CAHIERS DU SÉMINAIRE D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

RENÉ BAIRE

Lettres de René Baire à Émile Borel

Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques 1re série, tome 11 (1990), p. 33-120

<http://www.numdam.org/item?id=CSHM_1990__11__33_0>

LETTRES DE RENÉ BAIRE À EMILE BOREL[1]

I

Turin, 5 mars 98[2]

Mon cher Borel,

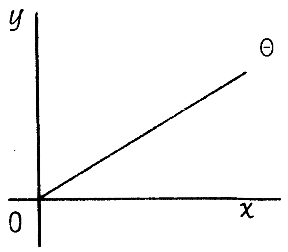
Me voici installé à Turin depuis une huitaine de jours environ, après avoir fait quelques stations dans les villes de France que j'ai rencontrées sur mon parcours.

Ma première visite en arrivant ici a été pour le professeur Volterra, qui m'a reçu de la manière la plus aimable, et s'est mis à ma disposition pour mon séjour dans la ville ; il m'a indiqué, dans la maison même qu'il habite, une pension de famille chez des personnes françaises ; j'ai adopté toute de suite cette solution, quoique en principe je ne sois pas fanatique du système ; mais ici j'aurai l'avantage d'éviter un grand nombre d'ennuis de la vie pratique, en même temps que de faire sans doute une économie sérieuse. Quoi qu'il en soit, me voilà le voisin du professeur Vito Volterra, voisinage des plus agréables[3] ; nous nous voyons tous les jours, et nous avons déjà eu de longs entretiens au sujet de nos études communes ; quelques résultats positifs se sont déjà dégagés de ces causeries ; je voudrais à ce sujet te poser une question.

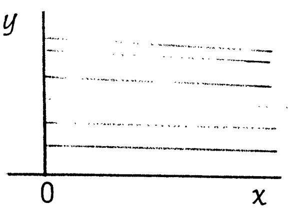
L'affirmation de Cantor, contenue dans un mémoire du tome II des *Acta*, à savoir que l'ensemble des fonctions discontinues a une puissance supérieure à celle du continu, est-elle un fait démontré ?[4] Volterra dit n'en pas connaître de démonstration ; et la chose a un grand intérêt, voici pourquoi. Une fonction de n variables, continue par rapport à chacune d'elles, pourra être déterminée par les valeurs qu'elle prend aux points d'un ensemble dénombrable ; l'ensemble de ces fonctions n'a donc que la puissance du continu. D'autre part, on peut faire correspondre à toute fonction f discontinue une fonction ponctuellement discontinue φ de la manière suivante. Au continu $0 - 1$ on fera correspondre les points d'un ensemble parfait jamais condensé E, et l'on prendra une fonction φ égale, dans les différents points de E, à la valeur de f aux points correspondants, et égale à 0 dans tous les autres.

Cela montre que l'ensemble des fonctions ponctuellement discontinues n'a pas une puissance inférieure à celle de l'ensemble des fonctions discontinues . Si la proposition de Cantor est exacte, on reconnaît alors immédiatement qu'il existe des fonctions ponctuellement discontinues qu'on ne pourra jamais obtenir comme fonctions limites de fonctions continues séparément par rapport aux variables.

En se bornant d'abord au cas de deux variables, il y a donc à chercher la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction



ponctuellement discontinue donnée sur la droite $O\Theta$ puisse être obtenue au moyen d'une fonction de x et y séparément continue. D'ailleurs, on peut construire directement des exemples de fonctions ponctuellement discontinues non représentables de cette manière ; Volterra m'en a communiqué un exemple, dans des conditions un peu différentes ; il prend une fonction partout continue, sauf sur Oy , où l'on considère en chaque point la valeur limite des valeurs prises sur la parallèle à Ox correspondante ; on a ainsi sur Oy une fonction qui peut être discontinue ; on peut démontrer que cette fonction doit être ponctuellement discontinue, mais il existe des fonctions ponctuellement discontinues qui ne peuvent pas être obtenues ainsi.



Ne peut-on pas entrevoir la possibilité de caractériser d'une manière précise l'ensemble des fonctions discontinues qui pourraient être considérées comme limites de fonctions continues, de l'une ou l'autre des manières précédentes ? On peut essayer, je crois, d'arriver à quelque chose dans cette voie[5].

Ce genre d'études a été cultivé, paraît-il, en Italie, il y a une quinzaine d'années, par l'école de Dini (Volterra est élève de Dini) ; dans le cours litographié de Dini, se trouve la remarque qu'une fonction peut être continue séparément par rapport à x et à y , sans l'être par rapport à l'ensemble, avec l'exemple à l'appui[6]. Mais, depuis ce temps, ce sujet a été un peu délaissé.

