CAHIERS DU SÉMINAIRE D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

JEAN-PIERRE KAHANE

A partir et autour de Wiener

Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques 2e série, tome 2 (1992), p. 65-78
<http://www.numdam.org/item?id=CSHM_1992_2_2__65_0>

A PARTIR ET AUTOUR DE WIENER

Jean-Pierre Kahane
Université Paris XI (Orsay)

Cet exposé sélectionne, dans la vie de Norbert Wiener, dans les influences qu'il a subies, dans son œuvre, et dans l'influence qu'il a exercée, quelques aspects qui me paraissent ressortir au thème du colloque. Ses sources principales sont:

1. le numéro spécial du *Bulletin of the American Mathematical Society* de janvier 1966 (volume 72) consacré à Wiener, et particulièrement la biographie de Wiener par Norbert Levinson (*Wiener's life*, pp. 1-32) ;

2. les œuvres majeures de la période 1930-1934 que sont *Generalized harmonic analysis* (GHA) (*Acta Math.* 55, 1930, 117-258), *Tauberian theorems* (TT) (*Ann. of Math.* 33, 1932, 1-100), *The Fourier integral and certain of its applications* (FICA) (*Cambridge Univ. Press* 1933), et le livre écrit en collaboration avec R.E.A.C. Paley, *Fourier transforms in the complex domain* (FTCD) (*A.M.S. Colloq. Publ.* 19, 1934) ;

3. des livres et articles divers, de différents auteurs, qui j'indique dans la bibliographie.

Je n'ai guère utilisé les ouvrages autobiographiques de Wiener (*Ex-prodigy*, 1953 ; *I am a mathematician*, 1956) ni le récent livre de P. Masani sur Wiener (1990). Le lecteur intéressé par la personnalité de Wiener se doit de les consulter, de même que les *Œuvres de Wiener* éditées par P. Masani.

L'exposé oral tentait de croiser l'ordre chronologique et l'ordre thématique. Le présent exposé est nécessairement linéaire. Il sera chronologique au début, thématique ensuite. Les trois parties sont relatives à sa vie jusqu'en 1930 (en insistant sur ses intérêts et les influences subies), ses œuvres de la période 1930-1934, et l'influence de ces œuvres.

I. Avant 1930

Norbert Wiener est né le 26 novembre 1894. Il commence à fréquenter l'université (Tufts College) à onze ans ; ses intérêts majeurs sont alors la chimie et la physique. A quinze ans, il s'inscrit à Harvard en biologie. Mais il n'a aucun talent d'expérimentateur. Il se tourne vers la phisolophie. A dix-huit ans, il est docteur, avec un Ph.D. en logique mathématique. Pendant tout ce temps, il a son père, Leo Wiener, à ses côtés. C'est un homme remarquable, né dans un ghetto de la Russie tsariste, immigrant impécunieux, devenu à la force du poignet, universitaire, linguiste et philologue.

Fin 1913 - il a dix-neuf ans - il visite Cambridge (Angleterre). Il a une bourse pour travailler avec Bertrand Russell. Il suit le cours de Russell, qui l'impressionne. Il suit aussi ses conseils, qui vont de révéler déterminants pour son avenir. Russell le pousse à apprendre des mathématiques et à assister aux cours de Hardy, Littlewood et Mercer. Il le pousse aussi à lire des articles de physique, en particulier, les trois grands articles d'Einstein de 1905 (relativité, effet photoélectrique, et mouvement brownien).

Puis Wiener visite Göttingen (Hilbert, Landau, Szasz), de nouveau Cambridge, Londres, New York. A vingt ans, il devient assistant de philosophie à Harvard. Mais il n'a pas beaucoup de succès, ni auprès des étudiants débutants, ni dans des cours avancés.

De 1916 à 1919 il s'essaye à différents métiers : instructeur en mathématiques à l'Université du Maine, élève officier, apprenti- ingénieur à la General Electric (où il apprend et interprète le calcul symbolique de Heaviside), collaborateur de *Encyclopaedia Americana*, reporter au Boston Herald, avec un égal insuccès. C'est accidentellement, à la suite d'un drame familial - la mort du fiancé de sa soeur, G. M. Green - qu'il découvre, parmi les livres de Green, Osgood, Lebesgue, Fréchet. "For the first time, I began to have a really good understanding of modern mathematics", écrit-il dans *Ex-prodigy.* Ainsi, ces dures années d'apprentissage sont loin d'être perdues : il s'initie à l'enseignement des mathématiques, au métier d'ingénieur électricien, à la communication sous différentes formes, et il découvre, avec l'intégrale de Lebesgue et les espaces fonctionnels de Fréchet, les mathématiques mêmes qu'il devait faire fructifier.

En 1919, sur la recommandation d'Osgood, il entre au M.I.T. comme assistant de mathématiques. C'est là qu'il devait faire toute sa carrière universitaire. Pour l'heure, il doit enseigner le *calculus* à raison de vingt heures par semaines. Cependant il s'intéresse aux articles de G. I. Taylor sur la turbulence. Un entretien avec I. A. Barnett, un jeune mathématicien élève de Moore, semble avoir eu sur l'orientation de son travail un effet déterminant. Wiener, attiré par l'analyse fonctionnelle de Fréchet, demande un conseil à Barnett, sous la forme d'un bon problème. "his reply", écrit-il dans *Ex-prodigy,* "had a considerable influence on my later scientific carreer. He suggested the problem of integration in function space."

