BÉNÉDICTE BURAUX-BOURGEOIS

L'analyse diophantienne chez Lagrange

Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques 2e série, tome 3 (1993), p. 13-23
<http://www.numdam.org/item?id=CSHM_1993_2_3__13_0>

L'ANALYSE DIOPHANTIENNE CHEZ LAGRANGE

Bénédicte BURAUX-BOURGEOIS

Le mathématicien J.L. Lagrange est essentiellement connu pour ses travaux d'analyse, d'algèbre ou de physique mathématique. Néanmoins, vraisemblablement sous l'influence d'Euler, il s'est aussi intéressé à ce qu'il nommait "l'analyse de Diophante". Son activité en ce domaine s'est concentrée sur une dizaine d'années, entre 1767 et 1777. Les résultats obtenus pendant cette période sont importants : ainsi, on peut porter à son actif la résolution complète du problème de Pell-Fermat, celle des équations indéterminées du second degré à deux inconnues, la première démonstration du théorème des quatre carrés et, surtout, ce qui représente les premiers pas vers la théorie moderne des formes quadratiques.

Le but de cet exposé est de présenter les travaux évoqués précédemment. Nous commencerons par l'équation de Pell-Fermat : en effet, d'une part, il s'agit là d'un problème important dans l'histoire de l'analyse diophantienne; et, d'autre part, cette étude marque les premiers pas de Lagrange dans cette branche. Il lui consacrera plusieurs mémoires entre 1768 et 1773.

I. L'équation de Pell-Fermat

Si des cas particuliers de ce problème apparaissent dès l'Antiquité(1) - souvent en relation avec des calculs d'approximation d'irrationnels - l'histoire de l'équation $x^2 - a y^2 = 1$ prend vraiment naissance en 1657 lors du célèbre défi de Fermat aux mathématiciens anglais. Reprise par Euler en 1730(2), celui-ci l'étudie dans plusieurs mémoires : il y montre en particulier comment obtenir une infinité de solutions à partir de l'une d'entre elles supposée connue, et, surtout, met en évidence le lien entre cette équation, les fractions continues(3) d'une part, et la résolution des équations indéterminées du second degré d'autre part.

---

(1) Ces travaux, dus en particulier aux mathématiciens indiens et à Archimède sont exposés dans [Weil, p. 20 sq.] et [Dickson II, p. 341].

(2) Dans une lettre à Goldbach où il lui donne par erreur le nom de Pell.

(3) Il faut préciser, comme il le fera lui-même dans une lettre à Euler du 22/12/1769, que Lagrange, au moment où il composait ses premiers travaux, n'avait pas eu connaissance du dernier mémoire d'Euler *De usu novi algorithmi in problemate Pelliano solvendo* publié en 1767.

Mais le problème de l'existence des solutions reste posé et c'est ce point que Lagrange règle définitivement dans son premier mémoire consacré à la théorie des nombres : *Solution d'un problème d'arithmétique* (1768). Il le reprend successivement dans les mémoires *Sur la solution des problèmes indéterminés* (1768) et *Nouvelle méthode pour résoudre les problèmes indéterminés en nombres entiers*"(1770) et, enfin, dans les "Additions" à la traduction française des *Eléments d'Algèbre* d'Euler (1773).

Le mémoire *Solution d'un problème d'arithmétique* [Lagrange, *Œuvres* I, p. 671], présenté à l'Académie de Berlin en septembre 1768(4), peut se décomposer en quatre parties. Tout d'abord, la première preuve jamais publiée que l'équation $x^2 - ay^2 = 1$ (a positif et non carré) est toujours résoluble en entiers : cette preuve est fondée sur la théorie des fractions continues qui joue un rôle essentiel dans l'oeuvre de Lagrange; il utilise le développement en fraction continue de l'irrationnel $\sqrt{a}$ puis la suite des fractions continues qui converge vers $\sqrt{a}$. Puis Lagrange procède à la recherche de toutes les solutions de l'équation en montrant en particulier que ces solutions figurent parmi les couples $(M_i\ ;\ N_i)$ qui sont les termes des réduites convergeant vers $\sqrt{a}$; ces suites étant croissantes, il suffira de procéder à des essais successifs pour obtenir les plus petits entiers p et q tels que $p^2 - aq^2 = 1$.
Il prouve ensuite que toutes les solutions sont données par les formules :

