

# CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES

CHARLES EHRESMANN

## **Catégories structurées généralisées**

*Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques*, tome 10, n° 1 (1968), p. 139-168

[http://www.numdam.org/item?id=CTGDC\\_1968\\_\\_10\\_1\\_139\\_0](http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1968__10_1_139_0)

© Andrée C. Ehresmann et les auteurs, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## CATEGORIES STRUCTUREES GENERALISEES

*par Charles EHRESMANN*

Plusieurs articles sont consacrés en partie ou en totalité à la théorie des catégories structurées ([1], [2], [3], [4]). Ces textes sont assez denses, les hypothèses y étant réduites au minimum; il semble donc utile d'en extraire les principaux résultats, avec des hypothèses moins générales mais vérifiées dans beaucoup de cas. Tel est le but du § 1. Les exemples les plus courants sont rappelés dans le § 2. L'esquisse d'une catégorie (un peu plus simple que celle utilisée dans [4]) et les catégories structurées généralisées sont définies dans le § 3, où sont aussi comparées diverses notions de catégories structurées.

Les résultats nouveaux (énoncés sans démonstration dans [7]) se trouvent dans le § 4: Soit  $p$  un foncteur de  $H$  vers la catégorie d'applications  $\mathfrak{M}$ . On associe à une catégorie  $p$ -structurée  $(C, s)$  une espèce de morphismes dont les fibres sont formées des éléments de  $H$  de même source et de but  $s$ . Ces fibres deviennent des catégories  $q$ -structurées lorsque  $(H, D)$  est une catégorie  $q$ -dominée, le foncteur  $D$  étant supposé «partiellement» compatible avec les produits fibrés. Si en outre  $q$  est à atomes, la catégorie produit croisé associée [5] est fortement  $q$ -dominée. Ces théorèmes permettent par exemple de retrouver la catégorie quasi-topologique des sections locales associée à une catégorie topologique [6].

La terminologie et les notations sont celles de [5].

## 1. Catégorie des foncteurs $p$ -structurés.

### A. DEFINITIONS.

Nous supposons donné un foncteur  $p = (\mathfrak{M}, \underline{p}, H^*)$  d'homomorphismes saturé au-dessus de la catégorie pleine d'applications  $\mathfrak{M}$ . Le symbole  $s' \prec s$  signifie que  $s'$  est une  $p$ -sous-structure de  $s \in H^*_0$ .

$p$  est à noyaux (de couples) si, et seulement si,  $p$  est résolvant à droite. Si  $p$  est à  $\emptyset$ -produit et à produits fibrés finis, il est aussi à produits finis; en effet, soit  $a$  un élément final de  $H^*$  tel que  $p(a)$  soit un ensemble ayant un seul élément; si  $s_1 \in H^*_0$  et  $s_2 \in H^*_0$ , il existe un et un seul  $f_i \in a.H.s_i$  pour  $i = 1$  et  $2$ , et  $(s_1, s_2)$  admet pour produit dans  $p$  le produit fibré de  $(f_1, f_2)$ . Dans ce cas,  $p$  est à  $I^*$ -limites projectives, pour toute catégorie finie  $I^*$ ; si  $F$  est un foncteur de  $I^*$  vers  $H^*$ , il existe une limite projective  $s$  de  $F$  telle que  $p(s)$  soit la limite projective canonique de  $p.F$ , c'est-à-dire la classe des familles  $(x_i)_{i \in J} \in \prod_{i \in J} p.F(i)$ , où  $J = I^*_0$ , ayant la propriété: Pour tout  $k \in I$ , on a  $x_{\beta(k)} = (p.F(k))(x_{\alpha(k)})$ . Il s'ensuit que les conditions suivantes sont vérifiées:

1°) Si  $s_i \prec s$  pour tout  $i \in I =$  ensemble fini, il existe  $s' \prec s$  telle que

$$p(s') = \bigcap_{i \in I} p(s_i).$$

2°) Si  $b \in H$  et si  $s' \prec \beta(b)$ , il existe un  $(\mathfrak{M}^t, p)$ -sous-morphisme  $b'$  de  $b$  de but  $s'$ .

DEFINITION. On appelle *catégorie  $p$ -structurée* un couple  $(C^*, s)$  satisfaisant les axiomes:

1°)  $C^*$  est une catégorie,  $s \in H^*_0$  et  $C = p(s)$ .

2°) Il existe  $s_0 \prec s$ ,  $a \in s_0.H.s$  et  $b \in s_0.H.s$  tels que

$$p(s) = (C^*_0, \alpha, C) \quad \text{et} \quad p(b) = (C^*_0, \beta, C).$$

3°) Il existe un produit fibré  $s * s$  de  $(a, b)$  et un  $k \in s.H.s * s$  tels que

$$p(k) = (C, \kappa, C^* * C^*),$$

$\kappa$  étant la loi de composition de  $C^*$ .

REMARQUES. 1) Si  $p$  est à produits fibrés, il existe un produit fibré  $s * s$  de  $(a, b)$  dans  $p$  tel que  $p(s * s) = C^* * C^*$  et la condition 3 devient :

3°) Il existe  $k \in s.H.s * s$  tel que  $p(k) = (C, \kappa, C^* * C^*)$ .

2) Si  $p$  est résolvant à droite, la condition 2 peut être remplacée par :

2°) Il existe  $\bar{a} \in s.H.s$  et  $\bar{b} \in s.H.s$  tels que  $p(\bar{a}) = (C, \alpha, C)$ ,  $p(\bar{b}) = (C, \beta, C)$ . En effet,  $s_o$  est alors le  $(\mathbb{M}^t, p)$ -noyau du couple  $(s, \bar{a})$  (ou  $(s, \bar{b})$ ).

3) La condition 2 est équivalente à la suivante :

2°) Il existe  $s_o \in H_o^*$ ,  $i \in s.H.s_o$ ,  $a \in s_o.H.s$  et  $b \in s_o.H.s$  tels que

$$p(i) = (C, \iota, C_o^*), \quad p(a) = (C_o^*, \alpha, C), \quad p(b) = (C_o^*, \beta, C).$$

Soit  $\mathcal{F}(p)$  la catégorie des foncteurs  $p$ -structurés dont les éléments sont les triplets

$$\bar{F} = ((\bar{C}^*, \bar{s}), \underline{f}, (C^*, s))$$

vérifiant les conditions

1°)  $(C^*, s)$  et  $(\bar{C}^*, \bar{s})$  sont des catégories  $p$ -structurées;

2°)  $F = (\bar{C}^*, \underline{f}, C^*)$  est un foncteur;

3°) Il existe  $f \in \bar{s}.H.s$  tel que  $p(f) = (\bar{C}, \underline{f}, C)$ .

Les surjections :  $\bar{F} \rightarrow F$ ,  $\bar{F} \rightarrow f$  et  $\bar{F} \rightarrow p(f)$  définissent des foncteurs

$\hat{p}_{\mathcal{F}}$  de  $\mathcal{F}(p)$  vers la catégorie  $\mathcal{F}$  des foncteurs,

$\hat{p}_{\mathcal{F}}^H$  de  $\mathcal{F}(p)$  vers  $H^*$ ,

$\hat{p}$  de  $\mathcal{F}(p)$  vers  $\mathbb{M}$ .

On a évidemment  $\hat{p} = p_{\mathcal{F}} \cdot \hat{p}_{\mathcal{F}}^H = p \cdot \hat{p}_{\mathcal{F}}^H$ .

Si  $(C^*, s)$  est une catégorie  $p$ -structurée, une  $\hat{p}$ -sous-structure (resp.  $\hat{p}$ -structure quasi-quotient) de  $(C^*, s)$  est appelée une sous-catégorie  $p$ -structurée (resp. une catégorie  $p$ -structurée quasi-quotient) de  $(C^*, s)$ .

B. QUELQUES THEOREMES GENERAUX.

Supposons que  $p = (\mathfrak{M}, \underline{p}, H \cdot)$  soit un foncteur d'homomorphismes saturé à produits finis et résolvant à droite (et par suite à  $I \cdot$ -limites projectives pour toute catégorie finie  $I \cdot$ , en particulier à produits fibrés finis).

THEOREME 1.  $\hat{p}$  est un foncteur d'homomorphismes saturé à produits finis et résolvant à droite.

En effet, on montre que  $(C_i, s_i)_{i \in I}$  admet pour produit dans  $\hat{p}$  la catégorie  $p$ -structurée  $(\prod_{i \in I} C_i, \prod_{i \in I} s_i)$ . De plus  $(\bar{F}_1, \bar{F}_2)$  admet pour  $(\mathfrak{M}^l, \hat{p})$ -noyau la catégorie  $p$ -structurée  $(K \cdot, s')$ , où  $K \cdot$  est le noyau de  $(\hat{p}_{\mathcal{F}}(\bar{F}_1), \hat{p}_{\mathcal{F}}(\bar{F}_2))$  et  $s'$  le noyau de  $(\hat{p}_{\mathcal{F}}^H(\bar{F}_1), \hat{p}_{\mathcal{F}}^H(\bar{F}_2))$ .

THEOREME 2. Soit  $(C \cdot, s)$  une catégorie  $p$ -structurée; si  $\hat{C} \cdot$  est une sous-catégorie de  $C \cdot$  et si  $\hat{s} \vDash s$  et  $p(\hat{s}) = \hat{C}$ , alors  $(\hat{C} \cdot, \hat{s})$  est une sous-catégorie  $p$ -structurée de  $(C \cdot, s)$ .

Supposons que  $p$  soit la restriction d'un foncteur  $P = (\hat{\mathfrak{M}}, \underline{P}, \hat{H} \cdot)$  d'homomorphismes saturé, où  $\hat{\mathfrak{M}}$  est la catégorie pleine des applications associée à un univers  $\mathfrak{M}_0$  tel que  $\mathfrak{M}_0 \in \hat{\mathfrak{M}}_0$  et  $\mathfrak{M}_0 \subset \hat{\mathfrak{M}}_0$ . Si  $H = \underline{P}^{-1}(\mathfrak{M})$ ,  $P$  est dit *dénombrablement engendrant* pour  $\mathfrak{M}$  si les conditions suivantes sont vérifiées, où  $S \in \hat{H}_0$ :

1°) Si  $M \subset P(S)$  et si  $M \in \tilde{\mathfrak{M}} =$  saturante de  $\mathfrak{M}$  dans  $\hat{\mathfrak{M}}$ , il existe une  $P$ -sous-structure  $s$  de  $S$  telle que  $M \subset P(s)$ ,  $P(s) \in \tilde{\mathfrak{M}}$  et que, pour toute  $P$ -sous-structure  $s'$  de  $S$  vérifiant  $M \subset P(s')$ , on ait  $P(s) \subset P(s')$ .

2°) Si  $s_i$  est une  $P$ -sous-structure de  $S$  pour tout entier  $i$  et si  $P(s_i) \subset P(s_{i+1})$ , il existe une  $P$ -sous-structure  $\hat{s}$  de  $S$  telle que  $P(\hat{s}) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} P(s_i)$ .

La condition 1 signifie que  $P$  est  $\vDash$ -engendrant pour  $\mathfrak{M}$ .

THEOREME 3. Supposons  $P$  dénombrablement engendrant pour  $\mathfrak{M}$  et à  $\hat{\mathfrak{M}}_0$ -produits fibrés. Le foncteur  $\hat{P}$  de  $\mathcal{F}(P)$  vers  $\hat{\mathfrak{M}}$  est dénombrablement engendrant pour  $\mathfrak{M}$ . Si de plus  $H \in \mathfrak{M}_0$ , pour tout  $(C \cdot, s) \in \mathcal{F}(p)_0$  et toute relation d'équivalence  $r$  sur  $C$ , il existe une catégorie  $p$ -structurée  $(\hat{C} \cdot, \hat{s})$  quasi-quotient de  $(C \cdot, s)$  par  $r$ .