Le résultat est le mémoire *Differential space,* publié en 1923. C'est là qu'apparaissent la mesure de Wiener, la première théorie mathématique du mouvement brownien - au moyen d'une construction à la main de la mesure de Wiener -, la théorie de la lumière blanche qu'on devait appeler plus tard bruit blanc ou bruit de fond, l'introduction de spectres continus généralisant les spectres des fonctions presque périodiques et annonçant l'analyse harmonique généralisée (General harmonic analysis), et une amorce de théorie de la communication dont Wiener observe qu'elle est "highly statistical". Levinson observe que, dans ce mémoire fondamental, on retrouve comme ingrédients les conseils de lecture de Russell, le Fréchet hérité de Green, et l'entretien avec Barnett : "such is the role of chance in great discoveries of science".

C'est aussi le temps des travaux de Wiener en théorie du potentiel (1923-1924). Il se marie en 1926, il est promu *associate professor* en 1929. Entre 1923 et 1930 mûrissent ses idées en analyse harmonique, particulièrement sur l'analyse harmonique généralisée et les théorèmes taubériens, et sur les rapports entre l'analyse harmonique et la théorie des quanta - comme en témoignent les articles parus à cette époque.

II. 1930-1934

Les années 1930 à 1934 sont pour Wiener des années heureuses et riches. Il a deux petites filles. Il est nommé en 1932 *full professor* à M.I.T. Il passe l'année 1931-1932 à Cambridge sur la Cam, où il donne un cours sur ses travaux. Il travaille avec R.E.A.C. Paley et A. Zygmund (c'est leur collaboration qui lui permet d'achever son programme sur le mouvement brownien, en montrant que ses versions continues sont nulle part différentiables). Il poursuit sa collaboration avec Paley aux Etats-Unis en 1932-33. La tache noire de cette période est la mort accidentelle de Paley le 7 avril 1933, à l'âge de 26 ans. Il faut lire ce qui Wiener écrit de Paley dans la préface de FTCD, pour apprécier la qualité de leur collaboration et de leur amitié.

C'est l'époque des grandes œuvres : GHA, TT, FICA, FTCD, que j'ai mentionnées dans l'introduction. Je vais tenter d'en donner une idée.

L'idée de base de GHA tient dans la formule

$$\varphi(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x+t)\, \overline{f(t)}\, dt.$$

Si f est presque-périodique, φ l'est aussi. Plus précisément, si f a pour série de Fourier-Bohr $\sum a_n e^{i\lambda_n x}$, on a

$$\varphi(x) = \sum |\, a_n\,|^2\, e^{i\lambda_n x}.$$

Dans le cas général où la fonction φ existe, Wiener prouve à la main (il ne dispose pas encore du théorème de Bochner) que φ est la transformée de Fourier d'une mesure σ positive, que l'on peut appeler le spectre de f. L'interprétation de σ est la mesure de l'énergie du signal f dans une bande de fréquence donnée. Wiener donne des exemples, très différents du cas presque périodique, où cette mesure σ est continue. En fait, il s'agit d'exemples aléatoires et de propriétés presque sûres - une anticipation de la théorie des processus stochastiques stationnaires. Les exemples les plus élémentaires sont juste produits par un jeu de pile ou face $f(x) = \epsilon_n$ pour $n \leq x < n+1$). Mais c'est aussi pour Wiener l'occasion de revenir sur la construction mathématique du mouvement brownien et d'indiquer une propriété hölderienne de ses réalisations (en se contentant de l'exposant $\frac{1}{4}$; l'exposant $1/2 - \epsilon$ apparaît seulement dans le travail avec Paley et Zygmund et ensuite dans FTCD).

L'analyse harmonique généralisée est l'étude des fonctions f telles que φ existe. Au sens des distributions de Schwartz (qui, bien sûr, n'existaient pas encore), une telle f admet une cotransformée de Fourier que Wiener définit par sa primitive, g. On vérifie facilement, par le théorème de Plancherel, que

$$\frac{1}{2\epsilon}\int \mid g(u+\epsilon)-g(u-\epsilon)\mid^2 du = \frac{1}{\pi\epsilon}\int \mid f(t)\mid^2 \frac{\sin^2\epsilon t}{t^2}dt,$$

les intégrales étant prises sur la droite $\mathbb{R}$. Wiener en tire la formule

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2\epsilon}\int \mid g(u+\epsilon)-g(u-\epsilon)\mid^2 du = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \mid f(t)\mid^2 dt.$$

Le passage n'est pas évident. En fait, il nécessite une formule du type

(0) $$\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon\int_0^\infty F(t)S(\epsilon t)dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_0^\infty F(t)dt$$

($F(t)=\mid f(t)\mid^2+\mid f(-t)\mid^2$, $S(t)=\frac{2\sin^2 t}{\pi t^2}$) qui peut être dérivée de ce que Wiener appelle *théorème taubérien.*