$$x = \frac{1}{2}[(p + q\sqrt{a})^m + (p - q\sqrt{a})^m]$$

$$y = \frac{1}{2}[(p + q\sqrt{a})^m - (p - q\sqrt{a})^m]$$

et applique ces méthodes pour certaines valeurs de a (a=13 , a = 19 , a = 109). Enfin, Lagrange utilise les résultats précédents pour la résolution des équations du second degré à deux inconnues en nombres entiers.

Mais, si ce mémoire représente une étape capitale dans l'étude de l'équation de Pell-Fermat sur le plan théorique, il faut bien reconnaître que, dans la pratique, malgré la dextérité apportée par Lagrange dans le maniement des formules, la méthode exposée est "très longue et très indirecte"(5). Il va donc tenter d'en simplifier les calculs tout en élargissant le cadre de son étude. Dans le mémoire *Sur la solution des problèmes indéterminés du second degré* lu à l'Académie de Berlin le 24 Novembre 1768 [*Œuvres* II, p. 377-535], l'équation de Pell-Fermat est présentée comme un cas particulier de $A = u^2 - Bt^2$ (A = 1 , B positif non carré). La méthode mise en place repose d'une part sur les fractions continues et d'autre part sur la méthode de descente infinie de Fermat.

---

(4) Il fut publié seulement en 1773 par l'Académie de Turin dans *Miscellanea Taurinensia* , tome IV (1766-1769).

(5) Lagrange le reconnaît lui-même [*Œuvres* VII, p. 159]

Lagrange revient à nouveau sur cette question dans le mémoire *Nouvelle méthode pour résoudre les problèmes indéterminés en nombres entiers* [*op, cit.*., p. 655-726], lu à l'Académie de Berlin le 21 Juin 1770. Ce nouveau traitement correspond encore à une volonté de simplification et d'unification : l'équation de Pell-Fermat est alors traitée dans le cadre de l'étude de $A = p^2 - Bq^2$.
Ce mémoire est très lié à deux autres travaux contemporains de Lagrange : *Sur la résolution des équations numériques* (1768) [*op. cit.*, p. 539] et *Additions au mémoire sur la résolution des équations numériques* (1770) [*op. cit.*, p. 582] où il démontre la propriété qui sera à la base de son nouveau traitement de l'équation de Pell-Fermat : la périodicité du développement en fraction continue des solutions réelles des équations du second degré(6).

Enfin, la dernière contribution de Lagrange à ce problème se trouve dans les "Additions" aux *Eléments d'Algèbre* d'Euler, publiées en 1773 ([*Œuvres* VII, p. 5-180]). Elle se compose de deux parties très différentes. Tout d'abord, un complément sur ses travaux antérieurs avec, en particulier, un commentaire sur les méthodes appliquées par Wallis et Euler. Et, surtout, un nouveau traitement (conséquence des travaux sur les minima) des formes $A p^2 + B pq + C q^2$ avec p et q entiers. Il montre ainsi que la forme $p^2 - kq^2$ (k entier non carré) atteint une infinité de fois sa valeur entière minimale 1.

Dans tous les mémoires cités précédemment, on note l'importance accordée par Lagrange aux formes quadratiques. Ainsi, évoque-t-il dans une lettre à d'Alembert(7) l'équation de Fermat comme "ce problème [qui] est d'une grande importance dans la théorie des quantités carrées qui font le principal objet de l'analyse de Diophante". Or, l'intérêt de Lagrange pour les *Arithmétiques* de Diophante va plus loin que le simple souci d'une évocation historique. En effet, le 21 Août 1777, il soumet à l'Académie de Berlin un mémoire écrit quelques années auparavant et intitulé *Sur une édition de Diophante* (8).

