soit $SG_{m,p}^*$ le sous-groupe des éléments de $SG_{m,p}$ qui laissent fixe l'origine de $R^m \times R^p$. Un microfibré stable-en-chaque-fibre est alors essentiellement un microfibré topologique dont les limitations des germes de transformations de coordonnées à chaque fibre contiennent un élément de $SG_{m,p}^*$.

Dans le paragraphe 3.1 nous démontrons, à l'aide du théorème de Schönflies sous sa forme paramétrisée [20], que tout automorphisme « doublement fibré » du microfibré topologique trivial $(B \times R^m \times R^p, B, \times 0 \times 0, pr_1)$ au-dessus d'une base paracompacte contient un automorphisme global doublement fibré.

Soit $k_s^p(M^m)$ l'ensemble des classes d'équivalence stable des microfibrés stables au-dessus d'une variété stable M^m , où les équivalences des microfibrés sont les germes d'isomorphismes qui induisent l'identité sur la base. En outre, soit $K_s^{m+p}(M^m)$ l'ensemble des classes des microfibrés stables-en-chaque-fibre, qui est défini au paragraphe 3.2. Nous démontrons aux paragraphes 3.3 et 3.4 l'existence d'un couple d'applications

$$k_s^p(M^m) \begin{array}{c} \xleftarrow{S} \\ \xrightarrow{T} \end{array} K_s^{m+p}(M^m)$$

associé à une variété stable M^m . T est une injection et $S \circ T = id$.

Le paragraphe 3.5 contient le théorème 3 qui établit que tout microfibré stable-en-chaque-fibre au-dessus d'une variété topologique séparable et métrisable contient un « fibre bundle » de fibre $R^m \times R^p$ et de groupe $SG_{m,p}^*$ et un seul. La démonstration est une généralisation de la méthode de Kister [14]. Elle utilise le théorème 4 qui est contenu dans le paragraphe 3.6 et qui concerne une déformation du semi-groupe topologique des plongements fibrés et stables de $R^m \times R^p$ dans lui-même. L'application de la surjection S au résultat du paragraphe 3.5 nous donne l'existence d'un fibré stable dans chaque classe de microfibrés stables.

L'unicité de ce fibré stable est une conséquence du théorème 5 du paragraphe 3.7, où on considère le prolongement des fibrés topologiques de fibre R^p , qui sont contenus dans des microfibrés stables-en-chaque-fibre, en espaces fibrés de fibre R^{m+p} qui sont contenus dans les mêmes microfibrés; de plus, on utilise ici encore les propriétés de S et de T . Au paragraphe 3.8 nous donnons une version du théorème de relèvement des homotopies pour les couples formés par un microfibré stable-en-chaque-fibre de fibre $R^m \times R^p$ et un espace fibré de fibre R^p ; nous l'utilisons dans les paragraphes 3.5 et 3.7.

3.1. L'existence des automorphismes globaux doublement fibrés pour les microfibrés triviaux

Il a été démontré dans [16] et il suit aussi du théorème de Schönflies paramétrisé [20], que tout germe d'homéomorphismes d'un microfibré trivial contient un homéomorphisme fibré global. Dans ce travail nous avons besoin de représentants globaux des germes d'homéomorphismes « doublement fibrés »; ces germes sont les équivalences f d'un microfibré trivial topologique $(B \times (R^m \times R^p), B, \times 0 \times 0, \text{pr}_1)$ qui contiennent un homéomorphisme F ayant les propriétés suivantes: F est défini dans un voisinage U de la section zéro de $B \times (R^m \times R^p)$ et

$$(1) \quad \begin{aligned} \overline{F}(b, x, y) &= (b, \overline{F}(b, x), \overline{\overline{F}}(b, x, y)) \quad \text{pour tout } (b, x, y) \in U, \\ \overline{\overline{F}}(b, x, 0) &= 0 \quad \text{pour tout } (b, x, 0) \in U \cap (B \times R^m \times 0) = U_0. \end{aligned}$$

Pour ces équivalences doublement fibrées, on démontre la

PROPOSITION 15. Si B est paracompact, l'équivalence f contient un homéomorphisme global G de $(B \times (R^m \times R^p), B, \times 0 \times 0, \text{pr}_1)$ ayant les propriétés:

$$(2) \quad \begin{aligned} \overline{G}(b, x, y) &= (b, \overline{G}(b, x), \overline{\overline{G}}(b, x, y)) \quad \text{pour } (b, x, y) \in B \times R^m \times R^p, \\ \overline{\overline{G}}(b, x, 0) &= 0 \quad \text{pour } (b, x) \in B \times R^m. \end{aligned}$$

Dans la démonstration nous utilisons le théorème de Schönflies paramétrisé sous la forme suivante:

Soit B paracompact. Soit V un voisinage ouvert de $B \times S^{n-1}$ dans $B \times (R^n - \{0\})$. Soit $F: V \rightarrow B \times R^n$ un homéomorphisme fibré de V sur une partie ouverte de $B \times R^n$ tel que $\text{pr}_1 \circ F = \text{id}$, qui applique, dans chaque fibre, les points de la composante relativement compacte de $R^n - S^{n-1}$

dans des points de la composante relativement compacte de $R^n - F_b (S^{n-1})$. Il existe alors un homéomorphisme fibré H de $B \times R^n$ sur lui-même tel que $H|_{B \times S^{n-1}} = F|_{B \times S^{n-1}}$.

COROLLAIRE. Soit $F: (B \times D^n, B \times \{0\}) \rightarrow (B \times R^n, B \times \{0\})$ un plongement fibré qui peut être prolongé sur un voisinage ouvert V de $B \times S^{n-1}$ dans $B \times R^n$. On peut alors prolonger F en un homéomorphisme fibré de $B \times R^n$ sur lui-même.

DÉMONSTRATION DU COROLLAIRE. D'après le théorème de Schönflies, on associe à $F|(B \times (D^n - \{0\}))$ un homéomorphisme H . On peut alors prolonger $H^{-1} \circ F: B \times D^n \rightarrow B \times R^n$ en un automorphisme G de $B \times R^n$ tel que $H \circ G|_{B \times D^n} = F$.

Le lemme suivant servira également à la démonstration de la proposition 15.

LEMME 2. Soit B paracompact et soit U un voisinage ouvert de $B \times \{0\} \times \{0\}$ dans $B \times R^m \times R^p$. Il existe alors un automorphisme H de $B \times R^m \times R^p$ tel que :

$$(3) \quad \begin{aligned} H(b, x, y) &= (b, \bar{H}(b, x), \bar{\bar{H}}(b, x, y)), \\ \bar{H}(b, 0) &= 0 \quad \text{pour } b \in B, \\ \bar{\bar{H}}(b, x, 0) &= 0 \quad \text{pour } (b, x) \in B \times R^m, \\ H(B \times D^m \times D^p) &\subset U. \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Soit $U_0 = U \cap (B \times R^m \times \{0\})$. Il existe alors une application continue $\lambda: B \rightarrow (0, 1]$ telle que tous les couples $(b, x) \in B \times R^m$ avec $|x| < \lambda(b)$ soient contenus dans U_0 . On définit un homéomorphisme α de $B \times R^m$ sur un voisinage ouvert de $B \times \{0\}$ dans U_0 par :

$$\alpha(b, x) = (b, x \cdot \frac{\lambda(b)}{1 + |x|}).$$

D'après le corollaire du théorème de Schönflies, on peut prolonger $\alpha|_{B \times D^m}$ en un homéomorphisme fibré $\tilde{\alpha}$ de $B \times R^m$ sur $B \times R^m \times \{0\}$. $B \times D^m$ est paracompact et $U_1 = (B \times D^m \times R^p) \cap (\alpha^{-1} \times 1)(U)$ est un voisinage ouvert de $(B \times D^m) \times \{0\}$ dans $(B \times D^m) \times R^p$. Il existe alors une fonction continue $\mu: B \times D^m \rightarrow (0, 1]$ ayant la propriété que tout triple $(b, x, y) \in B \times D^m \times R^p$ tel que $|y| < \mu(b, x)$ est contenu dans U_1 . A l'aide de μ , on définit un homéomorphisme fibré β de $(B \times D^m) \times R^p$ dans $(\alpha(B \times D^m) \times R^p) \cap U$ par :

$$\beta(b, x, y) = (a(b, x), y) \cdot \frac{\mu(b, x)}{1 + |y|}.$$

On prolonge β en un plongement de $B \times R^m \times R^p$ dans lui-même en définissant:

$$\beta(b, x, y) = (\tilde{a}(b, x), y) \cdot \frac{\mu(b, x/|x|)}{1 + |y|} \quad \text{pour } |x| \geq 1.$$

Comme $B \times R^m$ est paracompact, on peut prolonger $\beta|_{(B \times R^m) \times D^p}$ d'après le corollaire du théorème de Schönflies en un automorphisme H de $B \times R^m \times R^p$ qui possède les propriétés (3).

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 15. Soit $F': U_0 \rightarrow B \times R^m$ l'homéomorphisme qui est défini par $F'(b, x) = (b, \bar{F}(b, x))$. Soit \tilde{a} défini comme dans la démonstration du lemme 2. $\tilde{a}^{-1}(U_0)$ est alors un voisinage ouvert de $B \times S^{m-1}$ dans $B \times R^m$ et, d'après le corollaire du théorème de Schönflies, on peut prolonger $F' \circ \tilde{a}|_{B \times D^m}$ en un automorphisme β de $B \times R^m$. Si H est l'automorphisme de $B \times R^m \times R^p$ du lemme 2, on peut prolonger $F \circ H: B \times D^m \times D^p \rightarrow B \times R^m \times R^p$ en un homéomorphisme β' de $B \times R^m \times D^p$ dans $B \times R^m \times R^p$ en posant:

$$\beta'(b, x, y) = (\beta(b, x), \text{pr}_3 \circ F \circ H(b, x/|x|, y)) \quad \text{pour } |x| \geq 1.$$

Soit $D_1^p \subset \overset{\circ}{D}^p$. D'après Schönflies, on peut alors prolonger $\beta'|_{B \times R^m \times D_1^p}$ en un automorphisme $\tilde{\beta}$ de $B \times R^m \times R^p$ tel que

$$(\text{pr}_1 \times \text{pr}_2) \circ \tilde{\beta}(b, x, y) = \beta(b, x).$$

Finalement $G = \tilde{\beta} \circ H^{-1}$ coïncide avec F dans $H(B \times D^m \times D_1^p)$ et possède les propriétés exigées dans la proposition 15.

3.2. La définition de $K_s^{m+p}(B)$.

Il est immédiat que le sous-groupe $SG_{m,p}^*$ de $SG_{m,p}$ qui a été défini dans 3.0 est engendré par les éléments spéciaux de $SG_{m,p}$ qui laissent fixe l'origine de $R^m \times R^p$; car, si $g \in SG_{m,p}^*$, la proposition 8 du chapitre 2 entraîne l'existence d'un élément $g_1 \in SG_{m,p}$ qui coïncide avec g dans un voisinage ouvert U de zéro dans $R^m \times R^p$ et qui est égal à l'identité dans un ensemble ouvert de la forme $V \times R^p$ séparé de U . On a donc

$$g = g_1 \circ (g_1^{-1} \circ g) \quad \text{et} \quad g_1(0) = g(0) = 0, \quad g_1^{-1} \circ g|_U = \text{id}.$$

$SG_{m,p}^*$ muni de la topologie de la convergence compacte est un

groupe topologique séparé de transformations de $R^m \times R^p$. La continuité de la symétrie $g \rightarrow g^{-1}$ sera démontrée au paragraphe 3.6, dans le corollaire du lemme 5 ; elle est une conséquence du fait que dans $SG_{m,p}^*$ la topologie de la convergence compacte est la même que la topologie de la convergence uniforme sur les ensembles compacts.

DÉFINITION 10. Soit B un espace topologique. On appellera *isomorphisme stable-en-chaque-fibre* tout homéomorphisme H d'un voisinage ouvert V de la section zéro dans $B \times (R^m \times R^p)$ sur un voisinage ouvert de la section zéro de $B \times (R^m \times R^p)$ qui a les propriétés suivantes :

(1) $H(b, x, y) = (\dot{H}(b), \bar{H}(b, x), \bar{\bar{H}}(b, x, y))$ pour tout $(b, x, y) \in V$, $\bar{H}(b, 0) = 0$ pour tout $b \in B$, $\bar{\bar{H}}(b, x, 0) = 0$ pour tout $(b, x, 0) \in V \cap (B \times R^m \times \{0\})$;

(2) H_b , défini par $H_b(x, y) = (\text{pr}_2 \times \text{pr}_3) \circ H(b, x, y)$, coïncide avec un élément de $SG_{m,p}^*$ dans un voisinage ouvert de zéro dans $R^m \times R^p$, pour tout $b \in B$.

DÉFINITION 11. Soit \mathfrak{h} un microfibré topologique de fibre R^{m+p} au-dessus de la base B , muni des germes de trivialisations

$$f_\kappa : U_\kappa \times (R^m \times R^p) \xrightarrow{\cong} \mathfrak{h}|_{U_\kappa}, \kappa \in K.$$

On dit que la famille $\{f_\kappa\}$ est un *système de coordonnées stables-en-chaque-fibre* de \mathfrak{h} si, pour tout couple $(\kappa, \lambda) \in K \times K$ tel que $U_\kappa \cap U_\lambda \neq \emptyset$ et pour tout couple $F_\kappa : 0_\kappa \xrightarrow{\cong} V_\kappa$, $F_\lambda : 0_\lambda \xrightarrow{\cong} V_\lambda$ d'éléments de f_κ et de f_λ , l'homéomorphisme $F_\lambda^{-1} \circ F_\kappa$ est un isomorphisme stable-en-chaque-fibre de $F_\kappa^{-1}(V_\kappa \cap V_\lambda)$ sur $F_\lambda^{-1}(V_\kappa \cap V_\lambda)$. Un microfibré topologique muni d'un système de coordonnées stables-en-chaque-fibre sera appelé *microfibré stable-en-chaque-fibre*.

DÉFINITION 12. Soient \mathfrak{h} et \mathfrak{h}' des microfibrés stables-en-chaque-fibre de base B munis des systèmes de coordonnées stables-en-chaque-fibre

$$f_\kappa : U_\kappa \times (R^m \times R^p) \xrightarrow{\cong} \mathfrak{h}|_{U_\kappa}, \kappa \in K \text{ et } f'_\mu : V_\mu \times (R^m \times R^p) \xrightarrow{\cong} \mathfrak{h}'|_{V_\mu}, \mu \in K'.$$

On dit que \mathfrak{h} et \mathfrak{h}' sont *équivalents au sens des microfibrés stables-en-chaque-fibre* (sf-équivalents) s'il existe une équivalence topologique $f : \mathfrak{h} \xrightarrow{\cong} \mathfrak{h}'$ telle que les éléments des germes d'équivalences topologiques $f'^{-1} \circ f \circ f_\kappa$ des microfibrés triviaux $((U_\kappa \cap V_\mu) \times R^m \times R^p, U_\kappa \cap V_\mu, \times 0 \times 0, \text{pr}_1)$ soient des isomorphismes stables-en-chaque-fibre.

DÉFINITION 13. On notera $K_s^{m+p}(B)$ l'ensemble des classes de *sf*-équivalence des microfibrés stables-en-chaque-fibre de fibre $R^m \times R^p$ au-dessus d'un espace topologique B . Si \mathfrak{h} est un microfibré stable-en-chaque-fibre, on notera \mathfrak{h}' sa classe de *sf*-équivalence.

3.3. L'injection T

PROPOSITION 16. Soit M^m une variété topologique munie d'une structure stable \mathfrak{G} . Soit $k_s^p(M^m)$ l'ensemble des classes stables des microfibrés de base M^m stables par rapport à \mathfrak{G} . Il existe alors une application injective

$$T : k_s^p(M^m) \rightarrow K_s^{m+p}(M^m).$$

DÉMONSTRATION

a) La construction de T . Rappelons d'abord une simple construction de Milnor [18, theorem 5.9]. Soient $\mathfrak{x} : B \xrightarrow{i} E \xrightarrow{j} B$ et $\mathfrak{x}' : E' \xrightarrow{i'} E'' \xrightarrow{j'} E'$ des microfibrés topologiques ayant la propriété que la base de \mathfrak{x}' est l'espace total de \mathfrak{x} . On note alors $\mathfrak{x} \circ \mathfrak{x}'$ le microfibré topologique $B \xrightarrow{i' \circ i} E' \xrightarrow{j \circ j'} B$.

Soit maintenant $M \xrightarrow{i} E(\mathfrak{x}) \xrightarrow{j} M$ un microfibré stable, élément d'une classe $\mathfrak{x}' \in k_s^p(M^m)$. Nous supposons que \mathfrak{x} a les germes de trivialisations $h_\kappa : U_\kappa \times R^p \rightarrow E(\mathfrak{x}|U_\kappa)$, $\kappa \in K$. D'après la définition des microfibrés stables, les U_κ forment un système de cartes stables $\mathfrak{U} = \{\varphi_\kappa : 0_\kappa \cong U_\kappa\}_{\kappa \in K}$ de M^m contenu dans la structure stable \mathfrak{G} . Soit $t_{\mathfrak{U}} : M \xrightarrow{\Delta} M \times M \xrightarrow{pr_1} M$ le microfibré tangent stable qui est associé au système \mathfrak{U} et qui est construit comme dans le chapitre 2, définition 8; si on note $g_\kappa : U_\kappa \times R^m \rightarrow U_\kappa \times U_\kappa$, $\kappa \in K$, les germes des isomorphismes trivialisants de $t_{\mathfrak{U}}$, g_κ contient donc un homéomorphisme G_κ qui est défini dans un voisinage ouvert de $U_\kappa \times \{0\}$ dans $U_\kappa \times R^m$ par

$$G_\kappa(u, x) = (u, \varphi_\kappa(x + \varphi_\kappa^{-1}(u))).$$

Soit $pr_2 : M \times M \rightarrow M$ la projection sur le deuxième facteur. pr_2 induit de \mathfrak{x} un microfibré topologique

$$pr_2^*(\mathfrak{x}) : M \times M \xrightarrow{i_*} E_* \xrightarrow{j_*} M \times M,$$

qui possède l'espace total

$$E_* = \{(u, v; b) \in M \times M \times E(\mathfrak{x}) : v = j(b)\},$$

la section zéro $i_*(u, v) = (u, v; i(v))$ et la projection $j_*(u, v; b) = (u, v)$.

On montrera que le microfibré topologique $t_{\mathbb{H}} \circ \text{pr}_2^*(\mathfrak{z})$ possède la structure d'un microfibré stable-en-chaque-fibre de groupe $SG_{m,p}^*$, et que les germes de trivialisations sont donnés par

$$f_{\kappa} = (1 \times h_{\kappa}) \circ (g_{\kappa} \times 1) : U_{\kappa} \times R^m \times R^p \rightarrow E_* | U_{\kappa}, \kappa \in K.$$

E_* est homéomorphe à $M \times E(\mathfrak{z})$ par un homéomorphisme α défini par $\alpha(u, v; b) = (u, b)$ pour $(u, v; b) \in E_*$. Si on identifie E_* avec $M \times E(\mathfrak{z})$ à l'aide de α , la section zéro du microfibré $t_{\mathbb{H}} \circ \text{pr}_2^*(\mathfrak{z})$ devient l'application $i_0 : M \rightarrow M \times E(\mathfrak{z})$, définie par $i_0(u) = (u; i(u))$, et la projection de $t_{\mathbb{H}} \circ \text{pr}_2^*(\mathfrak{z})$ l'application de $j_0 : M \times E(\mathfrak{z}) \rightarrow M$ définie par $j_0(u, b) = u$. Si l'homéomorphisme G_{κ} du germe g_{κ} est défini dans le voisinage ouvert V_{κ} de $U_{\kappa} \times \{0\}$ dans $U_{\kappa} \times R^m$, $(G_{\kappa} \times 1)(V_{\kappa} \times R^p)$ contient

$$(G_{\kappa} \times 1)(U_{\kappa} \times \{0\} \times R^p) = \Delta_{\kappa} \times R^p,$$

où Δ_{κ} est la diagonale de $U_{\kappa} \times U_{\kappa}$.

Soit H_{κ} un homéomorphisme du germe $h_{\kappa} : U_{\kappa} \times R^p \rightarrow E(\mathfrak{z} | U_{\kappa})$ qui est défini dans un voisinage ouvert W_{κ} de $U_{\kappa} \times \{0\}$ dans $U_{\kappa} \times R^p$. $\Delta_{\kappa} \times \{0\}$ est donc contenu dans $U_{\kappa} \times W_{\kappa}$ et l'homéomorphisme $F_{\kappa} = (1 \times H_{\kappa}) \circ (G_{\kappa} \times 1)$ applique le voisinage ouvert

$$Z_{\kappa} = V_{\kappa} \times R^p \cap (G_{\kappa}^{-1} \times 1)(U_{\kappa} \times W_{\kappa}) \text{ de } U_{\kappa} \times \{0\} \times \{0\}$$

dans $U_{\kappa} \times R^m \times R^p$ sur un voisinage ouvert de $i_0(U_{\kappa})$ dans $U_{\kappa} \times E(\mathfrak{z} | U_{\kappa})$. Les germes $(1 \times h_{\kappa}) \circ (g_{\kappa} \times 1)$ sont donc bien des germes trivialisants du microfibré $t_{\mathbb{H}} \circ \text{pr}_2^*(\mathfrak{z})$ dont les fibres sont des germes de $R^m \times R^p$. De façon explicite on obtient pour $(u, x, y) \in Z_{\kappa}$ la formule

$$F_{\kappa}(u, x, y) = (1 \times H_{\kappa}) \circ (G_{\kappa} \times 1)(u, x, y) = (u, H_{\kappa}(\varphi_{\kappa}(x + \varphi_{\kappa}^{-1}(u)), y)),$$

et, si $\lambda \in K$, pour $(u, x, y) \in Z_{\kappa} \cap F_{\kappa}^{-1} F_{\lambda}(Z_{\lambda})$, la transformation

$$F_{\lambda}^{-1} F_{\kappa}(u, x, y) = (u, \varphi_{\lambda}^{-1} \varphi_{\kappa}(x + \varphi_{\kappa}^{-1}(u)) - \varphi_{\lambda}^{-1}(u), \text{pr}_2 \circ H_{\lambda}^{-1} \circ H_{\kappa}(\varphi_{\kappa}(x + \varphi_{\kappa}^{-1}(u)), y)).$$

Montrons que $t_{\mathbb{H}} \circ \text{pr}_2^*(\mathfrak{z})$ est stable-en-chaque-fibre. Soit σ l'homéomorphisme fibré de $R^m \times R^m$ sur lui-même qui est défini par

$$\sigma(t, x) = (t, \sigma_t(x)) = (t, x + t).$$

Il est clair que $\sigma_t \in SH(R^m)$ (voir [6]) pour tout $t \in R^m$, car, si on pose

$$\sigma'_t(x) = \begin{cases} x \\ x + at \\ x + t \end{cases} \text{ pour } \begin{cases} tx \leq 0 \\ tx = a, \\ tx \geq 1 \end{cases} \quad 0 \leq a \leq 1$$

et $\sigma''_t = \sigma_t \circ (\sigma'_t)^{-1}$, on a $\sigma'_t, \sigma''_t \in SH(R^m)$ et $\sigma_t = \sigma''_t \circ \sigma'_t$. Si on définit l'homéomorphisme σ_K de $U_K \times R^m$ sur lui-même par

$$\sigma_K(u, x) = (u, x + \varphi_K^{-1}(u)) = (u, \sigma_{K,u}(x)),$$

$\sigma_{K,u}$ est un élément de $SH(R^m)$ pour tout $u \in U_K$ et $G_K \times 1 = (1 \times \varphi_K \times 1) \circ (\sigma_K \times 1)$ sur $V_K \times R^p$. Il en résulte, pour $u \in U_K \cap U_\lambda$, que

$$F_{\lambda,u}^{-1} \circ F_{K,u} = (\sigma_{\lambda,u}^{-1} \times 1) \circ (\varphi_\lambda^{-1} \times 1) \circ H_\lambda^{-1} \circ H_K(\varphi_K \times 1) \circ (\sigma_{K,u} \times 1).$$

D'après le chapitre 2, définition 8, $(\varphi_\lambda^{-1} \times 1) \circ H_\lambda^{-1} \circ H_K \circ (\varphi_K \times 1)$ coïncide avec un élément $k \in SG_{m,p}$ dans un voisinage ouvert de $(\varphi_K^{-1}(u), 0)$ dans $\varphi_K^{-1}(U_K \cap U_\lambda) \times R^p \subset R^m \times R^p$. $\sigma_{K,u} \times 1$ et $\sigma_{\lambda,u} \times 1$ sont des éléments de $SG_{m,p}$. Comme en plus

$$F_{\lambda,u}^{-1} \circ F_{K,u}(0,0) = (\sigma_{\lambda,u}^{-1} \times 1) \circ k \circ (\sigma_{K,u} \times 1)(0,0) = (0,0),$$

l'homéomorphisme $(\sigma_{\lambda,u}^{-1} \times 1) \circ k \circ (\sigma_{K,u} \times 1)$ est un élément de $SG_{m,p}^*$ et $F_{\lambda,u}^{-1} \circ F_{K,u}$ coïncide avec cet homéomorphisme dans un voisinage ouvert de $(0,0)$ dans $R^m \times R^p$.

Ceci montre que le microfibré $t_{\mathbb{U}} \circ \text{pr}_2^*(\mathfrak{X})$ possède d'une façon naturelle la structure d'un microfibré stable-en-chaque-fibre. On note $T(\mathfrak{X}')$ la classe $(t_{\mathbb{U}} \circ \text{pr}_2^*(\mathfrak{X}))^*$ de ce microfibré dans $K_s^{m+p}(M^m)$.

b) On démontre ensuite que $T(\mathfrak{X}')$ ne dépend que de la classe d'équivalence \mathfrak{X}' de \mathfrak{X} dans $k_s^p(M^m)$.

Soit \mathfrak{X}' un microfibré stable au-dessus de la base M^m qui est équivalent à \mathfrak{X} au sens des microfibrés stables. Il existe alors un système de germes de trivialisations stables $h'_\mu: U'_\mu \times R^p \rightarrow \mathfrak{X}'|U'_\mu$, $\mu \in K'$ et un système de cartes stables $\mathbb{U}' = \{\varphi'_\mu: 0'_\mu \rightarrow U'_\mu\}_{\mu \in K'}$, contenu dans la structure stable de la variété M^m . On construit comme dans a) le microfibré tangent stable $t_{\mathbb{U}'}$, associé à \mathbb{U}' , avec les germes de trivialisations g'_μ ; de plus, on obtient comme dans a) le microfibré stable-en-chaque-fibre $t_{\mathbb{U}'} \circ \text{pr}_2^*(\mathfrak{X}')$ ayant les germes trivialisants $f'_\mu = (1 \times h'_\mu) \circ (g'_\mu \times 1)$ et les transformations de coordonnées $f'_{\nu\mu} = (f'_\nu)^{-1} \circ f'_\mu$, qui contiennent des homéomorphismes de la forme

$$F'_{\nu,u} \circ F'_{\mu,u} = (\sigma'_{\nu,u} \times 1) \circ (\varphi'_\nu \times 1) \circ H'_\nu \circ H'_\mu(\varphi'_\mu \times 1) \circ (\sigma'_{\mu,u} \times 1)$$

dans la fibre au-dessus de $u \in U'_\mu \cap U'_\nu$.

Les microfibrés tangents stables $t_{\mathbb{U}}$ et $t_{\mathbb{U}'}$, qui sont équivalents au sens des microfibrés stables, ont le même microfibré topologique sous-jacent, qui est le microfibré tangent topologique \mathfrak{t} de M^m .

Par hypothèse, il existe une équivalence $f: \mathfrak{X} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}'$ au sens des microfibrés stables. Elle induit une équivalence topologique, qu'on note encore f , et qui contient un homéomorphisme F d'un ouvert V autour de $i(M)$ dans $E(\mathfrak{X})$ sur un ouvert V' autour de $i'(M)$ dans $E(\mathfrak{X}')$. La projection $\text{pr}_2: M \times M \rightarrow M$ induit alors une équivalence topologique

$$f^* = \text{pr}_2^*(f) : \text{pr}_2^*(\mathfrak{X}) \xrightarrow{\sim} \text{pr}_2^*(\mathfrak{X}').$$

Compte tenu de l'identification α de la partie a), f^* est le germe de l'homéomorphisme $1 \times F : M \times V \rightarrow M \times V'$, ou $f^* = 1 \times f$.

A cause de $(1 \times F) \circ i_0(u) = i'_0(u)$ pour $u \in M$ et de

$$j'_0 \circ (1 \times F)(u, b) = j_0(u, b) \quad \text{pour } (u, b) \in M \times V,$$

le germe $1 \times f$ est en même temps une équivalence topologique

$$1 \times f : \text{t} \circ \text{pr}_2^*(\mathfrak{X}) \xrightarrow{\sim} \text{t} \circ \text{pr}_2^*(\mathfrak{X}').$$

Cette équivalence topologique est aussi une équivalence au sens des microfibrés stables-en-chaque-fibre, car le germe local

$$\tilde{f}_{\mu, \kappa} = (f'_\mu)^{-1} \circ (1 \times f) \circ f_\kappa = (g'^{-1} \times 1) \circ (1 \times h'^{-1}) \circ (1 \times f) \circ (1 \times h_\kappa) \circ (g_\kappa \times 1)$$

contient dans la fibre au-dessus de $u \in U_\kappa \cap U'_\mu$ l'homéomorphisme

$$F'^{-1}_{\mu, u} \circ F \circ F_{\kappa, u} = (\sigma'^{-1}_{\mu, u} \times 1) \circ (\varphi'^{-1}_\mu \times 1) H'^{-1}_\mu \circ F \circ H_\kappa \circ (\varphi_\kappa \times 1) \circ (\sigma_{\kappa, u} \times 1).$$

De plus, d'après le chapitre 2, définition 9, $(\varphi'^{-1}_\mu \times 1) \circ H'^{-1}_\mu \circ f \circ H_\kappa (\varphi_\kappa \times 1)$ coïncide avec un élément $l \in SG_{m, p}$ dans un voisinage ouvert de $(\varphi_\kappa^{-1}(u), 0)$ dans $\varphi_\kappa^{-1}(U_\kappa \cap U'_\mu) \times RP$ et $\sigma'^{-1}_{\mu, u} \times 1$ et $\sigma_{\kappa, u} \times 1$ sont des éléments de $SG_{m, p}$ d'après la définition de σ . Comme en plus

$$\begin{aligned} F'^{-1}_{\mu, u} \circ F \circ F_{\kappa, u}(0, 0) &= F'^{-1}_{\mu, u} \circ F \circ H_\kappa(u, 0) \\ &= (\sigma'^{-1}_{\mu, u} \times 1)(\varphi'^{-1}_\mu \times 1)(u, \text{pr}_2 \circ H'^{-1}_\mu \circ F \circ H_\kappa(u, 0)) \\ &= (\sigma'^{-1}_{\mu, u} \times 1)(\varphi'^{-1}_\mu(u), 0) = (0, 0), \end{aligned}$$

l'homéomorphisme $(\sigma'^{-1}_{\mu, u} \times 1) \circ l \circ (\sigma_{\kappa, u} \times 1)$ est un élément de $SG_{m, p}$. f est donc, d'après la définition 12, une équivalence au sens des microfibrés stables-en-chaque-fibre.

c) T est injectif.