C'est Ingham qui révéla à Wiener le théorème de Tauber et sa profonde généralisation par Littlewood. Un fameux théorème d'Abel dit que, si

(1) $$\sum_1^\infty a_n = s,$$

alors

(2) $$\lim_{x\uparrow 1}\sum_1^\infty a_n x^n = s.$$

Il est faux que (2) implique (1) : la série peut diverger. Le théorème de Tauber dit que (1) est impliqué par (2) et

(3) $$a_n = o(\frac{1}{n}).$$

Le théorème de Littlewood dit que c'est encore le cas en affaiblissant (3) sous la forme

(4) $$a_n = O(\frac{1}{n}).$$

Une amélioration, par Hardy et Littlewood, dit qu'on peut même remplacer (4) par

(5) $$a_n > -\frac{K}{n} \qquad (K\ :\ \text{constante}).$$

On voit la parenté entre la formule (0) et la formule

(6) $$\lim_{x\uparrow 1}\sum a_n x^n = \sum a_n.$$

Dans les deux cas, il s'agit de passer d'un procédé de sommation (ou de moyennisation) à un autre, plus simple et a priori plus restrictif.

T.T. est une complète refonte du sujet. En notation additive ($T = e^x$, $\epsilon = e^{-x}$, $t = e^y$, $F(t) = H(y)$) (0) prend la forme

$$(7) \qquad \frac{2}{\pi} \lim_{x\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{x-y} \sin^2 e^{-(x-y)} H(y)dy = \lim_{x\to\infty} \int_{-\infty}^{x} e^{-(x-y)} H(y)dy.$$

Wiener pose la question générale : K et K_1 étant des fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$, et H une fonction bornée, donner des conditions sur K et K_1 pour que l'existence de la limite

$$(8) \qquad \lim_{x\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y)H(y)dy$$

entraîne l'existence de la limite

$$(9) \qquad \lim_{x\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_1(x-y)H(y)dy$$

(elles sont alors égales si $\int K = \int K_1$). Dans (8) et (9) apparaissent des convolutions (le terme n'existe pas encore ; Wiener utilise l'allemand Faltung), et la réponse impose de considérer les intégrales au sens de Lebesgue et l'espace que nous désignons aujourd'hui par $L^1(\mathbb{R})$. *Le* théorème taubérien de Wiener donne la condition nécessaire et suffisante sur K pour que l'existence de (8) entraîne celle de (9) quel que soit K_1 : c'est que la transformée de Fourier de K ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Un simple calcul de transformée de Fourier donne alors (7). Wiener donne de multiples variantes, dont celle de son élève Ikehara, publiée en 1931 : soit α une fonction croissante sur $]1, \infty[$, telle que

$$(10) \qquad f(u) = \int_1^{\infty} x^{-u} d\alpha(u)$$

existe lorsque $\Re e\, u > 1$. On suppose que la fonction

$$(11) \qquad f(u) - \frac{A}{u-1}$$

converge vers une limite finie quand $\Re e\, u$ tend vers 1, uniformément quand $\Im m\, u$ est borné. Alors

$$(12) \qquad A = \lim_{N\to\infty} \frac{\alpha(N)}{N}.$$

Le théorème de Ikehara est la clé la plus commode pour déduire de propriétés de la fonction $\varsigma(s)$ de Riemann le théorème des nombres premiers d'Hadamard et La Vallée Poussin

$$(13) \qquad \pi(x) \sim \ell i x \qquad (x \to \infty),$$

et Wiener donne naturellement cette application. Comme cas particulier du théorème de Ikehara, on a aussi les théorèmes taubériens de Littlewood, d'Hardy et Littlewood, et d'autres auteurs.

T.T. est un exposé remarquablement synthétique, où se trouvent dégagées pour la première fois des notions de base de l'analyse harmonique moderne : les translatées d'une fonction (le terme de translation, appliqué à une fonction, est dû à Wiener), le sous-espace fermé que ces translatées engendrent dans L^1 ou dans L^2 (ce que Wiener appelle *l'extension* de la fonction), les conditions pour que ce sous-espace soit l'espace entier, la structure algébrique de la convolution dans $L^1(\mathbb{R})$ et dans $\ell^1(\mathbb{Z})$, le lemme clé sur l'algèbre $A(\mathbf{T})$ transformée de Fourier de $\ell^1(\mathbb{Z})$ (si $f \in A(\mathbf{T})$ et que f ne s'annule pas sur $\mathbf{T}$, $\frac{1}{f} \in A(\mathbf{T})$), qui fait des séries de Fourier absolument convergentes un sujet central de l'analyse harmonique.

Les livres FICA et FTCD réexposent l'ensemble des idées de Wiener sur l'analyse harmonique, dans l'ordre logique qui est l'ordre inverse de la découverte. D'autres grands livres sur les intégrales ou les séries de Fourier paraissent à cette époque : le Bochner date de 1932, Le Zygmund de 1935, le Titchmarsh de 1937. Mais FICA et FTCD ont une saveur particulière. Il me semble que l'analyse harmonique moderne est essentiellement l'analyse harmonique telle que la voit Wiener, avec le role central des translations et des convolutions. Pour les physiciens et les ingénieurs, les convolutions apparaissent dès qu'un signal est converti par un appareil en une observation : le noyau de convolution définit l'action de l'appareil. Pour les mathématiciens, la régularisation des fonctions - en particulier le procédé de Weierstrass par lequel il établit son théorème d'approximation polynomiale - et les procédés de sommation pour les séries ou les intégrales de Fourier ne sont autre chose que des convolutions. La notion est si générale qu'elle mis beaucoup de temps à être dégagée et nommée (j'ai rappelé que Wiener utilise le terme de *Faltung*, et Laurent Schwartz, en 1950 dans son Traité des distributions, parle encore de produit de composition). Une fois dégagée, elle est à la base de la structure d'algèbre de Banach, sur laquelle je reviendrai.