II. Problèmes indéterminés

Ce retour aux sources de l'analyse diophantienne est important pour le sujet qui nous intéresse ici. Lagrange a étudié Diophante dans l'édition fournie par Bachet [1621] et dans les observations sur Diophante de Fermat. Mais, en fait, il ne s'intéresse qu'à une partie de l'oeuvre de Diophante : les problèmes indéterminés et, essentiellement, à ceux du second degré. Il lit les *Arithmétiques* à la lumière de ses propres recherches et définit la traduction

---

(6) Propriété observée par Euler sur des cas particuliers mais non prouvée par celui-ci.

(7) Lettre du 15 Août 1768 [Lagrange, *Œuvres* XIII, p. 116].

(8) Ce mémoire n'est pas reproduit dans les *Œuvres* de Lagrange. Il a été publié et analysé pour la première fois dans l'article de R. Rashed : "Lagrange, lecteur de Diophante" [1988].

algébrique qu'il en donne comme "l'exposition analytique de l'ouvrage de Diophante" afin de dégager des méthodes qui "méritent l'attention des géomètres et qu'il est difficile de saisir dans l'ouvrage de Diophante à cause que ces solutions sont purement arithmétiques" .

Lagrange a aussi étudié avec beaucoup de soin les nombreux mémoires qu'Euler a consacrés aux équations diophantiennes à partir de 1732(9). Il se fixe alors comme but le traitement complet des équations indéterminées du second degré à deux inconnues dans toute leur généralité, c'est à dire sans supposer, comme le faisait Euler, que l'une des solutions est connue. Ceci est réalisé conjointement dans les deux mémoires de 1768 dont l'étude est indissociable.

Lagrange y considère l'équation générale à coefficients entiers :

$$\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y + \xi = 0 \qquad [1]$$

et la transforme, par des changements de variables judicieux, en l'équation réduite :

$$A = u^2 - Bt^2 \qquad [2]$$

Il étudie tout d'abord les cas particuliers où l'un des nombres A ou B est un carré. L'équation est alors "susceptible des méthodes de Diophante", c'est à dire que l'on est placé dans les seuls cas où l'on savait, jusqu'alors, résoudre ce problème. En dehors de ces cas, le tâtonnement demeure la seule méthode possible pour déterminer une solution initiale.

Lorsque A et B ne sont pas des carrés(10) , il procède à la résolution de l'équation [2] dans l'ensemble des rationnels. Soient p/r et q/r les écritures, supposées réduites, de u et de v, la résolution de l'équation [2] se ramène alors à celle de :

$$Ar^2 = p^2 - Bq^2 \qquad [3]$$

dans l'ensemble des entiers, opérée par descente infinie.

Au cours de la résolution se pose le problème essentiel de l'existence d'une solution rationnelle de l'équation [2]. L'égalité $Ar^2 = p^2 - Bq^2$ ne peut avoir lieu que lorsque B est résidu quadratique modulo A, c'est à dire lorsqu'il existe un entier α tel que A divise $\alpha^2 - B$. Dans ce mémoire, la recherche de α s'effectue encore par tâtonnement (tout en limitant le nombre d'essais aux cas où $|\alpha| < \frac{1}{2}|A|$ mais, ultérieurement, Lagrange, prenant appui sur le petit théorème de Fermat, prouvera alors que a ne divise un nombre de la forme $\alpha^2 - B$ que lorsqu'il divise $B^{1/2\,(a-1)} - 1$ $(a \neq 2)$.

La méthode mise en place par Lagrange permet de résoudre totalement l'équation proposée dans l'ensemble des rationnels. Parmi les solutions obtenues se trouvent les solutions

---

(9) En particulier : *De solutione problematum Diophanteorum per numeros integros* (E. 29) et *De resolutione formularum quadraticarum indeterminatarum per numeros integros* (E. 279).

(10) On suppose de plus que A et B sont sans facteur carré et que A > B.

entières, mais leur recherche par ce biais s'avère fastidieuse. Il propose donc une méthode permettant d'obtenir directement les solutions entières de :

$$A = p^2 - Bq^2 \qquad [4]$$

avec A sans facteur carré; p et q premiers entre eux; B non carré et A et B diviseurs communs carrés.

Il transforme [4] en :

$$A_1 = p_1{}^2 - Bq_1{}^2$$

avec $|A_1| < |A|$; $p_1 < p$; $q_1 < q$ ... et construit ainsi une suite décroissante $(|A_i|)$.