Soient \mathfrak{X} et \mathfrak{X}' des microfibrés stables contenus dans les classes \mathfrak{X}^* et $(\mathfrak{X}')^*$ de $k_S^P(M^m)$ et soit $T(\mathfrak{X}^*) = T((\mathfrak{X}')^*)$. Il existe donc une

équivalence $p: t_{\mathbb{U}} \circ \text{pr}_2^*(\mathfrak{x}) \xrightarrow{\cong} t_{\mathbb{U}'} \circ \text{pr}_2^*(\mathfrak{x}')$ au sens des microfibrés stables-en-chaque-fibre. Comme dans la définition 17, nous posons

$$E_0(t_{\mathbb{U}} \circ \text{pr}_2^*(\mathfrak{x})) = \bigcup V_{\kappa} \quad \text{pour tout } (F_{\kappa}: Z_{\kappa} \xrightarrow{\cong} V_{\kappa}) \in f_{\kappa} \quad \text{et tout } \kappa \in K.$$

Tout homéomorphisme P de p a la propriété suivante: P applique un voisinage ouvert A de $i_0(M)$ dans $M \times E(\mathfrak{x})$ sur un voisinage ouvert A' de $i'_0(M)$ dans $M \times E(\mathfrak{x}')$ de telle façon que $F'_{\mu}{}^{-1} \circ P \circ F_{\kappa}$ soit un isomorphisme stable-en-chaque-fibre (déf. 10) de $F_{\kappa}^{-1}(A \cap j_0^{-1}(U_{\kappa} \cap U'_{\mu}))$ sur $F'_{\mu}{}^{-1}(A' \cap j_0'^{-1}(U_{\kappa} \cap U'_{\mu}))$, pour tout couple (F_{κ}, F'_{μ}) ; nous pouvons supposer que

$$A \subset E_0(t_{\mathbb{U}} \circ \text{pr}_2^*(\mathfrak{x})), \quad A' \subset E_0(t_{\mathbb{U}'} \circ \text{pr}_2^*(\mathfrak{x}')).$$

Le sous-espace

$$N = \{(u, b) \in M \times E(\mathfrak{x}) : u = j(b)\} \text{ de } M \times E(\mathfrak{x})$$

est homéomorphe à $E(\mathfrak{x})$ par un homéomorphisme $\beta(u, b) = b$, pour $(u, b) \in N$. Soit N' le sous-espace analogue de $M \times E(\mathfrak{x}')$. Si on note les trivialisations de \mathfrak{x} et de $t_{\mathbb{U}} \circ \text{pr}_2^*(\mathfrak{x})$ comme dans la partie a), on voit que

$$(1) \quad \beta \circ F_{\kappa}(u, 0, y) = H_{\kappa}(u, y) \quad \text{pour } (u, y) \in W_{\kappa},$$

et que

$$\begin{aligned} \beta \circ F_{\kappa}(Z_{\kappa} \cap U_{\kappa} \times \{0\} \times RP) &= \beta \circ F_{\kappa}((U_{\kappa} \times \{0\} \times RP) \cap (G_{\kappa}^{-1} \times 1)(U_{\kappa} \times W_{\kappa})) \\ &= H_{\kappa}(W_{\kappa}). \end{aligned}$$

On montre que $P(N \cap A) \subset N'$, ou que $(u, b) \in N \cap A$, entraîne $j'_0 \circ \text{pr}_2 \circ P(u, b) = u$; car, si $(u, b) \in N \cap A$ et $u \in U_{\kappa} \cap U'_{\mu}$, il existe F_{κ} , F'_{μ} et $y \in RP$ tels que $(u, b) = F_{\kappa}(u, 0, y)$ et $F'_{\mu}{}^{-1} \circ P \circ F_{\kappa}(u, 0, y)$ est de la forme $(u, \bar{S}(u, 0), \bar{S}(u, 0, y))$. De plus $F'_{\mu}{}^{-1} \circ P \circ F_{\kappa}(u, 0, 0) = (u, 0, 0)$ entraîne $\bar{S}(u, 0) = 0$, d'où:

$$\begin{aligned} j'_0 \circ \text{pr}_2 \circ P(u, b) &= j'_0 \circ \beta' \circ F'_{\mu}(F'_{\mu}{}^{-1} \circ P \circ F_{\kappa}(u, 0, y)) \quad (\beta' \text{ analogue à } \beta) \\ &= j'_0 \circ \beta' \circ F'_{\mu}(u, 0, \bar{S}(u, 0, y)) \\ &= j'_0 \circ H'_{\mu}(u, \bar{S}(u, 0, y)) = u. \end{aligned}$$

On en déduit que l'homéomorphisme $Q = \beta' \circ P \circ \beta^{-1} | \beta(A \cap N)$ est un élément d'une équivalence topologique $q: \mathfrak{x} \xrightarrow{\cong} \mathfrak{x}'$.

Montrons que q est une équivalence stable. Il suffit de prouver que les germes de transformations

$$(\varphi_{\mu}{}^{-1} \times 1) \circ h_{\mu}{}^{-1} \circ q \circ h_{\kappa} \circ (\varphi_{\kappa} \times 1) = \tilde{h}_{\mu, \kappa}, \quad (\kappa, \mu) \in K \times K',$$

sont stables dans $\varphi_{\kappa}^{-1}(U_{\kappa} \cap U'_{\mu}) \times RP$. Si $(x_0, 0) \in \varphi_{\kappa}^{-1}(U_{\kappa} \cap U'_{\mu}) \times RP$, on doit donc montrer qu'un homéomorphisme

$$(\varphi'_{\mu}{}^{-1} \times 1) \circ H'_{\mu}{}^{-1} \circ Q \circ H_{\kappa} \circ (\varphi_{\kappa} \times 1) = \tilde{H}_{\mu, \kappa}$$

du germe $\tilde{h}_{\mu, \kappa}$ coïncide avec un élément de $SG_{m, p}$ dans un voisinage ouvert de $(x_0, 0)$ dans $\varphi_{\kappa}^{-1}(U_{\kappa} \cap U'_{\mu}) \times RP$.

Soit V un voisinage ouvert de x_0 dans $\varphi_{\kappa}^{-1}(U_{\kappa} \cap U'_{\mu})$ tel que l'homéomorphisme stable $\varphi'_{\mu}{}^{-1} \varphi_{\kappa}$ y coïncide avec un élément $g \in SH(R^m)$. De plus, soit $\epsilon: R^m \rightarrow \varphi_{\kappa}^{-1}(U_{\kappa} \cap U'_{\mu})$ une application continue qui est l'identité sur une petite boule $D^m(x_0)$ autour de x_0 dans V et qui applique une partie ouverte, non-vide, W de R^m sur un point x_1 de $\varphi_{\kappa}^{-1}(U_{\kappa} \cap U'_{\mu}) - D^m(x_0)$.

On démontrera que le germe $\tilde{f}_{\mu, \kappa} = f'_{\mu}{}^{-1} \circ p \circ f_{\kappa}$ d'automorphismes de $(U_{\kappa} \cap U'_{\mu}) \times R^m \times RP$ contient un homéomorphisme global de $(U_{\kappa} \cap U'_{\mu}) \times R^m \times RP$ sur lui-même qui est stable-en-chaque-fibre. Si on considère d'abord $\tilde{f}_{\mu, \kappa}$ comme un germe *topologique* d'automorphismes, il résulte de la proposition 15 que $\tilde{f}_{\mu, \kappa}$ contient un représentant global $F_{\mu, \kappa}$ « doublement fibré » qui satisfait à la condition (1) de la définition 10. On note $F_{\mu, \kappa}(u)$ l'automorphisme fibré de $R^m \times RP$ qui est défini par

$$(F_{\mu, \kappa}(u))(x, y) = (\text{pr}_2 \times \text{pr}_3) \circ F_{\mu, \kappa}(u, x, y) \text{ pour tout } u \in U_{\kappa} \cap U'_{\mu}.$$

$F_{\mu, \kappa}(u)$ laisse fixe l'origine de $R^m \times RP$, car il coïncide dans un voisinage ouvert de $(0, 0)$ avec l'homéomorphisme

$$(2) \quad (\sigma'_{\mu, u}{}^{-1} \times 1) \circ (\varphi'_{\mu}{}^{-1} \times 1) \circ H'_{\mu}{}^{-1} \circ P_u \circ H_{\kappa} \circ (\varphi_{\kappa} \times 1) \circ (\sigma_{\kappa, u} \times 1),$$

qui est un autre élément du germe $\tilde{f}_{\mu, \kappa} | \{u\} \times R^m \times RP$. De plus, cet élément coïncide dans un voisinage ouvert de zéro dans $R^m \times RP$ avec un élément $g' \in SG_{m, p}$. On a alors $F_{\mu, \kappa}(u) = (F_{\mu, \kappa}(u) \circ g'{}^{-1}) \circ g'$ et, comme $F_{\mu, \kappa}(u) \circ g'{}^{-1}$ est l'identité dans un voisinage ouvert de $(0, 0)$ dans $R^m \times RP$, il résulte que $F_{\mu, \kappa}(u) \in SG_{m, p}^{\circ}$.

Si on pose $F^* = (\sigma'_{\mu} \times 1) \circ F_{\mu, \kappa} \circ (\sigma_{\kappa} \times 1)^{-1}$, on obtient un homéomorphisme F^* de $(U_{\kappa} \cap U'_{\mu}) \times R^m \times RP$ sur lui-même et

$$F^*(u) = (\sigma'_{\mu, u} \times 1) \circ F_{\mu, \kappa}(u) \circ (\sigma_{\kappa, u} \times 1)^{-1}$$

est un élément de $SG_{m, p}$ pour tout $u \in U_{\kappa} \cap U'_{\mu}$, car $F_{\mu, \kappa}(u) \in SG_{m, p}^{\circ}$ et $\sigma'_{\mu, u}$ et $\sigma_{\kappa, u}$ sont dans $SH(R^m)$. On définit de plus

$$G(x, y) = (g(x), \text{pr}_2 \circ F^*(\varphi_{\kappa} \circ \epsilon(x))(x, y)) \text{ pour } (x, y) \in R^m \times RP,$$

et on vérifie que $G \in SG_{m, p}$. D'abord il est clair que $G \in G_{m, p}$.

En outre, on trouve, pour $(x, y) \in W \times R^p$, que

$$F^*(\varphi_{\kappa} \epsilon(x))(x, y) = F^*(\varphi_{\kappa}(x_1))(x, y).$$

Pour les mêmes (x, y) , si on définit l'automorphisme $\mathring{F}^*(\varphi_{\kappa}(x_1))$ de R^m par $\mathring{F}^*(\varphi_{\kappa}(x_1)) \circ \text{pr}_1 = \text{pr}_1 \circ F^*(\varphi_{\kappa}(x_1))$, il résulte que

$$\begin{aligned} G(x, y) &= (g(x), \text{pr}_2 F^*(\varphi_{\kappa}(x_1))(x, y)) \\ &= [(g \times 1) \circ (\mathring{F}^*(\varphi_{\kappa}(x_1)) \times 1)^{-1} \circ F^*(\varphi_{\kappa}(x_1))](x, y) \end{aligned}$$

et

$$(g \times 1) \circ (\mathring{F}^*(\varphi_{\kappa}(x_1)) \times 1)^{-1} \circ F^*(\varphi_{\kappa}(x_1)) = G_1 \in SG_{m,p}.$$

Comme $G = (G \circ G_1^{-1}) \circ G_1$ et $G \circ G_1^{-1} | W \times R^p = \text{id}$, il s'ensuit que $G \in SG_{m,p}$. Finalement, si on pose $X = \varphi_{\kappa}^{-1}(U_{\kappa} \cap U'_{\mu})$ et si $d: X \rightarrow X \times X$ est l'application diagonale $d(x) = (x, x)$, on obtient, pour $(x, y) \in \mathring{D}^m(x_0) \times R^p$, que :

$$\begin{aligned} G(x, y) &= (\varphi_{\mu}^{-1} \varphi_{\kappa}(x), \text{pr}_2 \circ F^*(\varphi_{\kappa}(x))(x, y)) \\ &= [(\text{pr}_2 \times \text{pr}_3) \circ (\varphi_{\mu}^{\prime-1} \times 1 \times 1) \circ F^* \circ (\varphi_{\kappa} \times 1 \times 1)(d \times 1)](x, y) \\ (3) \quad &= [(\text{pr}_2 \times \text{pr}_3) \circ (\varphi_{\mu}^{\prime-1} \times 1 \times 1) \circ (\sigma'_{\mu} \times 1) \circ F_{\mu, \kappa} \circ (\sigma_{\kappa}^{-1} \times 1) \\ &\quad (\varphi_{\kappa} \times 1 \times 1)(d \times 1)](x, y). \end{aligned}$$

$(\sigma_{\kappa}^{-1} \times 1)(\varphi_{\kappa} \times 1 \times 1)(d \times 1)$ applique $\mathring{D}^m(x_0) \times R^p$ de façon homéomorphe sur $\varphi_{\kappa}(\mathring{D}^m(x_0)) \times \{0\} \times R^p$ dans $(U_{\kappa} \cap U'_{\mu}) \times \{0\} \times R^p$, et le point $(x_0, 0)$ sur $(\varphi_{\kappa}(x_0), 0, 0)$.

En outre, $F_{\mu, \kappa}$ coïncide dans un voisinage ouvert de $(U_{\kappa} \cap U'_{\mu}) \times \{0\} \times \{0\}$ avec

$$(\sigma'_{\mu} \times 1)(1 \times \varphi_{\mu}^{\prime-1} \times 1)(1 \times H_{\mu}^{\prime-1}) \circ P \circ (1 \times H_{\kappa})(1 \times \varphi_{\kappa} \times 1)(\sigma_{\kappa} \times 1),$$

donc G , d'après (3), dans un voisinage ouvert Y de $(x_0, 0)$ dans $\mathring{D}^m(x_0) \times R^p$, avec

$$(4) \quad (\text{pr}_2 \times \text{pr}_3)(\varphi_{\mu}^{\prime-1} \times \varphi_{\mu}^{\prime-1} \times 1)(1 \times H_{\mu}^{\prime-1}) \circ P \circ (1 \times H_{\kappa})(\varphi_{\kappa} \times \varphi_{\kappa} \times 1)(d \times 1).$$

D'après (1), on a

$$[(1 \times H_{\kappa}) \circ (\varphi_{\kappa} \times \varphi_{\kappa} \times 1) \circ (d \times 1)](Y) \subset N \cap A,$$

car

$$[(1 \times H_{\kappa}) \circ (\varphi_{\kappa} \times \varphi_{\kappa} \times 1) \circ (d \times 1)](x, y) = F_{\kappa}(\varphi_{\kappa}(x), 0, y).$$

On peut donc remplacer P dans (4) par $\beta^{\prime-1} \circ Q \circ \beta$ et on obtient :

$$G(x, y) = [(\varphi_{\mu}^{\prime-1} \times 1) \circ H_{\mu}^{\prime-1} \circ Q \circ H_{\kappa} \circ (\varphi_{\kappa} \times 1)](x, y) = \tilde{H}_{\mu, \kappa}(x, y)$$

pour $(x, y) \in Y$. D'où il résulte que $\tilde{h}_{\mu, \kappa}$ est un germe d'isomorphismes

stables $\varphi_\kappa^{-1}(U_\kappa \cap U'_\mu) \times RP \rightarrow \varphi'_\mu^{-1}(U_\kappa \cap U'_\mu) \times RP$ et que q est une équivale-
 valence stable.

REMARQUE. T n'est pas surjectif. La condition suivante est nécessaire
 pour la surjectivité de T . Si F est un automorphisme stable-en-chaque-
 fibre de

$$((U_\kappa \cap U_\lambda) \times R^m \times RP, U_\kappa \cap U_\lambda, \times 0 \times 0, pr_1), \kappa, \lambda \in K,$$

et si Δ est la diagonale de $\varphi_\kappa^{-1}(U_\kappa \cap U_\lambda) \times \varphi_\lambda^{-1}(U_\kappa \cap U_\lambda)$, il existe un
 voisinage ouvert V de $\Delta \times \{0\}$ dans $\varphi_\kappa^{-1}(U_\kappa \cap U_\lambda) \times R^m \times RP$ tel que
 $(\varphi_\lambda^{-1} \times 1)(\sigma_\lambda \times 1) \circ F \circ (\sigma_\kappa^{-1} \times 1) \circ (\varphi_\kappa \times 1)$ se décompose sur V en un produit
 $\varphi_\lambda^{-1} \varphi_\kappa \times G$. En général, cette condition n'est pas remplie.

3.4. La surjection S

PROPOSITION 17. Soit M^m une variété topologique munie d'une structure
 stable \mathcal{G} . Soit $k_s^p(M^m)$ l'ensemble des classes d'équivalence stable des
 microfibrés de base M^m stables par rapport à \mathcal{G} . Il existe alors une appli-
 cation surjective

$$S : K_s^{m+p}(M^m) \rightarrow k_s^p(M^m)$$

ayant la propriété $S \circ T = \text{id}$.

DÉMONSTRATION

a) Construction de S . Soit \mathfrak{h} un microfibré stable-en-chaque-fibre
 d'une classe $\mathfrak{h} \in K_s^{m+p}(M^m)$, muni d'un système de coordonnées stables-
 en-chaque-fibre

$$f_\kappa : U_\kappa \times R^m \times RP \xrightarrow{\cong} \mathfrak{h}|_{U_\kappa}, \kappa \in K,$$

au-dessus d'un système de cartes stables $\mathfrak{U} = \{\varphi_\kappa : 0_\kappa \xrightarrow{\cong} U_\kappa\}_{\kappa \in K}$ contenu
 dans la structure stable \mathcal{G} de M^m . Si $F_\kappa : Z_\kappa \xrightarrow{\cong} V_\kappa$ sont les homéomor-
 phismes de f_κ , on note \mathfrak{W} la réunion de tous les ensembles

$$F_\kappa(Z_\kappa \cap U_\kappa \times \{0\} \times RP) \text{ pour tout } F_\kappa \text{ dans } f_\kappa \text{ et tout } \kappa \in K.$$

On définit alors un microfibré \mathfrak{z} de fibre RP en posant $E(\mathfrak{z}) = \mathfrak{W}$,
 la base de \mathfrak{z} égale à M^m , la projection j_1 de \mathfrak{z} égale à $j|_{\mathfrak{W}}$ et on définit
 la section zéro i_1 de \mathfrak{z} par $i_1(u) = i(u)$ pour tout $u \in M$, où j et i sont la
 projection et la section zéro de \mathfrak{h} . Les germes de trivialisations l_κ de \mathfrak{z}
 sont définis par les homéomorphismes

$$(1) \quad L_\kappa(u, y) = F_\kappa(u, 0, y),$$

pour (u, y) dans un voisinage ouvert W_κ de $U_\kappa \times \{0\}$ dans $U_\kappa \times RP$. Pour démontrer que \mathfrak{z} est un microfibré stable, il suffit de voir que les germes de transformations

$$(\varphi_\lambda^{-1} \times 1) \circ l_\lambda^{-1} \circ l_\kappa \circ (\varphi_\kappa \times 1) = l_{\lambda, \kappa}, \quad (\kappa, \lambda) \in K \times K,$$

sont stables dans $\varphi_\kappa^{-1}(U_\kappa \cap U_\lambda) \times RP$. Si $(x_0, 0) \in \varphi_\kappa^{-1}(U_\kappa \cap U_\lambda) \times RP$, on doit donc montrer qu'un homéomorphisme

$$(\varphi_\lambda^{-1} \times 1) \circ L_\lambda^{-1} \circ L_\kappa \circ (\varphi_\kappa \times 1) = L_{\lambda, \kappa}$$

du germe $l_{\lambda, \kappa}$ coïncide avec un élément de $SG_{m, p}$ dans un voisinage ouvert de $(x_0, 0)$ dans $\varphi_\kappa^{-1}(U_\kappa \cap U_\lambda) \times RP$. On procède comme dans la proposition 16, c). Soit V un voisinage ouvert de x_0 dans $\varphi_\kappa^{-1}(U_\kappa \cap U_\lambda)$ tel que l'homéomorphisme stable $\varphi_\lambda^{-1} \circ \varphi_\kappa$ y coïncide avec un élément $g \in SH(R^m)$. De plus, soit $\epsilon: R^m \rightarrow \varphi_\kappa^{-1}(U_\kappa \cap U_\lambda)$ une application continue qui est l'identité sur une petite boule $D^m(x_0)$ autour de x_0 dans V et qui applique une partie ouverte, non-vide W de R^m sur un point x_1 de $\varphi_\kappa^{-1}(U_\kappa \cap U_\lambda) - D^m(x_0)$. D'après la proposition 15, le germe topologique $f_{\lambda, \kappa} = f_\lambda^{-1} \circ f_\kappa$ contient un automorphisme global $F_{\lambda, \kappa}$ de $(U_\kappa \cap U_\lambda) \times R^m \times RP$ sur lui-même. Pour tout $u \in U_\kappa \cap U_\lambda$, $F_{\lambda, \kappa}(u)$ laisse fixe l'origine de $R^m \times RP$ et coïncide dans un voisinage ouvert de cette origine avec un élément $g' \in SG_{m, p}$. D'où il résulte que

$$F_{\lambda, \kappa}(u) = (F_{\lambda, \kappa}(u) \circ g'^{-1}) \circ g' \in SG_{m, p}.$$

Si on pose encore $F^* = (\sigma_\lambda \times 1) \circ F_{\lambda, \kappa} \circ (\sigma_\kappa^{-1} \times 1)$, on a $F^*(u) \in SG_{m, p}$. On définit de plus

$$G(x, y) = (g(x), \text{pr}_2 \circ F^*(\varphi_\kappa \epsilon(x))(x, y)), \quad \text{pour } (x, y) \in R^m \times RP.$$

$G \in SG_{m, p}$, car pour tout $(x, y) \in W \times RP$ on a

$$\begin{aligned} G(x, y) &= (g(x), \text{pr}_2 \circ F^*(\varphi_\kappa(x_1))(x, y)) \\ &= [(g \times 1) \circ (F^*(\varphi_\kappa(x_1)) \times 1)^{-1} \circ F^*(\varphi_\kappa(x_1))](x, y) \end{aligned}$$

et

$$G_1 = [(g \times 1) \circ (F^*(\varphi_\kappa(x_1)) \times 1)^{-1} \circ F^*(\varphi_\kappa(x_1))] \in SG_{m, p},$$

donc aussi $G = (G \circ G_1^{-1}) \circ G_1$.

Finalement, si on pose $X = \varphi_\kappa^{-1}(U_\kappa \cap U_\lambda)$ et si $d: X \rightarrow X \times X$ est l'application diagonale $d(x) = (x, x)$, on obtient, pour $(x, y) \in D^m(x_0) \times RP$,

$$\begin{aligned} G(x, y) &= (\varphi_\lambda^{-1} \varphi_\kappa(x), \text{pr}_2 \circ F^*(\varphi_\kappa(x))(x, y)) \\ &= [(\text{pr}_2 \times \text{pr}_3) \circ (\varphi_\lambda^{-1} \times 1 \times 1) \circ (\sigma_\lambda \times 1) \circ F_{\lambda, \kappa} \circ (\sigma_\kappa^{-1} \times 1) \circ (\varphi_\kappa \times 1 \times 1) \circ (d \times 1)] \\ &\quad (x, y). \end{aligned}$$

$(\sigma_\kappa^{-1} \times 1 \times 1) \circ (\varphi_{\kappa_0} \times 1 \times 1) \circ (d \times 1)$ applique $\overset{\circ}{D}^m(x_0) \times RP$ de façon homéomorphe sur $\varphi_\kappa(\overset{\circ}{D}^m(x_0)) \times \{0\} \times RP$ dans $(U_\kappa \cap U_\lambda) \times R^m \times RP$, et le point $(x_0, 0)$ sur $(\varphi_\kappa(x_0), 0, 0)$. $F_{\lambda\kappa}$ coïncide dans un voisinage ouvert de $(U_\kappa \cap U_\lambda) \times \{0\} \times \{0\}$ dans $(U_\kappa \cap U_\lambda) \times R^m \times RP$ avec l'homéomorphisme $F_\lambda^{-1} \circ F_\kappa$, où $F_\kappa \in f_\kappa$, $F_\lambda \in f_\lambda$; donc G coïncide avec

$(pr_2 \times pr_3) \circ (\varphi_\lambda^{-1} \times 1 \times 1) \circ (\sigma_\lambda \times 1) \circ F_\lambda^{-1} \circ F_\kappa \circ (\sigma_\kappa^{-1} \times 1) \circ (\varphi_\kappa \times 1 \times 1) \circ (d \times 1)$ dans un voisinage ouvert V de $(x_0, 0)$ dans $\overset{\circ}{D}^m(x_0) \times RP$. D'après (1), on a, pour $(x, y) \in (\varphi_\kappa^{-1} \times 1)(W_\kappa)$,

$$L_\kappa(\varphi_\kappa(x), y) = [F_\kappa \circ (\sigma_\kappa^{-1} \times 1) \circ (\varphi_\kappa \times 1 \times 1) \circ (d \times 1)](x, y).$$

G coïncide donc dans un voisinage ouvert de $(x_0, 0)$ dans $\overset{\circ}{D}^m(x_0) \times RP$ avec $(\varphi_\lambda^{-1} \times 1) \circ L_\lambda^{-1} \circ L_\kappa \circ (\varphi_\kappa \times 1)$, d'où suit que $l_{\lambda\kappa}$ est un germe de transformations stables. \mathfrak{z} est donc un microfibré stable d'une classe $\mathfrak{z}^* \in k_s^P(M^m)$. On note \mathfrak{z}^* par $S(\mathfrak{h}^*)$.

b) S est bien défini. Soient \mathfrak{h} et \mathfrak{h}' deux microfibrés stables-enchaque-fibre dans une même classe de $K_s^{m+p}(M^m)$, et soit $p: \mathfrak{h} \xrightarrow{\cong} \mathfrak{h}'$ une équivalence stable-enchaque-fibre. On construit les microfibrés stables \mathfrak{z} et \mathfrak{z}' associés à \mathfrak{h} et \mathfrak{h}' comme dans la partie a).

Soient $f_\kappa: U_\kappa \times R^m \times RP \xrightarrow{\cong} \mathfrak{h} | U_\kappa, \kappa \in K$ et $f'_\mu: U'_\mu \times R^m \times RP \xrightarrow{\cong} \mathfrak{h}' | U'_\mu, \mu \in K'$, les systèmes de coordonnées stables-enchaque-fibre de \mathfrak{h} et de \mathfrak{h}' au-dessus des systèmes de cartes stables $\mathfrak{U} = \{\varphi_\kappa: 0_\kappa \xrightarrow{\cong} U_\kappa\}_{\kappa \in K}$ et $\mathfrak{U}' = \{\varphi'_\mu: 0'_\mu \xrightarrow{\cong} U'_\mu\}_{\mu \in K'}$ de la même structure stable \mathfrak{S} de M^m . Comme dans la définition 17, nous posons

$$E_0(\mathfrak{h}) = \cup V_\kappa \text{ pour tout } (F_\kappa: Z_\kappa \xrightarrow{\cong} V_\kappa) \in f_\kappa \text{ et tout } \kappa \in K.$$

Si P est un homéomorphisme contenu dans le germe p, P applique un voisinage ouvert A de la section zéro $i(M)$ de \mathfrak{h} dans $E_0(\mathfrak{h})$ sur un voisinage ouvert A' de la section zéro $i'(M)$ de \mathfrak{h}' dans $E_0(\mathfrak{h}')$ et, pour tout $F_\kappa \in f_\kappa$ et $F'_\mu \in f'_\mu$, l'homéomorphisme $F'^{-1}_\mu \circ P \circ F_\kappa$ est un isomorphisme stable-enchaque-fibre de $F_\kappa^{-1}(A \cap j^{-1}(U_\kappa \cap U'_\mu))$ sur $F'^{-1}_\mu(A' \cap j'^{-1}(U_\kappa \cap U'_\mu))$, pour tout couple $(\kappa, \mu) \in K \times K'$, si j et j' sont les projections de \mathfrak{h} et de \mathfrak{h}' . Il en suit que $P(E(\mathfrak{z}) \cap A) = E(\mathfrak{z}') \cap A'$ et que $P|(E(\mathfrak{z}) \cap A) = Q$ est un élément d'une équivalence topologique $q: \mathfrak{z} \rightarrow \mathfrak{z}'$. On démontre ensuite que q est une équivalence stable. On a vu dans la partie a) que les germes de trivialisations l_κ et l'_μ de \mathfrak{z} et de \mathfrak{z}' contiennent des homéomorphismes de la forme

$$(1) \quad L_{\kappa}(u, y) = F_{\kappa}(u, 0, y), \quad L'_{\mu}(u, y) = F'_{\mu}(u, 0, y),$$

où (u, y) parcourt un voisinage ouvert W_{κ} de $U_{\kappa} \times \{0\}$ dans $U \times RP$ ou un voisinage W'_{μ} de $U'_{\mu} \times \{0\}$ dans $U'_{\mu} \times RP$. Si $(x_0, 0) \in \varphi_{\kappa}^{-1}(U_{\kappa} \cap U'_{\mu}) \times RP$, on montre, comme dans la proposition 16 c), que l'homéomorphisme

$$(\varphi'^{-1}_{\mu} \times 1) \circ L'^{-1}_{\mu} \circ Q \circ L_{\kappa} \circ (\varphi_{\kappa} \times 1)$$

coïncide avec un élément de $SG_{m,p}$ dans un voisinage ouvert de $(x_0, 0)$ dans $\varphi_{\kappa}^{-1}(U_{\kappa} \cap U'_{\mu}) \times RP$. On définit en effet $\epsilon, D^m(x_0), V, W, F_{\mu, \kappa} \in f'^{-1}_{\mu} \circ p \circ f_{\kappa}, F^*, G, X, d$ comme dans la proposition 16 c); on a en particulier $G \in SG_{m,p}$ et, pour $(x, y) \in \overset{\circ}{D}^m(x_0) \times RP$, on obtient

$$\begin{aligned} G(x, y) &= (\varphi'^{-1}_{\mu} \varphi_{\kappa}(x), \text{pr}_2 \circ F^*(\varphi_{\kappa}(x))(x, y)) \\ &= [(\text{pr}_2 \times \text{pr}_3) (\varphi'^{-1}_{\mu} \times 1 \times 1) (\sigma'_{\mu} \times 1) \circ F_{\mu, \kappa} \circ (\sigma_{\kappa}^{-1} \times 1) (\varphi_{\kappa} \times 1 \times 1) (d \times 1)] \\ &\quad (x, y). \end{aligned}$$

Comme $F_{\mu, \kappa}$ coïncide dans un voisinage ouvert de $(U_{\kappa} \cap U'_{\mu}) \times \{0\} \times \{0\}$ dans $(U_{\kappa} \cap U'_{\mu}) \times R^m \times RP$ avec $F'^{-1}_{\mu} \circ p \circ F_{\kappa}$, et comme

$$[(\sigma_{\kappa}^{-1} \times 1) (\varphi_{\kappa} \times 1 \times 1) (d \times 1)] (\overset{\circ}{D}^m(x_0) \times RP) = \varphi_{\kappa} (\overset{\circ}{D}^m(x_0) \times \{0\} \times RP),$$

G coïncide dans un voisinage ouvert de $(x_0, 0)$ dans $\overset{\circ}{D}^m(x_0) \times RP$ avec $(\text{pr}_2 \times \text{pr}_3) \circ (\varphi'^{-1}_{\mu} \times 1 \times 1) \circ (\sigma'_{\mu} \times 1) \circ F'^{-1}_{\mu} \circ Q \circ F_{\kappa} \circ (\sigma_{\kappa}^{-1} \times 1) \circ (\varphi_{\kappa} \times 1 \times 1) (d \times 1)$.