La dernière affirmation veut dire qu'il existe un foncteur  $p$ -structuré

$$\bar{G} = ((\hat{C}^\bullet, \hat{s}), \underline{g}, (C^\bullet, s))$$

tel que  $\underline{g}$  soit compatible avec  $r$  et que, si  $\bar{F} \in \mathcal{F}(p). (C^\bullet, s)$  et si  $\hat{p}(\bar{F})$  est compatible avec  $r$ , il existe un et un seul  $\bar{F}' \in \mathcal{F}(p)$  tel que  $\bar{F}' \cdot \bar{G} = \bar{F}$ .

Tous ces théorèmes sont précisés et démontrés dans « Structures quasi-quotient » [3].

C. CATEGORIES STRUCTUREES PARTICULIERES.

DEFINITION. On appelle *groupoïde  $p$ -structuré* une catégorie  $p$ -structurée  $(C^\bullet, s)$  vérifiant de plus l'axiome :

4°)  $C^\bullet$  est un groupoïde et il existe un  $l \in s.H.s$  tel que  $p(l)$  soit la bijection  $x \rightarrow x^{-1}$  de  $C$  sur  $C$ .

Soit  $\mathcal{F}_g(p)$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{F}(p)$  ayant pour unités les groupoïdes  $p$ -structurés et soit  $\hat{p}_g$  la restriction de  $\hat{p}$  à  $\mathcal{F}_g(p)$ .

THEOREME 4. *Supposons  $p$  à produits fibrés finis.  $\mathcal{F}_g(p)$  est une sous-catégorie saturée, stable par produits et noyaux de  $\mathcal{F}(p)$ .*

THEOREME 5. *Supposons que  $p$  soit la restriction d'un foncteur  $P$  dénombrablement engendrant pour  $\mathfrak{M}$  et à  $\hat{\mathfrak{M}}_0$ -produits fibrés, comme dans le § B; alors  $\hat{P}_g$  est dénombrablement engendrant pour  $\mathfrak{M}$  et, si  $H \in \hat{\mathfrak{M}}_0$ , le foncteur  $\hat{p}_g$  est à structures quasi-quotient et la catégorie  $\mathcal{F}(p)$  à  $\mathcal{F}_g(p)$ -projections.*

Soient  $H'$  et  $H''$  deux sous-classes de  $H$ .

DEFINITION. On appelle catégorie  $p((H', H'), H'')$ -structurée (resp.  $p(H', H'')$ -structurée) une catégorie  $p$ -structurée  $(C^\bullet, s)$  telle que l'on ait, avec les notations de la définition § A,

$$a \in H', \quad b \in H' \quad \text{et} \quad k \in H''$$

$$(\text{resp. } [a, b] \in H' \quad \text{et} \quad k \in H'').$$

Si  $H'^\bullet$  est une sous-catégorie de  $H^\bullet$  stable par produits et par  $p$ -sous-structures, les résultats précédents sont aussi vrais pour les caté-

gories  $p(H', H'')$ - structurées ou  $p((H', H'), H'')$ - structurées.

## 2. Exemples de catégories $p$ - structurées.

Parmi les exemples les plus importants figurent les catégories structurées par des ordres.

### A. CATEGORIES ORDONNEES.

Soit  $\Omega$  la catégorie des applications ordonnées et  $\omega$  son foncteur projection vers  $\mathfrak{M}$ . Le foncteur  $\omega$  est un foncteur d'homomorphismes saturé à  $\mathfrak{M}_o$ -produits fibrés et  $\mathcal{A}$ -étalant (i. e. si  $(M, <) \in \Omega_o$  et si  $M' \subset M$ , alors  $M'$  définit la sous-structure  $(M', <)$  de  $(M, <)$ ).

Soit  $\Omega'$  la sous-catégorie de  $\Omega$  formée des applications ordonnées strictes, i. e. des  $f = ((\hat{M}, <), \underline{f}, (M, <)) \in \Omega$  tels que

$$x' = x \text{ lorsque } x' < x \text{ et } f(x') = f(x).$$

DEFINITION. On appelle *catégorie ordonnée* une catégorie  $\omega(\Omega', \Omega)$ -structurée.

EXEMPLE. La catégorie  $\mathfrak{M}$ , munie de l'ordre

$$(M'_1, f_1, M_1) < (M', f, M) \text{ si, et seulement si, } M_1 \subset M, M'_1 \subset M' \\ \text{et } f_1 = f/M_1,$$

est une catégorie ordonnée.

Pour que  $(C', <)$  soit une catégorie ordonnée, il faut et il suffit que soient vérifiées les conditions suivantes :

$$1^o) \text{ Si } x' < x, \text{ on a } \alpha(x') < \alpha(x) \text{ et } \beta(x') < \beta(x).$$

2<sup>o</sup>)  $x' < x, y' < y, (y', x') \in C' * C'$  et  $(y, x) \in C' * C'$  entraînent  $y' . x' < y . x$ .

$$3^o) x' < x, \alpha(x') = \alpha(x) \text{ et } \beta(x') = \beta(x) \text{ entraînent } x' = x.$$

Les résultats du § 1-B s'appliquent aux catégories ordonnées.

Soit  $\Omega''$  la sous-catégorie de  $\Omega$  formée des étalements, i. e. des  $f \in \Omega$  tels que, pour tout  $x \in M$  et tout  $y' < f(x)$ , il existe  $x' < x$  vérifiant  $y' = f(x')$ . Une catégorie  $\omega(\Omega', \Omega'')$ -structurée est une catégorie ordonnée  $(C', <)$  telle que

$$z < y . x \text{ entraîne qu'il existe } y' < y, x' < x \text{ et } z = y' . x'.$$

Soit  $(C^*, <)$  une catégorie ordonnée. Si  $(x, y) \in C \times C$ , notons  $\langle x, y \rangle$  la classe des couples  $(x', y') \in C^* * C^*$  tels que  $x' < x$  et  $y' < y$ .

DEFINITION. Si  $\langle x, y \rangle$  a un plus grand élément  $(\bar{x}, \bar{y})$  dans  $(C \times C, <)$ , alors  $\bar{x} \cdot \bar{y}$  est appelé *pseudoproduit* de  $(x, y)$  et noté  $xy$ .

Soit  $\Omega_2$  la sous-catégorie de  $\Omega^*$  formée des  $f \in \Omega$  tels que, si  $y' < f(x)$ , la classe des  $x' \in M$  vérifiant  $x' < x$  et  $f(x') < y'$  admet un plus grand élément  $\bar{x}'$  et l'on a  $f(\bar{x}') = y'$ . Soit  $\Omega'_2 = \Omega_2 \cap \Omega'$ .

DEFINITION. Une catégorie  $\omega((\Omega'_2, \Omega'_2), \Omega^*)$ -structurée est appelée *catégorie ordonnée régulière*.

Ceci signifie que  $(C^*, <)$  est une catégorie  $\omega(\Omega', \Omega^*)$ -structurée vérifiant de plus l'axiome :

Si  $x \in C$ ,  $e < \alpha(x)$  et  $e \in C_0'$ , il existe un pseudoproduit  $xe \in C \cdot e$ ; si  $e' \in C_0'$  et  $e' < \beta(x)$ , il existe  $e'x \in e' \cdot C$ .

### B. CATEGORIES INDUCTIVES.

Rappelons qu'une classe inductive est une classe ordonnée  $(M, <)$  telle que toute partie  $A \neq \emptyset$  admette une intersection (= borne inférieure)  $\cap A$ ; ou d'une manière équivalente, toute partie majorée  $A$  admet une borne supérieure, appelée *agrégat*,  $\cup A$ .

Une application inductive est une application ordonnée

$$f = ((M', <), \underline{f}, (M, <)) \in \Omega,$$

où  $(M, <)$  et  $(M', <)$  sont des classes inductives, vérifiant les conditions:

1°) Si  $A$  est une partie majorée dans  $(M, <)$ , on a  $f(\cup A) = \cup f(A)$ ;

2°) Si  $y < x$  et  $y' < x'$ , on a  $f(y \cap y') = f(y) \cap f(y')$ .

Soit  $\mathcal{I}$  la sous-catégorie de  $\Omega$  formée des applications inductives et soit  $\omega_{\mathcal{I}}$  la restriction de  $\omega$  à  $\mathcal{I}$ . Alors  $\omega_{\mathcal{I}}$  est un foncteur d'homomorphismes saturé à  $\mathfrak{M}_0$ -produits et résolvant à droite.

DEFINITION. On appelle *catégorie inductive* une catégorie  $\omega_{\mathcal{I}}(\mathcal{I} \cap \Omega', \mathcal{I})$ -structurée.

Pour que  $(C^*, <)$  soit une catégorie inductive, il faut et il suffit que soient vérifiées les propriétés :



1°)  $(C^*, <)$  est une catégorie ordonnée et  $(C, <)$  une classe inductive;

2°) Si  $A < x$ , on a  $\alpha(\cup A) = \cup \alpha(A)$  et  $\beta(\cup A) = \cup \beta(A)$ ;

3°) Si  $y < x$  et  $y' < x$ , on a  $\alpha(y' \cap y) = \alpha(y') \cap \alpha(y)$  et  $\beta(y' \cap y) = \beta(y') \cap \beta(y)$ ;

4°) Si  $y_i < y$ ,  $x_i < x$  et  $(y_i, x_i) \in C^* * C^*$  pour tout  $i \in I$  (resp. pour  $i = 1, 2$ ), on a

$$\bigcup_{i \in I} y_i \cdot x_i = \left( \bigcup_{i \in I} y_i \right) \cdot \left( \bigcup_{i \in I} x_i \right)$$

$$\text{(resp. } (y_1 \cap y_2) \cdot (x_1 \cap x_2) = (y_1 \cdot x_1) \cap (y_2 \cdot x_2)\text{)}.$$

PROPOSITION 1. La condition 4 est conséquence des conditions 1, 2, 3.  $(C^*, <)$  est une catégorie inductive si, et seulement si, c'est une catégorie  $\omega(\mathcal{F} \cap \Omega', \mathcal{F})$ -structurée (resp.  $\omega(\mathcal{F} \cap \Omega', \Omega)$ -structurée). Dans ce cas, deux éléments quelconques ont un pseudoproduit et le pseudoproduit est associatif si, et seulement si,  $(C^*, <)$  est aussi  $\omega(\Omega', \Omega'')$ -structurée.

Les catégories structurées par des ordres sont étudiées en particulier dans « Catégories ordonnées, holonomie et cohomologie » [8], où l'on trouvera d'autres références.

### C. CATEGORIES TOPOLOGIQUES.

Soit  $\mathcal{T}$  la catégorie des applications continues entre espaces topologiques et soit  $\theta$  son foncteur projection vers  $\mathfrak{M}$ ;  $\theta$  est un foncteur d'homomorphismes saturé à  $\mathfrak{M}_0$ -produits, résolvant à droite et  $\mathcal{F}$ -étaillant, la  $\theta$ -sous-structure de  $T$  sur  $M \subset \theta(T)$  étant la topologie  $T/M$  induite par  $T$  sur  $M$ .

DEFINITION. Une catégorie  $\theta$ -structurée est appelée *catégorie topologique*.

$(C^*, T)$  est une catégorie topologique si, et seulement si,

1°)  $C^*$  est une catégorie,  $T$  une topologie sur  $C$ ;

2°)  $(T, \alpha, T)$ ,  $(T, \beta, T)$  et  $(T, \kappa, T * T)$  sont des applications continues, où  $T * T = T \times T / C^* * C^*$ .

PROPOSITION 2. Soit  $(C^*, T)$  une catégorie topologique. Si  $T$  est séparée,  $C^*_o$  est fermé. Si  $(C^*, T)$  est un groupoïde topologique (i. e.  $\theta$ -structuré),  $T$  est séparée si, et seulement si,  $T_o$  est séparée et  $C^*_o$  fermé.

Soit  $\hat{\theta}$  le foncteur projection vers  $\mathfrak{M}$  de la catégorie  $\mathcal{F}(\theta)$  des foncteurs continus (i. e.  $\theta$ -structurés). Ce foncteur a les propriétés indiquées dans le § 1-B. En particulier, si  $(C^*, T)$  est une catégorie topologique et  $\hat{C}^*$  une sous-catégorie de  $C^*$ , alors  $(\hat{C}^*, T/\hat{C}^*)$  est une catégorie topologique.

Soit  $(C^*, T)$  une catégorie topologique. Soit  $r$  une relation d'équivalence sur  $C$ .