Le rôle des translations est encore plus fondamental - et il est remarquable que c'est par là que commence l'article TT. Ce n'est pas Wiener qui a introduit les opérateurs linéaires invariants par translation (c'est Volterra, selon l'introduction à FICA). Mais leur signification en analyse harmonique n'est dégagée que par Wiener, et cela dès les premières lignes de FICA. Dans la hiérarchie de l'abstraction mathématique, Wiener cite les nombres $1, 2, 3, \cdots$, et le niveau de l'arithmétique élémentaire ; les lettres et le niveau de l'algèbre ; les fonctions et le niveau de l'analyse ; les opérateurs, qui transforment une fonction en une autre, et le niveau où il se place : *"it is only in connection with the operational calculus that the true significance of harmonic analysis is to be appreciated"* (FICA, p. 1, ligne 15).

Avant de développer sur quelques exemples l'influence profonde de ces idées de Wiener, je décris en quelques lignes le contenu de FICA et de FTCD.

FICA, après avoir introduit l'intégrale de Lebesgue, le théorème de Riesz-Fischer et les développements orthogonaux, consacre un chapitre au théorème de Plancherel et aux développements de Hermite ; c'est ainsi que Wiener introduit la transformée de Fourier. Le chapitre II est consacré au théorème taubérien général, avec comme étapes les lemmes sur les séries de Fourier absolument convergentes, la preuve du grand théorème, les applications à la totalité du système des translatées d'une fonction dans L^1 et dans L^2. Le chapitre III contient "le théorème des nombres premiers comme théorème taubérien" et d'autres cas particuliers, et le dernier chapitre traite de l'analyse harmonique généralisée, en reprenant en 50 pages une bonne partie de GHA.

FTCD est un livre efflorescent, et qui mériterait aujourd'hui une revisite systématique tant il contient de pistes et de trésors. Il débute par les théorèmes de Paley-Wiener, et traite de fonctions quasi-analytiques, de totalité de systèmes d'exponentielles, d'équations intégrales, des fonctions entières de type exponentiel et de leurs zéros, des séries de Fourier non harmoniques, des fonctions pseudopériodiques, de séries trigonométriques lacunaires, des fonctions presque-périodiques et de l'analyse harmonique généralisée dans le domaine complexe, de fonctions aléatoires de variable réelle ou complexe, et en particulier, sous le nom de *fundamental random function*, du mouvement brownien. Ainsi, la part de GHA non traitée dans FICA se trouve développée, considérablement, dans la fin de FTCD. Cette fin de FTCD reprend la construction de la mesure de Wiener (introduite, je le rappelle, dans *Differential Space*, et reprise dans GHA de manière analogue) d'une façon toute nouvelle: Wiener part de la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$, la transforme au moyen d'un procédé de développements dyadiques dû à Steinhaus en mesure de Lebesgue sur $[0,1]^{\mathbf{N}}$, définit à partir de là une suite de variables normales indépendantes, qui lui permet de définir la série de Fourier-Wiener et d'en étudier les propriétés presque-sûres (condition de Hölder d'ordre $1/2-\epsilon$ partout, d'ordre $1/2+\epsilon$ nulle part ; donc continuité partout, dérivabilité nulle part ; chaque fois qu'il évoque cette propriété, Wiener se réfère longuement aux intuitions de Jean Perrin dans la discription du mouvement brownien qui figure dans *les Atomes*).

Avec FICA et FTCD l'œuvre de Wiener en analyse harmonique n'est pas terminée. En particulier, ses travaux avec Pitt et avec Wintner sur les transformées de Fourier des mesures sont encore à naître. Cependant ses intérêts principaux évoluent vers la théorie de la prédiction, qui est à la frontière de l'analyse harmonique, et vers la cybernétique.

III. Après 1934

Si l'on veut mesurer rapidement l'influence de Wiener sur l'analyse harmonique contemporaine, il suffit de feuilleter quelques ouvrages : Loomis (1953), Rudin (1962), Katznelson (1968), Graham et McGehee (1979), Helson (1983). Dans le Helson, à la fois très personnel et très classique, le nom de Wiener est le plus cité, et son influence est partout. On peut y ajouter le Kahane-Salem (1963) et mon livre de 1970, uniquement consacré à l'objet des *lemmes* de Wiener, les séries de Fourier absolument convergentes.