D'après (1), on a, pour $(x, y) \in (\varphi_{\kappa}^{-1} \times 1)(W_{\kappa})$,

$$L_{\kappa}(\varphi_{\kappa}(x), y) = [F_{\kappa} \circ (\sigma_{\kappa}^{-1} \times 1) \circ (\varphi_{\kappa} \times 1 \times 1) \circ (d \times 1)](x, y).$$

G coïncide donc dans un voisinage ouvert de $(x_0, 0)$ dans $\overset{\circ}{D}^m(x_0) \times RP$ avec

$$(\varphi'^{-1}_{\mu} \times 1) \circ L'^{-1}_{\mu} \circ Q \circ L_{\kappa} \circ (\varphi_{\kappa} \times 1).$$

D'où suit que $q: \mathfrak{z} \xrightarrow{\cong} \mathfrak{z}'$ est une équivalence stable, $S(\mathfrak{z}') = S((\mathfrak{z}')^{\circ})$, et S est bien défini.

c) Soit $T = \text{id}$. Soit \mathfrak{x} un microfibré stable dans une classe $\mathfrak{x}^{\circ} \in k^p_S(M^m)$ avec les trivialisations $h_{\kappa}: U_{\kappa} \times RP \xrightarrow{\cong} \mathfrak{x} | U_{\kappa}, \kappa \in K$, au-dessus du système $\mathfrak{U} = \{\varphi_{\kappa}: 0_{\kappa} \rightarrow U_{\kappa}\}_{\kappa \in K}$ de cartes stables de M^m . Comme dans la proposition 16 a), on construit le microfibré stable-en-chaque-fibre $\mathfrak{y} = t_{\mathfrak{U}} \circ \text{pr}_2^*(\mathfrak{x}) \in T(\mathfrak{x}^{\circ})$ avec les trivialisations

$$f_{\kappa} = (1 \times h_{\kappa}) \circ (g_{\kappa} \times 1): U_{\kappa} \times R^m \times RP \rightarrow \mathfrak{y} | U_{\kappa},$$

et $E(\mathfrak{h}) = M \times E(\mathfrak{x})$. Etant donné que f_κ contient un homéomorphisme F_κ défini par $F_\kappa(u, x, y) = (u, H_\kappa(\varphi_\kappa(x + \varphi_\kappa^{-1}(u)), y))$, il en résulte que $F_\kappa(u, 0, y) = (u, H_\kappa(u, y))$, pour (u, y) dans un voisinage ouvert de $U_\kappa \times \{0\}$ dans $U_\kappa \times RP$. Si \mathfrak{z} est le microfibré stable associé à \mathfrak{h} par la construction de S de la partie a), on en déduit :

$$E(\mathfrak{z}) \subset N = \{(u, b) \in M \times E(\mathfrak{x}) : u = j(b)\},$$

où j est la projection de \mathfrak{x} . Plus exactement, $E(\mathfrak{z})$ est un voisinage ouvert de la section zéro $i_1(M) = \{(u, i(u)) : u \in M\}$ de \mathfrak{z} dans N (où i est la section zéro de \mathfrak{x}). L'homéomorphisme $\beta = \text{pr}_2 | N : N \xrightarrow{\cong} E(\mathfrak{x})$ applique $E(\mathfrak{z})$ sur un voisinage ouvert de $i(M)$ dans $E(\mathfrak{x})$. On montre, en plus, que $\beta | E(\mathfrak{z})$ est contenu dans un germe d'isomorphismes stables $q : \mathfrak{z} \xrightarrow{\cong} \mathfrak{z}'$. En effet, les trivialisations $L_\kappa : U_\kappa \times RP \xrightarrow{\cong} \mathfrak{z} | U_\kappa$ sont définies par

$$L_\kappa(u, y) = F_\kappa(u, 0, y) = (1 \times H_\kappa)(u, u, y);$$

si H_κ est défini sur V_κ dans $U_\kappa \times RP$, on trouve dans le voisinage ouvert $(\varphi_\kappa^{-1} \times 1)(V_\kappa \cap H_\kappa^{-1} \circ H_\lambda(V_\lambda))$ de $\varphi_\kappa^{-1}(U_\kappa \cap U_\lambda) \times \{0\}$ dans $\varphi_\kappa^{-1}(U_\kappa \cap U_\lambda) \times RP$

$$\begin{aligned} [(\varphi_\lambda^{-1} \times 1) \circ H_\lambda^{-1} \circ \text{pr}_2 \circ L_\kappa \circ (\varphi_\kappa \times 1)](x, y) &= (\varphi_\lambda^{-1} \times 1) \circ H_\lambda^{-1} \circ \text{pr}_2(\varphi_\kappa(x), \\ &\quad H_\kappa(\varphi_\kappa(x), y)) \\ &= [(\varphi_\lambda^{-1} \times 1) \circ H_\lambda^{-1} \circ H_\kappa \circ (\varphi_\kappa \times 1)] \\ &\quad (x, y). \end{aligned}$$

Comme \mathfrak{x} était un microfibré stable, il résulte de cette égalité que q est un germe d'isomorphismes stables et que $\mathfrak{x}' = \mathfrak{z}' = S \circ T(\mathfrak{x}')$.

3.5. Espaces fibrés, microfibrés et surjection S

DEFINITION 14. On dira qu'un espace fibré au sens de Steenrod [23] et de fibre R^{m+p} est un fibré *stable-en-chaque-fibre* s'il est muni du groupe $SG_{m,p}^\circ$. On appellera *mf-équivalence* l'équivalence des espaces fibrés au sens des microfibrés, *f-équivalence* l'équivalence des espaces fibrés au sens des espaces fibrés de Steenrod.

PROPOSITION 18. Deux espaces fibrés *stables-en-chaque-fibre* qui sont *f-équivalents* sont aussi *mf-équivalents* de façon *stable-en-chaque-fibre*.

Cette proposition est évidente, car, si $G_\kappa : U_\kappa \times R^m \times RP \rightarrow \xi | U_\kappa$, $\kappa \in K$, et $G'_\mu : U'_\mu \times R^m \times RP \rightarrow \xi' | U'_\mu$, $\mu \in K'$, sont deux trivialisations des espaces fibrés *stables-en-chaque-fibre* ξ et ξ' et si $f : \xi \rightarrow \xi'$ est une

f -équivalence, $\tilde{g}_{\mu\kappa}(b) = G_{\mu,b}^{-1} \circ f_b \circ G_{\kappa,b}$ est une application continue $U_\kappa \cap U'_\mu \rightarrow SG_{m,p}^*$ et l'automorphisme $\tilde{G}_{\mu,\kappa}$ de $(U_\kappa \cap U'_\mu) \times R^m \times R^p$ qui est associé à $\tilde{g}_{\mu,\kappa}$ satisfait aux conditions de la définition 10.

DÉFINITION 15. Soit $G_{m,p}^*$ le sous-groupe des éléments de $G_{m,p}$ (2.0) qui laissent fixe l'origine de $R^m \times R^p$. Supposons $G_{m,p}^*$ muni d'une topologie comme $SG_{m,p}^*$. On pose $G_{0,p}^* = G_p^*$.

On appelle (espace) *fibré stable* un espace fibré dont la base est une variété stable M^m et qui est un microfibré stable. Si G_p^* est le groupe du fibré et j sa projection, il existe un système de coordonnées stables $\{\varphi_\kappa: 0_\kappa \xrightarrow{\cong} U_\kappa\}_{\kappa \in K}$ de M et des trivialisations $H_\kappa: U_\kappa \times R^p \rightarrow j^{-1}(U_\kappa)$ tels que les homéomorphismes fibrés

$$(\varphi_\lambda^{-1} \times 1) \circ H_\lambda^{-1} \circ H_\kappa \circ (\varphi_\kappa \times 1): \varphi_\kappa^{-1}(U_\kappa \cap U_\lambda) \times R^p \rightarrow \varphi_\lambda^{-1}(U_\kappa \cap U_\lambda) \times R^p$$

coïncident avec des éléments de $SG_{m,p}$ dans des voisinages ouverts des points de $\varphi_\kappa^{-1}(U_\kappa \cap U_\lambda) \times \{0\}$.

PROPOSITION 19. Soit M^m une variété stable munie d'un atlas stable \mathcal{G} et soit $k_s^p(M^m)$ l'ensemble des classes des microfibrés de fibre R^p et stables par rapport à \mathcal{G} . Si $\eta \in K_s^{p+m}(M^m)$ contient un espace fibré stable-en-chaque-fibre, $S(\eta) \in k_s^p(M^m)$ contient un espace fibré stable par rapport à \mathcal{G} .

DÉMONSTRATION. Soit ξ un fibré stable-en-chaque-fibre de la classe η ayant les trivialisations $F_\kappa: U_\kappa \times R^m \times R^p \xrightarrow{\cong} \xi|_{U_\kappa}$ au-dessus d'un système de coordonnées stables $\{\varphi_\kappa: 0_\kappa \xrightarrow{\cong} U_\kappa\}_{\kappa \in K}$ de M^m . A partir des automorphismes $F_\lambda^{-1} \circ F_\kappa = F_{\lambda\kappa}$ stables-en-chaque-fibre de $(U_\kappa \cap U_\lambda) \times R^m \times R^p$, on définit des automorphismes $L_{\lambda\kappa}$ de $(U_\kappa \cap U_\lambda) \times R^p$ par

$$L_{\lambda\kappa}(u, \gamma) = (\text{pr}_1 \times \text{pr}_3) \circ F_{\lambda\kappa}(u, 0, \gamma).$$

Il résulte de $F_{\mu\lambda} \circ F_{\lambda\kappa} = F_{\mu\kappa}$ sur $(U_\kappa \cap U_\lambda \cap U_\mu) \times R^m \times R^p$ que $L_{\mu\lambda} \circ L_{\lambda\kappa} = L_{\mu\kappa}$ sur $(U_\kappa \cap U_\lambda \cap U_\mu) \times R^p$. Aux $L_{\lambda\kappa}$ on associe les applications continues $l_{\lambda\kappa}: U_\kappa \cap U_\lambda \rightarrow G_p^*$ ayant les propriétés

$$l_{\mu\lambda}(b) \circ l_{\lambda\kappa}(b) = l_{\mu\kappa}(b) \quad \text{pour } b \in U_\kappa \cap U_\lambda \cap U_\mu.$$

D'après [23, theorem 3.2], il existe un fibré topologique η de groupe G_p^* et un seul (à une f -équivalence près) ayant les transformations de coordon-

nées $l_{\lambda\kappa}$ et les trivialisations $L_{\kappa}(u, y)$. La stabilité de $(\varphi_{\lambda}^{-1} \times 1) \circ L_{\lambda}^{-1} \circ L_{\kappa} \circ (\varphi_{\kappa} \times 1)$ se démontre alors comme dans la proposition 17 a).

DÉFINITION 16. On dit que deux espaces fibrés stables sont *stablement f-équivalents* s'ils sont f-équivalents et si la f-équivalence associée est une mf-équivalence stable.

DÉFINITION 17. Soit $\mathfrak{h} = (E, B, i, j)$ un microfibré stable-en-chaque-fibre muni des trivialisations $f_{\kappa} : U_{\kappa} \times R^m \times R^p \cong \mathfrak{h} | U_{\kappa}, \kappa \in K$. Si $F_{\kappa} : 0_{\kappa} \cong V_{\kappa}$ sont les homéomorphismes de f_{κ} , on note $E_0(\mathfrak{h})$ la partie ouverte de E qui est la réunion de tous les V_{κ} , pour tous les F_{κ} dans f_{κ} et tout $\kappa \in K$. On dit que \mathfrak{h} contient un espace fibré stable-en-chaque-fibre s'il existe un voisinage ouvert E_1 de $i(B)$ dans E tel que $(j | E_1 : E_1 \rightarrow B) = \xi$ soit un espace fibré stable-en-chaque-fibre et si l'inclusion $E_1 \subset E_0(\mathfrak{h})$ est contenue dans une équivalence $\xi \cong \mathfrak{h}$ au sens des microfibrés stables-en-chaque-fibre.

Soit \mathcal{F}_n l'abréviation exprimant que tout microfibré stable-en-chaque-fibre au-dessus d'un complexe localement fini de dimension n contient un espace fibré stable-en-chaque-fibre.

Soit \mathcal{G}_n l'abréviation exprimant que deux espaces fibrés stables-en-chaque-fibre qui sont contenus dans le même microfibré stable-en-chaque-fibre sont f-équivalents.

PROPOSITION 20. \mathcal{F}_n et \mathcal{G}_n sont vrais pour tout n .

DÉMONSTRATION PAR RÉCURRENCE par rapport à n (comparer [14]).

a) \mathcal{F}_0 : $\mathfrak{h} = (E, \{b\}, i, j)$ est un microfibré trivial. Soit $F : 0 \cong V \subset E$ un homéomorphisme, élément d'un germe $f : \{b\} \times R^m \times R^p \cong \mathfrak{h}$ du système de \mathfrak{h} . 0 contient un produit $D^m \times D^p$ de boules autour de l'origine dans R^m et R^p . Soit α_m un homéomorphisme de R^m sur $\overset{\circ}{D}^m$ qui est égal à l'identité dans un voisinage de zéro. On pose :

$$H = F \circ (1 \times \alpha_m \times \alpha_p) \text{ et } H(\{b\} \times R^m \times R^p) = E_1.$$

$\xi = (j | E_1 : E_1 \rightarrow B)$ est alors un espace fibré trivial muni de la trivialisation H . De plus, $F^{-1} \circ H(b, x, y) = (1 \times \alpha_m \times \alpha_p)(b, x, y)$ pour $(b, x, y) \in \{b\} \times R^m \times R^p$, $F^{-1} \circ H$ coïncide donc avec $1 \in SG_{m,p}$ dans un voisinage de 0.

\mathcal{G}_0 est évident car tous les espaces fibrés contenus dans \mathfrak{h} sont triviaux.

b) On démontre que \mathcal{F}_{n-1} et \mathcal{E}_{n-1} entraînent \mathcal{F}_n

Soit $\mathfrak{h} = (E, K, i, j)$ un microfibré stable-en-chaque-fibre au-dessus d'un complexe localement fini K de dimension n , muni de germes de trivialisations $f \ni F: 0 \cong V$. On montre d'abord que, pour tout simplexe $\Delta_n \subset K$ de dimension n , le microfibré stable-en-chaque-fibre $\mathfrak{h} | \Delta_n$ contient un espace fibré ξ_Δ qui est stable-en-chaque-fibre et trivial. D'après le théorème de relèvement des homotopies énoncé au paragraphe 3.8 dans la proposition 30, $\mathfrak{h} | \Delta$ est *mf*-équivalent au microfibré trivial au-dessus de Δ de façon stable-en-chaque-fibre. Soit $L: Q \cong W$ un homéomorphisme de la *mf*-équivalence correspondante $l: \Delta \times R^m \times R^p \cong \mathfrak{h} | \Delta$; on limite L de telle façon que $W \subset E_0(\mathfrak{h} | \Delta)$. Comme Δ est compact, Q contient un produit $\Delta \times D^m \times D^p$, où D^m, D^p sont des boules autour de l'origine dans R^m, R^p . On pose

$$L(\Delta \times D^m \times D^p) = E(\xi_\Delta) \quad \text{et} \quad h_\Delta = L \circ (1 \times a_m \times a_p),$$

avec a_m, a_p de a . Alors $(j | E(\xi_\Delta): E(\xi_\Delta) \rightarrow \Delta)$ est un espace fibré trivial, avec la trivialisations h_Δ , qui est contenu dans $\mathfrak{h} | \Delta$. Soit P une partie ouverte de E qui contient $i(K)$ telle que $j^{-1}(\Delta) \cap P \subset E(\xi_\Delta)$. Soit K^{n-1} le squelette de dimension $n-1$ de K . Nous appelons \mathfrak{z} le microfibré stable-en-chaque-fibre $(j^{-1}(K^{n-1}) \cap P, K^{n-1}, i', j')$ dont la projection j' et la section zéro i' sont les limitations de j, i et dont les trivialisations sont les trivialisations de $\mathfrak{h}: E_0(\mathfrak{z}) = E_0(\mathfrak{h} | K^{n-1}) \cap P$. D'après \mathcal{F}_{n-1} , \mathfrak{z} contient un espace fibré η qui est stable-en-chaque-fibre.

On choisit un Δ fixe. D'après la construction précédente, la fibre de l'espace ξ_Δ au-dessus de b est contenue dans la fibre de l'espace η pour tout $b \in \partial\Delta$. De plus, $\eta | \partial\Delta$ et $\xi_\Delta | \partial\Delta$ sont tous les deux contenus dans $\mathfrak{h} | \partial\Delta$. D'après \mathcal{E}_{n-1} , ils sont *f*-équivalents. Il existe alors une *f*-équivalence $q: E(\xi_\Delta | \partial\Delta) \rightarrow E(\eta | \partial\Delta)$ ayant la propriété que, pour toute trivialisations $H_\eta: U_\eta \times R^m \times R^p \rightarrow E(\eta | U_\eta)$ de η avec $U_\eta \cap \partial\Delta \neq \emptyset$, on a $H_{\eta,b}^{-1} \circ q_b \circ h_{\Delta,b} \in SG_{m,p}^\circ$ pour tout $b \in U_\eta \cap \partial\Delta$.

Si on pose $h_\eta = q \circ h_\Delta | \partial\Delta \times R^m \times R^p$, on a

$$j \circ h_\eta(b, x, y) = b \quad \text{et} \quad h_\eta(b, 0, 0) = i(b).$$

Soit $SE_{m,p}^\circ$ le semi-groupe topologique de la définition 18 au paragraphe 3.6. On définit une application continue $\gamma: \partial\Delta \rightarrow SE_{m,p}^\circ$ par

$$h_\Delta^{-1} \circ h_\eta(b, x, y) = (b, \gamma^b(x, y)) \quad \text{pour} \quad (b, x, y) \in \partial\Delta \times R^m \times R^p.$$

On constate d'abord que γ^b est un plongement de $R^m \times RP$ dans lui-même; en outre, on a, pour $b \in U_\eta$,

$$\gamma^b = (h_{\Delta,b}^{-1} \circ H_{\eta,b}) \circ (H_{\eta,b}^{-1} \circ q_b \circ h_{\Delta,b})$$

et, comme $\eta|_{\partial\Delta}$ et $\xi_\Delta|_{\partial\Delta}$ sont contenus dans $\mathfrak{h}|_{\partial\Delta}$, il existe des homéomorphismes F_1 et F_2 de trivialisations de $\mathfrak{h}|_{\partial\Delta}$ tels que $F_{1,b}^{-1} \circ H_{\eta,b}$ et $F_{2,b}^{-1} \circ h_{\Delta,b}$ soient des plongements stables-en-chaque-fibre de $R^m \times RP$ dans lui-même; d'où résulte que

$$h_{\Delta,b}^{-1} \circ H_{\eta,b} = (h_{\Delta,b}^{-1} \circ F_{2,b})(F_{2,b}^{-1} \circ F_{1,b}^{-1})(F_{1,b} \circ H_{\eta,b})$$

est un élément de $SE_{m,p}^\circ$.

Soit Δ^1 un n -simplexe concentrique dans $\overset{\circ}{\Delta}$. On identifie les points de $(\Delta - \overset{\circ}{\Delta}^1)$ avec ceux de $\partial\Delta \times [0,1]$ de telle manière que $b \in \partial\Delta$ coïncide avec $(b,0)$. Soit $F: SE_{m,p}^\circ \times [0,1] \rightarrow SE_{m,p}^\circ$ l'homotopie qui est construite dans le paragraphe 3.6 au théorème 4. Pour tout point $(b,t) \in (\Delta - \overset{\circ}{\Delta}^1)$, on pose $F(\gamma^b, t) = \gamma_t^b$ et de plus

$$E' = \{h_\Delta((b,t), \gamma_t^b(x,y)) \mid (b,t) \in (\Delta - \overset{\circ}{\Delta}^1), (x,y) \in R^m \times RP\}$$

et

$$E_1 = E(\eta) \cup E' \cup E(\xi_\Delta|_{\Delta^1}).$$

On construit maintenant des trivialisations qui font de $(j|_{E_1}: E_1 \rightarrow K^{n-1} \cup \Delta)$ un espace fibré stable-en-chaque-fibre ξ qui est contenu dans $\mathfrak{h}|_{(K^{n-1} \cup \Delta)}$. Nous donnons d'abord une trivialisations au-dessus de $\overset{\circ}{\Delta}$. On définit un homéomorphisme g de $(\Delta - \overset{\circ}{\Delta}^1) \times R^m \times RP$ sur E' par

$$g((b,t), x, y) = h_\Delta((b,t), \gamma_t^b(x,y));$$

on définit de plus, pour tout $(b,1) \in \partial\Delta^1$ et $(x,y) \in R^m \times RP$,

$$e^b(x,y) = (\text{pr}_2 \times \text{pr}_3) \circ g^{-1} \circ h_\Delta((b,1), x, y) = (\gamma_1^b)^{-1}(x,y).$$

Comme $g|_{\partial\Delta^1 \times R^m \times RP}$ est un homéomorphisme de $\partial\Delta^1 \times R^m \times RP$ sur $h_\Delta(\partial\Delta^1 \times R^m \times RP)$, $e^b(x,y)$ est continue en (b,x,y) et, comme $\gamma_1^b \in SG_{m,p}^\circ$, on a $e^b \in SG_{m,p}^\circ$. On obtient alors un homéomorphisme H_Δ de $\Delta \times R^m \times RP$ sur $E_1 \cap j^{-1}(\overset{\circ}{\Delta})$ en posant

$$H_\Delta|_{\Delta^1 \times R^m \times RP} = h_\Delta|_{\Delta^1 \times R^m \times RP} \quad \text{et}$$

$$H_\Delta((b,t), x, y) = g((b,t), e^b(x,y)) \quad \text{pour } (b,t) \in (\Delta - \overset{\circ}{\Delta}^1).$$

D'après la définition de e^b , on a l'égalité

$$g((b,1), e^b(x,y)) = h_{\Delta}((b,1), x,y) ;$$

H_{Δ} est donc bien défini.

On démontre ensuite que $j|E_1$ est trivial au-dessus de voisinages ouverts des points $(b,0) \in \partial\Delta$ dans $K^{n-1} \cup \Delta$. Soit U_1 un voisinage ouvert de $(b,0)$ dans K^{n-1} au-dessus duquel il existe une trivialisation $h_1 : U_1 \times R^m \times RP \rightarrow j^{-1}(U_1) \cap E(\eta)$ de l'espace fibré η ayant les propriétés $j \circ h_1(u,x,y) = u$ et $h_1(u,0,0) = i(u)$. Pour tout $u \in U_1 \cap \partial\Delta$ et $(x,y) \in R^m \times RP$, on définit

$$c^u(x,y) = (\text{pr}_2 \times \text{pr}_3) \circ g^{-1} \circ h_1(u,x,y).$$

Comme $g| \partial\Delta \times R^m \times RP = h_{\eta}| \partial\Delta \times R^m \times RP$, $c^u(x,y)$ est continue en (u,x,y) et $c^u = h_{\Delta,u}^{-1} \circ q_u^{-1} \circ h_{1,u} \in SG_{m,p}^{\circ}$. On pose maintenant

$$U_2 = \{(u,t) | t < 1, u \in U_1 \cap \partial\Delta\} \text{ et } U = U_1 \cup U_2 .$$

De plus, on définit un homéomorphisme H_U de $U \times R^m \times RP$ sur $E_1 \cap j^{-1}(U)$ par

$$H_U| U_1 \times R^m \times RP = h_1 \quad \text{et} \\ H_U((u,t), x,y) = g((u,t), c^u(x,y)) \quad \text{pour } (u,t) \in U_2 .$$

En raison de

$$g((u,0), c^u(x,y)) = h_1(u,x,y),$$

la trivialisation H_U est bien définie.

On vérifie que $\xi = (j|E_1 \rightarrow K^{n-1} \cup \Delta, \{H_{\Delta}^{\circ}, H_U, H_{\eta}\})$ est un espace fibré stable-en-chaque-fibre.

Car soit d'abord $b = (u,t) \in U_2$, $0 < t$. Alors

$$H_U^{-1} \circ H_{\Delta}^{\circ}((u,t), x,y) = H_U^{-1} \circ g((u,t), e^u(x,y)) = ((u,t), (c^u)^{-1} \circ e^u(x,y))$$

est un homéomorphisme de $(\overset{\circ}{\Delta} \times R^m \times RP)$ sur lui-même, $(c^u)^{-1} \circ e^u$ est un élément de $SG_{m,p}^{\circ}$ et la transformation de coordonnées associée $\overset{\circ}{\Delta} \cap U \rightarrow SG_{m,p}^{\circ}$ est continue.

Si $b \in U \cap U_{\eta} = U_1 \cap U_{\eta}$, on a $H_{\eta}^{-1} \circ H_U(b,x,y) = H_{\eta}^{-1} \circ h_1(b,x,y)$ et, comme H_{η} et h_1 sont des trivialisations du même espace fibré η , la transformation associée $U \cap U_{\eta} \rightarrow SG_{m,p}^{\circ}$ est continue. ξ est contenu dans le microfibré $\mathfrak{y}|K^{n-1} \cup \Delta$. Il est clair tout d'abord que $E_1 \subset E_0(\mathfrak{y}|K^{n-1} \cup \Delta)$. En outre, soit $F: 0 \rightsquigarrow V$ un homéomorphisme

contenu dans un germe trivialisant de $\mathfrak{h} | K^{n-1} \cup \Delta$. On doit alors démontrer que $F^{-1} \circ H_{\Delta}^{\circ}$ est un isomorphisme stable-en-chaque-fibre de $(\overset{\circ}{\Delta} \times R^m \times R^p) \cap H_{\overset{\circ}{\Delta}}^{-1}(V)$ sur $O \cap F^{-1}(E(\xi | \overset{\circ}{\Delta}))$. Mais on peut factoriser $F^{-1} \circ H_{\Delta}^{\circ} = (F^{-1} \circ h_{\Delta}^{\circ}) \circ (h_{\overset{\circ}{\Delta}}^{-1} \circ H_{\overset{\circ}{\Delta}}^{\circ})$; $h_{\overset{\circ}{\Delta}}^{-1} \circ H_{\overset{\circ}{\Delta}}^{\circ}$ est un plongement stable-en-chaque-fibre de $\overset{\circ}{\Delta} \times R^m \times R^p$ dans lui-même qui applique $(\overset{\circ}{\Delta} \times R^m \times R^p) \cap H_{\overset{\circ}{\Delta}}^{-1}(V)$ sur $h_{\overset{\circ}{\Delta}}^{-1}(V \cap E(\xi | \overset{\circ}{\Delta}))$; de plus, $F^{-1} \circ h_{\Delta}^{\circ}$ est un isomorphisme stable-en-chaque-fibre de $h_{\overset{\circ}{\Delta}}^{-1}(V \cap E(\xi | \overset{\circ}{\Delta}))$ sur $O \cap F^{-1}(E(\xi | \overset{\circ}{\Delta}))$ car ξ_{Δ}° est contenu dans $\mathfrak{h} | \Delta$. $F^{-1} \circ H_{\Delta}^{\circ}$ a donc la propriété exigée dans la définition 17. La propriété correspondante à raison que $F^{-1} \circ H_U$ applique $(U \times R^m \times R^p) \cap H_U^{-1}(V)$ de façon homéomorphe et stable-en-chaque-fibre sur $O \cap F^{-1}(E(\xi | U))$, est une conséquence de

$$F^{-1} \circ H_U(b, x, y) = (F^{-1} \circ h_{\Delta}^{\circ})(h_{\overset{\circ}{\Delta}}^{-1} \circ H_U)(b, x, y)$$

pour $(b, x, y) \in ((\overset{\circ}{\Delta} \cap U) \times R^m \times R^p) \cap H_U^{-1}(V)$ et de

$$F^{-1} \circ H_U(b, x, y) = (F^{-1} \circ h_1)(b, x, y)$$

pour $(b, x, y) \in ((\partial \Delta \cap U) \times R^m \times R^p) \cap H_U^{-1}(V)$.

On vient de démontrer de façon détaillée que $\mathfrak{h} | K^{n-1} \cup \Delta$ contient un espace fibré stable-en-chaque-fibre. En répétant cette construction pour tous les n -simplexes de K , on obtient un espace fibré qui est contenu dans \mathfrak{h} .

c) \mathcal{F}_n entraîne \mathcal{E}_n . Soit $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_a, \dots$ ($a < a_0$) l'ensemble bien ordonné des simplexes de K qui ne sont pas contenus dans le bord d'un autre simplexe de dimension plus grande. Soit $\mathfrak{h} = (E, K, i, j)$ un microfibré dans la classe $\mathfrak{h}^* \in K_s^{m+p}(K)$ et soient ξ_1 et ξ_2 deux espaces fibrés stables-en-chaque-fibre qui sont contenus dans \mathfrak{h} . On peut supposer que $E(\xi_1) \subset E(\xi_2)$, car, d'après \mathcal{F}_n , le microfibré stable-en-chaque-fibre $(E(\xi_1) \cap E(\xi_2), K, i, j | E(\xi_1) \cap E(\xi_2))$ contient également un espace fibré stable-en-chaque-fibre. Soit $f_0 : E(\xi_1) \hookrightarrow E(\xi_2)$ l'inclusion. Si

$$G_{\kappa} : U_{\kappa} \times R^m \times R^p \rightarrow \xi_1 | U_{\kappa} \text{ et } G'_{\mu} : U'_{\mu} \times R^m \times R^p \rightarrow \xi_2 | U'_{\mu}$$

sont les trivialisations de ξ_1 et de ξ_2 , il résulte que, pour tout $u \in K$,

$$G'_{\mu, u}{}^{-1} \circ f_{0, u} \circ G_{\kappa, u} = G'_{\mu, u}{}^{-1} \circ G_{\kappa, u} \in SE_{m, p}^{\circ};$$

on utilise ici le fait que $E(\xi_2)$ est contenu dans $E_0(\eta)$. Soit $N(\Delta_\alpha)$ l'adhérence du premier voisinage régulier de Δ_α dans K (voir [8], chapter II,9), $K_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} \Delta_\beta$, $\Delta_\beta \in K$.

La démonstration qui suit fait usage de la récurrence transfinie. Nous supposons que, pour tout $\beta < \alpha$, il existe un plongement stable-enchaque-fibre $f_\beta : E(\xi_1) \rightarrow E(\xi_2)$ ayant les propriétés suivantes :

- (1) $G_{\mu,u}^{-1} \circ f_{\beta,u} \circ G_{\kappa,u} \in SE_{m,p}^*$ pour tout $u \in U_\kappa \cap U'_\mu$ et tout (κ, μ) .
- (2) $f_\beta | K_\beta : \xi_1 | K_\beta \rightarrow \xi_2 | K_\beta$ est une f -équivalence stable-enchaque-fibre.
- (3) Pour chaque point $p \in (E(\xi_1) - j^{-1}(N(\Delta_\beta)))$ il existe un $\gamma < \beta$ tel que $f_\beta(p) = f_\gamma(p)$ pour $\gamma \leq \beta' \leq \beta$.