THEOREME 6. Il existe une catégorie topologique  $(\bar{C}^*, \bar{T})$  quasi-quotient de  $(C^*, T)$  par  $r$  et  $\bar{C}^*$  est une catégorie quasi-quotient de  $C^*$  par  $r$ .

PREUVE. On construit  $(\bar{C}^*, \bar{T})$  comme suit : Soit  $\mathcal{F}(\Theta)$  la catégorie des foncteurs continus relatifs à l'univers  $\hat{\mathfrak{M}}_o$  considéré au § 1-B. Soit  $I$  la classe des  $F \in \mathcal{F}(\theta)$ ,  $(C^*, T)$  tels que  $\hat{\theta}(F)$  soit compatible avec  $r$ . Dans  $\mathcal{F}(\Theta)$ , il existe

$$(\hat{G}^*, \hat{T}) = \prod_{F \in I} \beta(F) \quad \text{et} \quad \hat{F} = [F]_{F \in I}.$$

La classe  $\hat{\theta}(\hat{F})(C)$  engendre une sous-catégorie  $G^*$  de  $\hat{G}^*$  et  $(G^*, \hat{T}/G)$  est une sous-catégorie topologique de  $(\hat{G}^*, \hat{T})$ . On a  $G \in \hat{\mathfrak{M}}$ , de sorte qu'il existe un isomorphisme  $V \in \mathcal{F}(\Theta)_\gamma$  de  $(G^*, \hat{T}/G)$  sur  $(\bar{C}^*, \bar{T}) \in \mathcal{F}(\theta)_o$ . Alors  $V \cdot \hat{F}$  est la  $\hat{\theta}$ -quasi-surjection définissant  $(\bar{C}^*, \bar{T})$  comme catégorie topologique quasi-quotient de  $(C^*, T)$  par  $r$ . - Montrons que  $\bar{C}^*$  est une catégorie quasi-quotient de  $C^*$  par  $r$ . En effet, soit  $f = (K^*, \underline{f}, C^*)$  un foncteur compatible avec  $r$ ; on a

$$F = ((K^*, K_g), \underline{f}, (C^*, T)) \in I,$$

en notant  $K_g$  la topologie grossière sur  $K$ ; par suite, il existe  $F' \in \mathcal{F}(\theta)$  tel que  $F' \cdot (V \cdot \hat{F}) = F$ . Il s'ensuit  $f = \hat{\theta}'_{\mathcal{F}}(F')$ ,  $j$ , où  $j = \hat{\theta}'_{\mathcal{F}}(V \cdot \hat{F})$ . Ceci montre que  $j$  est une  $p\mathcal{F}$ -quasi-surjection. ■

COROLLAIRE.  $(C^*, T)$  admet une catégorie topologique quasi-quotient par  $r$  de la forme  $(N(C^*/\hat{r}), \bar{T})$ , où  $\hat{r}$  est la relation d'équivalence bicompatible sur  $C^*$  engendrée par  $r$  et où  $N(C^*/\hat{r})$  est la catégorie  $(\mathcal{F}, \mathcal{N}')$ -projection du graphe multiplicatif quotient  $C^*/\hat{r}$ .

En effet,  $N(C^*/\hat{r})$  est une catégorie quasi-quotient de  $C^*$  par  $r$ .

COROLLAIRE. S'il existe une catégorie quotient  $\bar{C}^*$  de  $C^*$  par  $r$ , il existe une catégorie topologique quotient  $(\bar{C}^*, \bar{T})$  de  $(C^*, T)$  par  $r$ , où  $\bar{T}$  est une topologie sur  $\bar{C}^*$  moins fine que  $T/r$ .

Les catégories topologiques et leur cas particulier, les catégories microtransitives, sont étudiées dans l'article «Catégories topologiques» I, II, III [6].

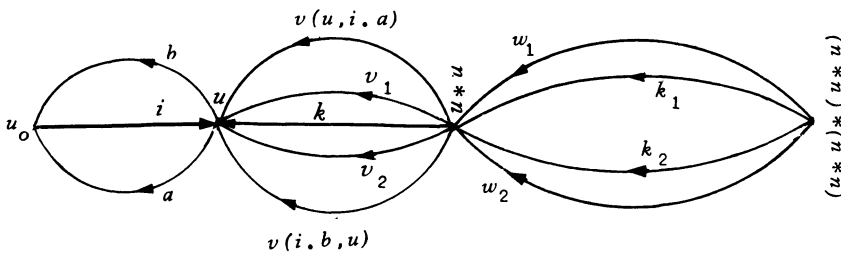
**3. Catégories structurées généralisées.**

**A. ESQUISSE D'UNE CATEGORIE.**

Soit  $[U_1]$  le graphe ayant 4 sommets  $u, u_o, u * u, (u * u) * (u * u)$  et dont les seules flèches sont

$$\left\{ \begin{array}{l} a \text{ et } b \text{ de } u \text{ vers } u_o \\ i \text{ de } u_o \text{ vers } u \\ v_1, v_2 \text{ et } k \text{ de } u * u \text{ vers } u \\ v(u, i.a) \text{ et } v(i.b, u) \text{ de } u \text{ vers } u * u \\ w_1, w_2, k_1 \text{ et } k_2 \text{ de } (u * u) * (u * u) \text{ vers } u * u. \end{array} \right.$$

Nous désignerons par  $U\dot{\mathcal{G}}$  le graphe multiplicatif défini comme suit :  $[U_1]$  est un sous-graphe du graphe  $[U\dot{\mathcal{G}}]$  sous-jacent à  $U\dot{\mathcal{G}}$ , contenant toutes les unités de  $U\dot{\mathcal{G}}$  ;



les éléments de  $U\dot{\mathcal{G}}$  sont ceux de  $U_1$  et  $ll$  autres morphismes  $g_i$ , où  $1 \leq i \leq ll$ ;

la loi de composition est telle que les seuls composés soient les composés d'un élément avec ses unités à droite et à gauche, et les composés explicitement indiqués dans les formules ci-dessous; de plus deux composés sont égaux si, et seulement si, l'égalité figure dans les relations suivantes:

- (1)  $u_o = a.i = b.i;$
- (2)  $g_1 = a.v_1 = b.v_2; \quad g_2 = a.v_2 = a.k; \quad g_3 = b.v_1 = b.k.$
- (3)  $u = v_1.v(u, i.a) = v_2.v(i.b, u); \quad g_4 = i.a = v_2.v(u, i.a);$   
 $g_5 = v_1.v(i.b, u) = i.b;$
- (4)  $k.v(u, i.a) = u = k.v(i.b, u);$
- (5)  $g_6 = v_2.w_1 = v_1.w_2; \quad g_7 = k.w_1 = v_1.k_1; \quad g_8 = v_2.w_2 = v_2.k_1;$   
 $g_9 = k.w_2 = v_2.k_2; \quad g_{10} = v_1.w_1 = v_1.k_2;$
- (6)  $g_{11} = k.k_1 = k.k_2.$

(Ainsi  $U_{\mathcal{F}}$  est engendré par  $[U_1]$  et une relation, i.e. c'est un quotient d'un sous-graphe multiplicatif de la catégorie libre des chemins associée à  $[U_1]$ ).

Soit  $\eta = (H^*, \mu, H^l)$  un triplet formé d'une catégorie  $H^*$ , d'une classe  $H^l$  de monomorphismes de  $H^*$  et d'une application produit fibré naturalisé fini  $\mu$  sur  $H^*$  (déf. 10-IV [1]). Désignons par  $\mathcal{F}(\eta)_o$  la classe des néofoncteurs  $F$  de  $U_{\mathcal{F}}$  vers  $H^*$  vérifiant les conditions suivantes :

- 1°)  $F(i) \in H^l;$
- 2°)  $((F(a), F(v_1)), (F(b), F(v_2))) = \mu((F(a), F(b)));$
- 3°)  $((F(v_2), F(w_1)), (F(v_1), F(w_2))) = \mu((F(v_2), F(v_1))).$

PROPOSITION 3. Si  $F$  et  $F'$  sont deux éléments de  $\mathcal{F}(\eta)_o$  tels que

$$F(i) = F'(i), \quad F(a) = F'(a), \quad F(b) = F'(b) \text{ et } F(k) = F'(k),$$

alors  $F = F'$ .

PREUVE.  $F$  et  $F'$  étant des néofoncteurs, on a

$$F(u) = F'(u), \quad F(u_o) = F'(u_o) \quad \text{et} \quad F(u_*u) = F'(u_*u).$$

De plus la condition 2 entraîne que  $F(v_i) = F'(v_i)$  pour  $i = 1$  et  $2$ , de sorte que la relation 3 a pour conséquence  $F(w_i) = F'(w_i)$  pour  $i = 1$  et  $2$ . Désignons par  $\hat{d}$  l'élément  $F(d)$ , où  $d \in U_{\mathcal{F}}$ . Comme  $H^*$  est une catégorie,

on trouve

$$\hat{a} \cdot \hat{u} = \hat{u}_o \cdot \hat{a} = \hat{b} \cdot \hat{i} \cdot \hat{a}$$

et, en vertu des formules (3),  $F(v(u, i, a))$  est l'unique élément associé au couple  $(\hat{u}, \hat{i} \cdot \hat{a})$  par le produit fibré naturalisé  $\mu(\hat{a}, \hat{b})$ ; par suite

$$F(v(u, i, a)) = F'(v(u, i, a))$$

et, de même,

$$F(v(i, b, u)) = F'(v(i, b, u)).$$

On obtient également

$$\hat{a} \cdot \hat{g}_7 = \hat{a} \cdot \hat{k} \cdot \hat{w}_1 = \hat{a} \cdot \hat{v}_2 \cdot \hat{w}_1 = \hat{a} \cdot \hat{v}_1 \cdot \hat{w}_2 = \hat{b} \cdot \hat{v}_2 \cdot \hat{w}_2;$$

d'après (5),  $F(k_1)$  est l'unique élément associé par le produit fibré  $\mu(\hat{a}, \hat{b})$  au couple  $(\hat{k} \cdot \hat{w}_1, \hat{v}_2 \cdot \hat{w}_2)$ . Donc  $F(k_1) = F'(k_1)$ . D'une manière analogue  $F(k_2) = F'(k_2)$  est l'unique élément associé par  $\mu(\hat{a}, \hat{b})$  au couple  $(\hat{v}_1 \cdot \hat{w}_1, \hat{k} \cdot \hat{w}_2)$ . Ainsi  $F$  et  $F'$  sont deux néofoncteurs ayant même restriction au sous-graphe  $[U_1]$  qui engendre  $U_{\mathcal{F}}$ ; il s'ensuit  $F = F'$ . ■

Soit  $\mathcal{F}(\eta)$  la sous-catégorie pleine de la catégorie  $\mathfrak{N}(H^*, U_{\mathcal{F}})$  des transformations naturelles entre néofoncteurs de  $U_{\mathcal{F}}$  vers  $H^*$  ayant pour classe d'objets  $\mathcal{F}(\eta)_o$ . Soit  $\mathfrak{M}^t$  la classe des injections canoniques  $(M, \iota, M') \in \mathfrak{M}$  et soit  $\mu_{\mathfrak{M}}$  l'application produit fibré naturalisé fini canonique de  $\mathfrak{M}$ .

PROPOSITION 4. Soit  $\eta_{\mathfrak{M}} = (\mathfrak{M}, \mathfrak{M}^t, \mu_{\mathfrak{M}})$ ; la catégorie  $\mathcal{F}(\eta_{\mathfrak{M}})$  est isomorphe à la catégorie  $\mathcal{F}$  des foncteurs associée à  $\mathfrak{M}$ .