Regardons les choses un peu plus en détail. Dès 1934, Paul Lévy observe que la méthode de Wiener pour prouver que $\frac{1}{f}$ appartient à $A(\mathbf{T})$ lorsque f appartient à $A(\mathbf{T})$ et ne s'annule pas donne un énoncé plus général : si $f \in A(\mathbf{T})$ et F est une fonction analytique sur $f(\mathbf{T})$, $F(f) \in A(\mathbf{T})$ – c'est le théorème de Wiener-Lévy, qu'on peut énoncer plus rapidement en disant que les fonctions analytiques *opèrent* dans $A(\mathbf{T})$. Paul Lévy considère aussi la composition des fonctions dans l'autre sens : il observe que, si φ est une fonction affine, et si $f \in A(\mathbb{R})$, alors $f \circ \varphi \in A(\mathbb{R})$, et demande s'il y a d'autres fonctions ayant cette propriété. En termes modernes, il s'agit de décrire les *endomorphismes* de l'algèbre de Banach $A(\mathbb{R})$.

Dès cette époque, bien avant la théorie des anneaux normés de Gelfand (1939 et1942) et la terminologie des algèbres de Banach popularisée par Loomis, $A(\mathbb{R})$ et $A(\mathbf{T})$ apparaissent avec toute la richesse de leur structure et des problèmes fascinants. L'approche même de Wiener (quand l'existence de la limite (8) implique-t-elle l'existence de la limite (9) ?) pose la question de caractériser ce que Wiener appelle *l'extension* de K dans $L^1(\mathbb{R})$, c'est-à-dire l'idéal fermé engendré par K dans l'algèbre de convolution $L^1(\mathbb{R})$. En transfouriant, comment caractériser les idéaux fermés dans les algèbres de Banach $A(\mathbb{R})$ et $A(\mathbf{T})$? Est-il vrai que tout idéal fermé dans $A(\mathbb{R})$ (ou $A(\mathbf{T})$) coïncide avec l'ensemble des fonctions de $A(\mathbb{R})$ (ou $A(\mathbf{T})$) qui s'annulent sur un fermé donné de $\mathbb{R}$? En d'autres termes, est-il vrai que tout idéal fermé soit l'intersection des idéaux fermés qui le contiennent ? C'est le problème, de façon équivalente, de la caractérisation des sous-espaces faiblement fermés dans L^∞ (considéré en dualité avec L^1) qui sont invariants par translation : est-il vrai qu'ils soient toujours engendrés par les exponentieles $e^{i\lambda x}$ qu'ils contiennent ? Pour cette raison, on parle à ce propos du problème de la *synthèse harmonique dans* L^∞. Suivant Laurent Schwartz, l'aspect de structure des idéaux fermés de L^1 constitue le problème de Wiener, l'aspect de structure des sous-espaces de L^∞ fermés et invariants par translation le problème de Beurling (1948).

Ainsi, dès 1934 sont posés le problème de Wiener - structure des idéaux fermés de $A(\mathbb{R})$ et $A(\mathbf{T})$ – et les problèmes de Lévy - fonctions qui opèrent, endomorphismes de $A(\mathbb{R})$ et $A(\mathbf{T})$. Dès 1940, avec le livre d'André Weil, tous ces problèmes pouvaient se transférer sur tous les groupes abéliens localement compacts. Puis, dès 1939, avec la théorie de Gelfand, aux algèbres de Banach (= anneaux normés). Le problème de la synthèse harmonique, pour sa part, déborde largement du cadre des algèbres de Banach, et il a inspiré Laurent Schwartz dans toute une série de travaux, en particulier dans sa théorie générale des fonctions moyenne-périodiques sur $\mathbb{R}$ (1947).

De mon point de vue, une étape très importante est due à Marcinkiewicz (1940), sous la forme d'une généralisation du théorème de Wiener-Lévy. Essentiellement, Marcinkiewicz montre qu'à toute fonction $\varphi(x) \geq 0$ telle que $\lim_{x\to 0}(\varphi(x)/x) = \infty$ $(x > 0)$ correspond une classe $\mathcal{G}$ (de Gevrey si $\varphi(x) = x^{1-\alpha}$), contenant toutes les fonctions analytiques sur $\mathbb{R}$, telle que si f est une fonction réelle de la classe $A(\mathbf{T})$, et $F \in \mathcal{G}$, alors la fonction composée $F(f)$ appartienne à $A(\mathbf{T})$. En réfléchissant à la méthode de Marcinkiewicz, on s'aperçoit qu'elle st inaméliorable, et il en résulte que le théorème de Wiener-Lévy lui même est inaméliorable. Cette réciproque du théorème de Wiener-Lévy, obtenue en 1958 par Katznelson, a une histoire et des prolongements qu'on peut trouver par exemple dans mon livre de 1970. Il reste au moins un problème fameux, le problème de dichotomie de Katznelson. Désignons par $A(E)$ l'algèbre des restrictions à une partie fermée E de $\mathbf{T}$ des fonctions de la classe $A(\mathbf{T})$. Pour certains ensembles E, appelés ensembles de Helson (Kahane-Salem 1956), $A(E)$ contient toutes les fonctions continues sur E, donc toutes les fonctions continues opèrent dans $A(E)$. Pour d'autres, dont on connaît beaucoup d'exemples (en voici un :

$E = \{\frac{1}{n}\} \cup \{0\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$), seules les fonctions analytiques opèrent dans $A(E)$. Sont-ce les seuls cas possibles ?