On arrive donc nécessairement ainsi à une équation de la forme :

$$A_n = p_n{}^2 - Bq_n{}^2$$

admettant des solutions évidentes.

L'équation $A = p^2 - Bq^2$ admettra des solutions entières si et seulement si p_n, q_n, p_{n-1}, q_{n-1} sont entiers.

Toutes ces questions sont reprises dans le mémoire *Nouvelle méthode pour résoudre les problèmes indéterminés en nombres entiers* où Lagrange établit "une méthode très simple et très facile pour résoudre en nombres entiers les équations de la forme $ax^2 + b = y^2$" .

En fait, ce mémoire est plus ambitieux que les précédents puisqu'il ne se limite pas aux problèmes du second degré, mais se veut cependant leur prolongement dans la mesure où il propose une simplification importante des résultats obtenus.

Lagrange commence par montrer que toute équation

$$Bt^n + Ct^{n-1}u + Dt^{n-2}u^2 + ... + Ku^n = A \qquad [5]$$

(avec A, B, ... K entiers donnés ; u et t indéterminées entières; A et u premiers entre eux) peut se ramener, par changement de variable, à une équation du même type dont "le terme connu soit l'unité" soit :

$$Pu^m + Qu^{m-1}y + Ru^{m-2}y^2 + ... + Vy^m = 1 \qquad [6]$$

Il résout [6] dans l'ensemble des entiers en utilisant les fractions continues(11) .

Il faut noter que c'est dans ce mémoire que Lagrange établit une propriété importante que nous énonçons ici sous sa forme moderne en utilisant la langage des congruences, comme le fit Gauss à l'article 43 des *Disquisitiones Arithmeticae* :

---

(11) Dans sa *Théorie des Nombres*, Legendre émet des réserves sur la validité de la solution de Lagrange lorsque n > 2 (Article 126; 3e édition, de 1830) : "Comme l'opération de développement (en fraction continue) s'étend à l'infini, et que, passé le second degré, on ne connaît aucune loi à laquelle soient assujettis les quotients et les transformées successives[...]" . Mais en fait, Lagrange limite ses applications au degré 2 et utilise la propriété qu'il a démontrée : le développement en fraction continue d'un irrationnel est périodique.

"La congruence de degré m

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots + Mx + N \equiv 0$$

dont le module est un nombre premier p qui ne divise pas A, ne peut être résolue de plus de m manières ou n'a pas plus de m racines incongrues suivant p".

Enfin, ces résultats sont repris et synthétisés dans les "Additions" aux *Eléments d'Algèbre* d'Euler, composées à partir de 1770 et publiées en 1773, où Lagrange se propose de donner à ses lecteurs un exposé complet et méthodique sur l'analyse indéterminée.

Sont à retenir en particulier certains thèmes absents par ailleurs de l'oeuvre de Lagrange, mais abordés dans sa correspondance avec Euler(12) , comme les doubles et triples égalités qui sont "d'un usage très fréquent dans l'analyse de Diophante".

C'est ainsi qu'il étudie le système :

$$\begin{cases} a + bx = t^2 \\ c + dx = u^2 \end{cases}$$

qui se ramène, par élimination des x, à une équation du second degré à deux inconnues dont on cherche les solutions rationnelles.

C'est aussi dans ces "Additions" que Lagrange transforme, par changement de variable affine, la forme $Cy^2 - 2\,nyz + Bz^2$ en $L\xi^2 - 2\,N\xi\varphi + M\varphi^2$ où L, M, N sont des entiers tels que $|N| < L$ et $|2N| < M$ et $N^2 - LM = n^2 - CB = A$, c'est à dire en une autre forme de même type et de même discriminant.

* * * * * * * * *

La partie la plus remarquable et la plus féconde de l'oeuvre de Lagrange en théorie des nombres est contenue dans les *Recherches d'Arithmétique* [*Œuvres* III, p. 695-795], publiées en 1775 et 1777 et consacrées à l'étude "des nombres qui peuvent être représentés par la formule $Bt^2 + Ctu + Du^2$ où B, C, D sont supposés des nombres entiers donnés et t et u des nombres aussi entiers mais indéterminés".