PREUVE. Soit  $F \in \mathcal{F}(\eta_{\mathfrak{M}})_o$ ,  $C = F(u)$ ,  $C_o = F(u_o)$  et  $(C, \kappa, C^* * C^*) = F(k)$ . Comme  $F(i) \in \mathfrak{M}^t$ , on a  $C_o \subset C$  et les relations (1) impliquent que  $F(a)$  et  $F(b)$  sont des rétractions  $\alpha$  et  $\beta$  de  $C$  sur  $C_o$ . Des égalités (2), il résulte que  $C^* = (C, \kappa)$  est un quasi-graphe multiplicatif; puisque  $C^* * C^*$  est le produit fibré  $\alpha \vee \beta$ , ce quasi-graphe multiplicatif est une quasi-catégorie non associative. Les conditions (3) montrent que  $F(v(u, i, a))$  est l'application  $x \rightarrow (x, \alpha(x))$  de  $C$  dans  $C^* * C^*$  et, d'après (4), on a

$$x \cdot \alpha(x) = k(x, \alpha(x)) = x \text{ pour tout } x \in C;$$

de même  $\beta(x) \cdot x = x$  pour tout  $x \in C$ , de sorte que  $C^*$  est une catégorie non associative. Les formules 5 et le fait que  $((F(v_2), F(w_1)), (F(v_1), F(w_2)))$  soit un produit fibré naturalisé entraînent que  $F(k_1)$  et  $F(k_2)$  sont respectivement les applications

$$((x, y), (y, z)) \rightarrow (x \cdot y, z) \text{ et } ((x, y), (y, z)) \rightarrow (x, y \cdot z)$$

de  $F(v_2) \vee F(v_1)$  dans  $C^* * C^*$ . L'axiome (6) exprime donc que  $\kappa$  est associative. Ainsi  $C^*$  est une catégorie.

-Inversement soit  $S^*$  une catégorie; on construit un unique néofoncteur  $F \in \mathcal{F}(\eta_{\mathfrak{M}})_o$  tel que

$$F(i) = (S, \iota, S^*_o), \quad F(a) = (S^*_o, \alpha, S), \quad F(b) = (S^*_o, \beta, S),$$

$$F(k) = (S, \kappa, S^* * S^*),$$

d'après la proposition 3. Nous avons ainsi prouvé que l'application

$$\gamma_o : F \rightarrow C^* = (F(u), F(k))$$

est une bijection de  $\mathcal{F}(\eta_{\mathfrak{M}})_o$  sur  $\mathcal{F}_o$ .

-Soit  $\Psi \in \mathcal{F}(\eta_{\mathfrak{M}})$  une transformation naturelle définie par un triplet  $(F', \tau, F)$ . On voit facilement que

$$\gamma(\Psi) = (\gamma_o(F'), \underline{\tau(u)}, \gamma_o(F))$$

est un foncteur, et que l'application  $\Psi \rightarrow \gamma(\Psi)$  définit un isomorphisme de  $\mathcal{F}(\eta_{\mathfrak{M}})$  sur  $\mathcal{F}$ . ■

DEFINITION. Un élément de  $\mathcal{F}(\eta)_o$  sera appelé *catégorie  $\eta$ -structurée*.

REMARQUE. Les catégories  $\eta$ -structurées sont définies dans «Introduction to the theory of Structured Categories», [4], avec une définition légèrement différente, puisque l'esquisse d'une catégorie  $U_{\mathcal{F}}^{\dot{\eta}}$  est définie un peu autrement.

Soit  $\mathcal{F}(H^*)$  la sous-catégorie pleine de la catégorie des transformations naturelles entre néofoncteurs de  $U_{\mathcal{F}}^{\dot{\eta}}$  vers  $H^*$  ayant pour unités les foncteurs  $F$  tels que

$$((F(a), F(v_1)), (F(b), F(v_2))) \text{ et } ((F(v_2), F(w_1)), (F(v_1), F(w_2)))$$

soient des produits fibrés naturalisés dans  $H^*$ .

PROPOSITION 5. Soit  $F \in \mathcal{F}(H^*)_0$ ; s'il existe  $f \in H_\gamma^*$  et  $f_0 \in H_\gamma^*$  tels que  $f \cdot F(i) \cdot f_0^{-1}$  appartienne à  $H^l$ , il existe une équivalence naturelle définie par un triplet  $(F', \tau, F)$ , où  $F' \in \mathcal{F}(\eta)_0$ ,  $\tau(u) = f$  et  $\tau(u_0) = f_0$ .

PREUVE. Nous posons  $\hat{d} = F(d)$  pour tout  $d \in U$ . Puisque  $a \cdot i = u_0$ , on trouve  $\hat{a} \cdot \hat{i} = \hat{u}_0$ , de sorte que  $\hat{i}$  est un monomorphisme. Soient

$$\hat{a}' = f_0 \cdot \hat{a} \cdot f^{-1} \quad \text{et} \quad \hat{b}' = f_0 \cdot \hat{b} \cdot f^{-1}.$$

Comme  $((\hat{a}, \hat{v}_1), (\hat{b}, \hat{v}_2))$  est un produit fibré naturalisé,

$$((\hat{a}', f^{-1} \cdot \hat{v}_1), (\hat{b}', f^{-1} \cdot \hat{v}_2))$$

en est aussi un et, si

$$\mu(\hat{a}', \hat{b}') = ((\hat{a}', \hat{v}'_1), (\hat{b}', \hat{v}'_2)),$$

il existe  $f' \in H_\gamma^*$  tel que  $\hat{v}'_i \cdot f' = \hat{v}_i$  pour  $i = 1$  et  $2$ . Posons  $\hat{k}' = f \cdot \hat{k} \cdot f'^{-1}$ .

D'une manière analogue,  $((\hat{v}'_2, f'^{-1} \cdot \hat{w}_1), (\hat{v}'_1, f'^{-1} \cdot \hat{w}_2))$  et

$$\mu(\hat{v}'_2, \hat{v}'_1) = ((\hat{v}'_2, \hat{w}'_1), (\hat{v}'_1, \hat{w}'_2))$$

étant des produits fibrés naturalisés de  $(\hat{v}'_2, \hat{v}'_1)$ , il existe  $f'' \in H_\gamma^*$  tel que l'on ait  $\hat{w}'_i \cdot f'' = \hat{w}_i$  pour  $i = 1$  et  $2$ . Soit  $\tau$  la surjection

$$u \rightarrow f, \quad u_0 \rightarrow f_0, \quad u * u \rightarrow f' \quad \text{et} \quad (u * u)_* (u * u) \rightarrow f'';$$

il existe une équivalence naturelle  $\Gamma$  définie par un triplet  $(F', \tau, F)$ ; il est évident que  $F'(d) = \hat{d}'$ , lorsque ce dernier a été défini. En particulier

$$F'(i) = \hat{i}', \quad F'(v_i) = \hat{v}'_i \quad \text{et} \quad F'(w_i) = \hat{w}'_i,$$

ce qui montre que  $F' \in \mathcal{F}(\eta)$ . La démonstration est donc achevée. ■

COROLLAIRE 1. Si  $H_\gamma^* \cdot H^l \cdot H_\gamma^* = R_g(H^*)$ , la catégorie  $\mathcal{F}(H^*)$  est un élargissement de  $\mathcal{F}(\eta)$ .

En effet,  $\mathcal{F}(\eta)$  est pleine dans  $\mathcal{F}(H^*)$ . Si  $F \in \mathcal{F}(H^*)_0$ , on a  $F(i) \in R_g(H^*) = H_\gamma^* \cdot H^l \cdot H_\gamma^*$  et, d'après la proposition 5,  $F$  est isomorphe dans  $\mathcal{F}(H^*)$  à un  $F' \in \mathcal{F}(\eta)$ ; ceci signifie que  $\mathcal{F}(H^*)$  est un élargissement de  $\mathcal{F}(\eta)$ . ■

COROLLAIRE 2. Si  $\hat{\eta} = (H^*, H^t, \hat{\mu})$ , où  $\hat{\mu}$  est une application produit fibré fini sur  $H^*$ , les catégories  $\mathcal{F}(\eta)$  et  $\mathcal{F}(\hat{\eta})$  sont isomorphes.

En effet, soit  $F \in \mathcal{F}(\hat{\eta})_o$ ; la construction faite ci-dessus en prenant  $f = u$  et  $f_o = u_o$  conduit à une équivalence naturelle  $\Gamma(F)$  de  $F$  sur  $F' \in \mathcal{F}(\eta)$ . On voit que la surjection  $\Psi \rightarrow \Gamma(F_1) \square \square \Psi \square \square \Gamma(F)^{-1}$ , où  $F = \alpha \square \square \Psi$  et  $F_1 = \beta \square \square \Psi$ , définit un isomorphisme de  $\mathcal{F}(\hat{\eta})$  sur  $\mathcal{F}(\eta)$ .

Soit  $\bar{\eta} = (\bar{H}^*, \bar{H}^t, \bar{\mu})$  un triplet de la même forme que  $\eta$  et soit  $G$  un foncteur de  $H^*$  vers  $\bar{H}^*$ , compatible avec  $(\bar{\mu}, \mu)$  et tel que  $G(H^t) \subset \bar{H}^t$ . Alors la surjection  $\Psi \rightarrow \square G \cdot \Psi$  définit un foncteur de  $\mathcal{F}(\eta)$  vers  $\mathcal{F}(\bar{\eta})$ .

B. COMPARAISON AVEC LES CATEGORIES p-STRUCTUREES.

Soit  $p = (\mathfrak{M}, p, H^*)$  un foncteur d'homomorphismes; supposons que l'on ait  $\eta = (H^*, H^t, \mu)$ , où  $H^t$  est la classe des  $(\mathfrak{M}^t, p)$ -injections et où  $\mu$  est une application produit fibré naturalisé sur  $H^*$  telle que  $p$  soit  $(\mu \mathfrak{M}, \mu)$ -compatible.

PROPOSITION 6.  $\mathcal{F}(\eta)$  est isomorphe à la catégorie  $\mathcal{F}(p)$  des foncteurs  $p$ -structurés.

PREUVE. Supposons  $\bar{F} \in \mathcal{F}(\eta)_o$ ; puisque  $p \cdot \bar{F} \in \mathcal{F}(\eta \mathfrak{M})_o$ , il existe d'après la proposition 4 une catégorie  $C^* = \gamma(p \cdot \bar{F})$ . Il est clair que  $(C^*, \bar{F}(u))$  est une catégorie  $p$ -structurée, les morphismes «structurant»  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\kappa$  étant respectivement  $\bar{F}(a)$ ,  $\bar{F}(b)$  et  $\bar{F}(k)$ . Nous poserons  $(C^*, \bar{F}(u)) = \hat{\gamma}(\bar{F})$ .

-Inversement, soit  $(G^*, s)$  une catégorie  $p$ -structurée, et soit  $F'$  le néofoncteur  $\gamma^{-1}(G^*)$ . Désignons par  $\bar{F}'(i)$ , par  $\bar{F}'(a)$  et  $\bar{F}'(b)$  et par  $\bar{F}'(k)$  respectivement les uniques éléments de  $s \cdot H \cdot s_o$ , de  $s_o \cdot H \cdot s$  et de  $s \cdot H \cdot s * s$  appliqués par  $p$  sur

$$\begin{aligned} F'(i) &= (G, \iota, G^*_o), & F'(a) &= (G^*_o, \alpha, G), \\ F'(b) &= (G^*_o, \beta, G), & F'(k) &= (G, \kappa, G^* * G^*). \end{aligned}$$

Puisque  $p$  est  $(\mu \mathfrak{M}, \mu)$ -compatible, il existe des produits fibrés naturalisés

$$((\bar{F}'(a), \bar{F}'(v_1)), (\bar{F}'(b), \bar{F}'(v_2)))$$



et

$$((\bar{F}'(v_2), \bar{F}'(w_1)), (\bar{F}'(v_1), \bar{F}'(w_2)))$$

tels que

$$p(\bar{F}'(v_i)) = F'(v_i) \quad \text{et} \quad p(\bar{F}'(w_i)) = F'(w_i)$$

pour  $i = 1$  et  $2$ . Si  $\hat{d}_i = \bar{F}'(d_i)$  a été défini et si  $F'(d_1).F'(d_2) = F'(d_3).F'(d_4)$ , alors  $\hat{d}_1.\hat{d}_2 = \hat{d}_3.\hat{d}_4$ , puisque  $p$  est fidèle. Une démonstration analogue à celle de la proposition 3 permet de construire d'une façon unique des éléments

$$\bar{F}'(v(u, i, a)), \quad \bar{F}'(v(i, b, u)), \quad \bar{F}'(k_1) \quad \text{et} \quad \bar{F}'(k_2)$$

appliqués par  $p$  respectivement sur

$$F'(v(u, i, a)), \quad F'(v(i, b, u)), \quad F'(k_1) \quad \text{et} \quad F'(k_2).$$