Le problème des endomorphismes admet une solution simple à énoncer. Les seuls endomorphismes de $A(\mathbb{R})$ resp. $A(\mathbf{T})$ sont de la forme $f \to f \circ \varphi$ avec $\varphi(x) = ax + b$, $a \neq 0$ resp. a entier $\neq 0$. C'est un théorème de Helson et Beurling dont la preuve est assez difficile ; une preuve plus facile, dans le cas de $A(\mathbf{T})$, est donnée par Helson (1983) pp. 44-45. Le problème des homomorphismes d'une algèbre $A(G)$ dans une algèbre $A(G')$, G et G' étant des groupes abéliens localement compacts, se trouve résolu par les travaux de Paul Cohen (1960), et exposé dans le livre de Rudin de 1962.

Le premier contre-exemple à la synthèse spectrale est dû à Laurent Schwartz (1948). Il repose sur le fait que, la mesure d'aire σ sur la sphère S^2 dans $\mathbb{R}^3$ ayant une transformée de Fourier $\hat{\sigma}(u) = O(\frac{1}{|u|})$ $(u \to \infty)$, sa dérivée radiale σ' a sa transformée de Fourier bornée; dans la terminologie de Kahane-Salem, c'est une pseudomesure. Il existe des $f \in A(\mathbb{R}^3)$, nulles sur S^2, telles que $< \sigma', f > \neq 0$, et c'est le contre-exemple à la synthèse spectrale dans $L^\infty(\mathbb{R}^3)$. La même construction vaut pour $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$, mais la difficulté pour $n = 1$ ou 2, et dans le cas général d'un groupe abélien localement compact non discret, est la construction d'lune pseudomesure jouant le rôle de σ', c'est-à-dire n'annulant pas toutes les fonctions de la classe A nulles sur son support.

La première solution générale est donnée par Malliavin en 1959. Des solutions très différentes sont ensuite données en 1965 par Varopoulos par un procédé de passage d'un groupe à l'autre qui lui permet de partir de l'exemple de Schwartz, et par Kõrner en 1973, en réalisant le programme qu'avait imaginé Salem : construire une pseudomesure $\neq 0$ sur un ensemble de Helson. L'introduction d'Astérisque n° 5 donne le contexte de la construction de Kõrner I et de ses variantes (Kaufman, Kõrner II).

Ainsi, les problèmes de Wiener et de Lévy sur les algèbres $A(G)$ ont été résolus dans les années 50, et, nonobstant quelques points résistants comme la conjecture de dichotomie de Katznelson, on peut estimer qu'ils ont perdu leur suc au début des années 70. De ce fait, certains ont cru à la mort de l'analyse harmonique commutative. C'était ignorer le renouveau de l'analyse harmonique dû aux probabilités d'une part, aux équations aux dérivées partielles et aux opérateurs de Calderon-Zygmund d'autre part. Aujourd'hui, la vogue des ondelettes, qui marient l'approche de Wiener (les développements orthogonaux) et celle de Littlewood et Paley (la décomposition selon des bandes de fréquence dyadiques), témoigne de la vitalité d'une analyse harmonique commutative liée à la physique et aux pratiques des ingénieurs dans la tradition même de Fourier et de Wiener. Ce qui est sans doute mort, du moins présentement, c'est l'influence de l'analyse harmonique abstraite sur l'analyse de Fourier. L'exploration de la structure des algèbres $A(G)$ a cessé d'être un moteur.

Si l'on se reporte aux années 40 et 50, Wiener a beaucoup pesé dans la vision de l'analyse harmonique dominante à cette époque, à travers les travaux et les cours de S. Mandelbrojt et de L. Schwartz. On se donne, sur un groupe G (par exemple $\mathbb{R}$, ou $\mathbb{R}^n$), un espace de fonctions invariant par translation et muni d'une topologie. On considère, pour chaque fonction f de cet espace, le sous-espace fermé $\tau(f)$ engendré par les translatées de f. La recherche, dans $\tau(f)$, de sous-espaces engendrés par des exponentielles (en précisant un peu au besoin), c'est l'analyse harmonique ; la reconstitution de f à partir de ces sous-espaces, c'est la synthèse harmonique. C'est ainsi que Schwartz pose et résout le problème des fonctions moyenne-périodiques sur $\mathbb{R}$. Mandelbrojt, pour sa part, établit conceptuellement le lien entre l'analyse harmonique et la quasi-analyticité en montrant que, pour toutes les classes quasi-analytiques connues, les fonctions qui y appartiennent vérifient l'égalité $\delta(f) = \tau(f)$, en désignant par $\delta(f)$ le sous-espace fermé engendré par les dérivées de f. Ma thèse, en 1953, s'inscrit directement dans cette optique. Il en est de même de la thèse de Malgrange en 1954. Pour mesurer l'évolution des modes, il suffit de constater que la solution négative, par Gurevitch, de la synthèse harmonique des fonctions moyenne-périodiques dans $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$, qui aurait été un grand événement dans les années 50, a été accueillie avec une relative indifférence en 1974. L'exploration des espaces $\tau(f)$ avait aussi cessé d'être un moteur.