---

(12) Dans sa lettre du 16 Janvier 1770, Euler lui soumet le problème suivant : "Trouver deux nombres dont le produit plus ou moins leur somme ou leur différence donne un carré".

Lagrange l'étudie dans sa lettre du 30 Décembre 1770.

Ce problème sera à la base du mémoire publié en 1771 par Euler : *Solutio problematis quo duo quaeruntur numeri quorum productum tam summa quam differentia eorum sive auctum sive minutum fiat quadratum*

(E. 405; *Opera* (I) 3, p.148).

Si on se livre à la lecture de ces travaux à la lumière des développements ultérieurs, en particulier ceux de Gauss, on peut considérer que Lagrange ébauche là une théorie des formes quadratiques : il y établit, pour la première fois, la notion d'équivalence de formes et de réduction de formes.

D'un point de vue historique, les résultats obtenus par Lagrange sur les formes $Bt^2 + Ctu + Du^2$ vont permettre de démontrer un nombre important de propriétés des nombres $x^2 + ay^2$ énoncées par Fermat, puis Euler. De plus, Lagrange relie lui-même cette étude à celle opérée dans ses deux grands mémoires sur les équations indéterminées: il met en évidence le lien existant entre la résolution d'une équation indéterminée du second degré à deux inconnues et le problème de la représentation d'un entier par une forme quadratique.

Dans le mémoire de 1773, il établit que tout diviseur d'un nombre de la forme $Bt^2 + Ctu + Du^2$ (où t et u sont des indéterminées premières entre elles) est représentable par la forme $Ls^2 + Msx + Nx^2$ de même discriminant; puis que toute forme $Ls^2 + Msx + Nx^2$ avec $|M| > |L|$ ou $|M| > |N|$ peut se transformer en une forme du même type $L's'^2 + M's'x' + N'x'^2$ de même discriminant, mais avec $|M'| < |M|$. D'où il résulte que si A divise $Bt^2 + Ctu + Du^2$ $(t \wedge u = 1)$ alors A est lui-même de la forme $Py^2 + Qyz + Rz^2$ $(y \wedge z = 1)$ avec

$$|Q| < |P| \quad , \quad |Q| < |R| \quad \text{et} \quad Q^2 - 4PR = C^2 - 4BD.$$

Ces résultats vont permettre la recherche des formes des diviseurs des nombres $t^2 \pm au^2$ où a désigne un entier positif donné et t et u sont premiers entre eux; ainsi, Lagrange retrouve les propriétés démontrées par Euler : les diviseurs des nombres $t^2 \pm au^2$, pour $a=1, 2$ ou 3 sont de la même forme. Mais il remarque que la méthode mise en place présente "une espèce d'inconvénient"; en effet, elle "donne quelquefois plus de formules qu'il n'en faut pour représenter tous les diviseurs des nombres d'une forme donnée; de sorte qu'il arrive que quelques unes de ces formules reviennent au même". C'est pour résoudre ce problème qu'il étudie ce qui sera connu ultérieurement sous le nom de formes équivalentes.

La seconde partie des *Recherches d'Arithmétique* (1775) est consacrée à la réduction à la forme $4an + b$. de l'expression $py^2 \pm 2qyz \pm rz^2$, qui représente les diviseurs de $u^2 \pm at^2$. Ceci permettra entre autres à Lagrange de prouver de nombreux théorèmes sur les écritures des nombres premiers de la forme $4an + b$ en formes quadratiques, comme celui énoncé par Fermat dans une lettre à Digby : *Tout nombre premier de la forme $8n + 3$ est aussi de la forme $x^2 + 2y^2$.*

****

Enfin, il nous reste à étudier deux autres mémoires de Lagrange, et d'abord le théorème des quatre carrés dont il est le premier à avoir donné une démonstration complète en 1770(13) .

A l'origine, se trouve le problème 29 du livre IV de Diophante : "Trouver quatre nombres (carrés) dont la somme augmentée de la somme de leurs propres racines forme un nombre donné". Dans la solution numérique qu'il donne de ce problème, Diophante est amené à décomposer un nombre non carré en somme de quatre carrés et il semble qu'il utilise là une propriété connue des entiers soumise à aucune condition, propriété redécouverte par Bachet en 1621, lorsqu'il publie son Diophante. Il énonce :

"Tout nombre est ou bien carré ou bien composé de deux ou trois ou quatre carrés".