Ainsi nous obtenons une surjection  $\bar{F}'_1 : d \rightarrow \bar{F}'(d)$  définissant un homomorphisme du graphe  $[U_1]$  vers  $[H^*]$  et telle que  $p\bar{F}'_1$  soit une restriction de  $\underline{F}'$ . Comme  $[U_1]$  engendre  $U_{\mathcal{F}}$  et comme  $\bar{F}'$  est un néofoncteur de  $U_{\mathcal{F}}$  vers  $\mathbb{M}$ , il en résulte que  $\bar{F}'_1$  s'étend en un néofoncteur unique  $\bar{F}'$  de  $U_{\mathcal{F}}$  vers  $H^*$  vérifiant

$$p.\bar{F}' = F', \quad \bar{F}' \in \mathcal{F}(\eta) \quad \text{et} \quad (G^*, s) = \hat{\gamma}(\bar{F}').$$

-  $p$  étant fidèle, le foncteur de  $\mathfrak{N}(H^*, U_{\mathcal{F}})^{\square}$  vers  $\mathfrak{N}(\mathbb{M}, U_{\mathcal{F}})^{\square}$  associant  $\square p.\Psi$  à  $\Psi$  est fidèle. Si  $\Psi \in \mathcal{F}(\eta)$  est défini par le triplet  $(\bar{F}', \tau, \bar{F})$ , on a  $\hat{\gamma}(\Psi) \in \mathcal{F}(p)$ , où

$$\hat{\gamma}(\Psi) = (\hat{\gamma}(\bar{F}'), \underline{\tau(u)}, \hat{\gamma}(\bar{F})).$$

Inversement, supposons

$$\Phi = ((G^*, s'), \varphi, (C^*, s)) \in \mathcal{F}(p),$$

$$\text{où } (C^*, s) = \hat{\gamma}(\bar{F}) \quad \text{et} \quad (G^*, s') = \hat{\gamma}(\bar{F}').$$

Puisque  $\hat{\varphi} = (G^*, \varphi, C^*)$  est un foncteur, il existe, en vertu de la proposition 2,

$$(F', \tau, F) = \gamma^{-1}(\hat{\varphi}) \in \mathcal{F}(\eta_{\mathbb{M}}).$$

Désignons par  $\bar{\tau}(u)$  l'élément de  $s'.H.s$  tel que

$$p(\overline{\tau}(u)) = (G, \varphi, C) = \tau(u)$$

et soit  $\overline{\tau}(u_o) = \overline{F}'(a) \cdot \overline{\tau}(u) \cdot \overline{F}'(i)$ ; on trouve

$$p(\overline{\tau}(u_o)) = (G_o^*, \varphi_o, C_o^*) = \tau(u_o).$$

Etant donné que  $F'(a) \cdot \tau(u) = \tau(u_o) \cdot F(a)$  et que  $p$  est fidèle,

$$\overline{F}'(a) \cdot \overline{\tau}(u) = \overline{\tau}(u_o) \cdot \overline{F}(a).$$

Un raisonnement semblable montre que

$$\overline{F}'(b) \cdot \overline{\tau}(u) = \overline{\tau}(u_o) \cdot \overline{F}(b) \quad \text{et} \quad \overline{\tau}(u) \cdot \overline{F}(i) = \overline{F}'(i) \cdot \overline{\tau}(u_o).$$

Les relations

$$\begin{aligned} \overline{F}'(a) \cdot \overline{\tau}(u) \cdot \overline{F}(v_1) &= \overline{\tau}(u_o) \cdot \overline{F}(a) \cdot \overline{F}(v_1) = \overline{\tau}(u_o) \cdot \overline{F}(b \cdot v_2) = \\ &= \overline{F}'(b) \cdot \overline{\tau}(u) \cdot \overline{F}(v_2) \end{aligned}$$

assurent l'existence d'un et d'un seul  $b$  tel que

$$\overline{F}'(v_i) \cdot b = \overline{\tau}(u) \cdot \overline{F}(v_i) \quad \text{pour } i = 1 \text{ et } 2,$$

car  $((\overline{F}'(a), \overline{F}'(v_1)), (\overline{F}'(b), \overline{F}'(v_2)))$  est un produit fibré naturalisé.

On a

$$p(b) = \tau(u * u), \quad \text{d'où } \overline{F}'(k) \cdot b = \overline{\tau}(u) \cdot \overline{F}(k);$$

posons  $\overline{\tau}(u * u) = b$ . De même, des égalités

$$\begin{aligned} \overline{F}'(v_2) \cdot b \cdot \overline{F}(w_1) &= \overline{\tau}(u) \cdot \overline{F}(v_2) \cdot \overline{F}(w_1) = \overline{\tau}(u) \cdot \overline{F}(v_1 \cdot v_2) = \\ &= \overline{F}'(v_1) \cdot b \cdot \overline{F}(v_2), \end{aligned}$$

on déduit l'existence d'un et d'un seul  $b'$  vérifiant

$$\overline{F}'(w_i) \cdot b' = b \cdot \overline{F}(v_i) \quad \text{pour } i = 1 \text{ et } 2;$$

et l'on a  $p(b') = \tau((u * u) * (u * u))$ . En posant  $\overline{\tau}((u * u) * (u * u)) = b'$ , on définit une surjection  $\overline{\tau}$  de  $U\dot{\mathcal{F}}_o$  dans  $H$  telle que  $p \overline{\tau} = \tau$ . Puisque  $\overline{F}$  et  $\overline{F}'$  sont des néofoncteurs (première partie de la démonstration), que  $p$  est fidèle et que  $(p \cdot \overline{F}', \tau, p \cdot \overline{F})$  définit une transformation naturelle,  $(\overline{F}', \overline{\tau}, \overline{F})$  définit aussi une transformation naturelle  $\Psi$ , telle que  $\hat{\gamma}(\Psi) = \Phi$ . Par conséquent  $\hat{\gamma}$  définit un isomorphisme de  $\mathcal{F}(\eta)$  sur  $\mathcal{F}(p)$ . ■

COROLLAIRE. Avec les notations de la fin du §A, la catégorie  $\mathcal{F}(H^*)$  est un élargissement de  $\mathcal{F}(p)$ .

#### 4. Espèce de morphismes associée à une catégorie structurée.

A. Soit  $\eta = (H^*, H^t, \mu)$  un triplet d'une catégorie  $H^*$ , d'une classe  $H^t$  de monomorphismes de  $H^*$  et d'une application produit fibré naturalisé fini  $\mu$  sur  $H^*$ . Soit  $F \in \mathcal{F}(\eta)_o$  et  $s = F(u)$ . Nous désignerons par  $\hat{a}$  l'élément  $F(d)$ , pour tout  $d \in U_{\mathcal{F}}$ . Soit  $K$  la classe  $s.H$ . Si  $b \in K$  et  $b' \in K$  sont tels que  $\hat{a}.b' = \hat{b}.b$ , il existe un et un seul  $g$  tel que

$$\hat{v}_1.g = b' \quad \text{et} \quad \hat{v}_2.g = b,$$

car  $((\hat{a}, \hat{v}_1), (\hat{b}, \hat{v}_2))$  est un produit fibré naturalisé; nous écrivons  $g = v(b', b)$ .

THEOREME 7.  $K^\bullet$  est une catégorie pour la loi de composition :

$$(b', b) \rightarrow b' \bullet b = \hat{k}.v(b', b) \text{ si, et seulement si, } \hat{a}.b' = \hat{b}.b.$$

PREUVE. Posons  $\hat{a}' = \hat{i}.\hat{a}$  et  $\hat{b}' = \hat{i}.\hat{b}$ . Montrons que  $K^\bullet$  admet pour unités les  $m \in s.H$  tels que  $m = \hat{a}'.m$ . Pour un tel  $m$ , on a

$$\hat{b}.m = \hat{b}.\hat{a}'.m = \hat{b}.\hat{i}.\hat{a}.m = \hat{a}.m.$$

Supposons  $b \bullet m$  défini, i.e.  $\hat{a}.b = \hat{b}.m$ , d'où

$$\hat{a}'.b = \hat{i}.\hat{b}.m = \hat{i}.\hat{a}.m = m.$$

Il existe  $v(b, m)$  et l'on a

$$v(b, m) = v(\hat{u}.b, \hat{a}'.b) = v(\hat{u}, \hat{i}.\hat{a}).b;$$

par définition de  $\mathcal{F}(\eta)$ , on sait que

$$\hat{k}.v(\hat{u}, \hat{i}.\hat{a}) = \hat{k}.F(v(u, i.a)) = \hat{u};$$

il s'ensuit

$$b \bullet m = \hat{k}.v(b, m) = \hat{k}.v(\hat{u}, \hat{i}.\hat{a}).b = \hat{u}.b = b.$$

De même,  $m \bullet b' = b'$  lorsque  $\hat{a}.m = \hat{b}.b'$ . Ainsi  $m$  est une unité de  $K^\bullet$ ; tout  $b \in K$  admet pour seule unité à droite  $\hat{a}'.b$ , pour seule unité à gauche  $\hat{b}'.b$ .

- Le composé  $b' \bullet b$  est défini si, et seulement si,  $\hat{a}'.b' = \hat{b}'.b$ ; dans ce cas, on trouve

$$\begin{aligned} \hat{a}' \cdot (b' \bullet b) &= \hat{a}' \cdot \hat{k} \cdot v(b', b) = \hat{a}' \cdot \hat{v}_2 \cdot v(b', b) = \hat{a}' \cdot b, \\ \hat{b}' \cdot (b' \bullet b) &= \hat{b}' \cdot \hat{k} \cdot v(b', b) = \hat{b}' \cdot \hat{v}_1 \cdot v(b', b) = \hat{b}' \cdot b'. \end{aligned}$$

Supposons les composés  $b'' \bullet (b' \bullet b)$  et  $(b'' \bullet b') \bullet b$  définis.  $((\hat{v}_2, \hat{w}_1), (\hat{v}_1, \hat{w}_2))$  est un produit fibré naturalisé, et l'on a

$$\hat{k}_1 = v(\hat{k} \cdot \hat{w}_1, \hat{v}_2 \cdot \hat{w}_2) \quad \text{et} \quad \hat{k}_2 = v(\hat{v}_1 \cdot \hat{w}_1, \hat{k} \cdot \hat{w}_2),$$

car  $F \in \mathcal{F}(\eta)$ . Puisque

$$\hat{v}_2 \cdot v(b'', b') = b' = \hat{v}_1 \cdot v(b', b),$$

il existe un et un seul  $g$  tel que

$$\hat{w}_1 \cdot g = v(b'', b') \quad \text{et} \quad \hat{w}_2 \cdot g = v(b', b).$$

Les relations  $\hat{k} \cdot \hat{k}_1 = \hat{k} \cdot \hat{k}_2$ ,

$$\begin{aligned} \hat{k} \cdot \hat{k}_1 \cdot g &= \hat{k} \cdot v(\hat{k} \cdot \hat{w}_1 \cdot g, \hat{v}_2 \cdot \hat{w}_2 \cdot g) = \hat{k} \cdot v(\hat{k} \cdot v(b'', b'), \hat{v}_2 \cdot v(b', b)) = \\ &= \hat{k} \cdot v(b'' \bullet b', b) = (b'' \bullet b') \bullet b, \end{aligned}$$

$$\hat{k} \cdot \hat{k}_2 \cdot g = \hat{k} \cdot v(\hat{v}_1 \cdot v(b'', b'), \hat{k} \cdot v(b', b)) = \hat{k} \cdot v(b'', b' \bullet b) = b'' \bullet (b' \bullet b)$$

entraînent

$$(b'' \bullet b') \bullet b = b'' \bullet (b' \bullet b).$$

Ceci prouve que  $K^\bullet$  est une catégorie. ■

PROPOSITION 7. La catégorie  $H^*$  duale de  $H^\bullet$  est une catégorie d'opérateurs sur la catégorie  $K^\bullet$  relativement à la loi de composition  $\kappa'$ :

$$(f, b) \rightarrow b \cdot f \text{ si, et seulement si, } \beta(f) = \alpha(b).$$

PREUVE.  $(H^*, K, \kappa')$  est une sous-espèce de structures de l'espèce de structures canonique associée à l'opération de  $H^*$  sur  $H$  définie par la loi de composition de  $H^\bullet$ . Si  $m \in K_o^\bullet$  et si  $\alpha(m) = \beta(f)$ , on a

$$m \cdot f = \hat{a}' \cdot m \cdot f \in K_o^\bullet.$$

Si  $b' \bullet b$  et  $(b' \bullet b) \cdot f$  sont définis, l'égalité  $\hat{a}' \cdot (b' \cdot f) = \hat{b}' \cdot b \cdot f$  assure que le composé  $(b' \cdot f) \bullet (b \cdot f)$  est défini, et l'on obtient

$$(b' \cdot f) \bullet (b \cdot f) = \hat{k} \cdot v(b' \cdot f, b \cdot f) = \hat{k} \cdot v(b', b) \cdot f = (b' \bullet b) \cdot f.$$

Ainsi la surjection  $b \rightarrow b.f$  définit un foncteur de  $K.\beta(f)^\bullet$  sur  $K.\alpha(f)^\bullet$ ; ceci achève la démonstration de la proposition. ■

DEFINITION.  $K^\bullet$  est appelée le  $\eta$ -prolongement de  $F$ . L'espèce de morphismes  $(H^*, K^\bullet, \kappa')$  est appelée l'espèce de morphismes associée à  $F$ .