C'est dans un domaine voisin de l'analyse harmonique, les probabilités, que l'héritage de Wiener m'apparaît actuellement le plus vivant. D'abord, la théorie mathématique du mouvement brownien a sans doute joué, dans la création des fondements selon Kolmogorov (1933), un rôle aussi essentiel que l'algèbre de Wiener dans la théorie de Gelfand et de ses élèves. Ensuite, le mouvement brownien, peu connu et utilisé par la communauté mathématique dans les années 40 et 50, est aujourd'hui un objet mathématique central. Enfin, l'approche même de Wiener par la série de Fourier-Wiener prélude à la fois à l'étude systématique des séries de Fourier à coefficients aléatoires et indépendants (sujet introduit, parallèlement à Wiener, par Paley et Zygmund), et à celle des processus gaussiens. Les livres de Marcus et Pisier il y a dix ans, de Ledoux et Talagrand aujourd'hui, témoignent de la vitalité du sujet en liaison avec l'analyse harmonique classique d'une part, avec la géométrie des espaces de Banach d'autre part.

Une parenthèse me paraît s'imposer ici. Au cours de cet exposé, j'ai cité beaucoup de français. Ce n'est pas uniquement myopie de ma part. En effet, parmi les hommes qui ont influencé Wiener, figurent en très bonne place Emile Borel (que je n'avais pas encore cité), Lebesgue, Fréchet, Jean Perrin. Parmi ceux qu'il a influencés, il est naturel d'insister sur les élèves de Szolem Mandelbrojt et de Laurent Schwartz. Cela n'empêche pas de constater le rôle éminent de l'école russe, tant en ce qui concerne l'analyse harmonique abstraite que les probabilités, et l'impact considérable dans le monde entier.

Wiener était un homme inquiet, conscient de sa valeur, incertain de sa réputation. Ses ouvrages n'ont pas toujours , en leur temps, été reconnus à leur juste valeur. Malgré la gloire qu'il commençait à avoir dans les années 30, FICA a été accueilli par 18 lignes dans les Zentralblatt, et sa première réédition lui a valu deux lignes dans les Mathematical Reviews.

Vu d'aujourd'hui, son œuvre est étrangement actuelle. Une nouvelle démonstration du théorème de Wiener-Lévy est donnée par Coquand et Stolzenberg, suivant une idée de Calderon, dans le numéro de janvier 1991 du Bulletin de l'AMS. Plus significativement encore, dans son article de la Gazette de juin 1990, Gian-Carlo Rota cite les taubériens de Wiener comme l'exemple d'une théorie unificatrice, aux conséquences lointaines incalculables. Selon lui, s'agissant seulement des recherches sur les nombres premiers, "la preuve de Wiener eut un effet magique. Dès sa publication, tout le monde fut persuadé que l'on pouvait donner une preuve élémentaire du théorème des nombres premiers". Et Rota cite alors Erdős et Selberg (1950), Levinson (1969) ; on pourrait compléter par Daboussi

(1984).

L'œuvre de Wiener me paraît destinée à durer à travers les tendances et les modes. Elle a occupé une place éminente au temps où les *structures* apparaissaient comme l'essence des mathématiques, parce qu'il faut en effet grand découvreur de structures. Aujourd'hui que sont en vogue les *interactions* et les *modèles*, Wiener apparaît comme l'exemple type du mathématicien ouvert aux stimulants extérieurs, et capables de donner un modèle mathématiquement cohérent d'une réalité physique aussi subtile que le mouvement brownien.

L'analyse harmonique abstraite lui doit, avec les algèbres $A(G)$, certains de ses plus beaux paradigmes. Mais elle est loin d'être la seule héritière de l'œuvre de Wiener.

Références

1966 N. LEVINSON, Wiener's life, *Bull. Amer. Math. Soc.* 72, 1, II, pp. 1-32.

1964 *Selected papers of Norbert Wiener* (including Generalized harmonic analysis and Tauberian theorems), The M.I.T. Press, Cambridge, Mass.

1933 N. WIENER, *The Fourier integral and certain of its applications*, Cambridge Univ. Press.

1934 R.E.A.C. PALEY, N. WIENER, *Fourier transforms in the complex domain*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 19.

1953 N. WIENER, *Ex-prodigy : my childhood and youth*, Simon and Schuster, New York; réédition par M.I.T. Press en 1965.

1956 N. WIENER, *I am a mathematician. The later life of a prodigy*, Doubleday, New York; réédition par M.I.T. Press.

1990 P. MASANI, *Norbert Wiener*, Birkhaüser.

1976 -1985 Norbert WIENER, *Collected works*, 4 volumes, M.I.T. Press.

1933 N. WIENER, R.E.A.C. Paley, A. ZYGMUND, Notes on random functions, *Math. Z.* 37, pp. 647-668.

1932 S. BOCHNER, *Vorlesungen über Fouriersche Integrale*, Akademische Verlaggesellschaft, Leipzig.

1935 A. ZYGMUND, *Trigonometrical series*, Monografje matematyczne, Warszawa-Lwow.

1937 E. C. TITCHMARSH, *Introduction to the theory of Fourier integrals*, Oxford Univ. Press.

1953 L. H. LOOMIS, *An introduction to abstract harmonic analysis*, Van Nostrand.

1962 W. RUDIN, *Fourier analysis on groups*, Interscience.

1968 Y. KATZNELSON, *An introduction to harmonic analysis*, Wiley (réédition par Dover).

1979 Colin GRAHAM, O. Carruth McGEHEE, *Essays in commutative harmonic analysis*, Grundlehren der math. Wissenschaften 238, Springer-Verlag.