Si $\alpha - 1$ existe, on pose $g_\alpha = f_{\alpha-1} : E(\xi_1) \rightarrow E(\xi_2)$; sinon on pose $g_\alpha = \lim_{\beta \rightarrow \alpha} f_\beta$. Cette limite existe et est un homéomorphisme de $E(\xi_1)$ dans $E(\xi_2)$.

Pour démontrer cette affirmation, on démontre d'abord que, pour tout point $q \in K$, il existe un voisinage ouvert U dont l'intersection avec $N(\Delta)$, $\Delta \in K$, est vide sauf pour un nombre fini de $\Delta \in K$. Car soit $\sigma \in K$; si $\sigma \cap N(\sigma) \neq \emptyset$, l'inclusion $N(\Delta) \subset N^0(\Delta)$ (voir [8], lemma 9.7, p.72) entraîne $\sigma \cap N^0(\Delta) \neq \emptyset$. Il existe alors un sommet $A \in \sigma$ tel que $A \in \Delta$. Si l'intersection de σ avec $N(\Delta)$ était non-vide pour un nombre infini des Δ , un $A \in \sigma$ ferait partie d'un nombre infini de Δ ; mais K est localement fini. Soit $q \in \sigma$. On forme le sous-complexe $\bar{N}^0(\sigma)$ de K . Chaque simplexe $\tau \in \bar{N}^0(\sigma)$ ne coupe qu'un nombre fini de $N(\Delta)$, donc il en va de même pour $\bar{N}^0(\sigma)$. Soit maintenant $p \in E(\xi_1)$. On pose $j | E(\xi_1) = j_1$. Il existe un voisinage ouvert V de $pr_1(p) \in K$ qui coupe tout au plus un nombre fini de $N(\Delta_\beta)$, $\beta < \alpha$. S'il existe un tel β , on note par β_0 le β maximal; sinon on pose $\beta_0 = 1$. On a alors

$$(4) \quad \lim_{\beta \rightarrow \alpha} (f_\beta | j_1^{-1}(V)) = f_{\beta_0} | j_1^{-1}(V).$$

Car soit β_1 l'élément consécutif à β_0 ; on a alors

$$j_1^{-1}(V) \subset (E(\xi_1) - j^{-1}(N(\Delta_{\beta_1})))$$

et, d'après (3), il existe pour tout $q \in j_1^{-1}(V)$ un $\gamma_q < \beta_1$ tel que $\gamma_q \leq \gamma \leq \beta_1$; d'où résulte que $f_{\beta_0}(q) = f_{\beta_1}(q)$ pour tout $q \in j_1^{-1}(V)$. Soit maintenant $\beta < \alpha$ et supposons que $f_\beta | j_1^{-1}(V) = f_{\beta_0} | j_1^{-1}(V)$ pour tout β' tel que

$\beta_0 < \beta' < \beta$. Dans ce cas, on a encore $j_1^{-1}(V) \subset (E(\xi_1) - j^{-1}(N(\Delta_\beta)))$ et, pour tout $q \in j_1^{-1}(V)$, il existe un $\gamma_q < \beta$ tel que $f_{\gamma_q}(q) = f_\beta(q)$ pour tout γ tel que $\gamma_q \leq \gamma \leq \beta$. Il en résulte que $f_\beta(q) = f_{\beta_0}(q)$ pour tout $q \in j_1^{-1}(V)$ et que g_α existe et applique $E(\xi_1)$ sur $E(\xi_2)$ de façon homéomorphe.

Soit maintenant $u \in K$. D'après (4), il existe un $\beta < \alpha$ tel que $g_{\alpha,u} = f_{\beta,u}$. D'où suit que

$$(5) \quad G'_{\mu,u}{}^{-1} \circ g_{\alpha,u} \circ G_{\kappa,u} \in SE_{m,p}^*$$

pour tous les couples (κ, μ) , où $G_{\kappa,u}$ et $G'_{\mu,u}$ ont un sens. Si f_β applique la fibre de ξ_1 au-dessus de u sur la fibre de ξ_2 au-dessus de u , il est clair que $G'_{\mu,u}{}^{-1} \circ g_{\alpha,u} \circ G_{\kappa,u} \in SG_{m,p}^*$.

$(j|g_\alpha(E(\xi_1)) : (g_\alpha(E(\xi_1)) \rightarrow K)$ est un espace fibré stable-en-chaque-fibre η_α au-dessus de K muni des trivialisations

$$g_\alpha \circ G_\kappa : U_\kappa \times R^m \times R^p \rightarrow j^{-1}(U_\kappa) \cap g_\alpha(E(\xi_1)).$$

Comme $N(\Delta_\alpha)$ est contractile, $\eta_\alpha|N(\Delta_\alpha)$ et $\xi_2|N(\Delta_\alpha)$ sont tous les deux f -équivalents au fibré trivial $N(\Delta_\alpha) \times R^m \times R^p$. Soient

$$\begin{aligned} c_\alpha &: N(\Delta_\alpha) \times R^m \times R^p \rightarrow E(\eta_\alpha|N(\Delta_\alpha)) \text{ et} \\ d_\alpha &: N(\Delta_\alpha) \times R^m \times R^p \rightarrow E(\xi_2|N(\Delta_\alpha)) \end{aligned}$$

les f -équivalences correspondantes. Si on pose $d_\alpha^{-1} \circ c_\alpha(u, x, y) = (u, h^\alpha(x, y))$, on a $h^\alpha \in SE_{m,p}^*$; cela résulte de

$$h^\alpha = (d_\alpha^{-1} \circ G'_{\mu,u}) \circ (G'_{\mu,u}{}^{-1} \circ g_{\alpha,u} \circ G_{\kappa,u}) \circ (G_{\kappa,u}^{-1} \circ g_{\alpha,u}^{-1} \circ c_{\alpha,u}),$$

de (5) et du fait que c_α, d_α sont des f -équivalences.

$h : N(\Delta_\alpha) \rightarrow SE_{m,p}^*$ est continu. Soit $t : K \rightarrow [0, 1]$ une application continue telle que $t(K - N(\Delta_\alpha)) = 0$ et $t(\Delta_\alpha) = 1$. Si F est l'homotopie du théorème 4 du paragraphe 3.6, on pose $h_t^\alpha = F(h^\alpha, t(u))$ et on définit le plongement fibré $H : E(\eta_\alpha) \rightarrow E(\xi_2)$ par

$$H(r) = \begin{cases} d_\alpha(j(r), h_t^\alpha(j(r))) \circ (\text{pr}_2 \times \text{pr}_3) \circ c_\alpha^{-1}(r) & \text{pour } j(r) \in N(\Delta_\alpha) \\ r & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Si on pose finalement $f_\alpha = H \circ g_\alpha$, on vérifie que f_α possède les propriétés de récurrence (1), (2), (3). Car soit d'abord $j(r) = u \in K - N(\Delta_\alpha)$; dans ce cas $H(r) = r$, donc

$$G'_{\mu,u}{}^{-1} \circ f_{\alpha,u} \circ G_{\kappa,u} = G'_{\mu,u}{}^{-1} \circ g_{\alpha,u} \circ G_{\kappa,u} \in SE_{m,p}^{\circ}.$$

Si g_{α} applique la fibre de ξ_1 au-dessus de u sur la fibre de ξ_2 au-dessus de u , il est clair que $G'_{\mu,u}{}^{-1} \circ f_{\alpha,u} \circ G_{\kappa,u} \in SG_{m,p}^{\circ}$. En particulier, f_{α} est une f -équivalence au-dessus de $K_{\beta} \cap (K - \overset{\circ}{N}(\Delta_{\alpha}))$ pour tout $\beta < \alpha$.

Pour $j(r) = u \in N(\Delta_{\alpha})$, on a

$$G'_{\mu,u}{}^{-1} \circ f_{\alpha,u} \circ G_{\kappa,u} = (G'_{\mu,u}{}^{-1} \circ d_{\alpha,u}) \circ h_t^u \circ (c_{\alpha,u}^{-1} \circ g_{\alpha,u} \circ G_{\kappa,u}) \in SE_{m,p}^{\circ}.$$

Pour $u \in \Delta_{\alpha}$, on a $t(u) = 1$, donc $h_1^u \in SG_{m,p}^{\circ}$ d'après le théorème 4, et f_{α} est une f -équivalence au-dessus de Δ_{α} . Si $u \in N(\Delta_{\alpha})$ et si g_{α} applique la fibre de ξ_1 au-dessus de u sur la fibre de ξ_2 au-dessus de u , il en résulte que $d_{\alpha,u}^{-1} \circ c_{\alpha,u} \in SG_{m,p}^{\circ}$ et, d'après le théorème 4, $h_t^u \in SG_{m,p}^{\circ}$ pour tout t . f_{α} est donc une f -équivalence au-dessus de K_{α} . On vérifie facilement la troisième propriété de récurrence et on obtient que $\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} f_{\alpha}$ est une f -équivalence du couple ξ_1, ξ_2 , ce qui démontre \mathcal{E}_n .

Comme premier corollaire de cette proposition, on obtient le

THÉORÈME 3. *Si B est un rétracte de voisinage de R^N (par exemple une variété topologique séparable et métrisable), tout microfibré stable-en-chaque-fibre au-dessus de B contient un espace fibré stable-en-chaque-fibre et un seul, à une f -équivalence près.*

DÉMONSTRATION. B est contenu dans une partie ouverte V de R^N ; soit $\rho: V \rightarrow B$ la rétraction associée. Si \mathfrak{h} est un microfibré stable-en-chaque-fibre au-dessus de B , $\rho^*(\mathfrak{h})$ est son extension à V . Mais on peut trianguler V et appliquer la proposition 20.

Une deuxième conséquence de la proposition 20 se formule comme suit:

PROPOSITION 21. *Si deux espaces fibrés stables-en-chaque-fibre au-dessus d'une variété topologique séparable et métrisable sont équivalents au sens des microfibrés stables-en-chaque-fibre, ils sont aussi f -équivalents.*

DÉMONSTRATION. Soit $f: \xi \rightarrow \xi'$ une mf -équivalence stable-en-chaque-fibre et soit $F: U \rightarrow E(\xi')$ un représentant de f . D'après le théorème 3, U contient l'espace total $E(\xi_1)$ d'un espace fibré ξ_1 stable-en-chaque-

fibre muni des trivialisations H_κ . ξ_1 est contenu dans ξ ; d'après le même théorème, ξ et ξ_1 sont donc f -équivalents. De plus l'espace fibré $F(\xi_1)$ ayant l'espace total $F(E(\xi_1))$ et les trivialisations $F \circ H_\kappa$ est f -équivalent à ξ_1 et contenu dans ξ' . D'après le théorème 3, $F(\xi_1)$ est finalement f -équivalent à ξ' .

PROPOSITION 22. *Toute classe d'équivalence stable de microfibrés stables au-dessus d'une variété topologique séparable et métrisable munie d'une structure stable contient au moins un espace fibré stable.*

DÉMONSTRATION. Si \mathfrak{x}' est une classe d'équivalence de microfibrés stables, il résulte de la proposition 16 que $T(\mathfrak{x}')$ est une classe de sf -équivalence de microfibrés stables-en-chaque-fibre. D'après le théorème 3, $T(\mathfrak{x}')$ contient un espace fibré stable-en-chaque-fibre. Il suit alors de la proposition 19 que $S \circ T(\mathfrak{x}')$ contient un espace fibré stable et, d'après la proposition 17, on a $S \circ T(\mathfrak{x}') = \mathfrak{x}'$.

3.6. Une déformation de l'espace des plongements fibrés de $R^m \times R^p$ dans lui-même.

LEMME 3. *Soit Z un espace topologique et soit E_1 une partie non-vide de $Z \times [0, \infty)$. Soit E le sous-espace de $E_1 \times R^p$ défini par la condition que $(z, a, y) \in E$ si et seulement si $(z, a) \in E_1$ et $|y| \leq a$. Soit $f: E \rightarrow R^p$ une application continue ayant la propriété $f(z, a, 0) = 0$ pour tout couple $(z, a) \in E_1$. Alors $r(a, z) = \min_{|y|=a} |f(z, a, y)|$ est une application continue de E_1 dans R .*

La démonstration ne présente aucune difficulté.

DÉFINITION 18. Soit $SE_{m,p}^\bullet$ le semi-groupe des plongements fibrés de $(R^m \times R^p, R^m \times \{0\})$ dans lui-même qui laissent fixe l'origine de $R^m \times R^p$ et coïncident dans un voisinage ouvert de cette origine avec un élément de $SG_{m,p}^\bullet$. $SE_{m,p}^\bullet$, muni de la topologie de la convergence compacte (C-O-topologie), est alors un semi-groupe topologique (c'est-à-dire: la multiplication est continue). L'application canonique $SE_{m,p}^\bullet \times R^m \times R^p \rightarrow R^m \times R^p$ est continue.

$SG_{m,p}^\bullet$ est un sous-semi-groupe topologique de $SE_{m,p}^\bullet$. Soit $SB_{m,p}$ le sous-semi-groupe des éléments de $SE_{m,p}^\bullet$ qui induisent l'identité sur

la base R^m . Soit $SF_{m,p}^\circ$ le sous-semi-groupe des éléments de $SE_{m,p}^\circ$ qui appliquent $\{0\} \times RP$ sur lui-même.

LEMME 4. Soit $R_+ = [0, \infty)$ et soit

$$E_1 = \{(g, h; b; x) \in SB_{m,p} \times SB_{m,p} \times R_+ \times R^m : h(x, y) \in \text{Im } g \text{ pour } |y| \leq b\}.$$

Soit E le sous-espace de $E_1 \times RP$ qui est défini par la condition que $(g, h; b; x, y) \in E$ si et seulement si $|y| \leq b$. En outre, soit

$$H = \{(h, u, v) \in SB_{m,p} \times R^m \times RP : \exists (x, y) \in R^m \times RP \text{ tel que } (u, v) = h(x, y)\}.$$

L'application $\mu : E \rightarrow X$, définie par $\mu(g, h; b; x, y) = (g, h(x, y))$, est alors continue.

DÉMONSTRATION. Soit 0 ouvert dans X et $\mu(e_0) \in 0$, $e_0 = (g_0, h_0; b_0; x_0, y_0) \in E$. Comme X est muni de la topologie induite, il existe une partie ouverte $U_1 \times U$ de $SB_{m,p} \times (R^m \times RP)$ telle que $\mu(e_0) \in (U_1 \times U) \cap X \subset 0$. La continuité de l'opération $SB_{m,p} \times R^m \times RP \rightarrow R^m \times RP$ entraîne l'existence de voisinages ouverts V de h_0 dans $SB_{m,p}$ et W de (x_0, y_0) dans $R^m \times RP$ tels que $V \times W \rightarrow U$. $N = U_1 \times V \times R_+ \times W$ est alors ouvert dans $SB \times SB \times R_+ \times R^m$, donc $N \cap E$ ouvert dans E , non-vide, car $e_0 \in N \cap E$, et $\mu(N \cap E) \subset 0$.

LEMME 5. Soit X l'espace du lemme 4. L'application $\nu : X \rightarrow R^m \times RP$, définie par $(h, u, v) = h^{-1}(u, v)$ est continue.

DÉMONSTRATION. Soit D une $(m+p)$ -boule fermée autour de $h_0^{-1}(u_0, v_0)$ dans $R^m \times RP$. $h_0(D)$ est alors ouvert dans $R^m \times RP$. Soit K une $(m+p)$ -boule fermée de rayon r autour de (u_0, v_0) dans $h_0(D)$. Soit, de plus, $d = \min |h_0(x, y) - h_0(x_0, y_0)|$ pour $(x, y) \in \dot{K}$ et $(x_0, y_0) \in \dot{D}$. On pose $\epsilon = \min(r, d/2)$ et on forme

$$W(h_0, D, \epsilon) = \{h \in SB_{m,p} : |h(x, y) - h_0(x, y)| < \epsilon \text{ pour tout } (x, y) \in D\}.$$

$W(h_0, D, \epsilon)$ est un ensemble ouvert contenu dans la base de la C-O-topologie de $SB_{m,p}$, car dans $SB_{m,p}$ la C-O-topologie coïncide avec la topologie de la convergence uniforme sur les ensembles compacts. Pour tout $h \in W(h_0, D, \epsilon)$, on a $K \subset h(D)$; on remarque d'abord $h(\dot{D}) \cap K = \emptyset$; le complément de $h(\dot{D})$ dans $R^m \times RP$ est la réunion disjointe des ensembles ouverts $h(\dot{D})$ et $R^m \times RP - h(D)$. En outre, $K \cap h(\dot{D}) \neq \emptyset$, car, si on pose

$h_0^{-1}(u_0, v_0) = (x_0, y_0)$, on voit que $|h(x_0, y_0) - h_0(x_0, y_0)| < \epsilon \leq r$. Comme K est connexe, il en résulte que $K \subset h(D)$. $W(h_0, D, \epsilon) \times \overset{\circ}{K}$ est alors un voisinage ouvert de (h_0, u_0, v_0) dans X tel que $\nu(W \times \overset{\circ}{K}) \subset \overset{\circ}{D}$.

COROLLAIRE. $SG_{m,p}^\bullet$ muni de la C-O-topologie est un groupe topologique.

DÉMONSTRATION. Les lemmes 4 et 5 restent vrais si on remplace partout $SB_{m,p}$ par $SE_{m,p}^\bullet$. La limitation de ν à $SG_{m,p}^\bullet \times R^m \times R^p$ donne une application continue $SG_{m,p}^\bullet \times R^m \times R^p \rightarrow R^m \times R^p$ à laquelle on associe l'application continue $SG_{m,p}^\bullet \rightarrow SG_{m,p}^\bullet$ définie par $h \rightarrow h^{-1}$.

PROPOSITION 23. Soit Q le sous-espace des éléments

$$q = (g, h; (a_i)_{i=1, \dots, 4}) \in SB_{m,p} \times SB_{m,p} \times R^4$$

ayant la propriété

$$0 < a_1 < a_2, 0 < a_3 < a_4 \text{ et } h(R^m \times D_{a_2}^p) \subset g(R^m \times D_{a_3}^p).$$

Il existe alors une homotopie

$$\varphi_t : Q \rightarrow SG_{m,p}^\bullet \cap SB_{m,p} \quad (t \in [0,1])$$

ayant les propriétés :

- (1) $\varphi_0(q) = 1$ pour tout $q \in Q$,
- (2) $\varphi_1(q)(h(R^m \times D_{a_2}^p)) \supset g(R^m \times D_{a_3}^p)$ pour tout $q = (g, h; (a_i)) \in Q$,
- (3) $\varphi_t(q) | (R^m \times R^p - g(R^m \times D_{a_4}^p)) = \text{id}$,
 $\varphi_t(q) | h(R^m \times D_{a_1}^p) = \text{id}$ pour tout $t \in [0,1]$ et $q \in Q$.

DÉMONSTRATION

1. Soit $A = \{a = (a_i) \in R^4 : 0 < a_1 < a_2 < a_4, a_1 < a_3 < a_4\}$. On définit une homotopie $\delta_t : A \times R_+ \rightarrow R_+$ pour $t \in [0,1]$ par :

$$\delta_t(a, s) = s \quad \text{pour } 0 \leq s \leq a_1, a \in A, t \in [0,1],$$

$$\delta_t(a, s) = s + t \cdot \frac{a_3 - a_2}{a_1 - a_2} \cdot (a_1 - s) \quad \text{pour } a_1 \leq s \leq a_2, a \in A, t \in [0,1],$$

$$\delta_t(a, s) = s + t \cdot \frac{a_3 - a_2}{a_4 - a_2} \cdot (a_4 - s) \quad \text{pour } a_2 \leq s \leq a_4, a \in A, t \in [0,1],$$

$$\delta_t(a, s) = s \quad \text{pour } a_4 \leq s, a \in A, t \in [0,1].$$

L'application $\Theta_t : A \times R^m \times R^p \rightarrow R^m \times R^p$ qui est définie pour $t \in [0,1]$ par

$$\Theta_t(a, x, y) = \begin{cases} (x, \frac{y}{|y|} \cdot \delta_t(a, |y|)) & \text{pour } |y| \neq 0, \\ (x, 0) & \text{pour } y = 0, \end{cases}$$

est continue et, pour tout $a \in A$, on obtient ainsi une isotopie $\Theta_t(a)$ de $R^m \times R^p$ sur lui-même ayant les trois propriétés suivantes :

- (4) $\Theta_0(a)$ est l'identité de $R^m \times R^p$ pour tout $a \in A$;
 (5) si on pose $A_i = \{(x, y) \in R^m \times R^p : |y| \leq a_i\}$ pour $i = 1, \dots, 4$, on obtient $\Theta_t(a)|_{A_1} = \text{id}$, $\Theta_t(a)|_{(R^m \times R^p - \overset{\circ}{A}_4)} = \text{id}$;
 (6) $\Theta_1(a)$ est un homéomorphisme de A_2 sur A_3 .

2. Soient E , E_1 , μ et ν définis comme dans les lemmes 4 et 5. $\text{pr}_2 \circ \nu \circ \mu : E \rightarrow R^p$ est alors une application continue de la forme

$$\text{pr}_2 \circ \nu \circ \mu(g, h; b; x, y) = \text{pr}_2 \circ g^{-1} \circ h(x, y).$$

D'après le lemme 3, l'application

$$r(g, h; b; x) = \min_{|y|=b} |\text{pr}_2 \circ g^{-1} \circ h(x, y)|$$

est une application continue de E_1 dans R . A l'aide de r , on construit deux autres applications continues $Q \times R^m \times R^p \rightarrow B \times R^p$, où $B = SB \times SB \times A \times R^m$.

a) On définit d'abord $\pi_i : Q \times R^m \rightarrow E_1$ par $\pi_i(g, h; a; x) = (g, h; a_i; x)$ pour $i = 1, 2$, puis $r_i = r \circ \pi_i$ et $r : Q \times R^m \rightarrow E_1$ par

$$r(g, h; a; x) = (h, g; r_1(g, h; a; x); x).$$

Si on pose, en outre :

$$\rho_4(g, h; a; x) = a_2,$$

$$\rho_3(g, h; a; x) = r \circ r(g, h; a; x) = \min |\text{pr}_2 \circ h^{-1} \circ g(x, y)| \text{ pour } |y| = r_1(g, h; a; x),$$

$$\rho_2(g, h; a; x) = a_1, \rho_1 = \frac{1}{2} \cdot \rho_3 \text{ pour tout } (g, h; a; x) \in Q \times R^m,$$

on vérifie que $(\rho_i)_{i=1, \dots, 4} \in A$ et que

$$\rho(g, h; a; x, y) = (g, h(\rho_i(g, h; a; x); x, y))$$

est une application continue $Q \times R^m \times R^p \rightarrow B \times R^p$.

b) Si on pose $\rho'_i = r_i(g, h; a; x)$ pour $i = 1, 2$, $\rho'_j = a_j$ pour $j = 3, 4$, on a $0 < r_1 < r_2 \leq a_3 < a_4$ et

$$\rho'(g, h; a; x, y) = (g, h; (\rho'_i); x, y)$$

est une application continue $Q \times R^m \times RP \rightarrow B \times RP$.

3. On définit une application fibrée $\kappa : B \times RP \rightarrow B \times RP$ qui induit l'identité sur la base B en posant $\kappa(g, h; a; u, v) = (g, h; a; h(u, v))$. D'après le lemme (6.4) de [18], κ est un homéomorphisme qui applique $B \times RP$ sur une partie ouverte de lui-même.

$$C = \{(g, h; a; u, v) \in B \times RP : |v| \leq a_4\}$$

est une partie fermée de $B \times RP$.

On vérifie facilement que $\kappa(C)$ est également fermé dans $B \times RP$; car soit $(g_0, h_0; a^0; u_0, v_0) \in (B \times RP - \kappa(C))$, D^m une boule fermée autour de u_0 dans R^m , $c = a_4^0$, $h_0(D^m \times D_c^p) = P$. La distance $d = d(P, (u_0, v_0)) > 0$. Soit E une boule ouverte autour de (u_0, v_0) dans $D^m \times RP$ telle que rayon $E < d/4$. On recouvre P d'un nombre fini de boules ouvertes K_i autour de $h_0(x_i, y_i)$, $(x_i, y_i) \in D^m \times D_c^p$, telles que rayon $\bar{K}_i < d/4$. Si on pose $0 = P \cup \bigcup_i K_i$, on trouve $d(\bar{0}, \bar{E}) > d/2$, $h_0^{-1}(0)$ est une partie ouverte de $R^m \times RP$ et $D^m \times D_c^p \subset h_0^{-1}(0)$. Il existe alors un $b > c$ tel que $D^m \times D_b^p \subset h_0^{-1}(0)$ et, pour tout

$$(h, a_4) \in \mathcal{W}(h_0, D^m \times D_c^p, d/4) \times [0, b), (x, y) \in D^m \times D_{\frac{d}{4}}^p \text{ et } (u, v) \in \bar{E},$$

on déduit que

$$|h(x, y) - (u, v)| \geq |h_0(x, y) - (u, v)| - |h(x, y) - h_0(x, y)| \geq d/4.$$

Si U est un voisinage ouvert de g_0 dans $SB_{m,p}$, on voit finalement que l'intersection de $U \times \mathcal{W}(h_0, D^m \times D_b^p, d/4) \times ((R^3 - [0, b)) \cap A) \times E$ et de $\kappa(C)$ est vide.

A l'aide de l'application $\Theta_1 : A \times R^m \times RP \rightarrow R^m \times RP$ qui a été définie dans 1., on définit $\iota : B \times RP \rightarrow B \times RP$ par

$$\iota(g, h; a; x, y) = (g, h; a; \Theta_1(a)(x, y)).$$

Si on note par la projection $B \times RP \rightarrow R^m \times RP$, l'application

$$\Sigma = \text{pro} \kappa \circ \iota \circ \kappa^{-1} : \kappa(C) \rightarrow R^m \times RP$$

est continue et de la forme $\Sigma(g, h; a; x, y) = h \circ \Theta_1(a) \circ h^{-1}(x, y)$. Pour

$$\dot{C} = \{(g, h; a; u, v) \in B \times R^p : |v| = a_4\} \text{ et } (g, h; a; x, y) \in \kappa(\dot{C}),$$

il en résulte que $\Sigma(g, h; a; x, y) = (x, y)$. On peut donc prolonger Σ en une application continue $B \times R^p \rightarrow R^m \times R^p$ en posant

$$\Sigma(g, h; a; x, y) = (x, y) \text{ sur } B \times R^p - \kappa(\overset{\circ}{C}).$$

Avec ρ de 2.a), on forme $\Sigma \circ \rho : Q \times R^m \times R^p \rightarrow R^m \times R^p$. L'application induite $\Sigma \circ \rho(q) : R^m \times R^p \rightarrow R^m \times R^p$, pour tout $q \in Q$, est alors un élément de $SG_{m,p}^{\circ} \cap SB_{m,p}$, car, en posant

$$A(\rho_i) = \{(x, y) \in R^m \times R^p : |y| < \rho_i\},$$

on voit que

$$\Sigma \circ \rho(q) | h(A(\rho_1)) = \text{id} \text{ et } \Sigma \circ \rho(q) | (R^m \times R^p - h(\overset{\circ}{A}(\rho_4))) = \text{id}.$$

$\Sigma \circ \rho$ a en outre la propriété $\Sigma \circ \rho(q)(h(A_1)) = h(A(\rho_3))$. On notera σ l'application $Q \rightarrow SG_{m,p}^{\circ} \cap SB_{m,p}$ qui est associée à $\Sigma \circ \rho$.

4. De manière analogue à 3, on définit un homéomorphisme fibré κ' de $B \times R^p$ dans lui-même par $\kappa'(g, h; a; u, v) = (g, h; a; g(u, v))$. $\kappa'(C)$ est alors fermé dans $B \times R^p$ comme $\kappa(C)$. En définissant une homotopie $\iota_t : B \times R^p \rightarrow B \times R^p$ pour $t \in [0, 1]$ par

$$\iota_t(g, h; a; x, y) = (g, h; a; \Theta_t(a)(x, y)),$$

avec Θ_t de 1, on obtient une homotopie

$$\psi_t = \text{pr} \circ \kappa' \circ \iota_t \circ \kappa'^{-1} : \kappa'(C) \rightarrow R^m \times R^p \text{ pour } t \in [0, 1]$$

de la forme $\psi_t(g, h; a; x, y) = g \circ \Theta_t(a) \circ g^{-1}(x, y)$. Pour $(g, h; a; x, y) \in \kappa'(\dot{C})$, on a $\psi_t(g, h; a; x, y) = (x, y)$; on peut donc prolonger ψ_t de façon évidente sur $B \times R^p$ pour tout $t \in [0, 1]$.

Avec ρ' de 2.b), on forme $\psi_t \circ \rho' : Q \times R^m \times R^p \rightarrow R^m \times R^p$ pour tout $t \in [0, 1]$. L'homotopie induite

$$\psi_t \circ \rho'(q) : R^m \times R^p \rightarrow R^m \times R^p, \text{ pour tout } q \in Q,$$

possède alors les propriétés :

$$\begin{aligned} \psi_t \circ \rho'(q) | g(A(r_1)) &= \text{id}, \\ \psi_t \circ \rho'(q) | (R^m \times R^p - g(\overset{\circ}{A}_4)) &= \text{id}, \\ \psi_1 \circ \rho'(q)(g(A(r_2))) &= g(A_3), \end{aligned}$$

où $A(r_i)$ est défini comme $A(\rho_i)$, $\psi_t \circ \rho'(q) \in SG_{m,p}^* \cap SB_{m,p}$ pour tout $q \in Q$, et il existe une homotopie $\psi_t: Q \rightarrow SG_{m,p}^* \cap SB_{m,p}$ associée à $\psi_t \circ \rho'$.

5. On pose finalement $\varphi_t(q) = \sigma^{-1}(q) \circ \psi_t(q) \circ \sigma(q)$ pour tout $q \in Q$. Comme $SG^* \cap SB$ est un groupe topologique (voir le corollaire du lemme 5), $\varphi_t: Q \rightarrow SG_{m,p}^* \cap SB_{m,p}$ est une application continue. On vérifie facilement que φ_t satisfait aux conditions (1), (2), (3) de la proposition 23.

LEMME 6. Pour tout $g \in SB_{m,p}$, $x \in R^m$ et $i \in N$, on pose

$$r_i(g,x) = \min_{|y|=i} |\text{pr}_2 \circ g(x,y)|.$$

Soit de plus $A(r_i) = \{(x,y) \in R^m \times R^p : |y| \leq r_i\}$. Il existe une application h de $SB_{m,p}$ dans lui-même ayant la propriété $h(g)(R^m \times D_i^p) = A(r_i)$ pour tout i . De plus, h applique le sous-groupe $SG^* \cap SB$ dans lui-même, de même le sous-semi-groupe $SB \cap SF^*$.

DÉMONSTRATION. On pose $r_0(g,x) = \min(r_1(g,x)/2, 1/2)$ et on définit h par:

$$h(g)(x,y) = (x,y) \quad \text{pour } 0 \leq |y| \leq r_0 \text{ et tout } g \in SB_{m,p},$$

$$h(g)(x,y) = \left(x, \frac{y}{|y|} \cdot (|y| \cdot (r_1 - r_0) + r_0(1 - r_1)) (1 - r_0)^{-1}\right) \quad \text{pour } r_0 \leq |y| \leq 1,$$

$$h(g)(x,y) = \left(x, \frac{y}{|y|} \cdot (r_{i+1}(|y| - i) + r_i(i + 1 - |y|))\right) \quad \text{pour } |y| \in [i, i + 1], i \in N.$$

h est continue si $h(g)(x,y)$ est continue en (g,x,y) . Comme l'application $(g,x,y) \rightarrow g(x,y)$ de $SB \times R^m \times R^p$ dans $R^m \times R^p$ est continue, il résulte du lemme 3, si on y pose $E_1 = SB \times R^m \times N$ et $f(g,x,i,y) = \text{pr}_2 \circ g(x,y)$, que $r_i(g,x)$ est continue pour tout $i = 1, 2, \dots$, donc aussi pour $i = 0$, en (g,x) . D'après la construction, $h(g)(x,y)$ est alors continue en (g,x,y) .