On sait aussi que Fermat affirmait(14) en posséder une démonstration qui ne fut jamais retrouvée mais qui s'opérait sans doute par la méthode de descente(15) .

A partir de 1730, Euler se consacre à la recherche de la démonstration de ce théorème et publie en 1754 *Demonstratio theorematis Fermatiani omnem numerum sive integrum sive fractum esse summam quatuor pauciorumve quadratorum* [*Opera* (I) 2, p. 338] dans lequel il prouve que tout nombre premier peut s'écrire comme somme d'au plus quatre carrés rationnels, ce qui, en raison de l'identité du produit de deux sommes de quatre carrés, permet d'affirmer que la propriété est vraie pour tous les entiers. Mais il reconnaît ne pas parvenir à montrer que ces carrés sont des entiers.

C'est cette propriété que Lagrange démontre dans son mémoire de 1770. Il prouve tout d'abord que "si une somme de quatre carrés se divise par un nombre premier supérieur à sa racine, alors ce nombre premier est somme de quatre carrés", puis que "si un nombre premier quelconque est un diviseur de la somme de quatre carrés qui n'aient point de commun diviseur, ce nombre est aussi la somme de quatre carrés". Ces deux démonstrations utilisent la méthode de descente infinie.

Il reste alors à montrer que tout nombre premier est toujours diviseur d'une somme d'au plus quatre carrés; proposition déjà établie auparavant par Euler, mais que Lagrange obtient à partir de l'énoncé plus général : "Si a est un nombre premier et que B et C soient des nombres quelconques positifs ou négatifs non divisibles par A, je dis qu'on pourra toujours trouver deux nombres p et q tels que le nombre $p^2 - Bq^2 - C$ soit divisible par A". D'où il résulte, en particulier, que, quel que soit le nombre premier A donné, on peut toujours trouver p et q tels que A divise $p^2 + q^2 + 1$; A divise donc une somme d'au plus quatre carrés et, par conséquent, est lui-même de cette forme. Et, puisque le produit de deux sommes de quatre carrés est de même nature, alors, tout nombre entier est somme de quatre carrés entiers.

---

(13) *Démonstration d'un théorème d'arithmétique* [*Œuvres* III, p. 189].

(14) Lettre à Digby de Juin 1658 [Fermat, *Œuvres* II, p. 403].

(15) Lettre à Carcavi d'août 1659 [*Op. cit.*, 433].

Le mémoire avec lequel nous allons clore cet exposé est la dernière contribution de Lagrange à la théorie des nombres. Lu à l'Académie le 20 Mars 1777, il s'intitule : *Sur quelques problèmes de l'analyse de Diophante* [*Œuvres* IV, p. 377]. C'est, en effet, dans la lecture des *Observations sur Diophante* de Fermat que Lagrange a puisé son sujet. Il s'intéresse au problème proposé à l'observation 24 :
"Trouver un triangle rectangle en nombres dont l'hypoténuse soit un carré et dont la somme des deux côtés autour de l'angle droit en soit un aussi".

Dans sa correspondance avec Mersenne(16) , Fermat en donne la solution suivante :

4 687 298 610 289

4 565 486 027 761

et 1 061 652 293 520

Lagrange se propose, en utilisant la méthode de descente, de résoudre le problème dans toute sa généralité et de montrer que les solutions ci-dessus sont minimales. Si p et q désignent les côtés de l'angle droit et x^2 l'hypoténuse du triangle rectangle considéré, on obtient le système :

$$\begin{cases} p + q = y^2 \\ p^2 + q^2 = x^4 \end{cases}$$

En posant $p - q = z$, Lagrange ramène le problème à la résolution en entiers de :

$$2x^4 - y^4 = z^2 \quad (17) \qquad [7]$$

Il montre, par descente infinie, que la connaissance de solutions de :

$$s^4 + 8t^4 = u^2 \qquad [8] \qquad\qquad x^4 - 2y^4 = z^2 \qquad [9]$$

permettra d'obtenir les solutions de [7] et réciproquement. Or, l'équation [8] admet des solutions évidentes : $s = 1, t = 1, u = 3$.
A partir de là, on peut construire des suites croissantes de valeurs de x et y, permettant ensuite d'obtenir p et q. On constate alors que les plus petites valeurs positives qui apparaissent sont bien celles proposées par Fermat.