1983 H. HELSON, *Harmonic analysis*, Addison-Wesley.

1963 J.-P. KAHANE, R. SALEM, *Ensembles parfaits et séries trigonométriques*. Paris, Hermann.

1970 J.-P. KAHANE, *Séries de Fourier absolument convergentes*, Ergebnisse der Mathematik 50, Springer-Verlag.

1934 Paul LEVY, Sur la convergence absolue des séries de Fourier, *Compositio Math.* 1, pp. 1-14.

1939 I. M. GELFAND, To the theory of normed rings, II, On absolutely convergent trigonometrical series and integrals, *Dokl. Acad. Sci. URSS* 25, pp. 570-572.

1942 I. M. GEL'FAND, Normierte Ringe, *Mat. Sbornik* 9 (51), pp. 3-24.

1946 I. M. GEL'FAND, D. A. RAIKOV, C. E. SILOV, Anneaux normés commutatifs (en russe), *Uspehi Mat. Nauk* 1,2 (12), pp. 48-146 ; voir également la traduction anglaise, *Amer. Math. Soc. Transl.* (2) 5, pp. 115-220 (1957).

1960 I. M. GEL'FAND, D. A. RAIKOV, G. E. SILOV, *Kommutativnye normirovannye kol'tsa*, Moscou (315 pages) ; voir également *Commutative normed rings*, New York, Chelsea (1964), et *Les anneaux normés commutatifs* (avec un supplément de J.-P. Kahane et P. Malliavin), Gauthier-Villars (1964).

1948 L. SCHWARTZ, Sur une propriété de synthèse spectrale dans les groupes non compacts. *C. R. Acad. Sc. Paris*, A-B 227, pp. A424-426.

1940 A. WEIL, *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications*, Paris, Hermann.

1947 L. SCHWARTZ, Théorie générale des fonctions moyenne-périodiques, *Ann. of Math.* (2) 48, pp. 857-929.

1940 J. MARCINKIEWICZ, Sur la convergence absolue des séries de Fourier, *Mathematica*, Cluj, pp. 66-73.

1958 J.-P. KAHANE, Sur un théorème de Wiener-Lévy, *C. R. Acad. Sc. Paris* AB 246, pp. A1949-1951.

1958 Y. KATZNELSON, Sur les fonctions opérant sur l'algèbre des séries de Fourier absolument convergentes, *C. R. Acad. Sc. Paris* A-B-247, pp. A-404-406.

1959 P. MALLIAVIN, Sur l'impossibilité de la synthèse spectrale sur la droite. *C. R. Acad. Sc. Paris* A-B-248, pp. A-2155-2157.

1956 J.-P. KAHANE, R. SALEM, Sur les ensembles linéaires ne portant pas de pseudomesures. Sur les ensembles de Carleson et de Helson. Construction de pseudomesures sur les ensembles parfaits symétriques. *C. R. Acad. Sc. Paris* 243, pp. 1185-1187, 1706-1708, 1986-1988.

1953 A. BEURLING, H. HELSON, Fourier-Stieltjes transforms with bounded powers, *Math. Scand.*, pp. 120-126.

1960 P. J. COHEN, On homomorphisms of group algebras, *Amer. J. Math.* 82, pp. 213-226.

1965 N. VAROPOULOS, Sur les ensembles parfaits et les séries trigonométriques, *C. R. Acad. Sc. Paris* AB 260, pp. 3831-3834, A4668-4670, A5165-5168, A5997-6000.

1973 T. W. KŌRNER, A pseudofunction on a Helson set, *Astérisque*, pp. 3-224 et 231-239.

1935 S. MANDELBROJT, *Séries de Fourier et classes quasi-analytiques de fonctions,* Paris, Gauthier-Villars.

1950 S. MANDELBROJT, Un théorème de fermeture. *C. R. Acad. Sc. Paris 231, pp. 18-18.*

1975 D. I. GUREVITCH, Contre-exemples à un problème de L. Schwartz (en russe). *Funkcional. Anal. i Prilogenic* 9, n° 2, pp. 29-35.

1981 S. MARCUS, G. PISIER, *Random Fourier series with applications to harmonic analysis,* Annals of Math. Studies, Princeton Univ. Press.

1991 M. LEDOUX, M. TALAGRAND, *Probability in Banach spaces*, Ergebnisse der Math., Springer-Verlag.

1991 T. COQUAND, G. STOLZENBERG, The Wiener lemma and certain of its generalizations, *Bull. Amer. Math. Soc.* 24, 1, 1-9.

1990 G. C. ROTA, Les ambiguïtés de la pensée mathématique, *Gazette des mathématiciens* 45 (juin), pp. 54-64.

1984 H. DABOUSSI, Sur le théorème des nombres premiers, *C. R. Acad. Sc. Paris* 298, I, 8, pp. 161-164.