LEMME 7. Soit $\gamma: SB_{m,p} \times [0,1] \rightarrow SB_{m,p}$ une application continue. On pose $\gamma(g,t) = g_t$ et on suppose que $g_t | R^m \times D_n^p = g_{1-(1/2)^n} | R^m \times D_n^p$ pour tout $t \in [1-(1/2)^n, 1)$ et $n = 1, 2, \dots$. On peut alors prolonger γ de façon continue sur $SB_{m,p} \times [0,1]$.

Démonstration: voir [14], proposition 5.

PROPOSITION 24. *Il existe une homotopie relative*

$$\Gamma : (SB_{m,p}, SB_{m,p} \cap SF_{m,p}^{\cdot}, SB_{m,p} \cap SG_{m,p}^{\cdot}) \times [0,1] \rightarrow \\ (SB_{m,p}, SB_{m,p} \cap SF_{m,p}^{\cdot}, SB_{m,p} \cap SG_{m,p}^{\cdot})$$

ayant les propriétés :

$$(7) \quad \Gamma(g,0) = g \quad \text{pour tout } g \in SB_{m,p},$$

$$(8) \quad \Gamma(g,1) \in SB_{m,p} \cap SG_{m,p}^{\cdot} \quad \text{pour tout } g \in SB_{m,p}.$$

DÉMONSTRATION

a) Par récurrence, on construit d'abord une homotopie relative

$$\alpha_t : (SB_{m,p}, SB_{m,p} \cap SF_{m,p}^{\cdot}, SB_{m,p} \cap SG_{m,p}^{\cdot}) \rightarrow \\ (SB_{m,p}, SB_{m,p} \cap SF_{m,p}^{\cdot}, SB_{m,p} \cap SG_{m,p}^{\cdot})$$

($t \in [0,1]$) ayant les propriétés :

$$(9) \quad \alpha_0(g) = h(g), \text{ si } h \text{ est l'application du lemme 6 ;}$$

$$(10) \quad \alpha_1(g)(R^m \times R^p) = g(R^m \times R^p).$$

Premier temps : Comme on déduit du lemme 6 que $h(g)(R^m \times D_1^p) \in g(R^m \times D_1^p)$, il est clair que $q_1 = (g, h; (1/2, 1, 1, 2)) \in Q$. D'après la proposition 23, $\varphi_t(q_1) \in SB \cap SG^{\cdot}$. Si on pose $\alpha_t(g) = \varphi_{2t}(q_1) \circ h(g)$ pour $t \in [0, 1/2]$, on a $\alpha_t(g) \in SB$, $\alpha_0 = h$ d'après la proposition 23(1), $\alpha_{1/2}(g)(R^m \times D_1^p) \supset g(R^m \times D_1^p)$, d'après la proposition 23(2) et

$$\alpha_{1/2}(g)(R^m \times D_2^p) \subset \varphi_1(q_1)g(R^m \times D_2^p) = g(R^m \times D_2^p)$$

d'après la proposition 23(3). La relativité de α_t est une conséquence de la relativité de $h(g)$.

Deuxième temps : On pose $q_2 = (g, \alpha_{1/2}; (1, 2, 2, 3))$ et on forme $\varphi_t(q_2)$. De plus, on définit $\alpha_t(g) = \varphi_{4t-2}(q_2) \circ \alpha_{1/2}(g)$ pour $t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$. D'après la proposition 23(1), α_t est continue pour $t \in [0, \frac{3}{4}]$ et possède les propriétés :

$$\alpha_t(g) | R^m \times D_1^p = \alpha_{1/2}(g) | R^m \times D_1^p \quad \text{pour } t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \text{ d'après la prop. 23(3),}$$

$$\alpha_{\frac{3}{4}}(g)(R^m \times D_2^p) \supset g(R^m \times D_2^p) \quad \text{d'après la proposition 23(2),}$$

$$\alpha_{\frac{3}{4}}(g)(R^m \times D_3^p) \subset g(R^m \times D_3^p) \quad \text{d'après la proposition 23(3).}$$

En outre, α_t est relatif, car $\alpha_{\frac{1}{2}}$ est relatif.

Par récurrence, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$ une homotopie relative

$$\alpha_t : (SB, SB \cap SF^*, SB \cap SG^*) \rightarrow (SB, SB \cap SF^*, SB \cap SG^*)$$

pour $t \in [1 - (\frac{1}{2})^n, 1 - (\frac{1}{2})^{n+1}]$, qui possède les propriétés :

$$\alpha_t(g) | R^m \times D_n^p = \alpha_{(1 - (\frac{1}{2})^n)}(g) | R^m \times D_n^p,$$

$$\alpha_t(g)(R^m \times R^p) \subset g(R^m \times R^p) \text{ et}$$

$$\alpha_{(1 - (\frac{1}{2})^n)}(g)(R^m \times D_n^p) \supset g(R^m \times D_n^p).$$

D'après le lemme 7, on peut prolonger α_t à l'homotopie cherchée pour tout $t \in [0, 1]$.

b) De façon similaire, on construit une homotopie

$$\beta_t : SB_{m,p} \rightarrow SG_{m,p}^* \text{ pour } t \in [0, 1],$$

ayant les propriétés :

$$(11) \quad \beta_0(g) = h(g) \text{ et}$$

$$(12) \quad \beta_1(g) = 1.$$

Premier temps : A l'aide des r_i du lemme 6, on définit une homotopie $\varphi_t^1 = \varphi_t : SB_{m,p} \rightarrow SG_{m,p}^*$ par l'application associée

$$\varphi_t(g)(x, y) = (x, y), \quad \text{pour } |y| \leq r_0, \quad t \in [0, 1]$$

$$\varphi_t(g)(x, y) = (x, \frac{y}{|y|} \cdot (r_0 + \frac{|y| - r_0}{r_1 - r_0} \cdot ((1 - t)r_1 + t - r_0))),$$

pour $r_0 \leq |y| \leq r_1, \quad t \in [0, 1],$

$$\varphi_t(g)(x, y) = (x, y \cdot \frac{1}{r_1} \cdot ((1 - t)r_1 + t)), \quad \text{pour } |y| \geq r_1, \quad t \in [0, 1].$$

φ est alors continue en (g, x, y) , car tous les r_i sont continus en (g, t, x) ; de plus $\varphi_0(g)(x, y) = (x, y)$ pour tout $(g, x, y) \in SB \times R^m \times R^p$. On pose $\beta_t(g) = \varphi_{2t}(g) \circ h(g)$ pour $t \in [0, \frac{1}{2}]$, d'où suit $\beta_0 = h$ et $\beta_{\frac{1}{2}}(g) | R^m \times D_1^p = \text{id}$.

n -ième temps : On pose

$$s_n = (n - 1) \cdot \frac{r_n}{r_{n-1}} \text{ pour } n = 2, 3, \dots \text{ et } s_1 = r_1,$$

et on définit $\varphi_t^n : SB \rightarrow SG$ par

$$\varphi_t^n(g)(x, y) = (x, y), \quad \text{pour } (x, y) \in R^m \times D_{n-1}^p,$$

$$\varphi_t^n(g)(x, y) = \left(x, \frac{y}{|y|} \left(n-1 + \frac{|y|^{-n+1}}{s_n^{-n+1}} \cdot (1 + (s_n - n)(1-t))\right)\right),$$

pour $n-1 \leq |y| \leq s_n$,

$$\varphi_t^n(g)(x, y) = \left(x, y \cdot \frac{1}{s_n} \cdot (s_n(1-t) + nt)\right) \quad \text{pour } |y| \geq s_n.$$

φ_t^n est alors continue en (g, x, y, t) et on a $\varphi_0^n(g)(x, y) = (x, y)$ pour tout $(g, x, y) \in SB \times R^m \times R^p$. On pose

$$\beta_t(g) = \varphi_{(2^n t - 2^{n-2})}^n(g) \circ \beta_{(1 - (\frac{1}{2})^{n-1})}(g), \quad \text{pour } t \in [1 - (\frac{1}{2})^{n-1}, 1 - (\frac{1}{2})^n].$$

On en déduit que $\beta_{(1 - (\frac{1}{2})^n)}(g) | R^m \times D_n^p = \text{id}$, car, pour $n-1 \leq |y| \leq s_n$, on a

$$\begin{aligned} \beta_{(1 - (\frac{1}{2})^n)}(g)(x, y) &= \varphi_1^n \circ \dots \circ \varphi_1 \circ h(x, y) \\ &= \varphi_1^n \left(x, \frac{n-1}{r_{n-1}} \cdot \frac{y}{|y|} \cdot (r_n(|y| - (n-1)) - r_{n-1}(n - |y|))\right) = (x, y). \end{aligned}$$

Finalement on applique le lemme 7.

c) On définit l'homotopie $\Gamma : SB_{m,p} \times [0, 1] \rightarrow SB_{m,p}$ par

$$\Gamma(g, t) = \begin{cases} \alpha_{1-2t}(g) \circ \alpha_1^{-1}(g) \circ g & \text{pour } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta_{2t-1}(g) \circ \alpha_1^{-1}(g) \circ g & \text{pour } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Γ est continue sur $SB_{m,p} \times [0, \frac{1}{2}]$, car l'application associée $SB \times R^m \times R^p \times [0, 1] \rightarrow R^m \times R^p$ se compose des applications continues suivantes :

$$SB \times R^m \times R^p \times [0, \frac{1}{2}] \rightarrow X \times [0, \frac{1}{2}], \quad \text{avec } X \text{ du lemme 4, définie par}$$

$$(g, x, y, t) \rightarrow (g, g(x, y), t),$$

$$X \times [0, \frac{1}{2}] \rightarrow SB \times X, \quad \text{définie par } (g, g(x, y)) \rightarrow (\alpha_{1-2t}(g), \alpha_1(g), g(x, y)),$$

$$(1 \times \nu) : SB \times X \rightarrow SB \times R^m \times R^p, \quad \text{avec } \nu \text{ du lemme 5, qui applique}$$

$$(\alpha_{1-2t}(g), \alpha_1(g), g(x, y)) \text{ dans } (\alpha_{1-2t}(g), \alpha_1^{-1}(g)(g(x, y)))$$

et finalement

$$SB \times R^m \times R^p \rightarrow R^m \times R^p, \quad \text{l'application canonique telle que}$$

$$(\alpha_{1-2t}(g), \alpha_1^{-1}(g)(g(x, y))) \rightarrow \alpha_{1-2t}(g) \circ \alpha_1^{-1}(g) \circ g(x, y).$$

De la même manière, on vérifie la continuité de l'application

$$(g, t) \rightarrow \beta_{2t-1}(g) \circ a_1^{-1}(g) \circ g.$$

Γ satisfait aux conditions (7) et (8) de la proposition 24 et possède les propriétés de relativité exigées.

D'après la définition de $SG_{m,p}^\bullet$, le groupe $SG_{m,0}^\bullet$ contient les éléments de $SH(R^m)$ qui laissent fixe l'origine: $SG_{m,0}^\bullet = SH^\bullet(R^m)$. $SE_{m,0}^\bullet$ est le semi-groupe des plongements de R^m dans lui-même qui laissent fixe l'origine de R^m et qui coïncident dans un voisinage ouvert de cette origine avec un élément de $SG_{m,0}^\bullet$.

$SE_{m,0}^\bullet$ possède des propriétés analogues à celles de $SE_{m,p}^\bullet$ énoncées dans la proposition 24. Plus précisément, on a la

PROPOSITION 24'. *Il existe une homotopie relative*

$$\Gamma' : (SE_{m,0}^\bullet, SG_{m,0}^\bullet) \times [0,1] \rightarrow (SE_{m,0}^\bullet, SG_{m,0}^\bullet)$$

ayant les propriétés :

$$(7') \quad \Gamma'(g,0) = g \quad \text{pour tout } g \in SE_{m,0}^\bullet,$$

$$(8') \quad \Gamma'(g,1) \in SG_{m,0}^\bullet \quad \text{pour tout } g \in SE_{m,0}^\bullet.$$

La démonstration reprend celle de la proposition 24. Nous pouvons donc nous contenter d'énoncer ici les lemmes nécessaires, analogues à ceux déjà démontrés.

LEMME 4'. Soit $E_1 = \{(g, h; b) \in SE_{m,0}^\bullet \times SE_{m,0}^\bullet \times R_+ : h(x) \in \text{Im } g \text{ pour } |x| \leq b\}$. Soit E la partie de $E_1 \times R^m$ ayant la propriété $(g, h; b, x) \in E$ si et seulement si $|x| \leq b$. De plus, soit $X = \{(h, u) \in SE_{m,0}^\bullet \times R^m : \exists x \in R^m \text{ tel que } u = h(x)\}$. L'application $\mu(g, h; b, x) = (g, h(x))$ de E dans X est alors une application continue.

LEMME 5'. Soit X comme dans le lemme 4'. L'application $\nu(h, u) = h^{-1}(u)$ est une application continue de X dans R^m .

PROPOSITION 23'. Soit Q le sous-espace des éléments

$$q = (g, h; (a_i)_{i=1, \dots, 4}) \in SE_{m,0}^\bullet \times SE_{m,0}^\bullet \times R^4$$

ayant les propriétés $0 < a_1 < a_2$, $0 < a_3 < a_4$ et $h(D_{a_2}^m) \subset g(D_{a_3}^m)$.

Il existe alors une homotopie

$$\varphi_t : Q \rightarrow SG_{m,0}^{\bullet} \quad (t \in [0,1])$$

telle que :

- (1') $\varphi_0(q) = 1$ pour tout $q \in Q$,
 (2') $\varphi_1(q)(h(D_{a_2}^m)) \supset g(D_{a_3}^m)$ pour tout $q = (g, h; (a_i)) \in Q$,
 (3') $\varphi_t(q)|_{(R^m - g(D_{a_4}^m))} = \text{id}$, $\varphi_t(q)|_{h(D_{a_1}^m)} = \text{id}$ pour tout $t \in [0,1]$
 et $q \in Q$.

LEMME 6'. Pour tout $g \in SE_{m,0}^{\bullet}$ et $i \in N$, on pose $r_i(g) = \min_{|x|=i} |g(x)|$.

Il existe une application continue h de $(SE_{m,0}^{\bullet}, SG_{m,0}^{\bullet})$ dans lui-même telle que $h(g)(D_i^m) = D^m(r_i)$.

LEMME 7'. Soit γ' une application continue de $SE_{m,0}^{\bullet} \times [0,1]$ dans $SE_{m,0}^{\bullet}$. En outre, pour $\gamma(g,t) = g_t$, on suppose que $g_t|_{D_n^m} = g_{(1-(\frac{1}{2})^n)}|_{D_n^m}$ pour tout $t \in [1 - (\frac{1}{2})^n, 1)$ et $n = 1, 2, \dots$. On peut alors prolonger γ en une application continue de $SE_{m,0}^{\bullet} \times [0,1]$ dans $SE_{m,0}^{\bullet}$.

THÉORÈME 4. Il existe une homotopie relative

$$F : (SE_{m,p}^{\bullet}, SF_{m,p}^{\bullet}, SG_{m,p}^{\bullet}) \times [0,1] \rightarrow (SE_{m,p}^{\bullet}, SF_{m,p}^{\bullet}, SG_{m,p}^{\bullet})$$

telle que :

- (13) $F(g,0) = g$ pour tout $g \in SE_{m,p}^{\bullet}$,
 (14) $F(g,1) \in SG_{m,p}^{\bullet}$ pour tout $g \in SE_{m,p}^{\bullet}$.

DÉMONSTRATION. Soit $SQ_{m,p}^{\bullet}$ l'espace des applications continues $\text{pr}_2 \circ g$, $g \in SE_{m,p}^{\bullet}$, muni de la C-O-topologie. On définit les applications

- $\alpha_1 : SE_{m,p}^{\bullet} \rightarrow SE_{m,0}^{\bullet}$ par $\alpha_1(g) = \dot{g}$, si $g(x,y) = (\dot{g}(x), \bar{g}(x,y))$,
 $\alpha_2 : SE_{m,0}^{\bullet} \rightarrow SE_{m,p}^{\bullet}$ par $\alpha_2(f) = f \times 1$,
 $\beta_1 : SE_{m,p}^{\bullet} \rightarrow SQ_{m,p}^{\bullet}$ par $\beta_1(g) = \bar{g}$,
 $\beta_2 : SQ_{m,p}^{\bullet} \rightarrow SB_{m,p}^{\bullet}$ par $\beta_2(h)(x,y) = (x, h(x,y))$ pour $(x,y) \in R^m \times R^p$.

Ces applications sont continues. Vérifions par exemple la continuité de α_2 . Il est clair (comparer [12], III, lemma 9, 1, p.73) que la topologie de $SE_{m,p}^{\bullet}$ est engendrée par les ensembles de forme $W(C, U \times V)$, où C

compact dans $R^m \times RP$, U ouvert dans R^m , V ouvert dans RP . Si $h_0 \times 1 = a_2(h_0) \in \mathbb{W}(C, U \times V)$, il en résulte que :

$$h_0 \times 1 \in \mathbb{W}(\text{pr}_1 C \times \text{pr}_2 C, U \times V) \subset \mathbb{W}(C, U \times V) \text{ et } h_0 \in \mathbb{W}(\text{pr}_1 C, U).$$

De plus, il suit de $h \in \mathbb{W}(\text{pr}_1 C, U)$ que $(h \times 1)(\text{pr}_1 C \times \text{pr}_2 C) \subset U \times V$.

On pose $\beta = \beta_2 \circ \beta_1$ et on définit l'application continue

$$\gamma : SE_{m,p}^\bullet \times [0,1] \rightarrow SE_{m,p}^\bullet \times SE_{m,p}^\bullet$$

par

$$\gamma(g,t) = (a_2 \circ \Gamma' \circ (a_1 \times 1)(g,t), \Gamma \circ (\beta \times 1)(g,t)) = (\Gamma'(\dot{g},t) \times 1, \Gamma(\beta(g),t))$$

avec Γ de la proposition 24 et Γ' de la proposition 24'. Si on note par μ la multiplication du semi-groupe $SE_{m,p}^\bullet$ et si on pose $F = \mu \circ \gamma$, on obtient :

$$F(g,0) = (\Gamma'(\dot{g},0) \times 1) \circ \Gamma(\beta(g),0) = (\dot{g} \times 1) \circ \beta(g) = g \text{ pour tout } g \in SE_{m,p}^\bullet,$$

$$F(g,1) = (\Gamma'(\dot{g},1) \times 1) \circ \Gamma(\beta(g),1) \text{ et } (\Gamma'(\dot{g},1) \times 1) \in SG_{m,p}^\bullet \\ \text{et } \Gamma(\beta(g),1) \in SG_{m,p}^\bullet.$$

Pour $h \in SF_{m,p}^\bullet$ on a

$$F(h,t) = (\Gamma'(\dot{h},t) \times 1) \circ \Gamma(\beta(h),t) \in SF_{m,p}^\bullet$$

et finalement, pour $h \in SG_{m,p}^\bullet$ et tout $t \in [0,1]$,

$$F(h,t) = (\Gamma'(\dot{h},t) \times 1) \circ \Gamma(\beta(h),t) \in SG_{m,p}^\bullet.$$

3.7. Prolongement d'espaces fibrés topologiques de fibre RP contenus dans des microfibrés stables-en-chaque-fibre de fibre R^{m+p} .

DÉFINITION 19. Soit $\mathfrak{h} = (E, B, i, j)$ un microfibré stable-en-chaque-fibre dans une classe de $K_s^{m+p}(B)$. On dit que \mathfrak{h} contient un p -fibré ζ si $E(\zeta) \subset E$, , si $j|E(\zeta)$ est la projection de ζ , G_p^\bullet le groupe et B la base de ζ et si les germes trivialisants $g_\kappa : U_\kappa \times R^m \times RP \ni \mathfrak{h}|U_\kappa$ contiennent des isomorphismes G_κ , qui sont définis dans un voisinage ouvert de $U_\kappa \times \{0\} \times RP$ dans $U_\kappa \times R^m \times RP$ et qui appliquent $U_\kappa \times \{0\} \times RP$ sur $E(\zeta|U_\kappa)$.

DÉFINITION 20. Soit \mathfrak{h} un microfibré stable-en-chaque-fibre qui contient un p -fibré ζ . On dit que \mathfrak{h} contient un espace fibré stable-en-chaque-fibre ξ qui prolonge ζ si ξ est contenu dans \mathfrak{h} (définition 17) et si les limitations

des trivialisations $f_\lambda: V_\lambda \times R^m \times RP \rightarrow \xi|V_\lambda$ de ξ à $V_\lambda \times \{0\} \times RP$ sont des trivialisations de ζ .

Soit \mathcal{F}'_n l'abréviation exprimant que tout microfibré stable-en-chaque-fibre au-dessus d'un complexe K localement fini de dimension n qui contient un p -fibré ζ contient aussi un espace fibré stable-en-chaque-fibre qui prolonge ζ .

Soit \mathcal{G}'_n l'abréviation exprimant que deux espaces fibrés stables-en-chaque-fibre, qui sont contenus dans un microfibré stable-en-chaque-fibre au-dessus d'un complexe localement fini et qui prolongent le même p -fibré ζ , sont f -équivalents et que l'équivalence associée induit un automorphisme de ζ .

PROPOSITION 25. \mathcal{F}'_n et \mathcal{G}'_n sont vrais pour tout n .

DÉMONSTRATION. Pour construire le prolongement de ζ , on utilise le lemme suivant :

LEMME 8. Soit B un espace compact et soit W un voisinage ouvert de $B \times \{0\} \times RP$ dans $B \times R^m \times RP$. Il existe alors un plongement h de $B \times R^m \times RP$ dans W tel que h est doublement fibré :

$$h(b, x, y) = (b, \bar{h}(b, x), \bar{\bar{h}}(b, x, y)), \bar{h}(b, 0) = 0, \bar{\bar{h}}(b, x, 0) = 0,$$

et tel que h est égal à l'identité dans $B \times \{0\} \times RP$ et dans un voisinage ouvert de la section zéro $B \times \{0\} \times \{0\}$ dans $B \times R^m \times RP$.

DÉMONSTRATION. W contient un produit $B \times aD^m \times bDP$, où aD^m est la boule de rayon a autour de l'origine dans R^m . Soit a un homéomorphisme de R^m sur $\overset{\circ}{D}^m$ qui est l'identité dans un voisinage de zéro. On choisit une suite (r_n) telle que

$$B \times D^m(r_n) \times DP(n) \subset W \quad \text{et} \quad a \geq r_n > r_{n+1} \rightarrow 0.$$

On pose :

$$A_n = B \times D^m(r_n), \quad B_n = B \times (D^m(a) - \overset{\circ}{D}^m(r_n/2))$$

et on choisit pour tout n une partition de l'unité $\{\varphi_n, \psi_n\}$ qui est associée à $\{A_n, B_n\}$. On définit $\lambda_n: B \times R^m \rightarrow R$ par

$$\lambda_1(b, x) = a, \quad \lambda_n(b, x) = \varphi_n(b, a(x)) \cdot n + \psi_n(b, a(x)) \cdot \lambda_{n-1}(b, x),$$

et on pose $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n$. $\lambda(b, x)$ est continue sauf sur $B \times \{0\}$ et, pour $|x| \rightarrow 0$,

on a $\lambda(b,x) \rightarrow \infty$ pour tout $b \in B$. De plus, les éléments $(b,x,y) \in B \times R^m \times R^p$ tels que $|y| < \lambda(b,x)$ sont contenus dans W . Si on pose $\mu(b,x) = \min(\lambda/2, 1)$, on obtient l'homéomorphisme h cherché par la définition :

$$h(b,x,y) = \begin{cases} (b, a(x), y) & \text{pour } |y| \leq \mu(b,x), \\ (b, a(x), y \cdot \frac{\lambda}{\lambda + |y| - \mu}) & \text{pour } |y| \geq \mu(b,x), |x| \neq 0, \\ (b, 0, y) & \text{pour } |x| = 0. \end{cases}$$

On démontre maintenant la proposition 25 par récurrence de façon analogue à la proposition 20.

a) \mathcal{F}'_0 : $\mathfrak{h} = (E, \{b\}, i, j)$ est trivial et possède un germe de trivialisations $f: \{b\} \times R^m \times R^p \rightarrow E$. \mathfrak{h} contient un p -fibré ζ au-dessus de b , il existe donc dans f un homéomorphisme F qui applique un voisinage W de $\{b\} \times \{0\} \times R^m \subset \{b\} \times R^m \times R^p$ dans $E_0(\mathfrak{h})$ et qui applique $\{b\} \times \{0\} \times R^p$ sur $E(\zeta)$. D'après le lemme 8, il existe un homéomorphisme $h: \{b\} \times R^m \times R^p \rightarrow W$ qui est l'identité dans un voisinage de $\{b\} \times \{0\} \times \{0\}$ et sur $\{b\} \times \{0\} \times R^p$. En posant $F \circ h(\{b\} \times R^m \times R^p) = E(\xi)$, on obtient un fibré trivial ξ qui est contenu dans \mathfrak{h} et qui prolonge ζ .

\mathcal{G}'_0 est immédiat.

b) \mathcal{F}'_{n-1} et \mathcal{G}'_{n-1} entraînent \mathcal{F}'_n . Pour chaque n -simplexe Δ de K , le microfibré stable-en-chaque-fibre $\mathfrak{h}|\Delta$ contient un espace fibré ξ_Δ qui prolonge $\zeta|\Delta$; car, en premier lieu, le théorème de relèvement des homotopies pour le couple $(\mathfrak{h}|\Delta, \zeta|\Delta)$ qui est énoncé dans la proposition 30 donne l'existence d'une *mf*-équivalence $f: \Delta \times R^m \times R^p \xrightarrow{\cong} \mathfrak{h}|\Delta$ stable-en-chaque-fibre, qui contient un homéomorphisme F appliquant un voisinage ouvert de $\Delta \times \{0\} \times R^p$ dans $E_0(\mathfrak{h}|\Delta)$ et $\Delta \times \{0\} \times R^p$ sur $E(\zeta|\Delta)$. Si h est l'homéomorphisme du lemme 8, on pose $h_\Delta = F \circ h$ et $h_\Delta(\Delta \times R^m \times R^p) = E(\xi_\Delta)$. ξ_Δ , muni de la projection $j|E(\xi_\Delta)$ et de la trivialisations h_Δ , est alors un espace fibré trivial qui est contenu dans $\mathfrak{h}|\Delta$ et qui prolonge $\zeta|\Delta$. $A = E_0(\mathfrak{h}|\Delta) - E(\xi_\Delta)$ est une partie fermée de $E_0(\mathfrak{h})$. Si on pose $P = E_0(\mathfrak{h}) - A$, on a $E(\zeta) \subset P$. Soit \mathfrak{z} le microfibré stable-en-chaque-fibre $(j^{-1}(K^{n-1}) \cap P, K^{n-1}, i', j')$ qu'on obtient en limitant \mathfrak{h} . Comme \mathfrak{z} contient le p -fibré ζ , \mathfrak{z} contient aussi, d'après \mathcal{F}'_{n-1} , un espace fibré η qui prolonge $\zeta|K^{n-1}$.

On fixe Δ . Pour tout $b \in \Delta$, la fibre de η au-dessus de b est contenue dans la fibre de ξ_Δ . De plus, $\eta|\partial\Delta$ et $\xi_\Delta|\partial\Delta$ sont contenus tous les deux

dans $\mathfrak{h}|\partial\Delta$ et ils prolongent $\zeta|\Delta$. D'après \mathfrak{E}'_{n-1} , ils sont f -équivalents au sens stable-en-chaque-fibre, et il existe une f -équivalence $q: E(\xi_\Delta|\partial\Delta) \rightarrow E(\eta|\partial\Delta)$ dont la limitation applique $E(\zeta|\partial\Delta)$ sur lui-même. On pose $h_\eta = q \circ h_\Delta|\partial\Delta \times R^m \times R^p$ et on définit une application continue $\gamma: \partial\Delta \rightarrow SF_{m,p}^\circ$ par

$$h_\Delta^{-1} \circ h_\eta(b, x, y) = (b, \gamma^b(x, y)) \quad \text{pour } (b, x, y) \in \partial\Delta \times R^m \times R^p.$$

On procède comme dans la proposition 20. On choisit un n -simplexe concentrique Δ_1 dans $\overset{\circ}{\Delta}$, on identifie $(\Delta - \overset{\circ}{\Delta}_1)$ avec $\partial\Delta \times [0, 1]$ et, si $F': SF_{m,p}^\circ \times [0, 1] \rightarrow SF_{m,p}^\circ$ est la limitation de l'homotopie F du théorème 4, on pose $F'(\gamma^b, b) = \gamma_t^b$ pour $(b, t) \in (\Delta - \overset{\circ}{\Delta}_1)$,

$$E' = \{h_\Delta((b, t), \gamma_t^b(x, y)) \mid (b, t) \in (\Delta - \overset{\circ}{\Delta}_1), (x, y) \in R^m \times R^p\}$$

et $E_1 = E(\eta) \cup E' \cup E(\xi_\Delta|\Delta_1)$. D'où suit

$$E(\zeta|K^{n-1} \cup \Delta) \subset E_1 \subset E_0(\mathfrak{h}|K^{n-1} \cup \Delta).$$

On peut munir $\xi = (j|E_1: E_1 \rightarrow K^{n-1} \cup \Delta)$ de trivialisations d'un espace fibré stable-en-chaque-fibre qui est contenu dans $\mathfrak{h}|(K^{n-1} \cup \Delta)$ et qui prolonge $\zeta|(K^{n-1} \cup \Delta)$. On définit l'homéomorphisme relatif g du couple $((\Delta - \overset{\circ}{\Delta}_1) \times R^m \times R^p, (\Delta - \overset{\circ}{\Delta}_1) \times \{0\} \times R^p)$ sur $(E', E(\zeta|(\Delta - \overset{\circ}{\Delta}_1)))$ par

$$g((b, t), x, y) = h_\Delta((b, t), \gamma_t^b(x, y)).$$

Si $e^b(x, y)$ est défini comme dans la proposition 20, on obtient une première trivialisation

$$H_\Delta: (\Delta \times R^m \times R^p, \Delta \times \{0\} \times R^p) \rightarrow (j^{-1}(\Delta) \cap E_1, E(\zeta|\Delta))$$

en posant

$$H_\Delta|\Delta_1 \times R^m \times R^p = h_\Delta|\Delta_1 \times R^m \times R^p \quad \text{et}$$

$$H_\Delta((b, t), x, y) = f((b, t), e^b(x, y)) \quad \text{pour } (b, t) \in (\Delta - \overset{\circ}{\Delta}_1).$$

En particulier, H_Δ applique $\Delta \times \{0\} \times R^p$ sur $E(\zeta|\Delta)$.