EXEMPLE. En particulier, soit  $(C^*, s)$  une catégorie  $p$ -structurée, où  $p = (\mathfrak{M}, \underline{p}, H^*)$  est un foncteur d'homomorphismes  $(\mu \mathfrak{M}, \mu)$ -compatible. D'après la proposition 6, à  $(C^*, s)$  correspond un élément  $F$  de  $\mathcal{F}(\eta)$ . Par suite la classe  $s.H = K$  est, en vertu du théorème précédent, une structure de catégorie. On dira aussi que l'espèce de morphismes  $(H^*, K^\bullet, \kappa')$  est associée à  $(C^*, s)$ .

Apartir du triplet  $(H^*, K^\bullet, \kappa')$ , on peut construire la catégorie produit croisé  $P(F)$  (voir chapitre II de «Catégories et Structures») : ses éléments sont les triplets  $(m, f, b)$  tels que

$$m \in K^\bullet, b \in K, f \in \alpha(m).H, \alpha(b) \text{ et } \hat{b}' \cdot b = m.f,$$

la loi de composition étant

$$(m', f', b') \cdot (m, f, b) = (m', f' \cdot f, b' \cdot f \bullet b)$$

si, et seulement si,  $m = \hat{a}' \cdot b'$ . Nous aurons à considérer plus loin des sous-catégories  $P'$  de  $P(F)$  vérifiant la condition :  $(m, f, b) \in P'$  et  $(m', f', b) \in P'$  entraîne  $f = f'$  et  $m = m'$ .

B. CAS DES CATEGORIES DOMINEES.

Reprenons les hypothèses du début du § A et supposons de plus que  $(H^*, D)$  soit une catégorie  $q$ -dominée,  $q$  étant un foncteur  $(\mathfrak{M}, \underline{q}, \hat{H}^*)$  d'homomorphismes saturé, à produits fibrés finis.

PROPOSITION 8. Soit  $F \in \mathcal{F}(\eta)_o$  et  $s' \in H_o^\bullet$ . Si le foncteur  $G : b \rightarrow D(b, s')$  de  $H^*$  vers  $\hat{H}^*$  est compatible avec les produits fibrés finis,  $(K.s'^\bullet, D(s, s'))$  est une catégorie  $q$ -structurée, où  $s = F(u)$ .

PREUVE. Soit  $\sigma = D(s, s')$ . Comme le foncteur  $G$  est compatible avec les produits fibrés finis, on a  $\bar{F} = G.F \in \mathcal{F}(\hat{H}^*)$ , où  $\mathcal{F}(\hat{H}^*)$  est la catégorie associée à  $\hat{H}^*$  à la fin du § A. Posons  $\hat{\eta} = (\hat{H}^*, q'_l, \hat{\mu})$ ,

où  $q_i^{\leftarrow}$  est la classe des  $(\mathfrak{M}^{\leftarrow}, q)$ -injections et  $\hat{\mu}$  l'application produit fibré naturalisé telle que  $q$  soit  $(\mu_{\mathfrak{M}}, \hat{\mu})$ -compatible. Puisque  $\overline{F}(i)$  admet  $\overline{F}(a)$  pour inverse à gauche,  $\overline{F}(i)$  est un  $q$ -monomorphisme;  $q$  étant saturé, il existe  $\overline{i} \in q_i^{\leftarrow}$  tel que  $\overline{F}(i) = \overline{i} \cdot f_o$ , où  $f_o \in \hat{H}_o^{\dot{\gamma}}$ . D'après la proposition 5, on peut construire une équivalence naturelle définie par un triplet  $(\overline{F}', \tau, \overline{F})$ , où

$$\tau(u) = \overline{F}(u) = \sigma, \quad \tau(u_o) = f_o \quad \text{et} \quad \overline{F}' \in \mathcal{F}(\hat{\eta})_o.$$

Le foncteur  $q \cdot \overline{F}'$  appartient à  $\mathcal{F}(\eta_{\mathfrak{M}})$ ; il projette  $a$  sur l'application source  $\alpha^{\bullet} : b \rightarrow \hat{i} \cdot \hat{a} \cdot b$  de la catégorie  $(K \cdot s')^{\bullet}$  et  $b$  sur son application but  $\beta^{\bullet}$ ; comme  $q \cdot \overline{F}'(u * u)$  est le produit fibré canonique  $\alpha^{\bullet} \smile \beta^{\bullet}$  dans  $\mathfrak{M}$ , c'est la classe  $K^{\bullet} * K^{\bullet}$ , et  $q \cdot \overline{F}'(k)$  est la loi de composition de  $K^{\bullet}$ . Donc  $q \cdot \overline{F}'$  est la catégorie  $\eta_{\mathfrak{M}}$ -structurée correspondant (proposition 4) à la catégorie  $K^{\bullet}$ . En vertu de la proposition 6,  $(K^{\bullet}, \sigma)$  est la catégorie  $q$ -structurée associée à  $\overline{F}' \in \mathcal{F}(\hat{\eta})$ . ■

Désignons par  $\hat{q}$  le foncteur projection canonique de  $\mathcal{F}(q)$  vers  $\mathfrak{M}$ .

PROPOSITION 9. *Supposons que, pour tout  $s' \in H_o^{\dot{\gamma}}$ , le foncteur  $D_{s'} : b \rightarrow D(b, s')$  de  $H^{\bullet}$  vers  $\hat{H}^{\bullet}$  soit à produits fibrés finis. Si  $F \in \mathcal{F}(\tau)_o$ , l'espèce de morphismes  $(H^*, K^{\bullet}, \kappa')$  est sous-jacente à une espèce de structures  $\hat{q}$ -dominée  $(H^*, \overline{D})$ , où*

$$\overline{D}(s') = ((K \cdot s')^{\bullet}, D(s, s'))$$

pour tout  $s' \in H_o^{\dot{\gamma}}$ .

PREUVE. D'après la proposition 8,  $\overline{D}(s')$  est une catégorie  $q$ -structurée. Si  $f \in H$ ,  $\alpha(f) = s''$  et  $\beta(f) = s'$ , on a  $g = D(s, f) \in \hat{H}$ , et, en vertu de la proposition 7,  $\underline{g} = \underline{q}(g)$  définit un foncteur de  $(K \cdot s')^{\bullet}$  vers  $(K \cdot s'')^{\bullet}$ . Donc  $(\overline{D}(s''), \underline{g}, \overline{D}(s'))$  est un foncteur  $q$ -structuré  $\overline{D}(f)$ . La surjection  $f \rightarrow \overline{D}(f)$  définit un foncteur de  $H^*$  vers  $\mathcal{F}(q)$  tel que  $(H^*, \overline{D})$  soit une espèce de structures  $\hat{q}$ -dominée, admettant  $(H^*, K, \kappa')$  pour espèce de structures sous-jacente. ■

DEFINITION. On dira que  $(H^*, D_o)$  est une catégorie discrètement  $q$ -structurée si  $D_o$  est une application de  $H_o^{\dot{\gamma}} \times H_o^{\dot{\gamma}}$  dans  $\hat{H}_o^{\dot{\gamma}}$  ayant les

propriétés suivantes :

1°)  $q(D_o(s'', s')) = s'' \cdot H \cdot s'$  pour tout  $(s'', s') \in H_o^* \times H_o^*$  ;

2°) Si  $s_i \in H_o^*$  pour  $i = 1, 2$  et  $3$ , il existe

$$k(s_3, s_2, s_1) \in D_o(s_3, s_1) \cdot \hat{H} \cdot D_o(s_3, s_2) \times D_o(s_2, s_1)$$

appliqué par  $q$  sur une restriction de la loi de composition de  $H^*$  .

L'élément  $k(s_3, s_2, s_1)$  est entièrement déterminé par ces conditions.

PROPOSITION 10. Si  $q$  est un foncteur d'homomorphismes à atomes (chapitre IV, « Catégories et structures ») et si  $(H^*, D_o)$  est une catégorie discrètement  $q$ -structurée, il existe une catégorie  $q$ -dominée  $(H^*, D)$  telle que  $D_o$  soit une restriction de  $D$ .

PREUVE. Soient  $s, s'$  et  $s''$  trois unités de  $H^*$ , et  $f \in s'' \cdot H \cdot s'$ . Il existe un élément final  $f_+$  de  $\hat{H}^*$  tel que  $q(f_+) = \{f\}$ , et une  $(\mathfrak{M}^t, q)$ -injection  $j_f$  de source  $f_+$ , de but  $D_o(s'', s')$ , par définition d'un foncteur à atomes; désignons par  $\bar{f}$  le morphisme de  $\hat{H}^*$  de source  $D_o(s', s)$ , de but  $D_o(s'', s')$ , tel que  $q(\bar{f})$  soit l'application constante sur  $f$  (on a  $\bar{f} = j_f \cdot g_f$ , où  $g_f$  est l'unique élément de  $f_+ \cdot \hat{H} \cdot D_o(s', s)$ ). Posons

$$D(f, s) = k(s'', s', s) \cdot [\bar{f}, D_o(s', s)];$$

alors  $D(f, s) \in D_o(s'', s) \cdot \hat{H} \cdot D_o(s', s)$  et  $q(D(f, s))$  est l'application  $b \rightarrow f \cdot b$  de  $s' \cdot H \cdot s$  dans  $s'' \cdot H \cdot s$ . Si  $g \in s \cdot H \cdot s_1$ , on définit de même

$$D(s'', g) = k(s'', s, s_1) \cdot [D_o(s'', s), \bar{g}] \in D_o(s'', s_1) \cdot \hat{H} \cdot D_o(s'', s).$$

Le morphisme

$$D(f, g) = D(s'', g) \cdot D(f, s) \in D_o(s'', s) \cdot \hat{H} \cdot D_o(s', s)$$

est appliqué par  $q$  sur  $Hom_H(f, g)$ . La surjection  $(f, g) \rightarrow D(f, g)$  définit un foncteur  $D$  de  $H^* \times H^*$  vers  $\hat{H}^*$  tel que  $q \cdot D = Hom_H$ . . Autrement dit,  $(H^*, D)$  est une catégorie  $q$ -dominée. Puisque  $D_o$  est la restriction de  $D$  à  $H_o^* \times H_o^*$ , la proposition est démontrée. ■

DEFINITION. On appelle *catégorie fortement  $q$ -dominée* une catégorie  $q$ -dominée  $(H^*, D)$  telle que  $(H^*, D_o)$ , où  $D_o$  est la restriction de  $D$  à  $H_o^* \times H_o^*$ , soit une catégorie discrètement  $q$ -structurée.