Comme nous avons pu le constater au cours de cette étude, la contribution de Lagrange à la théorie des nombres est très concentrée à la fois dans le temps et dans les thèmes abordés, son centre d'intérêt ayant résidé principalement dans les formes quadratiques. Historiquement, Lagrange joue un rôle charnière : les sujets qu'il a étudiés l'avaient déjà été auparavant par

---

(16) Lettre d'août 1643 [Fermat, *Œuvres* II, p. 260].

(17) On peut, sans nuire à la généralité du problème, supposer que x et y sont premiers entre eux, ce qui impose alors que x, y et z sont impairs. La solution évidente de [7] : $x=1$, $y=1$, $z=1$ conduit à $p=1$, $q=0$ et ne répond donc pas au problème de Fermat.

Fermat et Euler ([18]), mais la démarche qu'il a mise en oeuvre se révèle profondément différente: appartenant à une nouvelle génération de mathématiciens, Lagrange met l'accent sur la nécessité d'une preuve et sur les problèmes d'existence; il commence toujours par prouver l'existence de solutions avant de mettre en place des méthodes permettant de les obtenir toutes. En outre, à plusieurs reprises, dans les introductions de ses mémoires, il insiste sur la nécessité d'une résolution rigoureuse, complète et " qui ne laisse rien à désirer".

Son influence est certaine tant sur les travaux d'Euler postérieurs à 1770 que sur ceux de Legendre ou de Gauss. Par la suite, le développement de la théorie des formes quadratiques ainsi que les puissants outils mis en place au XIX^{e} siècle ont permis une nouvelle interprétation des problèmes étudiés par Lagrange : ainsi, dans ses recherches sur les formes, Gauss traite dans la même section le problème de Pell-Fermat, les équations indéterminées du second degré et la décomposition des nombres en quatre carrés, réalisant ainsi une unification des résultats de Lagrange que celui-ci ne pouvait manquer d'apprécier puisqu'elle répondait à l'un de ses soucis dominants.

Bibliographie

C. G. BACHET de MEZIRIAC : *Diophantini Alexandrini Arithmeticorum libri sex, et de numeris multiangulis liber unus*, Paris, 1621.

L. E. DICKSON : *History of the Theory of Numbers*. 3 vol., 1re édition : 1919; réimp. New York, Chelsea (1971).

DIOPHANTE D'ALEXANDRIE : *Les six livres arithmétiques et le livre des nombres polygones*. Traduction, introduction et notes de P. Ver Eecke, Bruges, Desclée de Bower (1926); rééd. Blanchard (1959).

L. EULER : *Opera Omnia*, 4 séries (1911-).

P. DE FERMAT : *Œuvres*, publiées par P. Tannery et C. Henry, Paris, Gauthier-Villars (1891-1912), 4 vol.

---

(18) A l'exception du théorème de Wilson qu'il est le premier à avoir démontré en 1771.

P.H. FUSS : *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII^e siècle*. Saint-Pétersbourg (1843), 2 vol.; reprint : Johnson, 1968.

C.F. GAUSS : *Disquisitiones arithmeticae*, Leipzig (1801) = *Werke* 1; traduction fr. Poullet-Delisle, Paris (1807); réimp. Blanchard (1953).

J.L. LAGRANGE : *Œuvres* , publiées par J.A. Serret et G. Darboux, Paris, Gauthiers-Villars (1867-1892), 14 vol.

A.M. LEGENDRE : *Théorie des Nombres*, 3^e édition, Paris, Firmin-Didot (1830), 2 vol.

R. RASHED : "Lagrange, lecteur de Diophante" dans *Sciences à l'époque de la Révolution Française. Recherches Historiques,* Paris, Blanchard (1988), p. 39-83.

A. WEIL : *Number Theory. An approach through history from Hammurapi to Legendre*, Birkhäuser (1983).