Comme dans la proposition 20, on construit les trivialisations H_U de $j|E_1$ au-dessus de voisinages ouverts des points $(b, 0) \in \partial\Delta$ dans $K^{n-1} \cup \Delta$ en partant d'un voisinage ouvert U_1 de $(b, 0)$ dans K^{n-1} au-dessus duquel il existe une trivialisation

$$h_1: (U_1 \times R^m \times R^p, U_1 \times \{0\} \times R^p) \rightarrow (E(\eta|U_1), E(\zeta|U_1))$$

du couple (η, ζ) ; en particulier H_U applique $U \times \{0\} \times R^p$ sur $E(\zeta|U)$.

Si H_η sont les trivialisations de η au-dessus de $K^{n-1} - \partial\Delta$, les trivialisations $\{H_\Delta^\circ, H_U, H_\eta\}$ font de ξ un espace fibré stable-en-chaque-fibre au-dessus de $K^{n-1} \cup \Delta$, qui est contenu dans $K^{n-1} \cup \Delta$ et qui prolonge $\xi|_{K^{n-1} \cup \Delta}$.

c) Pour démontrer que \mathcal{F}'_n entraîne \mathcal{G}'_n , on procède comme dans la proposition 20 en remplaçant partout le semi-groupe $SE_{m,p}^\bullet$ par $SF_{m,p}^\bullet$ et en vérifiant la relativité des équivalences qui interviennent.

Au théorème 3 on fait correspondre le

THEOREME 5. *Soit B un rétracte de voisinage dans R^N et soit \mathfrak{h} un microfibré stable-en-chaque-fibre au-dessus de B qui contient un p -fibré ζ . \mathfrak{h} contient alors un espace fibré ξ stable-en-chaque-fibre qui prolonge ζ et un seul, à une f -équivalence près.*

PROPOSITION 26. *Soit \mathfrak{h} un microfibré stable-en-chaque-fibre au-dessus d'une variété stable M et soit ζ un p -fibré contenu dans \mathfrak{h} . $S(\mathfrak{h}^\bullet)$ contient alors un espace fibré stable qui est construit par application de S à (\mathfrak{h}, ζ) et qui est unique à une f -équivalence stable près ; nous le notons $S(\mathfrak{h}, \zeta)$.*

La démonstration applique la construction du foncteur S . Soit F_κ un homéomorphisme contenu dans le germe $f_\kappa: U_\kappa \times R^m \times R^p \xrightarrow{\cong} \mathfrak{h}|_{U_\kappa}$, dont la limitation à $U_\kappa \times \{0\} \times R^p$ est une trivialisation de ζ . Si on définit, comme dans la proposition 17(1):

$$L_\kappa(u, \gamma) = F_\kappa(u, 0, \gamma) \text{ pour tout couple } (u, \gamma) \in U_\kappa \times R^p,$$

les homéomorphismes $L_\lambda^{-1} \circ L_\kappa$ appliquent $(U_\kappa \cap U_\lambda) \times R^p$ sur lui-même et engendrent des applications continues $l_{\lambda\kappa}: U_\kappa \cap U_\lambda \rightarrow G_p^\bullet$, donc aussi, d'après [23, théorème 3.2], un fibré de groupe G_p^\bullet et un seul à une f -équivalence près. Comme dans la proposition 17, on voit que ses transformations de coordonnées sont des homéomorphismes stables. Si on choisit d'autres homéomorphismes F_κ dans f_κ , on obtient par la même construction un deuxième fibré stable qui est f -équivalent au premier au sens stable.

PROPOSITION 27. *Soient \mathfrak{h} et \mathfrak{h}' des microfibrés stables-en-chaque-fibre au-dessus d'une variété stable, qui contiennent des p -fibrés ζ et ζ' . On suppose que \mathfrak{h} et \mathfrak{h}' sont mf -équivalents au sens stable-en-chaque-fibre et qu'il existe une mf -équivalence qui induit un homéomorphisme de*

$E(\zeta)$ sur $E(\zeta')$. Alors $S(\mathfrak{h}, \zeta)$ et $S(\mathfrak{h}', \zeta')$ sont stablement f -équivalents.

La démonstration reprend celle de la proposition 17 (b).

PROPOSITION 28. Soit η un espace fibré stable d'une classe d'équivalence stable \mathfrak{x}' de microfibrés stables au-dessus d'une variété stable M^m . Il existe alors dans $T(\mathfrak{x}')$ un microfibré stable-en-chaque-fibre qui contient un p -fibré ζ tel que $S(\mathfrak{h}, \zeta)$ est stablement f -équivalent à η .

DÉMONSTRATION. Si $H_\kappa: U_\kappa \times \mathbb{R}P \xrightarrow{\cong} \eta|_{U_\kappa}$ sont les trivialisations de η , $\mathfrak{h} = \tau_{\mathbb{U}} \circ \text{pr}_2^*(\eta)$ est un microfibré stable-en-chaque-fibre qui contient un p -fibré ζ et dont les trivialisations sont données par

$$F_\kappa(u, x, y) = (u, H_\kappa(\varphi_\kappa(x + \varphi_\kappa^{-1}(u)), y)).$$

Les trivialisations de $S(\mathfrak{h}, \zeta)$ sont alors définies par

$$L_\kappa(u, y) = F_\kappa(u, 0, y) = (u, H_\kappa(u, y))$$

et on voit, comme dans la proposition 17 c), que η et $S(\mathfrak{h}, \zeta)$ sont stablement f -équivalents.

PROPOSITION 29. Toute classe de mf -équivalence stable au-dessus d'une variété séparable et métrisable munie d'une structure stable contient tout au plus un espace fibré stable à une f -équivalence près.

DÉMONSTRATION. Si η, η' sont des espaces fibrés stables dans \mathfrak{x}' ; il existe, d'après la proposition 28, des microfibrés stables-en-chaque-fibre \mathfrak{h} et \mathfrak{h}' dans $T(\mathfrak{x}')$ qui contiennent des p -fibrés ζ et ζ' , tels que $S(\mathfrak{h}, \zeta)$ soit stablement f -équivalent à η et $S(\mathfrak{h}', \zeta')$ à η' . D'après le théorème 5, \mathfrak{h} et \mathfrak{h}' contiennent des espaces fibrés stables-en-chaque-fibre ξ et ξ' qui prolongent ζ et ζ' . D'après la proposition 27, $S(\mathfrak{h}, \zeta)$ et $S(\xi, \zeta)$ sont stablement f -équivalents, de même que $S(\mathfrak{h}', \zeta')$ et $S(\xi', \zeta')$. Comme ξ et ξ' sont contenus dans $T(\mathfrak{x}')$, ils sont f -équivalents d'après la proposition 21; l'équivalence correspondante induit un homéomorphisme de $E(\zeta)$ sur $E(\zeta')$. D'après la proposition 27, $S(\xi, \zeta)$ et $S(\xi', \zeta')$ sont stablement f -équivalents, donc aussi η et η' .

Les propositions 22 et 29 donnent le

THÉORÈME 6. Toute classe d'équivalence de microfibrés stables au-dessus d'une variété séparable, métrisable et stable contient un espace fibré stable et un seul, à une f -équivalence stable près.

3.8. Relèvement des homotopies pour les couples (\mathfrak{h}, ζ)

Dans la démonstration de la proposition 25, nous avons utilisé le théorème de relèvement des homotopies pour les couples (\mathfrak{h}, ζ) qui se composent d'un microfibré stable-en-chaque-fibre \mathfrak{h} et d'un p -fibré ζ contenu dans \mathfrak{h} . En outre, nous avons employé le relèvement des homotopies pour les microfibrés stables-en-chaque-fibre dans la démonstration de la proposition 20. On démontre ces théorèmes comme dans le cas des microfibrés topologiques [18]. Nous formulons ici les lemmes nécessaires pour les couples (\mathfrak{h}, ζ) .

DÉFINITION 21. Soient $\mathfrak{h} = (E, B, i, j)$ et $\mathfrak{h}' = (E', B', i', j')$ des microfibrés stables-en-chaque-fibre de fibre $R^m \times R^p$. Soit $f: \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}'$ un morphisme (= bundle map-germ) dans la catégorie des microfibrés topologiques ([18], définition (6.3)) au-dessus de l'application de base $\bar{f}: B \rightarrow B'$ (f contient des applications continues, injectives dans chaque fibre). On dit que f est un *morphisme stable-en-chaque-fibre* si, pour tout couple (g_κ, g'_λ) de trivialisations de \mathfrak{h} et de \mathfrak{h}' au-dessus de U_κ et de U'_λ et pour tout couple $(b, \bar{f}(b)) \in U_\kappa \times U'_\lambda$, les éléments du germe $g'_\lambda \bar{f}(b) \circ f_b \circ g_{\kappa, b}$ sont des isomorphismes stables-en-chaque-fibre.

Supposons maintenant que \mathfrak{h} et \mathfrak{h}' contiennent les p -fibrés ζ et ζ' . On dit que le couple (f, F) est un *morphisme stable-en-chaque-fibre* $(\mathfrak{h}, \zeta) \rightarrow (\mathfrak{h}', \zeta')$ si f est un morphisme stable-en-chaque-fibre $\mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}'$ et si F est un élément de f qui est défini dans un voisinage ouvert de $E(\zeta)$ dans $E(\mathfrak{h})$ et qui applique $E(\zeta)$ sur $E(\zeta')$.

(f, F) est une *équivalence stable-en-chaque-fibre* des couples (\mathfrak{h}, ζ) et (\mathfrak{h}', ζ') si f est une *mf-équivalence stable-en-chaque-fibre* et si F est un homéomorphisme de $E(\zeta)$ sur $E(\zeta')$.

LEMME 9. On suppose que (\mathfrak{h}, ζ) et (\mathfrak{h}', ζ') ont la même base B et que $(f, F): (\mathfrak{h}, \zeta) \rightarrow (\mathfrak{h}', \zeta')$ est un morphisme stable-en-chaque-fibre qui est l'identité sur la base. (f, F) est alors une *équivalence stable-en-chaque-fibre*.

LEMME 10. Soient donnés les couples (\mathfrak{h}, ζ) et (\mathfrak{h}', ζ') et soit $\{B_\alpha\}$ un recouvrement fermé et localement fini de la base B de \mathfrak{h} . Soient $(f_\alpha, F_\alpha): (\mathfrak{h}|_{B_\alpha}, \zeta|_{B_\alpha}) \rightarrow (\mathfrak{h}', \zeta')$ des morphismes stables-en-chaque-fibre tels que (f_α, F_α) et (f_β, F_β) coïncident dans $(\mathfrak{h}|_{B_\alpha \cap B_\beta}, \zeta|_{B_\alpha \cap B_\beta})$.

Il existe alors un morphisme $(f, F): (\mathfrak{h}, \zeta) \rightarrow (\mathfrak{h}', \zeta')$ stable-en-chaque-fibre qui prolonge (f_α, F_α) .

LEMME 11. Soit (\mathfrak{h}, ζ) un couple au-dessus du produit $B \times [0, 1]$ qui est trivial au-dessus de $B \times [0, \frac{1}{2}]$ et de $B \times [\frac{1}{2}, 1]$. Alors (\mathfrak{h}, ζ) est équivalent, au sens stable-en-chaque-fibre, au couple trivial au-dessus de $B \times [0, 1]$.

LEMME 12. Soit (\mathfrak{h}, ζ) un couple de base $B \times [0, 1]$. Pour tout $b \in B$, il existe alors un voisinage V tel que $(\mathfrak{h}|V \times [0, 1], \zeta|B \times \{1\})$ soit mf-équivalent au couple trivial au-dessus de $V \times [0, 1]$.

LEMME 13. Soit B paracompact et (\mathfrak{h}, ζ) un couple de base $B \times [0, 1]$. Il existe alors un morphisme stable-en-chaque-fibre $(\mathfrak{h}, \zeta) \rightarrow (\mathfrak{h}|B \times \{1\}, \zeta|B \times \{1\})$ qui induit la rétraction $B \times [0, 1] \rightarrow B \times \{1\}$.

PROPOSITION 30. Relèvement des homotopies pour (\mathfrak{h}, ζ) . Soit A paracompact et soit $f: A \times [0, 1] \rightarrow B$ une homotopie. Soit \mathfrak{h} un microfibré stable-en-chaque-fibre de fibre R^{m+p} au-dessus de B qui contient un p -fibré ζ . Les couples $(f_0^* \mathfrak{h}, f_0^* \zeta)$ et $(f_1^* \mathfrak{h}, f_1^* \zeta)$ sont alors équivalents au sens des microfibrés stables-en-chaque-fibre.

COROLLAIRE. Si A est paracompact, si $f: A \times [0, 1] \rightarrow B$ est une homotopie et si \mathfrak{h} est un microfibré stable-en-chaque-fibre au-dessus de B , les microfibrés $f_0^* \mathfrak{h}$ et $f_1^* \mathfrak{h}$ sont mf-équivalents au sens stable-en-chaque-fibre.

CHAPITRE IV

SUR L'APPROXIMATION SEMI-LINÉAIRE DES ÉLÉMENTS DU GROUPE SEMI-SIMPLICIAL D'AUTOMORPHISMES TOPOLOGIQUES DE R^n

4.0. Ce chapitre contient les premiers résultats d'une étude examinant si les éléments du groupe $\mathbf{G}_{k,n}^{\partial}$, pour $k \geq 1$ (voir chapitre 1), ont la propriété $AP_{k,n}$.

L'idée essentielle est d'approcher les éléments de $\mathbf{G}_{k,n}$ par des homéomorphismes fibrés semi-linéaires et de réduire ainsi la conjecture annulaire paramétrisée à la conjecture correspondante dans la catégorie semi-linéaire, où la conjecture annulaire ordinaire a été démontrée ([25], chapter 3, theorem 8, corollary 3).

Nous commençons dans 4.1 par observer qu'il suffit pour cela de se borner aux homéomorphismes f de $\mathbf{G}_{k,n}^{\partial}$ qui sont égaux à l'identité dans une fibre; ce détail se révélera d'importance pour l'approximation. Pour ces homéomorphismes, le *théorème 7* de 4.2 réduit la propriété $AP_{k,n}$ à trois conditions:

a) une *hypothèse d'approximation* des plongements fibrés $f: \Delta_k \times D^n \rightarrow \Delta_k \times R^n$ par des homéomorphismes semi-linéaires et fibrés;

b) une *conjecture annulaire paramétrisée* dans la catégorie semi-linéaire, qui est une généralisation du *théorème annulaire semi-linéaire* bien connu;

c) une hypothèse concernant l'*équivalence* des boules semi-linéaires d'approximation.

Ce *théorème 7* a un caractère essentiellement heuristique; nous l'incluons ici surtout pour expliquer dans quel sens le *théorème 8*, ou *théorème d'approximation*, dont la démonstration constitue le reste de ce chapitre, contribue à l'étude des éléments de $\mathbf{G}_{k,n}^{\partial}$. Il réduit l'hypothèse d'approximation a) du *théorème 7* à deux autres hypothèses dans la catégorie semi-linéaire, dont l'une est une fibration de l'*Engulfing Theorem* de Stallings [22] qui fera l'objet d'une publication ultérieure.

4.1. DÉFINITION 22. Dans tout ce chapitre, soit k un entier ≥ 1 . Soit s un sommet du simplexe euclidien Δ_k de dimension k . On notera

$\mathbf{G}_{k,n}^s$ le sous-groupe des éléments f de $\mathbf{G}_{k,n}^\partial$ qui ont la propriété $f|\{s\} \times R^n = \text{id}$.

Par analogie avec $AP_{k,n}$ du chapitre 1, on désignera par $AP_{k,n}^s$ la conjecture suivante :

Pour tout $f \in \mathbf{G}_{k,n}^s$ et tout $a > 1$ tels que $f(\Delta_k \times D^n) \subset \Delta_k \times a\overset{\circ}{D}^n$, il existe un plongement $g: \Delta_k \times (S^{n-1} \times I) \rightarrow \Delta_k \times R^n$, fibré au-dessus de la base Δ_k , tel que :

- (1) $g(x, 0) = f(x)$ pour $x \in \Delta_k \times S^{n-1}$,
- (2) $g(\Delta_k \times S^{n-1} \times \{1\}) \subset \Delta_k \times aS^{n-1}$,
- (3) g est un plongement « rond » au-dessus du bord $\partial\Delta_k$, c'est-à-dire : $|\text{pr}_2 \circ g(x, t)| = ta + 1 - t$, pour $(x, t) \in (\partial\Delta_k \times S^{n-1}) \times [0, 1]$.

PROPOSITION 31. Pour $k \geq 1$, $AP_{k,n}^s$ entraîne $AP_{k,n}$.

DÉMONSTRATION. Soit $f \in \mathbf{G}_{k,n}^\partial$ et $f(\Delta_k \times D^n) \subset \Delta_k \times a\overset{\circ}{D}^n$. On peut factoriser $f = (f \circ (1 \times f_s^{-1})) \circ (1 \times f_s)$, où f_s est l'automorphisme de R^n défini par $f_s(y) = \text{pr}_2 f(s, y)$ pour $y \in R^n$. Soit $i: \Delta_k \times S^{n-1} \times [0, 1] \rightarrow \Delta_k \times R^n$ l'isotopie fibrée qui est définie par $i(x, t) = i(x_1, x_2, t) = (x_1, f_s(x_2) \cdot (ta + 1 - t))$. Elle a les propriétés :

$$i(x, 0) = (1 \times f_s)(x), i(\Delta_k \times S^{n-1} \times \{1\}) \subset \Delta_k \times aS^{n-1} \quad \text{et} \\ |\text{pr}_2 \circ i(x, t)| = ta + 1 - t.$$

$$f \circ (1 \times f_s^{-1}) \text{ est un élément de } \mathbf{G}_{k,n}^s \text{ et} \\ f \circ (1 \times f_s^{-1})(\Delta_k \times D^n) = f(\Delta_k \times D^n) \subset \Delta_k \times aD^n.$$

D'après l'hypothèse $AP_{k,n}^s$, il existe un plongement fibré $g: \Delta_k \times S^{n-1} \times I \rightarrow \Delta_k \times R^n$ tel que $g(x, 0) = f \circ (1 \times f_s^{-1})(x)$ pour $x \in \Delta_k \times S^{n-1}$ et qui satisfait aux conditions (2) et (3). Si on définit l'automorphisme topologique fibré h de $\Delta_k \times (aD^n - \overset{\circ}{D}^n)$ par

$$h(x) = g(x_1, \frac{x_2}{|x_2|}, \frac{|x_2| - 1}{a - 1}),$$

l'isotopie fibrée $G = h \circ i: \Delta_k \times S^{n-1} \times [0, 1] \rightarrow \Delta_k \times R^n$ possède les propriétés :

$$G(x, 0) = h \circ i(x, 0) = h(x_1, f_s(x_2)) = g(x_1, f_s(x_2), 0) \\ = f \circ (1 \times f_s^{-1})(1 \times f_s)(x) = f(x),$$

$$G(\Delta_k \times S^{n-1} \times \{1\}) \subset h(\Delta_k \times aS^{n-1}) \subset \Delta_k \times aS^{n-1} \text{ et, pour } x \in \partial\Delta_k \times S^{n-1},$$

$$\begin{aligned} |\text{pr} \circ G(x,t)| &= |\text{pr}_2 \circ h \circ i(x,t)| = |\text{pr}_2 \circ h(x_1, f_s(x_2)(ta+1-t))| \\ &= |\text{pr}_2 \circ g(x_1, f_s(x_2), t)| = ta+1-t. \end{aligned}$$

4.2. Pour démontrer que les éléments de $\mathbf{G}_{k,n}^{\partial}$ pour $k \geq 1$ ont la propriété $AP_{k,n}$, il suffit donc de démontrer que les éléments de $\mathbf{G}_{k,n}^s$ ont la propriété $AP_{k,n}^s$. Dans ce but, nous essayons d'établir le rapport existant entre les éléments de $\mathbf{G}_{k,n}^s$ et les homéomorphismes semi-linéaires fibrés. Le théorème suivant fait un premier pas dans cette direction.

DÉFINITIONS ET CONVENTIONS

a) *La catégorie semi-linéaire.* Si K est un complexe simplicial, nous notons $|K|$ l'espace topologique sous-jacent; mais on écrira K pour $|K|$, s'il n'y a pas de confusion possible. Suivant Milnor [17], nous entendons par *catégorie semi-linéaire* la catégorie des complexes simpliciaux localement finis et des applications semi-linéaires. Si K, L sont des complexes simpliciaux localement finis, une application continue $f: |K| \rightarrow |L|$ est *semi-linéaire* s'il existe une subdivision rectiligne K' de K telle que f applique tout simplexe de K' linéairement dans un simplexe de L ; dans ce cas, on écrit $f: K \rightarrow L$.

Si K, L sont des complexes localement finis, le complexe $K \times L$ est la famille des produits $\sigma \times \tau$ des simplexes de K et de L munis d'une subdivision simpliciale rectiligne, obtenue sans ajouter de nouveaux sommets; le complexe simplicial ainsi défini est unique, à un automorphisme semi-linéaire près. On a évidemment $|K \times L| = |K| \times |L|$. Les projections pr_i de $|K| \times |L|$ sur un des facteurs sont semi-linéaires, et une application $f: |K| \rightarrow |L_1| \times |L_2|$ est semi-linéaire si et seulement si les deux applications composées $\text{pr}_i \circ f: |K| \rightarrow |L_i|$ sont semi-linéaires. Une *n-boule semi-linéaire* est un complexe simplicial qui est semi-linéairement équivalent à un n -simplexe. On appelle *variété semi-linéaire de dimension n* un complexe simplicial localement fini dont chaque point possède un voisinage ouvert qui est équivalent au sens semi-linéaire à une n -boule ouverte. On trouvera plus de détails et des résultats récents concernant cette catégorie dans le travail de Williamson [24].

b) *Triangulations.* Si $T_i: |K_i| \rightarrow X_i$ sont des triangulations d'espaces topologiques X_i par des complexes localement finis K_i , une application continue $f: X_1 \rightarrow X_2$ est semi-linéaire par rapport à (T_1, T_2) si $T_2^{-1} \circ f \circ T_1$

est un morphisme de la catégorie semi-linéaire. Les couples (T_i, X_i) et les applications $f: X_1 \rightarrow X_2$ semi-linéaires par rapport à (T_1, T_2) constituent la *catégorie semi-linéaire au sens large*.

Soit M une variété topologique de dimension n . Une triangulation $T: |K| \rightarrow M$ est *admissible* si, pour tout point p de M , l'étoile fermée de $T^{-1}(p)$ est une n -boule semi-linéaire (on ne connaît pas de triangulation de M non-admissible). Un couple (T, M) dans lequel T est admissible sera appelé *variété semi-linéaire* (voir [22]). T est une *structure semi-linéaire* de M . En particulier, une structure semi-linéaire d'une partie ouverte U de R^n est une triangulation T de U telle que (T, U) soit une variété semi-linéaire. Si V est une partie ouverte de U , V peut être muni d'une structure semi-linéaire et d'une seule, à un automorphisme semi-linéaire de V près, telle que l'inclusion $V \subset U$ soit un plongement semi-linéaire. Si $T_i: |K_i| \rightarrow X_i$ sont deux triangulations, on note par $T_1 \times T_2$ la triangulation produit $|K_1| \times |K_2| \rightarrow X_1 \times X_2$. Si $T: |K_1| \times |K_2| \rightarrow X_1 \times X_2$ est un homéomorphisme compatible avec les projections sur les premiers facteurs, on appellera T une *triangulation fibrée*.

c) Notations. $aO^n(c)$ et $aD^n(c)$ sont des boules euclidiennes ouvertes et fermées de rayon $a > 0$ autour de c dans R^n . Nous notons $aO^n(0) = aO^n$, $1 \cdot O^n = O^n$, $\mathring{C} aO^n = O^n_a$.

Si g est une application de $X_1 \times X_2$ dans $Y_1 \times Y_2$ qui est compatible avec les projections sur les premiers facteurs, $\dot{g}: X_1 \rightarrow Y_1$ est défini par $\dot{g} \circ \text{pr}_1 = \text{pr}_1 \circ g$.

THÉORÈME 7. Soit $f \in \mathbf{G}_{k,n}^s$ et soit $a > 1$ tel que $f(\Delta_k \times D^n) \subset \Delta_k \times aO^n$. Soit $T_1 = \text{id}: K \rightarrow \mathring{\Delta}_k$ une structure semi-linéaire de $\mathring{\Delta}_k$; soit $T_2: L \rightarrow R^n$ une structure semi-linéaire telle qu'il existe des boules semi-linéaires L_1, L_2 et un sommet l_0 de L qui soient appliqués par T respectivement sur D^n, aD^n et $O \in R^n$. Supposons que les trois hypothèses suivantes soient vérifiées :

a) Hypothèse d'approximation: Soit $\epsilon: \Delta_k \times R^n \rightarrow [0, +\infty)$ une application continue telle que $\epsilon(x) = 0$ si et seulement si $x \in \partial\Delta_k \times R^n$. Pour tout $b > 1$, il existe un plongement fibré g de $(\Delta_k \times bO^n, \Delta_k \times \{0\})$ dans $(\Delta_k \times R^n, \Delta_k \times \{0\})$ tel que $\dot{g} = \text{id}$, que $g|_{\Delta_k \times bO^n}$ soit semi-linéaire par rapport à $T_1 \times T_2$, $f(\mathring{\Delta}_k \times D^n) \subset g(\mathring{\Delta}_k \times O^n)$ et $|g(x) - f(x)| \leq \epsilon(x)$ pour tout $x \in \Delta_k \times bO^n$; c'est-à-dire en particulier $g|\partial\Delta_k \times bO^n = f|\partial\Delta_k \times bO^n$. (Cette hypothèse est étudiée dans le théorème 8 de 4.3.)

b) *Conjecture annulaire paramétrisée (avec condition au bord) dans la catégorie semi-linéaire.* Soit g un plongement fibré de $(\Delta_k \times D^n, \Delta_k \times \{0\})$ dans $(\Delta_k \times aO^n, \Delta_k \times \{0\})$ tel que $\dot{g} = \text{id}$, que $g|_{\dot{\Delta}_k \times D^n}$ soit semi-linéaire par rapport à $T_1 \times T_2$ et que $g(\partial\Delta_k \times S^{n-1}) \subset \partial\Delta_k \times S^{n-1}$. Il existe alors un plongement fibré h de $\Delta_k \times (aD^n - O^n)$ dans $\Delta_k \times R^n$ qui prolonge g , tel que $h|_{\dot{\Delta}_k \times (aD^n - O^n)}$ soit semi-linéaire par rapport à $T_1 \times T_2$, que $h(x) = (x_1, \text{pr}_2 \circ g(x_1, x_2 / |x_2|) \cdot |x_2|)$ pour tout $x \in \partial\Delta_k \times (aD^n - O^n)$ et que $h(\Delta_k \times aS^{n-1}) = \Delta_k \times aS^{n-1}$. (Pour $k = 0$, cette conjecture constitue le théorème annulaire semi-linéaire.)

c) *Hypothèse de l' ϵ -équivalence des boules d'approximation.* Soit ϵ comme dans l'hypothèse a) et soit $\delta > 0$. Soient g_0 et g_1 des plongements fibrés de $(\Delta_k \times D^n, \Delta_k \times \{0\})$ dans $(\Delta_k \times aO^n, \Delta_k \times \{0\})$ tels que $\dot{g}_i = \text{id}$, $g_0|_{\partial\Delta_k \times S^{n-1}} = g_1|_{\partial\Delta_k \times S^{n-1}}$, $g_0(\partial\Delta_k \times S^{n-1}) \subset \partial\Delta_k \times S^{n-1}$, $g_1(\dot{\Delta}_k \times D^n) \subset g_0(\dot{\Delta}_k \times O^n)$ et que $g_i|_{\dot{\Delta}_k \times D^n}$ soit semi-linéaire par rapport à $T_1 \times T_2$.

Soit h_0 un prolongement de g_0 comme dans l'hypothèse b). Si $|g_1(x) - g_0(x)| \leq \epsilon(x)$ pour tout $x \in \Delta_k \times D^n$, il existe un $m \in \mathbb{N}$ qui est indépendant de g_i , ϵ et de x , et un homéomorphisme fibré h_1 de $(\Delta_k \times R^n, \Delta_k \times \{0\})$ sur lui-même, avec $\dot{h}_1 = \text{id}$, tel que

- (1) $h_1|_{\partial\Delta_k \times R^n} = \text{id}$,
- (2) $h_1 \circ g_0 = g_1$,
- (3) $|h_1(x) - x| \leq m \cdot \epsilon(x)$ pour tout $x \in \Delta_k \times aD^n$,
- (4) $h_1|_{h_0(\Delta_k \times (aD^n - (1 + \delta)O^n))} = \text{id}$,
- (5) $h_1|_{\dot{\Delta}_k \times R^n}$ est semi-linéaire par rapport à $T_1 \times T_2$.

AFFIRMATION. *Il existe un plongement fibré F de $\Delta_k \times (aD^n - O^n)$ dans $\Delta_k \times R^n$, avec $\dot{F} = \text{id}$, qui possède les propriétés :*

$$F|_{\Delta_k \times S^{n-1}} = f|_{\Delta_k \times S^{n-1}},$$

$$F(\Delta_k \times aS^{n-1}) \subset \Delta_k \times aS^{n-1} \text{ et}$$

$F|_{\partial\Delta_k \times (aD^n - O^n)} = f^*$, où f^* est le plongement de $\partial\Delta_k \times (aD^n - O^n)$ dans $\Delta_k \times R^n$ défini par $f^*(x) = (x_1, \text{pr}_2 \circ f(x_1, x_2 / |x_2|))$.

DÉMONSTRATION. Soit ϵ une application comme dans l'hypothèse a). D'après cette hypothèse, il existe des plongements fibrés g_i de $\Delta_k \times D_n$ dans $\Delta_k \times aO^n$, pour $i = 1, 2, \dots$, tels que $\dot{g}_i = \text{id}$ et tels que :

- (4) $|g_i(x) - f(x)| \leq 2^{-i} \cdot \epsilon(x)$ pour tout $x \in \Delta_k \times D^n$,
- (5) si on pose $A_0 = \Delta_k \times aD^n$, $g_i(\Delta_k \times D^n) = A_i$, on a $f(\overset{\circ}{\Delta}_k \times D^n) \subset \overset{\circ}{A}_i$ et $A_i \cap (\overset{\circ}{\Delta}_k \times R^n) \cap \overset{\circ}{A}_{i-1}$ pour tout i ,
- (6) les $g_i|_{\overset{\circ}{\Delta}_k \times D^n}$ sont semi-linéaires par rapport à $T_1 \times T_2$.

On déduit de (4) que :

$$|g_{i+1}(x) - g_i(x)| \leq |g_{i+1}(x) - f(x)| + |g_i(x) - f(x)| \leq 3 \cdot 2^{-i-1} \cdot \epsilon(x).$$

D'après l'hypothèse b), il existe un plongement fibré h_1 de $\Delta_k \times (aD^n - O^n)$ dans $\Delta_k \times R^n$ qui prolonge g_1 , tel que $h_1|_{\overset{\circ}{\Delta}_k \times (aD^n - O^n)}$ soit semi-linéaire par rapport à $T_1 \times T_2$, que

- (7) $h_1|_{\partial\Delta_k \times (aD^n - O^n)} = f^*$ et que
- (8) $h_1(\Delta_k \times aS^{n-1}) \subset \Delta_k \times aS^{n-1}$.

