CAHIERS DU SÉMINAIRE D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

PAUL MALLIAVIN

Mesures invariantes et mesures quasi-invariantes

Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques 2e série, tome 2 (1992), p. 43-49
<http://www.numdam.org/item?id=CSHM_1992_2_2__43_0>

Mesures invariantes
et
mesures quasi-invariantes

Paul Malliavin

Université Pierre et Marie Curie (Paris)

Sur les groupes finis les relations d'orthogonalité des caractères, les théorèmes de Frobenius, sont établis en utilisant la mesure de comptage. Il était tentant de prolonger cette méthode aux groupes continus.

E. Cartan, dans les années 1925-30 [1], remarque que les formes différentielles de Maurer-Cartan, élevées à la puissance extérieure maximum, définissent sur un groupe de Lie compact une intégrale invariante. E. Cartan écrit alors, par un pressentiment extraordinaire, que cette intégrale aura un grand rôle dans le calcul de l'anneau de cohomologie des groupes compacts simples.

Pour remplir le programme d'Elie Cartan il était indispensable de lier la cohomologie de l'espace topologique constitué par le groupe avec la cohomologie de l'anneau des formes différentielles. Cette partie du programme fut brillamment réalisée par G. de Rham qui dans sa thèse de 1932, préparée sous la direction d'Elie Cartan, réussit à montrer l'égalité des deux cohomologies. Ces travaux furent ensuite considérablement amplifiés par la théorie des faisceaux de Jean Leray (1945).

La fin du programme fut menée à bien par Chevalley qui montre en 1938 que toute forme différentielle harmonique est nécessairement invariante à gauche, réalisant ainsi un isomorphisme entre la cohomologie de l'espace d'un groupe compact simplement connexe et la cohomologie de son algèbre de Lie.

Dans son livre [3] sur les groupes de Lie, C. Chevalley utilise ces méthodes pour calculer la cohomologie des groupes classiques.

Une autre application de l'intégrale invariante d'Elie Cartan fut l'analyse harmonique des groupes classiques G réalisée par Weyl. Le célèbre théorème de Peter-Weyl donne une décomposition orthogonale de l'algèbre de convolution $L^2(G)$ en idéaux bilatères de dimension finie.

Dans les années 1930 il était clair que (i) l'intégrale invariante était un outil de choix pour l'étude des groupes classiques, (ii) pour les groupes compacts généraux la technique différentielle d'Elie Cartan tombait complètement en défaut.

Lorsque Haar publie [5] aux Annals of Mathematics de 1933 son théorème de l'existence d'une mesure invariante à gauche sur tout groupe localement compact, ce résultat fit sensation. La méthode de Haar est fondée sur une idée de recouvrement familière en théorie de la dimension de Hausdorff, et devenue depuis le fondement de la théorie de Kolmogoroff de l'entropie.

Etant donné un compact K de G, pour tout voisinage ouvert U de l'élément neutre e de G, on note

$$N(K,U) = \inf \operatorname{card} S$$

où $S \subset G$, card $S < +\infty$ et tel que

$$K \subset \bigcup_{s \in S} sU.$$

Si, par exemple, G est un groupe de matrices et si on prend pour U une boule U_r de centre e et de rayon r, on a

$$\limsup_{r \to 0} \frac{\log N(K,U_r)}{\log r} = \dim_{\mathcal{H}}(K).$$

La faiblesse de la théorie de la dimension de Hausdorff est le fait que l'on ait une limite supérieure. Haar remédie à cette difficulté en prenant une limite généralisée de Banach et, d'autre part, en définissant un facteur d'échelle intrinsèque remplaçant log r. Notons par K_0 un compact de G d'intérieur non vide. Haar pose

$$\mu(K) = \operatorname*{l.i.m}_{U} \frac{N(K,U)}{N(K_0,U)}$$

où U parcourt un système fondamental de voisinages ouverts de e dans G. L'opération limite généralisée l.i.m. de Banach est une opération linéaire. Par suite, si K_1 et K_2 sont disjoints,

$$\mu(K_1 \cup K_2) = \mu(K_1) + \mu(K_2).$$

D'autre part, $N(Kg,U) = N(K,U)$ entraîne

$$(*)\ \mu(Kg) = \mu(K).$$

La mesure μ est invariante à droite. Le choix d'une opération de limite généralisée de Banach n'est pas du tout canonique. Haar montre qu'une mesure satisfaisant $(*)$ est unique à une constante multiplicative près. A posteriori il résulte donc que $\mu(K)$ ne dépend pas du choix de l'opération l.i.m. et plus précisément que

$$\lim_{U} \frac{N(K,U)}{N(K_0,U)}$$

existe et est égal à $\mu(K)$. Il est étrange que ce résultat d'apparence simple ait mis plus de dix ans à être démontré directement, par H. Cartan [2]. Cette démonstration fournissait ainsi une construction de la mesure de Haar fondée sur la notion élémentaire de limite, et ne dépendant pas des opérateurs l.i.m. de Banach construits à l'aide de l'axiome du choix.