REMARQUE. Supposons que  $q$  soit à atomes et à  $\mathfrak{M}_0$ -sommets et que  $H \in \mathfrak{M}_0$ . Soit  $(H^*, D_o)$  une catégorie discrètement  $q$ -structurée; il existe une somme  $\sigma$  de  $(D_o(s'', s'))_{(s'', s') \in H_o^* \times H_o^*}$  dans  $\hat{H}^*$  vérifiant  $q(\sigma) = H$ ; les applications source et but de  $H^*$  sont « structurées » respectivement par un  $\bar{a} \in \sigma, \hat{H} \cdot \sigma$  et un  $\bar{b} \in \sigma, \hat{H} \cdot \sigma$  (à savoir :  $\bar{a}$  est la somme de  $(s''s')_{(s'', s') \in H_o^* \times H_o^*}$ , où  $q$  applique  $s''s' \in \sigma, \hat{H} \cdot D_o(s'', s')$  sur l'application constante sur  $s'$ ). Mais  $(H^*, \sigma)$  n'est pas nécessairement une catégorie  $q$ -structurée. Cependant  $(H^*, \sigma) \in \mathcal{F}(q)$  lorsque :

$$1^o) \sum_{i \in I} e_i \times \sum_{i \in I} e_i = \sum_{(i,j) \in I \times I} e_i \times e_j, \text{ où } e_i \in H_o^* \text{ et } I \in \mathfrak{M}_0;$$

2<sup>o</sup>) l'injection canonique de  $e_i$  dans  $\sum_{i \in I} e_i$  est un  $q$ -monomorphisme.

En effet, avec ces hypothèses,  $(\bar{a}, \bar{b})$  admet pour produit fibré  $\sigma * \sigma$  dans  $\hat{H}^*$  la somme dans  $q$  de  $(D(s_3, s_2) \times D(s_2, s_1))_{s_i \in H_o^*}$  et l'unique  $\bar{k} \in \sigma, \hat{H} \cdot \sigma * \sigma$  déterminé par la famille  $(k(s_3, s_2, s_1))_{s_i \in H_o^*}$  structure la loi de composition de  $H^*$ . Ces conditions sont par exemple satisfaites si  $q$  est le foncteur  $\theta$  de  $\mathcal{F}$  vers  $\mathfrak{M}$ .

Dans la fin de ce §,  $q$  est un foncteur d'homomorphismes saturé, résolvant à droite et à produits finis (donc à produits fibrés finis);  $(H^*, D)$  est une catégorie  $q$ -dominée telle que, pour tout  $s' \in H_o^*$ , le foncteur  $D_{s'} : f \rightarrow D(f, s')$  soit à produits fibrés finis. Soit  $P^*$  la catégorie produit croisé  $P(F)$  associée (fin  $\mathcal{S}A$ ) à l'espèce de morphismes  $(H^*, K^{\bullet} \kappa')$ ; désignons par  $\pi$  le foncteur projection canonique de  $P^*$  vers  $H^*$ , tel que  $\pi(m, f, b) = f$ .

THEOREME 8. Avec les hypothèses précédentes, il existe une application  $\bar{D}$  de  $(H_o^* \times H_o^*)$  dans  $\hat{H}_o^*$  vérifiant les conditions suivantes, où  $s', s''$  et  $s'''$  sont des unités :

$$1^o) q \cdot \bar{D}(s'', s') = \bar{\pi}^1(s'' \cdot H \cdot s');$$

2<sup>o</sup>) Il existe  $k'(s''', s'', s') \in \bar{D}(s''', s'), \hat{H}$ , de source une  $q$ -sous-structure de  $\bar{D}(s''', s'') \times \bar{D}(s'', s')$ , appliqué par  $q$  sur la restriction de la loi de composition de  $P^*$  à la classe

$$(P^* * P^*) \cap \bar{\pi}^1(s''', H \cdot s'') \times \bar{\pi}^1(s'' \cdot H \cdot s').$$



PREUVE. Soit  $s''$  et  $s'$  deux unités de  $H'$ ; notons  $p_1, p_2$  et  $p_3$  les projections canoniques du produit  $S = D(s, s'') \times D(s'', s') \times D(s', s)$  (qui existe dans  $q$ ). Le couple

$$(k(s, s'', s'), [p_1, p_2], D(\hat{b}', s').p_3)$$

d'éléments de  $D(s, s').\hat{H}.S$  admet un  $(\mathfrak{M}^L, q)$ -noyau  $s_1$  tel que  $q(s_1)$  soit la classe des  $(m, f, b) \in q(S)$  vérifiant  $m.f = \hat{b}'.b$  (où  $\hat{b}' = \hat{i}.\hat{b}$ ), c'est-à-dire  $q(s_1) = \hat{\pi}^1(s''.H.s')$ . Nous poserons  $s_1 = \overline{D}(s'', s')$ . Si  $s''' \in H'_0$ , on définit de même

$$s_2 = \overline{D}(s''', s'') \quad \text{et} \quad s_3 = \overline{D}(s''', s').$$

Désignons par  $\hat{p}_i$  le  $(\mathfrak{M}^L, q)$ -sous-morphisme de  $p_i$  de source  $s_1$ , de but  $\beta(p_i)$ , pour  $i = 1, 2$  et  $3$ ; soit  $\hat{p}'_i$  les éléments analogues correspondants à  $s_2$ . Si  $p_4$  et  $p_5$  sont les projections canoniques du produit  $s_2 \times s_1$  sur  $s_2$  et sur  $s_1$  respectivement, le couple

$$(\hat{p}_1.p_5, \overline{D}(\hat{a}', s').\hat{p}'_3.p_4)$$

admet un  $(\mathfrak{M}^L, q)$ -noyau  $s_2 * s_1$  tel que  $q(s_2 * s_1)$  soit la classe des couples

$$(\xi', \xi) \in P * P, \quad \text{où} \quad \xi \in q(s_1) \quad \text{et} \quad \xi' \in q(s_2);$$

soient  $\hat{p}_4$  et  $\hat{p}_5$  les  $(\mathfrak{M}^L, q)$ -sous-morphismes de  $p_4$  et  $p_5$  de source  $s_2 * s_1$ . Considérons les morphismes

$$t_1 = \hat{p}'_1.\hat{p}_4 \in D(s, s''').\hat{H}.s_2 * s_1,$$

$$t_2 = k(s''', s'', s').[\hat{p}'_2.\hat{p}_4.\hat{p}_2.\hat{p}_5] \in D(s''', s').\hat{H}.s_2 * s_1,$$

$$t'_3 = [k(s, s'', s').[\hat{p}'_3.\hat{p}_4.\hat{p}_2.\hat{p}_5], \hat{p}_3.\hat{p}_5] \in D(s, s') \times D(s, s').\hat{H}.s_2 * s_1$$

associant à  $(\xi', \xi)$ , où  $\xi' = (m', f', b')$ ,  $\xi = (m, f, b)$  et  $(\xi', \xi) \in q(s_2 * s_1)$ , respectivement :  $m', f'.f$  et  $(b'.f, b)$ . Puisque  $((K.s')^\bullet, \sigma)$ , où  $\sigma = D(s, s')$ , est une catégorie  $q$ -structurée (proposition 7), il existe  $\overline{F}'(k) \in \sigma.\hat{H}.\sigma * \sigma$  tel que  $q(\overline{F}'(k))$  soit la loi de composition de  $(K.s')^\bullet$ ; comme  $\sigma * \sigma$  est une  $q$ -sous-structure de  $\sigma \times \sigma$  et que

$$q(t'_3)(q(s_2 * s_1)) \subset q(\sigma * \sigma),$$

il existe un  $(\mathfrak{M}^L, q)$ -sous-morphisme  $t''_3 \in \sigma * \sigma.\hat{H}.s_2 * s_1$  de  $t'_3$ ; l'image

par  $q$  de

$$t_3 = \overline{F'}(k). t_3'' \in D(s, s'). \hat{H}. s_2 * s_1$$

est l'application  $(\xi', \xi) \rightarrow (b'. f) \bullet b$ . Par suite, si  $t = [t_1, t_2, t_3]$ ,  $q(t)$  est une restriction de loi de composition de  $P^*$ , et l'on a

$$q(t)(q(s_2 * s_1)) \subset q(s_3), \text{ où } s_3 = \overline{D}(s'', s');$$

il s'ensuit l'existence d'un  $(\mathfrak{M}^t, q)$ -sous-morphisme  $\tilde{t} \in s_3. \hat{H}. s_2 * s_1$  de  $t$ , et ce  $\tilde{t}$  est l'élément  $k'(s''', s'', s')$  cherché. ■

THEOREME 9. *Supposons vérifiées les conditions du théorème 8 et  $q$  à atomes; soit  $(s'', s') \in H_o^* \times H_o^*$ . Il existe*

*$a'(s'', s') \in \overline{D}(s', s'). \hat{H}. \overline{D}(s'', s')$  et  $b'(s'', s'') \in \overline{D}(s'', s''). \hat{H}. \overline{D}(s'', s')$  appliqués par  $q$  sur des restrictions des applications source et but de  $P^*$ . De plus il existe une catégorie fortement  $q$ -structurée  $(P^*, D^P)$  telle que  $D^P(\mu, \mu_1)$  soit une  $q$ -sous-structure de  $\overline{D}(s'', s')$  si  $\pi(\mu_1) = s'$  et  $\pi(\mu) = s''$ .*

PREUVE. Reprenons les notations de la démonstration du théorème 8. Notons

$$\overline{s''} \in D(s'', s''). \hat{H}. s_1 \quad \text{et} \quad \overline{s'} \in D(s', s'). \hat{H}. s_1$$

les éléments, qui existent par définition d'un foncteur à atomes, appliqués par  $q$  respectivement sur l'application constante sur  $s''$  et sur  $s'$ . Il existe

$$g = [\hat{p}_1, \overline{s''}, \hat{p}_1] \in D(s, s'') \times D(s'', s'') \times D(s, s''). \hat{H}. s_1;$$

comme  $q(g)(\xi) = \beta(\xi)$  pour tout  $\xi \in \overline{\pi}^1(s'', H. s')$ , on a

$$q(g)(q(s_1)) \subset q(\overline{D}(s'', s'')),$$

de sorte qu'il existe un  $(\mathfrak{M}^t, q)$ -sous-morphisme  $b'(s'', s') \in \overline{D}(s'', s''). \hat{H}. s_1$  appliqué par  $q$  sur une restriction de l'application but de  $P^*$ . D'une façon analogue, il existe

$$g' = [D(\hat{a}', s'). \hat{p}_3, \overline{s'}, D(\hat{a}', s'). \hat{p}_3] \in D(s, s') \times D(s', s') \times D(s, s'). \hat{H}. s_1$$

tel que  $q(g')(\xi) = \alpha(\xi)$ , et un  $(\mathfrak{M}^t, q)$ -sous-morphisme

$$a'(s'', s'') \in \overline{D}(s', s') \cdot \hat{H} \cdot s_1$$

de  $g'$  appliqué par  $q$  sur l'application source de  $P \cdot$ .