D'après l'hypothèse c), il existe un premier homéomorphisme fibré h_2 de $(\Delta_k \times R^n, \Delta_k \times \{0\})$ sur lui-même tel que $h_2|_{\partial\Delta_k \times R^n} = \text{id}$, $h_2 \circ g_1 = g_2$,
 $|h_2(x) - x| \leq m \cdot 3 \cdot 2^{-2} \cdot \epsilon(x)$ pour tout $x \in \Delta_k \times aD^n$,
 $h_2|_{h_1(\Delta_k \times (aD^n - (1+2^{-1} \cdot (a-1))O^n))} = \text{id}$ et que $h_2|_{\overset{\circ}{\Delta}_k \times R^n}$ soit semi-linéaire par rapport à $T_1 \times T_2$.

En général, supposons donnés des homéomorphismes fibrés h_2, h_3, \dots, h_{i-1} . Par récurrence, il résulte de l'hypothèse c) qu'il existe un homéomorphisme fibré h_i de $(\Delta_k \times R^n, \Delta_k \times \{0\})$ sur lui-même tel que

- (9) $h_i|_{\partial\Delta_k \times R^n} = \text{id}$,
- (10) $h_i \circ g_{i-1} = g_i$,
- (11) $|h_i(x) - x| \leq m \cdot 3 \cdot 2^{-i} \cdot \epsilon(x)$, pour tout $x \in \Delta_k \times aD^n$,
- (12) $h_i|_{h_{i-1} \circ \dots \circ h_1(\Delta_k \times (aD^n - (1+2^{-i+1} \cdot (a-1))O^n))} = \text{id}$,
pour $i = 2, 3, \dots$,
- (13) $h_i|_{\overset{\circ}{\Delta}_k \times R^n}$ est semi-linéaire par rapport à $T_1 \times T_2$.

On pose

$$H_i = h_i \circ \dots \circ h_1 \text{ et } F = \lim_{i \rightarrow \infty} H_i : \Delta_k \times (aD^n - O^n) \rightarrow \Delta_k \times R^n.$$

A) F est bien défini et fibré, car, si $x \in \Delta_k \times (aD^n - D^n)$, il existe un i tel que $x \in \Delta_k \times (aD^n - (1+2^{-i} \cdot (a-1))O^n)$, d'où $F(x) = H_i(x)$, d'après (12). Si $x \in \Delta_k \times S^{n-1}$, on a $H_i(x) = g_i(x)$ d'après (10), donc $|H_i(x) - f(x)| < 2^{-i} \cdot \epsilon(x)$ d'après (4); d'où suit $F(x) = f(x)$.

B) Les H_i convergent uniformément vers F sur $\Delta_k \times (aD^n - O^n)$, car, pour $j \geq i$, il résulte de (11) que :

$$|H_j(x) - H_i(x)| \leq \sum_{l=i}^{j-1} |H_{l+1}(x) - H_l(x)| = \sum_{l=i}^{j-1} |h_{l+1} \circ H_l(x) - H_l(x)|$$

$$\leq \sum_{l=i}^{j-1} m \cdot 3 \cdot 2^{-l-1} \cdot \epsilon(H_l(x)) < 3m \cdot M \cdot 2^{-i},$$

où $M = \max \epsilon(x)$ pour $x \in \Delta_k \times aD^n$. F est donc continu.

C) F est injectif. Car, si $u, v \in \Delta_k \times (aD^n - D^n)$ et $F(u) = F(v)$, il existe un i , d'après (12), tel que $u, v \in \Delta_k \times (aD^n - (1 + 2^{-i} \cdot (a-1))O^n)$, donc $F(u) = H_i(u)$, $F(v) = H_i(v)$ et $u = v$. Si $u, v \in \Delta_k \times S^{n-1}$ et $F(u) = F(v)$, on a $f(u) = f(v)$, donc $u = v$. Si $u \in \overset{\circ}{\Delta}_k \times S^{n-1}$, $v \in \overset{\circ}{\Delta}_k \times (aD^n - D^n)$, il existe un i tel que $F(v) = H_i(v)$ et $v \in \overset{\circ}{\Delta}_k \times (aD^n - (1 + 2^{-i} \cdot (a-1))O^n)$, donc :

$$F(v) \in H_i(\overset{\circ}{\Delta}_k \times (aD^n - (1 + 2^{-i} \cdot (a-1))O^n)) \subset \mathcal{C}A_i,$$

mais $F(u) = f(u) \in A_i$ d'après (5), d'où $u \neq v$. Comme de plus F est fibré, F est injectif.

D) F est une application continue bijective du compact $\Delta_k \times (aD^n - O^n)$ sur $\Delta_k \times aD^n - f(\Delta_k \times O^n)$, donc un plongement.

E) On déduit de (8) et de (12) que $F(\Delta_k \times aS^{n-1}) \subset \Delta_k \times aS^{n-1}$ et de (9) et de (7) que :

$$F|\partial\Delta_k \times (aD^n - O^n) = h_1|\partial\Delta_k \times (aD^n - O^n) = f^*.$$

4.3. Dans ce paragraphe, nous étudions l'hypothèse a) du théorème 7.

Notation. Pour $u, v \in R^n - \{0\}$, soit $\theta\{u, v\} = \arccos \frac{uv}{|u| \cdot |v|}$.

THÉORÈME 8. (Théorème d'approximation) :

Hypothèse $1_{k,n}$ (Engulfing): Soit L un complexe qui est une variété semi-linéaire de dimension n et soit $T : (\Delta_k \times L, \Delta_k \times l_0) \rightarrow (\Delta_k \times R^n, \Delta_k \times \{0\})$ une triangulation fibrée telle que $\dot{T} = \text{id}$. Soit $0 < a < b$, $\epsilon > 0$. Il existe alors un homéomorphisme fibré h de $\Delta_k \times R^n$ sur lui-même, avec $\dot{h} = \text{id}$, qui est semi-linéaire par rapport à T et tel que :

$$h|\Delta_k \times (a-\epsilon)O^n = \text{id}, h|\Delta_k \times O^n(b+\epsilon) = \text{id}, h(\Delta_k \times aO^n) \supset \Delta_k \times bO^n$$

et $\theta\{\text{pr}_2 \circ h(x), x_2\} < \epsilon$, pour tout $x = (x_1, x_2) \in \Delta_k \times R^n$.

Remarque : Pour $k = 0$ et $n \geq 7$, cette hypothèse constitue une modification de E.H. Connell [7] de l'Engulfing Theorem de J. Stallings [22]. (La démonstration de cette hypothèses dans les autres cas, à l'aide de méthodes similaires, fera l'objet d'une publication ultérieure.)

Hypothèse $2_{k,n}$ (Prolongement fibré contrôlé) : Soient K, L des variétés semi-linéaires de dimension k et n . Soit :

$$T : (K \times L, K \times l_0) \rightarrow (R^k \times R^n, R^k \times \{0\})$$

une triangulation fibrée, avec $\dot{T} = \text{id}$. Soit φ un homéomorphisme de R^k sur lui-même, semi-linéaire par rapport à T tel que $\varphi|_{aD^k \cup O^k b} = \text{id}$. Soit $\delta > 0$ et $0 \leq a < b$. Il existe alors un $r > 0$ et un homéomorphisme fibré de $R^k \times rO^n$ sur lui-même qui est semi-linéaire par rapport à T et qui prolonge φ , de sorte que $f|(aD^k \cup O^k b) \times rO^n = \text{id}$ et $\theta\{\text{pr}_2 \circ f(x), x_2\} < \delta$, pour tout $x \in R^k \times rO^n$.

Remarque : Si on supprime la condition pour θ , il est évident que l'automorphisme $T \circ (\dot{T}^{-1} \circ \varphi \circ \dot{T} \times 1) \circ T^{-1}$ de $R^k \times R^n$ fournit un tel prolongement. (La démonstration de cette hypothèse utilisant les techniques de Zeeman [25] fera l'objet d'un travail ultérieur.)

Enoncé. Soit $k \geq 7$ et soient $T_1 : K \rightarrow \overset{\circ}{\Delta}_k$ et $T_2 : L \rightarrow R^n$ des structures semi-linéaires de $\overset{\circ}{\Delta}_k$ et de R^n telles que $\dot{T}_1 = \text{id}$. Soit $f \in \mathbf{G}_{k,n}^s$, soit $a > 0$ et soit $\epsilon : \Delta_k \times R^n \rightarrow [0, +\infty)$ une application continue telle que $\epsilon(x) = 0$ si et seulement si $x \in \partial\Delta_k \times R^n$. Si les hypothèses $1_{k,n}$ et $2_{k,n}$ sont vérifiées, il existe un plongement fibré g de $(\Delta_k \times aO^n, \Delta_k \times \{0\})$ dans $(\Delta_k \times R^n, \Delta_k \times \{0\})$ tel que $\dot{g} = \text{id}$, que $g|_{\overset{\circ}{\Delta}_k \times aO^n}$ soit semi-linéaire par rapport à $T_1 \times T_2$ et $|g(x) - f(x)| \leq \epsilon(x)$ pour tout $x \in \Delta_k \times aO^n$; en particulier $g|\partial\Delta_k \times aO^n = f|\partial\Delta_k \times aO^n$.

DÉMONSTRATION. Elle se compose de plusieurs propositions.

PROPOSITION 32. Soit L une variété semi-linéaire de dimension n et soit $T : (\Delta_k \times L, \Delta_k \times l_0) \rightarrow (\Delta_k \times R^n, \Delta_k \times \{0\})$ une triangulation fibrée avec $\dot{T} = \text{id}$. Soit $0 < a < b$ et $\epsilon > 0$. Soit f un homéomorphisme fibré de $(\Delta_k \times R^n, \Delta_k \times \{0\})$ sur lui-même, avec $\dot{f} = \text{id}$. Si l'hypothèse $1_{k,n}$ est

vérifiée, il existe un homéomorphisme fibré g de $(\Delta_k \times R^n, \Delta_k \times \{0\})$ sur lui-même, semi-linéaire par rapport à T , tel que $g|_{f(\Delta_k \times (a-\epsilon)O^n)} = \text{id}$, $g|_{f(\Delta_k \times O^n(b-\epsilon))} = \text{id}$, $gf(\Delta_k \times aO^n) \supset f(\Delta_k \times bO^n)$ et $\theta\{\text{pr}_2 \circ f^{-1} \circ g(x), \text{pr}_2 f^{-1}(x)\} < \epsilon$, pour tout $x \in \Delta_k \times R^n$.

DÉMONSTRATION. D'après l'hypothèse $1_{k,n}$, il existe un homéomorphisme fibré h de $(\Delta_k \times R^n, \Delta_k \times \{0\})$ sur lui-même, qui est semi-linéaire par rapport à la triangulation $f^{-1} \circ T$, tel que

$$h|_{\Delta_k \times (a-\epsilon)O^n} = \text{id}, \quad h|_{\Delta_k \times O^n(b+\epsilon)} = \text{id}, \quad h(\Delta_k \times aO^n) \supset \Delta_k \times bO^n$$

$$\text{et } \theta\{\text{pr}_2 \circ h(x), x_2\} < \epsilon.$$

Alors $g = f \circ h \circ f^{-1}$ est semi-linéaire par rapport à T et satisfait aux conditions de la proposition 32.

La prochaine proposition assure l'existence d'une expansion fibrée de $\Delta_k \times bO^n$ sur $\Delta_k \times cO^n$ qui est semi-linéaire et presque radiale. On admettra la notation cO^n , $c = +\infty$ pour R^n .

PROPOSITION 33. Soit T comme dans la proposition 32. Soit $0 \leq a < b < c \leq +\infty$. Soit h un homéomorphisme de bO^n sur cO^n ayant les propriétés suivantes : $h|_{aO^n} = \text{id}$, $\theta\{h(z), z\} = 0$ pour $z \in bO^n$ et, si $a \leq r < b$, il existe un nombre $u(r)$ tel que $c > u(r) > r$ et que $h(rS^{n-1}) = u(r)S^{n-1}$. Soit $\delta > 0$ et $\epsilon : \Delta_k \times bO^n \rightarrow (0, +\infty)$ une application continue. Il résulte alors de l'hypothèse $1_{k,n}$ qu'il existe un homéomorphisme fibré f de $\Delta_k \times bO^n$ sur $\Delta_k \times cO^n$ qui est semi-linéaire par rapport à T et tel que

$$|f(x) - (1 \times h)(x)| < \epsilon(x) \text{ et } \theta\{\text{pr}_2 \circ f(x), x_2\} < \delta,$$

pour tout $x \in \Delta_k \times bO^n$.

(Pour $k = 0$ et $n \geq 7$ ceci est un théorème de Connell [7].)

DÉMONSTRATION. Soit $\eta : \Delta_k \times cO^n \rightarrow (0, +\infty)$ une fonction continue telle que $v, w \in \Delta_k \times cO^n$, $||v_\lambda| - |w_\lambda|| < \eta(w)$ et $\theta\{v_\lambda, w_\lambda\} < \eta(w)$ pour $\lambda = 1, 2$ entraînent $|v - w| < \epsilon \circ (1 \times h^{-1})(w)$. On pose $\eta_1(w) = \min(\eta(w), \delta)$ et on choisit une suite $a = r_0 < r_1 < \dots, r_i \rightarrow b (i \rightarrow \infty)$, telle que

$$u(r_{i+2}) - u(r_i) < \min\{\eta_1(w) : w_1 \in \Delta_k, |w_2| \leq u(r_{i+2})\} = \delta_i.$$

D'après l'hypothèse $1_{k,n}$, il existe un homéomorphisme fibré f_1 de $\Delta_k \times R^n$ sur lui-même, semi-linéaire par rapport à T et qui possède les propriétés :

$$f_1(\Delta_k \times aO^n) = \text{id}, f_1(\Delta_k \times r_1 O^n) \supset \Delta_k \times u(r_1)O^n, f_1|_{\Delta_k \times O^n u(r_2)} = \text{id}$$

$$\text{et } \theta\{\text{pr}_2 \circ f_1(x), x_2\} < \delta_1/2.$$

D'après la proposition 32, il existe un homéomorphisme fibré f_2 de $\Delta_k \times R^n$ sur lui-même, semi-linéaire par rapport à T , tel que $f_2|_{f_1(\Delta_k \times r_1 O^n)} = \text{id}$ (donc aussi $f_2|_{\Delta_k \times aO^n} = \text{id}$),

$$f_2|_{f_1(\Delta_k \times O^n u(r_3))} = \text{id}, f_2 f_1(\Delta_k \times r_2 O^n) \supset f_1(\Delta_k \times u(r_2)O^n)$$

et

$$\theta\{\text{pr}_2 f_1^{-1} f_2(x), \text{pr}_2 f_1^{-1}(x)\} < \delta_2/2 \text{ pour tout } x \in \Delta_k \times R^n.$$

Supposons que les applications f_1, \dots, f_{i-1} soient définies. En substituant $F_{i-1} = f_{i-1} \circ \dots \circ f_1$ à l'application « f » de la proposition 32, on trouve un homéomorphisme fibré f_i de $\Delta_k \times R^n$ sur lui-même, semi-linéaire par rapport à T , tel que :

- (1) $f_i|_{F_{i-1}(\Delta_k \times r_{i-1} O^n)} = \text{id}$,
- (2) $f_i|_{F_{i-1}(\Delta_k \times O^n u(r_{i+1}))} = \text{id}$,
- (3) $F_i(\Delta_k \times r_i O^n) \supset F_{i-1}(\Delta_k \times u(r_i)O^n)$,
- (4) $\theta\{\text{pr}_2 F_{i-1}^{-1} \circ f_i(z), \text{pr}_2 \circ F_{i-1}^{-1}(z)\} < \delta_i/2$, pour tout $z \in \Delta_k \times R^n$.

On définit l'expansion fibrée cherchée $f: \Delta_k \times bO^n \rightarrow \Delta_k \times cO^n$ par $f = \lim_{i \rightarrow \infty} F_i|_{\Delta_k \times bO^n}$. f est bien défini et fibré, car, pour tout $x \in \Delta_k \times bO^n$, il existe un i tel que $x \in \Delta_k \times r_i O^n$ et, d'après (1), $f(x) = F_i(x)$. Comme tous les homéomorphismes f_i sont semi-linéaires par rapport à T et comme f est défini sur toute partie compacte de $\Delta_k \times bO^n$ par un nombre fini de f_i , f est semi-linéaire par rapport à T . Il est clair que $f|_{\Delta_k \times aO^n} = \text{id}$. En outre, f a les propriétés suivantes :

- A) On déduit de (2) par récurrence que $F_i|_{\Delta_k \times O^n u(r_{i+1})} = \text{id}$.
- B) $f(\Delta_k \times r_i O^n) \supset \Delta_k \times u(r_i)O^n$, $i = 0, 1, 2, \dots$;
car $f(\Delta_k \times r_i O^n) = F_i(\Delta_k \times r_i O^n)$ et, d'après (3) et A), on a :
$$F_i(\Delta_k \times r_i O^n) \supset F_{i-1}(\Delta_k \times u(r_i)O^n) = \Delta_k \times u(r_i)O^n.$$
- C) $f(\Delta_k \times r_{i+1} O^n) \subset \Delta_k \times u(r_{i+2})O^n$, $i = 0, 1, 2, \dots$; car, d'après A), on a :

$$f(\Delta_k \times r_{i+1} O^n) = F_{i+1}(\Delta_k \times r_{i+1} O^n) \subset F_{i+1}(\Delta_k \times u(r_{i+2})O^n)$$

$$= \Delta_k \times u(r_{i+2})O^n.$$

D) $x \in \Delta_k \times (r_{i+1}O^n - r_iO^n)$ entraîne $||\text{pr}_2 \circ f(x) - |h(x_2)|| < \delta_i$; car, d'après B) et C), on a $u(r_i) \leq |\text{pr}_2 \circ f(x)| < u(r_{i+2})$. En outre, on a, d'après la définition de h , $u(r_i) \leq |h(x_2)| < u(r_{i+1})$, d'où :

$$||\text{pr}_2 \circ f(x) - |h(x_2)|| < u(r_{i+2}) < \delta_i.$$

E) Si $y \in \Delta_k \times O^n r_i$, on a $\theta\{\text{pr}_2 F_i(y), y_2\} < \delta_i/2$; car, d'après B), $F_i(y) \in \Delta_k \times O^n u(r_i)$, et, d'après A), $F_{i-1}^{-1}|\Delta_k \times O^n u(r_i) = \text{id}$, donc :

$$\begin{aligned} \theta\{\text{pr}_2 \circ F_i(y), y_2\} &= \theta\{\text{pr}_2 \circ F_{i-1}^{-1} \circ F_i(y), y_2\} \\ &= \theta\{\text{pr}_2 \circ F_{i-1}^{-1} \circ F_i(y), \text{pr}_2 \circ F_{i-1}^{-1} \circ F_{i-1}(y)\} < \delta_i/2, \end{aligned}$$

d'après (4).

F) $F_i^{-1} \circ F_{i+1}(\Delta_k \times O^n r_i) \subset \Delta_k \times O^n r_i$ est évident d'après (1).

G) $x \in \Delta_k \times (r_{i+1}O^n - r_iO^n)$ entraîne $\theta\{\text{pr}_2 \circ f(x), x_2\} < \delta_i/2$. En posant $y = F_i^{-1} \circ F_{i+1}(x)$, on trouve $y \in \Delta_k \times O^n r_i$ d'après F). Il suit de E) que

$$\theta\{\text{pr}_2 F_i(y), y_2\} = \theta\{\text{pr}_2 F_{i+1}(x), y_2\} = \theta\{\text{pr}_2 \circ f(x), y_2\} < \delta_i/2.$$

D'après (4), on trouve

$$\begin{aligned} \theta\{y_2, x_2\} &= \theta\{\text{pr}_2 \circ F_i^{-1} \circ F_{i+1}(x), x_2\} \\ &= \theta\{\text{pr}_2 \circ F_i^{-1} \circ F_{i+1}(x), \text{pr}_2 \circ F_i^{-1} \circ F_i(x)\} < \delta_{i+1}/2, \end{aligned}$$

donc, en appliquant l'inégalité du triangle pour θ ,

$$\theta\{\text{pr}_2 f(x), x_2\} < \delta_i/2 + \delta_{i+1}/2 \leq \delta_i.$$

De plus, on vérifie que f est une approximation de $1 \times h$:

Si $x \in \Delta_k \times bO^n$, il existe un i tel que $x \in \Delta_k \times (r_{i+1}O^n - r_iO^n)$. D'après D), on a $||\text{pr}_2 \circ f(x) - |h(x_2)|| < \delta_i$, et, d'après G),

$$\theta\{\text{pr}_2 \circ f(x), x_2\} = \theta\{\text{pr}_2 \circ f(x), \text{pr}_2 \circ (1 \times h)(x)\} < \delta_i.$$

Comme $|h(x_2)| \leq u(r_{i+1})$, on trouve

$$\delta_i \leq \eta_1 \circ (1 \times h)(x) \leq \eta \circ (1 \times h)(x) \text{ et } \delta_i \leq \delta.$$

En substituant $v = f(x)$, $w = (1 \times h)(x)$, on obtient

$$|v - w| < \epsilon \circ (1 \times h^{-1})(1 \times h)(x) = \epsilon(x) \text{ et } \theta\{\text{pr}_2 \circ f(x), x_2\} < \delta.$$

COROLLAIRE. Soient K, L des variétés semi-linéaires et soit $T: (K \times L, K \times L_0) \rightarrow (R^k \times R^n, R^k \times \{0\})$ une triangulation fibrée, avec

$\dot{T} = \text{id}$. Soit B^k une k -boule semi-linéaire dans K . Soit $0 \leq a < b$ et $\delta > 0$. Si l'hypothèse $1_{k,n}$ est vérifiée, il existe un homéomorphisme fibré f de $R^k \times bO^n$ sur $R^k \times cO^n$ tel que $f|_{R^k \times aO^n} = \text{id}$, $f|_{B^k \times bO^n}$ est semi-linéaire par rapport à T et $\theta\{\text{pr}_2 f(x), x_2\} < \delta$ pour tout $x \in R^k \times bO^n$.

DÉMONSTRATION. Soit $a: B^k \rightarrow \Delta_k$ un homéomorphisme semi-linéaire. $T_1 = (a \times 1) \circ T \circ (a^{-1} \times 1): \Delta_k \times L \rightarrow \Delta_k \times R^n$ est alors une triangulation comme dans la proposition 33. Il existe donc un homéomorphisme fibré g de $\Delta_k \times bO^n$ sur $\Delta_k \times cO^n$ qui est semi-linéaire par rapport à T_1 tel que $\theta\{\text{pr}_2 \circ g(x), x_2\} < \delta$ pour tout $x \in \Delta_k \times bO^n$. Il en résulte que $(a^{-1} \times 1) \circ g \circ (a \times 1) = f$ est un homéomorphisme fibré de $B^k \times bO^n$ sur $B^k \times cO^n$, semi-linéaire par rapport à $T \circ (a^{-1} \times 1)$ et à T , et que :

$$\theta\{\text{pr}_2 \circ f(x), x_2\} = \theta\{\text{pr}_2 \circ g \circ (a \times 1)(x), \text{pr}_2 \circ (a \times 1)(x)\} < \delta$$

pour tout $x \in B^k \times bO^n$. Finalement, on prolonge f à $R^k \times bO^n$ à l'aide d'une rétraction ρ de R^k sur B^k , en formant $(\rho^{-1} \times 1) \circ f \circ (\rho \times 1)$.

PROPOSITION 34. Soit $T: (K \times L, K \times l_0) \rightarrow (R^k \times R^n, R^k \times \{0\})$ une triangulation fibrée comme dans le corollaire de la proposition 33. Soit $a: (O^k \times D^n, O^k \times \{0\}) \rightarrow (O^k \times R^n, O^k \times \{0\})$ un plongement fibré tel que $\dot{a} = \text{id}$ et que a soit borné: il existe un $a > 0$ tel que $a(O^k \times D^n) \subset O^k \times aD^n$. Soit φ une expansion presque radiale de O^k sur R^k , semi-linéaire par rapport à \dot{T} , qui est construite comme dans la proposition 33, si on y pose $a=0, b=1, k=0$ et $c=+\infty$ (d'après Connell [7], elle existe pour $k \geq 7$). Soit $\epsilon: R^k \times R^n \rightarrow (0, +\infty)$ une application continue. Supposons que les hypothèses $1_{k,n}$ et $2_{k,n}$ soient vérifiées. Il existe alors un homéomorphisme fibré g de $O^k \times R^n$ sur $R^k \times R^n$ qui est semi-linéaire par rapport à T et qui prolonge φ tel que: $|g(x) - (\varphi \times 1)(x)| < \epsilon(x)$ pour tout $x \in a(O^k \times D^n)$.

DÉMONSTRATION

a) D'après la construction de l'expansion φ dans la proposition 33, on peut supposer qu'il existe des homéomorphismes φ_i, Φ_i semi-linéaires par rapport à \dot{T} tels que $\varphi = \lim_{i \rightarrow \infty} \Phi_i|_{O^k}, \Phi_i = \varphi_i \circ \dots \circ \varphi_1, \Phi_0 = \text{id}$, et qui ont les propriétés (1) à (4) par rapport aux nombres r_i et $u(r_i)$ correspondants. On pose $U_i = \Phi_{i-1}(O^{k_{r_{i-1}}} \cap u(r_{i+1})D^k)$ et $A = a(O^k \times D^n)$.

Comme hypothèse de récurrence par rapport à i , nous supposons

l'existence d'une suite finie $0 < b_1 < a_1 < b_2 < a_2 < \dots < b_{i-1} < a_{i-1}$ et des homéomorphismes fibrés g_κ ($\kappa = 1, \dots, i-1$) de $R^k \times R^n$ sur lui-même qui sont semi-linéaires par rapport à T et qui possèdent les propriétés suivantes :

(5) $g_\kappa = \varphi_\kappa,$

(6) $g_\kappa|(R^k - \overset{\circ}{U}_\kappa) \times R^n = \text{id},$

(7) $g_\kappa(A \cap U_\kappa \times R^n) \subset g_\kappa(R^k \times b_\kappa O^n) \subset R^k \times a_\kappa O^n,$

(8) $|g_\kappa(x) - (\varphi_\kappa \times 1)(x)| < 2^{-\kappa} \cdot (\epsilon \circ g_0^{-1} \circ \dots \circ g_{\kappa-1}^{-1}(x))$ pour tout $x \in R^k \times b_\kappa O^n$, si on pose $g_0 = \text{id}$.

Pour $i=1$, on ne suppose donc rien. Nous nous proposons de démontrer l'existence d'un homéomorphisme fibré g_i ayant les propriétés (5) à (8). On choisit d'abord une fonction continue $\delta: R^k \times R^n \rightarrow (0, +\infty)$ telle que $v, w \in R^k \times R^n, ||v_\lambda| - |w_\lambda|| < \delta(w)$ et $\theta\{v_\lambda, w_\lambda\} < \delta(w)$, pour $\lambda = 1, 2$, entraînent $|v-w| < 2^{-i}(\epsilon \circ g_0^{-1} \circ \dots \circ g_{i-1}^{-1} \circ (\varphi_{i-1}^{-1} \times 1)(w))$.

On choisit $a_i > a_{i-1}$ tel que $a_i > \max\{|x_2| : x \in A \cap (U_i \times R^n)\}$ (ce qui est possible car a est borné) et on pose $d = \min\{\delta(w) : w_1 \in U_i, |w_2| \leq a_i\}$. De plus, on choisit une suite finie $O = s_0 < s_1 < \dots < s_p = a_i$ ($p > 1$) telle que

$$s_{j+1} - s_j < d/3, s_{p-1} > a_{i-1} \text{ et } s_{p-2} > \max\{|x_2| : x \in A \cap (U_i \times R^n)\}.$$

On pose

$$s_{p-1} = b_i, s_{p+1} = +\infty \text{ et } e_j = \frac{2j-1}{2p+1} \cdot d \text{ pour } j=1, \dots, p+1.$$

φ_i est un homéomorphisme de R^k sur lui-même, semi-linéaire par rapport à \hat{T} , tel que $\varphi_i|(R^k - \overset{\circ}{U}_i) = \text{id}$. $\psi_i = \Phi_{i-1}^{-1} \circ \varphi_i \circ \Phi_{i-1}$ est alors un homéomorphisme de R^k sur lui-même, semi-linéaire par rapport à $\Phi_{i-1}^{-1} \circ \hat{T} \circ \Phi_{i-1}$, tel que $\psi_i|_{r_{i-1} D^k \cup O^{k_u}(r_{i+1})} = \text{id}$. D'après l'hypothèse $2_{k,n}$, il existe un $\rho > 0$ et un homéomorphisme h_0 de $R^k \times \rho O^n$ sur lui-même qui prolonge ψ_i et qui est semi-linéaire par rapport à $(\Phi_{i-1}^{-1} \times 1) \circ T \circ (\Phi_{i-1} \times 1)$, donc aussi par rapport à $(\Phi_{i-1}^{-1} \times 1) \circ T$, tel que

$$h_0|(r_{i-1} D^k \cup O^{k_u}(r_{i+1})) \times \rho O^n = \text{id} \text{ et } \theta\{\text{pr}_2 \circ h_0(x), x_2\} < e_1/3,$$

pour tout $x \in R^k \times \rho O^n$.

Par conséquent, $h_1 = (\Phi_{i-1} \times 1) \circ h_0 \circ (\Phi_{i-1}^{-1} \times 1)$ est un homéomorphisme fibré de $R^k \times \rho O^n$ sur lui-même qui prolonge φ_i et qui est semi-linéaire par rapport à T , tel que :

$$h_1|(R^k - \overset{\circ}{U}_i) \times \rho O^n = \text{id} \quad \text{et} \quad \theta\{\text{pr}_2 \circ h_1(x), x_2\} < e_1/3,$$

pour tout $x \in R^k \times \rho O^n$. Si $\rho \neq s_1$, si par exemple $s_1 > \rho$, on choisit une k -boule semi-linéaire B^k contenant $u(r_{i+1})O^k$, donc U_i , et, d'après le corollaire de la proposition 33, il existe un homéomorphisme fibré ξ de $R^k \times \rho O^n$ sur $R^k \times s_1 O^n$ tel que $\xi|R^k \times \{0\} = \text{id}$, que $\theta\{\text{pr}_2 \circ \xi(x), x_2\} < e_1/3$, pour tout $x \in R^k \times \rho O^n$ et que $\xi|B^k \times \rho O^n$ soit semi-linéaire par rapport à T . Alors $f_1 = \xi \circ h_1 \circ \xi^{-1}$ est un homéomorphisme fibré de $R^k \times s_1 O^n$ sur lui-même tel que $f_1|(R^k \times \overset{\circ}{U}_i) \times s_1 O^n = \text{id}$,

$$\begin{aligned} \theta\{\text{pr}_2 \circ f_1(x), x_2\} &\leq \theta\{\text{pr}_2 \circ f_1(x), \text{pr}_2 \circ h_1 \circ \xi^{-1}(x)\} + \\ &\quad \theta\{\text{pr}_2 \circ f_1 \xi^{-1}(x), \text{pr}_2 \circ \xi^{-1}(x)\} + \\ &\quad \theta\{\text{pr}_2 \circ \xi^{-1}(x), x_2\} < e_1, \end{aligned}$$

et f_1 est semi-linéaire par rapport à T . Dans le cas $s_1 < \rho$, on trouve f_1 par un raisonnement analogue.