Von Neumann avait été le rapporteur choisi par la rédaction des Annals of Mathematics pour lire et vérifier l'article de Haar de 1933. Il avait eu ainsi l'avantage de l'avoir en main avant la plupart des mathématiciens. Ceci explique que dans le fascicule des Annals of Mathematics suivant de trois mois celui où l'article de Haar avait paru, von Neumann publie un article fondamental, généralisant la théorie de Peter-Weyl des groupes classiques à tous les groupes compacts [8].

La mesure de Haar d'un groupe compact G est de masse totale finie. Par suite $L^2(G) \subset L^1(G)$ et $L^2(G)$ est un idéal de convolution de $L^1(G)$. La restriction de la convolution à $L^2(G)$ définit sur $L^2(G)$ une structure d'algèbre hilbertienne. L'opérateur de convolution définissant un noyau intégral justiciable de la théorie de Fredholm-Riesz des opérateurs compacts, il en résulte que $L^2(G)$ est somme directe orthogonale d'idéaux bilatères de dimension finie. Chacun de ces idéaux bilatères est lui-même somme directe orthogonale d'algèbres de matrices toutes de même dimension. La théorie de Peter-Weyl apparaît à nouveau dans ce cadre si général avec la même précision que dans le cas des groupes classiques. Il en résulte que tout groupe compact de dimension finie possède une représentation linéaire fidèle. En particulier, le cinquième problème de Hilbert (1900), à savoir l'introduction sur un groupe topologique qui est une variété topologique de dimension finie d'un système de coordonnées qui en font une variété analytique réelle, reçoit dans le cadre des groupes compacts une solution positive à la fin de l'article de von Neumann [8].

Ces brillants succès ont amené des recherches sur la théorie de l'intégration pour des groupes plus généraux que les groupes localement compacts. A. Weil montre en 1939 [10] que si G est un groupe abstrait muni d'une tribu invariante à droite et d'une mesure invariante à droite, alors G peut être identifié à une partie dense d'un groupe localement compact $\bar{G}$, la mesure de Haar sur $\bar{G}$ fournissant par restriction à G la mesure invariante donnée. A. Weil construit des candidats de *fonctions continues* sur G en considérant le produit de convolution de deux fonctions dans $L^2(G)$. Dans le cas d'un groupe localement compact $\hat{G}$, il est trivial que le produit de convolution de deux fonctions de $L^2(\hat{G})$ est une fonction uniformément continue sur $\hat{G}$. Cette définition est donc naturelle. Les *fonctions continues* sur G définissent un plongement de G dans $\mathbb{R}^N$ qui induit sur G une topologie localement précompacte, d'où la construction de $\hat{G}$.

J. Feldman refait en 1966 le raisonnement de A. Weil et en déduit que si sur un espace de Hilbert E il existe une mesure invariante par translations, alors E est de dimension finie.

Ces résultats négatifs montrent qu'il n'est pas possible de sortir du cadre de la théorie des espaces localement compacts si on veut avoir une mesure invariante.

En 1934 [9], von Neumann entreprit une étude des fonctions presque périodiques sur un groupe abstrait G. Sur de telles fonctions est défini un opérateur de moyenne. Ce dernier permet de mettre en place une théorie de Peter-Weyl, une famille exhaustive de représentations irréductibles de dimension finie, et finalement un plongement de G dans un groupe compact Γ. Les fonctions presque périodiques sur G s'étendent à des fonctions continues sur le groupe $\bar{G}$, adhérence de G dans Γ. Comme $\bar{G}$ est un groupe compact (appelé compactification de Bohr de G), la théorie de la moyenne invariante sur les fonctions presque périodiques est encore, par compactification, un cas particulier de la théorie de Haar.

La théorie de Haar est ainsi un moyen merveilleux, mais dont on ne parvient pas à étendre les frontières.