- Supposons  $\mu_1 = (m_1, s', m_1) \in P_o^*$  et  $\mu = (m, s'', m) \in P_o^*$ . La classe  $\mu \cdot P \cdot \mu_1$  est formée des  $(m, f, b) \in \overline{\pi}^1(s'' \cdot H \cdot s')$  tels que  $\hat{a}' \cdot b = m_1$ . Toujours avec les notations de la démonstration du théorème 8, il existe

$$\overline{m} \in D(s'', s) \cdot \hat{H} \cdot s_1 \quad \text{et} \quad \overline{m}_1 \in D(s', s) \cdot \hat{H} \cdot s_1$$

appliqués par  $q$  sur les applications constantes sur  $m$  et sur  $m_1$  respectivement. Le couple  $(\hat{p}_1, \hat{m})$  admet un  $(\mathfrak{M}^t, q)$ -noyau  $\sigma_1$  et le couple  $(D(\hat{a}', s'') \cdot \hat{p}_3, \hat{m}_1)$  admet un  $(\mathfrak{M}^t, q)$ -noyau  $\sigma_2$ . Le foncteur  $q$  étant à produits fibrés finis, il existe une  $q$ -sous-structure  $\tilde{s}_1 = \sigma_1 \cap \sigma_2$  de  $s_1$  telle que

$$q(s_1) = q(\sigma_1) \cap q(\sigma_2) = \mu \cdot P \cdot \mu_1.$$

Posons  $D^P(\mu, \mu_1) = \tilde{s}_1$ . On construit d'une manière analogue des  $q$ -sous-structures  $\tilde{s}_2 = D^P(\mu', \mu)$  de  $s_2$  et  $\tilde{s}_3 = D^P(\mu', \mu_1)$  de  $s_3$ , si  $\mu' = (m', s'', m') \in P_o^*$ . Le produit  $\tilde{s}_2 \times \tilde{s}_1$  est une  $q$ -sous-structure de  $s_2 * s_1$  et l'on a

$$q(t)(q(\tilde{s}_2 \times \tilde{s}_1)) \subset q(\tilde{s}_3), \quad \text{où } t = k'(s'', s', s').$$

Par suite il existe un  $(\mathfrak{M}^t, q)$ -sous-morphisme  $t' \in \tilde{s}_3 \cdot \hat{H} \cdot \tilde{s}_2 \times \tilde{s}_1$  de  $t$ , et  $q(t')$  est l'application

$$(\xi', \xi) \rightarrow \xi' \cdot \xi \text{ de } (\mu' \cdot P \cdot \mu) \times (\mu \cdot P \cdot \mu_1) \text{ dans } \mu' \cdot P \cdot \mu_1.$$

Si l'on désigne par  $D_o^P$  l'application

$$(\mu, \mu_1) \rightarrow D^P(\mu, \mu_1) \text{ de } P_o^* \times P_o^* \text{ dans } \hat{H}_o^*,$$

ceci signifie que  $(H^*, D_o^P)$  est une catégorie discrètement  $q$ -structurée. D'après la proposition 10, il existe une catégorie fortement  $q$ -structurée  $(H^*, D^P)$  dans laquelle  $D_o^P$  est une restriction de  $D^P$ . ■

COROLLAIRE. Avec les hypothèses du théorème,  $(P_s^*, \overline{D}(s', s'))$  où  $P_s^* = \overline{\pi}^1(s' \cdot H \cdot s')$  est une catégorie  $q$ -structurée, pour tout  $s' \in H_o^*$ .

En effet,  $P_s$ , définit une sous-catégorie de  $P^*$  dont les applications source et but et la loi de composition sont structurées respectivement par  $a'(s', s')$ , par  $b'(s', s')$  et par  $k'(s', s', s')$ . ■

C. APPLICATIONS.

Rappelons que, étant donné un ensemble  $E$ , une *quasi-topologie* sur  $E$  est une application  $\pi$  associant à tout  $x \in E$  un ensemble  $\pi(x)$  de filtres sur  $E$  (appelés *filtres quasi-convergens vers  $x$* ), vérifiant les conditions :

1°)  $\pi(x)$  contient le filtre de toutes les parties de  $E$  contenant  $x$  ;

2°) Si  $X$  et  $X'$  quasi-convergent vers  $x$ , le filtre engendré par les ensembles  $M \cup M'$ , où  $M \in X$  et  $M' \in X'$ , quasi-converge vers  $x$ . Si  $M$  est une partie de  $E$ , nous notons  $\pi/M$  la quasi-topologie induite par  $\pi$  sur  $M$ . Soit  $\mathcal{P}_o$  l'ensemble des quasi-topologies  $\pi$  sur les éléments  $E$  de l'univers  $\mathfrak{M}_o$ .

Soit  $\mathcal{P}$  la catégorie des applications quasi-continues  $(\pi', f, \pi)$  entre éléments de  $\mathcal{P}_o$ , et  $\bar{\theta}$  son foncteur d'oubli vers  $\mathfrak{M}$ . Ce foncteur est un foncteur d'homomorphismes saturé, résolvant à droite, à  $\mathfrak{M}_o$ -produits et à atomes. Soit  $\lambda_o$  l'application associant au couple  $(\pi', \pi)$  de deux quasi-topologies la quasi-topologie de la convergence locale [6]  $\lambda(\pi', \pi)$  sur l'ensemble  $\pi' . \mathcal{P} . \pi$  des applications quasi-continues de  $\pi$  vers  $\pi'$ . Si  $f \in \pi' . \mathcal{P} . \pi$ , les filtres quasi-convergens vers  $f$  dans  $\lambda(\pi', \pi)$  sont les filtres  $F$  sur  $\pi' . \mathcal{P} . \pi$  ayant la propriété : Si  $X \in \pi(x)$ , on a  $F(X) \in \pi'(f(x))$ , où  $F(X)$  est le filtre engendré par les ensembles  $\Phi(M)$ , avec

$$\Phi \in F, \quad M \in X \quad \text{et} \quad \Phi(M) = \bigcup_{f' \in \Phi} f'(M).$$

On montre que  $(\mathcal{P}, \lambda_o)$  est une catégorie discrètement  $\bar{\theta}$ -structurée [6]. D'après la proposition 10,  $\lambda_o$  s'étend en un foncteur  $\lambda$  tel que  $(\mathcal{P}, \lambda)$  soit une catégorie  $\bar{\theta}$ -dominée. De plus, on prouve que le foncteur  $\lambda$  est compatible avec les produits fibrés finis.

Soit  $(C^*, \pi)$  une catégorie quasi-topologique (i.e.  $\bar{\theta}$ -structurée). Dans [6], nous avons associé à  $(C^*, \pi)$  la catégorie quasi-topologique

$S(C^\bullet, \pi) = (S^\bullet, \sigma)$  des sections locales de  $(C^\bullet, \pi)$  : Ses éléments sont les triplets  $\hat{s} = (U', s, U)$ , où  $U$  et  $U'$  sont des ouverts de la topologie  $\tau(\pi_o)$  sous-jacente à  $\pi_o = \pi / C_o$  et où  $(\pi, s, \pi / U)$  est une application quasi-continue telle que

$$\beta_s(U) \subset U' \quad \text{et} \quad \alpha_s(x) = x \quad \text{pour tout } x \in U;$$

la loi de composition est définie par :

$$(U'', s', \hat{U}') \bullet (U', s, U) = (U'', \kappa[s' \beta_s, s], U)$$

si, et seulement si,  $\hat{U}' = U'$  et  $\alpha_{s'} = \beta_s$ ; la quasi-topologie  $\sigma$  est construite à partir de la quasi-topologie de la convergence locale sur l'ensemble des applications quasi-continues d'un ouvert quelconque de  $\tau(\pi_o)$  vers  $\pi$ .

Nous allons montrer que l'on peut retrouver cette catégorie à l'aide des résultats du §B. Soit  $(\hat{C}^\bullet, \hat{\pi})$  la catégorie quasi-topologique obtenue de la façon suivante :  $\hat{C}^\bullet$  admet  $C^\bullet$  pour sous-catégorie pleine et possède un seul élément (qui est une unité)  $a$  n'appartenant pas à  $C$ ; si  $x \in C$ , les filtres appartenant à  $\hat{\pi}(x)$  sont les filtres sur  $\hat{C}$  engendrés par les éléments de  $\pi(x)$ ; enfin  $\hat{\pi}(a)$  contient tous les filtres sur  $\hat{C}$ . La catégorie quasi-topologique  $(\hat{C}^\bullet, \hat{\pi})$  admet  $(C^\bullet, \pi)$  pour sous-catégorie quasi-topologique; on pose  $\hat{\pi}_o = \hat{\pi} / \hat{C}_o$ . Soit  $(\mathcal{P}^*, K^\bullet, \kappa')$  l'espace de morphismes associée à la catégorie quasi-topologique  $(\hat{C}^\bullet, \hat{\pi})$  dans le §A. Soit  $\hat{P}^\bullet$  la catégorie produit croisée correspondante,  $\psi$  sa projection canonique vers  $\mathcal{P}^*$  et  $\hat{S} = \psi^{-1}(\hat{\pi}_o \cdot \mathcal{P} \cdot \hat{\pi}_o)$ . Le foncteur  $\bar{\theta}$  et la domination  $\lambda$  vérifiant les hypothèses des théorèmes 8 et 9, il résulte du corollaire du théorème 9 l'existence d'une quasi-topologie canonique  $\hat{\sigma}$  sur  $\hat{S}$  telle que  $(\hat{S}^\bullet, \hat{\sigma})$  soit une catégorie quasi-topologique.

**THEOREME 10.** *La catégorie quasi-topologique  $S(C^\bullet, \pi) = (S^\bullet, \sigma)$  des sections locales de  $(C^\bullet, \pi)$  est isomorphe à une sous-catégorie quasi-topologique de  $(\hat{S}^\bullet, \hat{\sigma})$ .*

**PREUVE.** Soit  $\hat{s} = (U', s, U) \in S$ . Nous associons à  $\hat{s}$  :

- l'application quasi-continue  $\hat{s}_1 = (\hat{\pi}, s_1, \hat{\pi}_o)$ , où

$$s_1(x) = s(x) \text{ si } x \in U, \quad s_1(y) = a \text{ si } y \in \hat{C}_o^* - U;$$

- l'application quasi-continue  $\hat{s}_2 = (\hat{\pi}_1, s_2, \hat{\pi}_o)$ , où

$$s_2(x) = x \text{ si } x \in U' \text{ et } s_2(y) = a \text{ si } y \in \hat{C}_o^* - U';$$

- l'application quasi-continue  $\hat{s}_3 = (\hat{\pi}_o, s_3, \hat{\pi}_o)$ , où

$$s_3(x) = \beta s(x) \text{ si } x \in U \text{ et } s_3(y) = a \text{ si } y \in \hat{C}_o^* - U.$$

La surjection  $\hat{s} \rightarrow (\hat{s}_2, \hat{s}_3, \hat{s}_1)$  définit une bijection  $z$  de  $S$  sur une partie de  $\hat{P}$ . On vérifie facilement que  $z(S) \subset \hat{S}$  et que  $z$  définit un isomorphisme de la catégorie  $S^\bullet$  sur une sous-catégorie  $S'^\bullet$  de la catégorie  $\hat{S}^\bullet$  et un quasi-homéomorphisme de la quasi-topologie  $\sigma$  sur la quasi-topologie  $\hat{\sigma}/S'$ . ■

En particulier, une topologie  $T$  s'identifie à la quasi-topologie  $\pi$  telle que les filtres quasi-convergens vers  $x$  soient les filtres qui convergent vers  $x$  dans  $T$ . Le théorème 10 appliqué en partant d'une catégorie topologique  $(C^*, T)$  (c'est-à-dire la quasi-topologie  $\pi$  est une topologie  $T$ ) permet de retrouver la catégorie quasi-topologique  $(S^\bullet, \sigma)$  des sections locales d'une catégorie topologique. Rappelons que cette catégorie n'est généralement pas une catégorie topologique; une condition suffisante pour que  $\sigma$  soit une topologie est que la topologie induite par  $T$  sur  $C_o^*$  soit localement compacte [6].

**Bibliographie.**

- [ 1 ] *Catégories structurées*, Ann. Ec. Norm. Sup. 80 ( 1963 ), 349-426.
- [ 2 ] *Structures quotient*, Comm. Math. Helv. 38 (1963), 219 - 283 .
- [ 3 ] *Structures quasi-quotient*, Math. Ann. 171 (1967), 293- 363 .
- [ 4 ] *Introduction to the Theory of structured Categories*, Technical Report 10, Un. of Kansas (1966), 95 Pages.
- [ 5 ] *Catégories et Structures*, Dunod (1965), Paris.
- [ 6 ] *Catégories topologiques*, Proc. Neder. Akad. van Wetensch., Amsterdam (1965), 133-175 .
- [ 7 ] *Catégories structurées - Catégories différentiables*, Coll. Géom. Diff., Bucarest 1967 (à l'impression: Revue Roumaine Math. 1968).
- [ 8 ] *Catégories ordonnées - Cohomologie-Holonomie*, Ann. Inst. Fourier 14,1 (1964), 205-268 .

- : - : - : - : - : - : -