D'après le même corollaire, il existe une expansion fibrée ζ_1 de $R^k \times s_1 O^n$ sur $R^k \times s_2 O^n$, avec $\zeta = \text{id}$, semi-linéaire dans $B^k \times s_1 O^n$ par rapport à T , telle que $\theta\{\text{pr}_2 \circ \zeta_1(x), x_2\} < e_1$. Alors $f_2 = \zeta_2 \circ f_1 \circ \zeta_1^{-1}$ est un homéomorphisme fibré semi-linéaire de $R^k \times s_2 O^n$ sur lui-même tel que $f_2|(R^k - \overset{\circ}{U}_i) \times s_2 O^n = \text{id}$ et que

$$\begin{aligned} \theta\{\text{pr}_2 \circ f_2(x), x_2\} &\leq \theta\{\text{pr}_2 \circ f_2(x), \text{pr}_2 \circ f_1 \circ \zeta_1^{-1}(x)\} + \\ &\quad \theta\{\text{pr}_2 \circ f_1 \circ \zeta_1^{-1}(x), \text{pr}_2 \circ \zeta_1^{-1}(x)\} + \\ &\quad \theta\{\text{pr}_2 \circ \zeta_1^{-1}(x), x_2\} \leq 3e_1 = e_2. \end{aligned}$$

On choisit un nombre t_1 tel que

$$s_1 < t_1 < s_2 \quad \text{et} \quad f_2(R^k \times s_1 O^n) \subset R^k \times t_1 O^n.$$

Comme hypothèse de récurrence par rapport à j , on suppose qu'on peut choisir des nombres t_l tels que $s_l < t_l < s_{l+1}$ pour $1 \leq l < j-2$ et tels qu'il existe un homéomorphisme fibré f_{j-1} ($3 \leq j \leq p$) de $R^k \times s_{j-1} O^n$ sur lui-même ayant les propriétés

- (9) _{$j-1$} $\dot{f}_{j-1} = \varphi_i$,
- (10) _{$j-1$} $f_{j-1}|(R^k - \overset{\circ}{U}_i) \times s_{j-1} O^n = \text{id}$,
- (11) _{$j-1$} $\theta\{\text{pr}_2 \circ f_{j-1}(x), x_2\} < e_{j-1}$, pour tout $x \in R^k \times s_{j-1} O^n$,
- (12) _{$j-1$} $f_{j-1}(R^k \times s_1 O^n) \subset R^k \times t_1 O^n$,

$$(12)_{j-1} \quad f_{j-1}(R^k \times (s_{l+1}O^n - s_lO^n)) \subset R^k \times (t_{l+1}O^n - s_lO^n)$$

(suite) pour $1 \leq l < j-3$,

$$f_{j-1}(R^k \times (s_{j-2}O^n - s_{j-3}O^n)) \subset R^k \times (s_{j-1}O^n - s_{j-4}O^n) \text{ et}$$

$$f_{j-1}(R^k \times (s_{j-1}O^n - s_{j-2}O^n)) \subset R^k \times (s_{j-1}O^n - s_{j-3}O^n).$$

On choisit alors un t_{j-2} tel que $s_{j-2} < t_{j-2} < s_{j-1}$ et que $f_{j-1}(R^k \times s_{j-2}O^n) \subset R^k \times t_{j-2}O^n$, et un t'_{j-2} tel que $t_{j-2} < t'_{j-2} < s_{j-1}$ et que $R^k \times t_{j-2}O^n \subset f_{j-1}(R^k \times t'_{j-2}O^n)$.

D'après le corollaire de la proposition 33, il existe une expansion fibrée ζ_{j-1} de $R^k \times s_{j-1}O^n$ sur $R^k \times s_jO^n$, semi-linéaire sur $B^k \times s_{j-1}O^n$ par rapport à T , telle que $\zeta_{j-1}|_{R^k \times t'_{j-2}O^n} = \text{id}$ et $\theta\{\text{pr}_2 \circ \zeta_{j-1}(x), x_2\} < e_1$ pour tout $x \in R^k \times bO^n$. Par conséquent, $f_j = \zeta_{j-1} \circ f_{j-1} \circ \zeta_{j-1}^{-1}$ est un homéomorphisme fibré et semi-linéaire par rapport à T de $R^k \times s_jO^n$ sur lui-même tel que $\hat{f}_j = \varphi_j$ et $f_j|(R^k - \hat{U}_j) \times s_jO^n = \text{id}$. La propriété (11)_j suit de l'inégalité

$$\begin{aligned} \theta\{\text{pr}_2 \circ f_j(x), x_2\} &\leq \theta\{\text{pr}_2 \circ f_j(x), \text{pr}_2 \circ f_{j-1} \circ \zeta_{j-1}^{-1}(x)\} + \\ &\quad \theta\{\text{pr}_2 \circ f_{j-1} \circ \zeta_{j-1}^{-1}(x), \text{pr}_2 \circ \zeta_{j-1}^{-1}(x)\} + \\ &\quad \theta\{\text{pr}_2 \circ \zeta_{j-1}^{-1}(x), x_2\} \leq 2e_1 + e_{j-1} = e_j. \end{aligned}$$

Pour vérifier les inclusions (12)_j, on observe d'abord que $\zeta_{j-1}|_{R^k \times t_1O^n} = \text{id}$, car $t_1 < t'_{j-2}$ pour $j \geq 3$; de (12)_{j-1} il résulte alors que :

$$f_j(R^k \times s_1O^n) = \zeta_{j-1}f_{j-1}(R^k \times s_1O^n) \subset \zeta_{j-1}(R^k \times t_1O^n) = R^k \times t_1O^n.$$

Si $1 \leq l \leq j-2$, on a $s_{l+1} < t'_{j-2}$, donc :

$$f_j(R^k \times (s_{l+1}O^n - s_lO^n)) = \zeta_{j-1} \circ f_{j-1}(R^k \times (s_{l+1}O^n - s_lO^n)).$$

Ceci est contenu dans

$$\zeta_{j-1}(R^k \times (t_{l+1}O^n - s_{l-1}O^n)) = R^k \times (t_{l+1}O^n - s_{l-1}O^n),$$

d'après (12)_{j-1} et la définition de t_{j-2} .

Pour $l = j-2$, on obtient, d'après la définition de ζ_{j-1} ,

$$f_j(R^k \times (s_{j-1}O^n - s_{j-2}O^n)) \subset \zeta_{j-1} \circ f_{j-1}(R^k \times (s_{j-1}O^n - s_{j-2}O^n));$$

ceci est contenu dans $\zeta_{j-1}(R^k \times (s_{j-1}O^n - s_{j-3}O^n))$ d'après (12)_{j-1}, donc aussi dans $R^k \times (s_{j-1}O^n - s_{j-3}O^n)$. Pour $l = j-1$, la définition de ζ_{j-1} et de t'_{j-2} entraîne :

$$\begin{aligned}
 f_j(R^k \times (s_j O^n - s_{j-1} O^n)) &\subset \zeta_{j-1} \circ f_{j-1}(R^k \times (s_{j-1} O^n - t'_{j-1} O^n)) \\
 &\subset \zeta_{j-1}(R^k \times (s_{j-1} O^n - t_{j-2} O^n)) \\
 &\subset R^k \times (s_j O^n - s_{j-2} O^n).
 \end{aligned}$$

Par récurrence, on déduit l'existence d'un homéomorphisme fibré f_{p+1} de $R^k \times R^m$ sur lui-même, semi-linéaire par rapport à T , qui possède les propriétés :

$$\begin{aligned}
 (9)_{p+1} \quad & f_{p+1} = \varphi_i, \\
 (10)_{p+1} \quad & f_{p+1}|(R^k - \dot{U}_i) \times R^n = \text{id}; \\
 (11)_{p+1} \quad & \theta\{\text{pr}_2 \circ f_{p+1}(x), x_2\} < e_{p+1} = d, \text{ pour tout } x \in R^k \times R^n; \\
 (12)_{p+1} \quad & f_{p+1}(R^k \times s_1 O^n) \subset R^k \times s_2 O^n \text{ et} \\
 & f_{p+1}(R^k \times (s_{l+1} O^n - s_l O^n)) \subset R^k \times (s_{l+2} O^n - s_{l-1} O^n) \\
 & \text{pour } 1 \leq l < p-1.
 \end{aligned}$$

En particulier, on trouve $f_{p+1}(R^k \times b_i O^n) \subset R^k \times a_i O^n$, donc aussi $f_{p+1}(A \cap (U_i \times R^n)) \subset R^k \times a_i O^n$.

Si $x \in U_i \times b_i O^n$, il existe un j tel que $s_{j+1} > |x_2| \geq s_j$, pour $0 \leq j \leq p-2$. Les propriétés (12)_{p+1} donnent alors $s_{j+2} > |\text{pr}_2 f_{p+1}(x)| \geq s_{j-1}$ ($s_{-1} = 0$), d'où :

$$|\text{pr}_2 \circ f_{p+1}(x) - |x_2|| < s_{j+2} - s_{j-1} < d.$$

Comme $x \in U_i \times a_i O^n$, on a aussi $(\varphi_i \times 1)(x) \in U_i \times a_i O^n$, donc $d < \delta \circ (\varphi_i \times 1)(x)$, d'après la définition de d . Si on pose $v = f_{p+1}(x)$, $w = (\varphi_i \times 1)(x)$, les propriétés (11)_{p+1} et (12)_{p+1} entraînent :

$$|\text{pr}_2 \circ f_{p+1}(x) - \text{pr}_2 \circ (\varphi_i \times 1)(x)| < \delta \circ (\varphi_i \times 1)(x)$$

et

$$\theta\{\text{pr}_2 \circ f_{p+1}(x), \text{pr}_2 \circ (\varphi_i \times 1)(x)\} < \delta \circ (\varphi_i \times 1)(x),$$

donc

$$|f_{p+1}(x) - (\varphi_i \times 1)(x)| < 2^{-i} \cdot \epsilon \circ g_0^{-1} \circ \dots \circ g_{i-1}^{-1}(x)$$

pour tout $x \in U_i \times b_i O^n$, et même pour tout $x \in R^k \times b_i O^n$. On pose donc $f_{p+1} = g_i$.

b) Soit $G_i = g_i \circ \dots \circ g_1$. Les g_i ont les propriétés :

$$(13) \quad g_i|G_{i-1}(r_{i-1} O^k \times R^n) = \text{id},$$

$$(14) \quad g_i|G_{i-1}(O^k u(r_{i+1}) \times R^n) = \text{id},$$

$$(15) \quad G_i(r_i O^k \times R^n) \supset G_{i-1}(u(r_i) O^k \times R^n),$$

car ils prolongent les φ_i . $g = \lim_{i \rightarrow \infty} G_i|_{O^k \times R^n}$ est un homéomorphisme fibré de $O^k \times R^n$ sur $R^k \times R^n$, qui prolonge φ . En particulier, g est bien défini, car, pour tout $x \in O^k \times R^n$, il existe un i tel que $x_1 \in r_i O^k$, donc $g(x) = G_i(x)$ d'après (13). g est semi-linéaire, car, sur toute partie compacte de $O^k \times R^n$, g est défini par un nombre fini des G_i . On voit facilement que $g(r_i O^k \times R^n) \supset u(r_i) O^k \times R^n$, g est donc surjectif. Il reste à montrer que $|g(x) - (\varphi \times 1)(x)| < \epsilon(x)$ pour tout $x \in A$.

Si $x \in A$, il existe un i tel que $x_1 \in r_i O^k$, donc

$$g(x) = G_i(x) \quad \text{et} \quad |g(x) - (\varphi \times 1)(x)| = |\text{pr}_2 G_i(x) - x_2|.$$

Comme $\Phi_{\kappa-1}(r_{\kappa-1} O^k) \subset u(r_\kappa) O^k$ et $r_i < u(r_i)$, les parties U_κ ($\kappa = 1, \dots, i$) recouvrent l'ensemble $r_i O^k$. Soit $j \geq 1$ le plus petit indice κ tel que $x_1 \in U_j$. On en déduit $G_{j-1}(x) = x$ et

$$\begin{aligned} |\text{pr}_2 G_i(x) - x_2| &\leq |\text{pr}_2 G_i(x) - \text{pr}_2 G_{i-1}(x)| + \dots + |\text{pr}_2 G_j(x) - \text{pr}_2 G_{j-1}(x)| \\ &= |G_i(x) - (\varphi_i \times 1) G_{i-1}(x)| + \dots + |G_j(x) - (\varphi_j \times 1) G_{j-1}(x)|. \end{aligned}$$

Comme $x \in (U_j \times R^n) \cap A \subset R^k \times b_j O^n$, on déduit de (8) que :

$$\begin{aligned} |g_j(x) - (\varphi_j \times 1)(x)| &= |G_j(x) - (\varphi_j \times 1) G_{j-1}(x)| \\ &< 2^{-j} \circ \epsilon \circ G_{j-1}^{-1} \circ G_{j-1}(x) = 2^{-j} \cdot \epsilon(x), \end{aligned}$$

et de (7) que $G_j(x) \in R^k \times a_j O^n$.

Supposons que, pour tout λ tel que $i > \lambda \geq j$, on ait :

$$|g_\lambda \circ G_{\lambda-1}(x) - (\varphi_\lambda \times 1) \circ G_{\lambda-1}(x)| < 2^{-\lambda} \cdot \epsilon(x) \quad \text{et} \quad G_\lambda(x) \in R^k \times a_\lambda O^n.$$

Comme $b_{\lambda+1} > a_\lambda$, on a donc $G_\lambda(x) \in R^k \times b_{\lambda+1} O^n$, d'où, d'après (8),

$$|g_{\lambda+1} \circ G_\lambda(x) - (\varphi_{\lambda+1} \times 1) \circ G_\lambda(x)| < 2^{-\lambda-1} \cdot \epsilon \circ G_\lambda^{-1} \circ G_\lambda(x) = 2^{-\lambda-1} \cdot \epsilon(x),$$

et, d'après (7), $G_{\lambda+1}(x) \in R^k \times a_{\lambda+1} O^n$. Finalement on obtient :

$$|g(x) - (\varphi \times 1)(x)| = |\text{pr}_2 \circ G_i(x) - x_2| < \epsilon(x) \cdot (2^{-j} + \dots + 2^{-i}) < \epsilon(x).$$

PROPOSITION 35. Soit $T_1 \times T_2 : (K \times L, K \times l_0) \rightarrow (R^k \times R^n, R^k \times \{0\})$ une triangulation produit, avec $T_1 = \text{id}$.

Soit $h : (R^k \times D^n, R^k \times \{0\}) \rightarrow (R^k \times R^n, R^k \times \{0\})$ un plongement fibré borné, avec $\hat{h} = \text{id}$. Soit f un homéomorphisme fibré de $(R^k \times R^n, R^k \times \{0\})$

sur lui-même tel que $\dot{f} = \text{id}$ et $f|O^k \times R^n = \text{id}$. Enfin soit $\epsilon: R^k \times R^n \rightarrow (0, +\infty)$ une application continue. Si $k \geq 7$ et si les hypothèses $1_{k,n}$ et $2_{k,n}$ sont vérifiées, il existe un homéomorphisme fibré g de $(R^k \times R^n, R^k \times \{0\})$ sur lui-même, semi-linéaire par rapport à $T_1 \times T_2$, tel que $\dot{g} = \text{id}$ et $|g(x) - f(x)| < \epsilon(x)$, pour tout $x \in h(R^k \times D^n)$.

DÉMONSTRATION. On choisit une fonction continue $\delta: R^k \times R^n \rightarrow (0, +\infty)$ telle que $b, c \in R^k \times R^n$ et $|b - c| < \delta(c)$ entraînent $|f(b) - f(c)| < \epsilon(c)$. Comme $k \geq 7$, il résulte du cas $(k=0, n > 7)$ de la proposition 33 (qui a été démontré par E.H. Connell) qu'il existe un homéomorphisme fibré γ de O^k sur R^k , semi-linéaire par rapport à T_1 , avec $\gamma(0) = 0$, qui est une expansion presque radiale. Alors $\gamma \times 1$ est un homéomorphisme de $O^k \times R^n$ sur $R^k \times R^n$, semi-linéaire par rapport à $T_1 \times T_2$.

$f^{-1} \circ (T_1 \times T_2): K \times L \rightarrow R^k \times R^n$ est une triangulation fibrée telle que $\dot{f}^{-1} \circ T_1 = \text{id}$. Du fait de $f|O^k \times R^n = \text{id}$, on a :

$$(T_1 \times T_2)^{-1} \circ (\gamma^{-1} \times 1) \circ (T_1 \times T_2) = [f^{-1} \circ (T_1 \times T_2)]^{-1} \circ (\gamma^{-1} \times 1) \circ (T_1 \times T_2),$$

$\gamma^{-1} \times 1$ est donc semi-linéaire par rapport au couple $T_1 \times T_2, f^{-1} \circ (T_1 \times T_2)$. D'après la proposition 34, il existe un homéomorphisme fibré g_1 de $O^k \times R^n$ sur $R^k \times R^n$, semi-linéaire par rapport à $f^{-1} \circ (T_1 \times T_2)$, qui prolonge γ et tel que $|g_1(x) - (\gamma \times 1)(x)| < \delta \circ (\gamma \times 1)(x)$, pour tout $x \in (\gamma^{-1} \times 1) h(R^k \times D^n)$. Alors $g = f \circ g_1 \circ (\gamma^{-1} \times 1)$ est un homéomorphisme fibré de $R^k \times R^n$ sur lui-même, semi-linéaire par rapport à $T_1 \times T_2$ et tel que

$$|g_1 \circ (\gamma^{-1} \times 1)(x) - x| < \delta(x) \text{ pour tout } x \in h(R^k \times D^n).$$

D'où, d'après le choix de δ , $|g(x) - f(x)| < \epsilon(x)$ pour tout $x \in h(R^k \times D^n)$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 8

a) Il est facile de voir qu'il existe des parties $A_i \subset \Delta_k (i=1,2)$ telles que $A_i \neq \emptyset$ et des éléments $f_i \in \mathbf{G}_{k,n}^s$ tels que $f = f_2 \circ f_1$ et $f_i|A_i \times R^n = \text{id}$. Car, soit $\Delta_k = \langle s_0, \dots, s_k \rangle$ et $s_0 = s$. Pour tout $p \in \Delta_k$, il existe une paire (t, q) et une seule telle que $0 \leq t \leq 1, q \in \langle s_1, \dots, s_k \rangle$ et $p = s + t(q - s)$.

On pose :

$$A_1 = \{p = s + t(q - s) \mid 0 \leq t \leq 1/3, q \in \langle s_1, \dots, s_k \rangle\} \text{ et}$$

$$A_2 = \{p = s + t(q - s) \mid 2/3 \leq t \leq 1, q \in \langle s_1, \dots, s_k \rangle\}.$$

Soit $\alpha: (\Delta_k, \partial\Delta_k) \rightarrow (\Delta_k, \partial\Delta_k)$ une application continue telle que $\alpha|A_2 = \text{id}$ et $\alpha(A_1) = s$. On pose alors $f_1(x) = (x_1, \text{pr}_2 f(\alpha(x_1), x_2))$, pour $x \in \Delta_k \times R^n$,

et $f_2 = f \circ f_1^{-1}$ et on obtient des homéomorphismes fibrés tels que $f_i|_{A_i \times R^n} = \text{id}$ et $f_1|_{A_2 \times R^n} = f_2|_{A_2 \times R^n}$. Comme a applique le bord $\partial \Delta_k$ sur lui-même, $f_i \in \mathbf{G}_{k,n}^s$.

b) Soient E_i^k des k -boules semi-linéaires par rapport à T_1 dans Δ_k telles que $E_i^k \subset A_i$. Soit T une structure semi-linéaire, avec $\dot{T} = \text{id}$, de R^k et soit B^k une k -boule semi-linéaire par rapport à T dans R^k telle que $B^k \supset D^k$. Si $k \geq 5$, il existe alors un homéomorphisme φ_i de (Δ_k, E_i^k) sur (R^k, B^k) qui est semi-linéaire par rapport à (T_1, T) . En effet, on voit que, d'après le théorème 4 de [22], Δ_k° est la réunion $\bigcup_{j=1}^\infty E_{ij}^k$, $E_{i1}^k = E_i^k$, de k -boules semi-linéaires par rapport à T_1 . Si on suppose que R^k est la réunion $\bigcup_{j=1}^\infty B_j^k$, $B_1^k = B^k$, de k -boules semi-linéaires par rapport à T , on déduit du théorème 3 de [10] que tout homéomorphisme semi-linéaire de E_i^k sur B^k peut être prolongé à un homéomorphisme semi-linéaire de Δ_k sur R^k . Les applications $F_i = (\varphi_i \times 1) \circ f_i \circ (\varphi_i^{-1} \times 1)$ sont des homéomorphismes fibrés de $(R^k \times R^n, R^k \times \{0\})$ sur lui-même tels que $\dot{F}_i = \text{id}$ et $F_i|_{D^k \times R^n} = \text{id}$.

c) Il existe une application continue $\delta_2 : \Delta_k^\circ \times R^n \rightarrow (0, +\infty)$ telle que $|y-x| < \delta_2(x)$ entraîne $|f_2(y) - f_2(x)| < \epsilon(x)/2$, pour tout $x, y \in \Delta_k^\circ \times R^n$. De plus, il existe une fonction continue $\gamma_1 : R^k \times R^n \rightarrow (0, 1]$ telle que $|y-x| < \gamma_1(x)$ entraîne :

$$(16) \quad |(\varphi_1^{-1} \times 1)(y) - (\varphi_1^{-1} \times 1)(x)| < \delta_2 \circ f_1^{-1} \circ (\varphi_1^{-1} \times 1)(x),$$

pour tout $x, y \in R^k \times R^n$.

D'après la proposition 35, il existe un homéomorphisme fibré G_1 de $(R^k \times R^n, R^k \times \{0\})$ sur lui-même, avec $\dot{G}_1 = \text{id}$, semi-linéaire par rapport à $T \times T_2$, tel que :

$$(17) \quad |G_1(x) - F_1(x)| < \gamma_1 \circ F_1(x) \quad \text{pour tout } x \in R^k \times aD^n.$$

D'où résulte que :

$$|G_1 \circ (\varphi_1 \times 1)(y) - F_1 \circ (\varphi_1 \times 1)(y)| < \gamma_1 \circ F_1 \circ (\varphi_1 \times 1)(y),$$

pour tout $y \in \Delta_k^\circ \times aD^n$; donc, par (16), que :

$$(18) \quad |(\varphi_1^{-1} \times 1) \circ G_1 \circ (\varphi_1 \times 1)(x) - f_1(x)| < \delta_2(x),$$

pour tout $x \in \Delta_k^\circ \times aD^n$.

Si on pose $g_1 = (\varphi_1^{-1} \times 1) \circ G_1 \circ (\varphi_1 \times 1)$, g_1 est un homéomorphisme semi-linéaire par rapport à $T_1 \times T_2$ de $\overset{\circ}{\Delta}_k \times R^n$ sur lui-même. De plus, $g_1(\Delta_k \times aD^n)$ est borné; car il existe évidemment un $b > 0$ tel que $f_1(\Delta_k \times aD^n) \subset \Delta_k \times bD^n$, d'où $F_1(\Delta_k \times aD^n) \subset R^k \times bD^n$; de plus, d'après (17), $|\text{pr}_2 \circ G_1(x)| \leq \gamma_1 \circ F_1(x) + |\text{pr}_2 F_1(x)| \leq 1 + b$ pour $x \in R^k \times aD^n$, d'où $g_1(\Delta_k \times aD^n) \subset \overset{\circ}{\Delta}_k \times (1+b)D^n$.

$1/2 \cdot \epsilon \circ g_1^{-1}$ est une application continue de $\overset{\circ}{\Delta}_k \times R^n$ dans $(0, +\infty)$ et il existe une fonction continue $\gamma_2: R^k \times R^n \rightarrow (0, +\infty)$ telle que $|y-x| < \gamma_2(x)$ entraîne:

$$(19) \quad |(\varphi_2^{-1} \times 1)(x) - (\varphi_2^{-1} \times 1)(y)| < 1/2 \cdot \epsilon \circ g_1^{-1} \circ f_2^{-1} \circ (\varphi_2^{-1} \times 1)(x),$$

pour tout $x, y \in R^k \times R^n$.

D'après la proposition 35, il existe un homéomorphisme fibré G_2 de $(R^k \times R^n, R^k \times \{0\})$ sur lui-même, avec $G_2 = \text{id}$, semi-linéaire par rapport à $T \times T_2$, tel que $|G_2(y) - F_2(y)| < \gamma_2 \circ F_2(y)$ pour tout $y \in (\varphi_2 \times 1) \circ g_1 \circ (\varphi_2^{-1} \times 1)(R^k \times aD^n)$.

Il en résulte que:

$$|G_2 \circ (\varphi_2 \times 1)(x) - F_2 \circ (\varphi_2 \times 1)(x)| < \gamma_2 \circ F_2 \circ (\varphi_2 \times 1)(x)$$

pour tout $x \in g_1 \circ (\varphi_2^{-1} \times 1)(R^k \times aD^n)$, et par (19), que

$$(20) \quad |(\varphi_2^{-1} \times 1) \circ G_2 \circ (\varphi_2 \times 1)(x) - f_2(x)| < 1/2 \cdot \epsilon \circ g_1^{-1}(x)$$

pour tout $x \in g_1(\overset{\circ}{\Delta}_k \times aD^n)$.

$g_2 = (\varphi_2^{-1} \times 1) \circ G_2 \circ (\varphi_2 \times 1)$ est alors semi-linéaire par rapport à $T_1 \times T_2$.

Il résulte de (20) que $|g_2 \circ g_1(x) - f_2 \circ g_1(x)| < 1/2 \cdot \epsilon(x)$, pour tout $x \in \overset{\circ}{\Delta}_k \times aD^n$, et que, d'après (18) et la définition de δ_2 , $|f_2 \circ g_1(x) - f_2 \circ f_1(x)| < 1/2 \cdot \epsilon(x)$, pour tout $x \in \overset{\circ}{\Delta}_k \times aD^n$.

Finalement, il résulte de:

$$|g_2 \circ g_1(x) - f_2 \circ f_1(x)| \leq |g_2 \circ g_1(x) - f_2 \circ g_1(x)| + |f_2 \circ g_1(x) - f_2 \circ f_1(x)|$$

que $|g_2 \circ g_1(x) - f_2 \circ f_1(x)| < \epsilon(x)$, pour tout $x \in \overset{\circ}{\Delta}_k \times aD^n$. $g_2 \circ g_1$ est semi-linéaire par rapport à $T_1 \times T_2$. Nous posons $g = g_2 \circ g_1|_{\overset{\circ}{\Delta}_k \times aO^n}$.

d) On prolonge g en un plongement fibré de $\Delta_k \times aO^n$ dans $\Delta_k \times R^n$ par la définition $g(x) = f(x)$ pour $x \in \partial \Delta_k \times aO^n$. g est évidemment injectif et g est continu par le choix de ϵ . D'après un lemme de Williamson (voir [18], p. 66), g est aussi ouvert.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R.H. BING, Locally Tame Sets are Tame. *Annals of Math.* 59 (1954), 145-158.
- [2] R.H. BING, An Alternate Proof that 3-Manifolds can be Triangulated. *Annals of Math.* 69 (1959), 37-65.
- [3] W. BROWDER, Open and Closed Disk Bundles. *Annals of Math.* 83 (1966), 218-230.
- [4] M. BROWN, A Proof of the Generalized Schoenflies Theorem. *Bull. Amer. Math. Soc.* 66 (1960), 74-76.
- [5] M. BROWN, Locally Flat Embeddings of Topological Manifolds. *Annals of Math.* 75 (1962), 331-341.
- [6] M. BROWN and H. GLUCK, Stable Structures on Manifolds I, II, III. *Annals of Math.* 79 (1964), 1-58.
- [7] E.H. CONNELL, Approximating Stable Homeomorphisms by Piecewise Linear ones. *Annals of Math.* 78 (1963), 326-338.
- [8] S. EILENBERG and N. STEENROD, *Foundations of Algebraic Topology*. Princeton University Press, 1952.
- [9] H. GLUCK, The Embedding of Two-Spheres in the Four-Sphere. *Trans. Amer. Math. Soc.* 104 (1962), 308-333.
- [10] V.K.A.M. GUGENHEIM, Piecewise Linear Isotopy and Embeddings of Elements and Spheres (I). *Proc. London Math. Soc.* (3) 3 (1953), 29-53.
- [11] M.W. HIRSCH, On Non-Linear Cell Bundles. *Annals of Math.* 84 (1966), 373-385.
- [12] S.T. HU, *Homotopy Theory*. New York and London, Academic Press (1959).
- [13] R.C. KIRBY, On the Annulus Conjecture. *Proc. Amer. Math. Soc.* 17 (1966), 178-185.
- [14] J.M. KISTER, Microbundles are Fibre Bundles, *Annals of Math.* 80 (1964), 190-199.
- [15] R. LASHOFF, Editor, Problems in Differential and Algebraic Topology. Seattle Conference 1963. *Annals of Math.* 81 (1965), 565-591.
- [16] B. MAZUR, The Method of Infinite Repetition in Pure Topology, I. *Annals of Math.* 80 (1964), 201-226.
- [17] J. MILNOR, *Microbundles and Differential Structures*. Princeton University (1961) (mimeographed).
- [18] J. MILNOR, Microbundles, Part I. *Topology* 3, Suppl. 1 (1964), 53-80.

- [19] E.E. MOISE, Affine Structures in 3-Manifolds, IV. Piecewise Linear Approximations of Homeomorphisms. *Annals of Math.* 55 (1952), 215-222.
- [20] M. MORSE and W. HUEBSCH, The Dependence of the Schoenflies Extension on an Accessory Parameter. *J. Analyse Math.* 8 (1961), 209-271.
- [21] T. RADÒ, Über den Begriff der Riemannschen Fläche. *Acta Univ. Szeged*, 2 (1924-6), 101-121.
- [22] J. STALLINGS, The Piecewise Linear Structure of Euclidean Space. *Proc. Camb. Philos. Soc.* 58 (1962), 481-488.
- [23] N. STEENROD, *The Topology of Fibre Bundles*. Princeton University Press, 1951.
- [24] R.E. WILLIAMSON, Jr., Cobordism of Combinatorial Manifolds. *Annals of Math.* 83 (1966), 1-33.
- [25] E.C. ZEEMAN, *Seminar on Combinatorial Topology*, I.H.E.S., 1963.

REMERCIEMENTS

Je suis heureux de remercier M. C. EHRESMANN qui m'a fait l'honneur d'être le Rapporteur et le Président du Jury de cette Thèse. Il m'a autorisé à exposer l'essentiel de mes travaux dans son séminaire et a accepté de les publier dans les *Cahiers de Topologie et de Géométrie différentielle*. Qu'il soit assuré de ma profonde reconnaissance pour son aide et ses encouragements.

Je remercie M. BROWDER qui a bien voulu s'entretenir avec moi de mes travaux et faire partie du Jury.

Ma reconnaissance va également à M. DIXMIER qui a accepté de me proposer un sujet de seconde thèse.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION	1
Chapitre I. LA CONJECTURE ANNULAIRE PARAMÉTRISÉE ..	5
Chapitre II. LES AUTOMORPHISMES DES MICROFIBRÉS STABLES	18
Chapitre III. MICROFIBRÉS STABLES-EN-CHAQUE-FIBRE ET ESPACES FIBRÉS STABLES	31
Chapitre IV. SUR L'APPROXIMATION SEMI-LINÉAIRE DES ÉLÉMENTS DU GROUPE SEMI-SIMPLICIAL D'AUTOMORPHISMES TOPOLOGIQUES DE R^n	77
BIBLIOGRAPHIE	97