La mesure de Haar permit la résolution par Gleason [4] du 5^e problème de Hilbert en 1955 pour tous les groupes localement compacts. L'idée de Gleason n'est plus d'utiliser le plongement des groupes dans des groupes de matrices, mais de considérer la représentation régulière qui réalise une application du groupe G dans l'ensemble $U(L^2(G))$ des opérateurs unitaires de $L^2(G)$, et au prix de difficultés considérables, de reconstruire l'algèbre de Lie de G comme héritée de l'algèbre de Lie de $U(L^2(G))$.

Dans les mêmes années, G. Mackey [6] obtint une généralisation au groupe localement compact des théorèmes de réciprocité de Frobenius dans le cadre des groupes finis. La théorie des représentations induites de G. Mackey est basée sur l'utilisation d'une mesure quasi-invariante sur des espaces homogènes. Un exemple simple de la quasi-invariance est donné par l'action des translations à gauche sur une mesure de Haar μ invariante à gauche. On a alors

$$\mu(kA) = \Delta(k)\mu(A)$$

où Δ est le module du groupe. Par fonctorialité on a l'identité $\Delta(k_1k_2) = \Delta(k_1)\Delta(k_2)$. Par suite si G est un groupe simple, $\Delta(k) \equiv 1$; toute mesure de Haar invariante à droite est automatiquement invariante à gauche. Lorsque Δ n'est pas identique à 1, alors apparaissent sur des espaces homogènes de G des mesures quasi-invariantes.

La Physique mathématique a introduit depuis une vingtaine d'années divers groupes de dimension infinie possédant tous des structures très riches et très remarquables. Nous nous limiterons au groupe de lacets. Etant donné un groupe compact, on note par $\tilde{L}(G)$ le groupe des applications continues du cercle dans G et par $\mathbb{L}(G)$ l'extension centrale universelle de $\tilde{L}(G)$. Alors les méthodes d'analyse stochastique de Wiener-Itô permettent de définir une famille de mesures μ_t dépendant du paramètre t sur $\mathbb{L}(G)$. On note par $\mathbb{L}^1(G)$ les éléments de $\mathbb{L}(G)$ dont la dérivée est de carré intégrable. On a le théorème de quasi-invariance suivant [7]

$$\int_{\mathbb{L}(G)} \varphi(\ell_0 \ell) \mu_t(d\ell) = \int_{\mathbb{L}(G)} \varphi(\ell) k_t(\ell) \mu_t(d\ell);$$

c'est dire que μ_t est quasi-invariante sous l'action à gauche de $\mathbb{L}^1(G)$. Comme on peut montrer que μ_t est symétrique : $\mu_t(A^{-1}) = \mu_t(A)$, la mesure est aussi quasi-invariante à droite. De plus, on a

$$\mu_t * \mu_{t'} = q_{t,t'} \, \mu_{t+t'}$$

où $q_{t,t'}$ tend vers 1 lorsque t et t' tendent vers $+\infty$. Ceci permet de définir une algèbre de convolution possédant asymptotiquement, lorsque $t \to +\infty$, les propriétés de décomposition orthogonale du théorème de Peter-Weyl.

Une question naturelle, mais encore mal formulée, serait de trouver un objet asymptotique réalisant la limite des espaces $L^2(\mu_t)$, dans le même sens que la compactification de Bohr réalise la moyenne sur les fonctions presque périodiques comme intégrale de Haar.

Bibliographie

[1] Cartan, E. La théorie des groupes finis et continus et l'Analysis situs. *Mémorial Sc. math.* **XLII**, 1930.

[2] Cartan, H. Sur la mesure de Haar. *C. R. Acad. Sci. Paris* **211**, 759-762 (1940).

[3] Chevalley, C. Theory of Lie groups. *Princeton University Press*, 1946.

[4] Gleason, A.M. Groups without small subgroups. *Ann. of Math.* **56**, 193-212 (1952).

[5] Haar, A. Der Massbegriff in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen. *Ann. of Math.* **34**, 147-169 (1933).

[6] Mackey, G. Induced representations of locally compact groups, I. *Ann. of Math.* **55**, 101-139 (1952).

[7] Malliavin-Brameret, M.-P., et P. Malliavin. Integration on loop groups, I. Quasi invariant measures. *J. Funct. Anal.* **93**, 207-237 (1990).

[8] Neumann, John von. Die Einführung analytischer Parameter in topologischen Gruppen. *Ann. of Math.* **34**, 170-190 (1933).

[9] Neumann, John von. Almost periodic functions in a group, I. *Trans. Amer. Math. Soc.* **36**, 445-492 (1934).

[10] Weil, A. L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications, 1940. Réédition : Hermann, Paris, 1953.