J'ai été présenté par Volterra à d'autres professeurs de l'université, ainsi qu'au doyen d'Ovidio. J'ai fait ta commission, et je te transmets les remerciements et les amitiés des professeurs Volterra et Segre.

Je n'ai encore aucune idée, même approximative, sur la durée de mon séjour à Turin ; je dois avouer qu'il ne me sert pas beaucoup au point de vue de l'apprentissage de la langue italienne, je n'ai de relations qu'avec des personnes qui parlent français. Je pense rester ici quelques semaines avant d'entreprendre une tournée dans les villes du nord de l'Italie. Je ne serais pas fâché d'avoir quelques nouvelles du monde scientifique parisien ; en attendant je te serre la main, et envoie mes amitiés aux archicubes[7] du jeudi.

René Baire
Via San Quintino 45
Torino[8]

III

[[A LIRE APRÈS LA LETTRE II QUI SUIT.]]

Turin, 18 mars [[1898]][9]

Mon cher Borel,

Je t'envoi ci-joint le texte de ma note[10] ; tu y verras que, sur les conseils de Volterra, j'ai cherché à combiner les résultats de ma recherche avec ta notion de limite généralisée (page 5)[11] ; les choses s'y présentent très bien ; toutefois, je me suis cru obligé de faire la restriction indiquée par ce membre de phrase (p.6) : "et si la somme des n premiers termes reste limitée"[12]. On peut sans doute aller plus loin, mais dans tous les cas il me semble qu'on a besoin de faire certaines restrictions pour affirmer que la série :

$$s_0 + s_1\, a + s_2\, \frac{a^2}{2!} + \dots + s_n\, \frac{a^n}{n!} + \dots$$

représente quand a est *fini* une fonction *continue*, sachant que $s_0, s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ sont continues ; or, c'est en ramenant la série $u_1(x) + \dots + u_n(x) + \dots$ de fonctions *continues* supposée *sommable* pour toute valeur de x à une série *convergente* de fonctions *continues* qu'on peut étendre les résultats. Dans tous les cas, tu me rendras service, en modifiant, s'il y a lieu, dans le sens convenable, les hypothèses que j'indique dans le théorème de la page 6.

Voici maintenant quelques idées suggérées par ces études ; considérons l'ensemble des fonctions continues, qui formera un système fondamental ; nous avons défini une classe de fonctions discontinues, contenant celles qui peuvent être considérées comme limites de fonctions continues ; appelons ce système 1[e] classe de fonctions discontinues[13] ; prenons une suite de fonctions appartenant à la classe 0 (fonctions continues) ou 1 , et supposons qu'il existe une fonction limite ; celles de ces fonctions limites qui n'appartiennent ni à la classe 0 ni à la classe 1 formeront la classe 2 (tel est le cas de la fonction = 0 pour x rationnel et $f = 1$ si x est irrationnel) ; et ainsi de suite tant que n est entier. Les fonctions qu'on obtiendra comme limites d'une suite de fonctions de classe p (p pouvant croître indéfiniment) formeront le système de rang ω , etc. On conçoit ainsi, au moins au point de vue logique, une classification rationnelle d'une très grande catégorie de fonctions discontinues. Chaque classe de fonctions correspondant à un nombre transfini déterminé.

Ce serait un problème intéressant, je crois, de voir dans quelle mesure cette conception logique correspond à la réalité ; et d'abord il me semble peu vraisemblable que l'opération précédente épuise *toutes* les fonctions discontinues[14]. Je crains plutôt qu'à un certain moment on n'introduit plus par le procédé précédent de nouvelles fonctions ; peut-être par exemple n'y a-t-il pas de fonctions de classe Ω[15]. Si cela était, on aurait alors défini logiquement une ensemble de fonctions continues, tel que *toute fonction limite d'une suite de fonctions de l'ensemble en fait partie*[16]. Pour le moment, sans aller si loin, je vais tenter un effort pour définir les fonctions de classe 2, comme je suis parvenu à définir la classe 1[17].

Un problème d'un autre ordre tout à fait différent me préoccupe : c'est celui que tu me poses : dois-je me porter candidat à la place de bibliothécaire ? Certes, l'enseignement secondaire me pèse[18], et mon idéal est de le quitter le jour où la chose sera possible ; toutefois je dois dire que la place d'agrégé-préparateur[19] en elle-même ne me tente pas énormément, d'un côté à cause du traitement modique, d'un autre côté parce que je ne suis pas fanatique de la vie d'archicube à l'Ecole. Ils me manquent d'autre part certains éléments du problème ; que me réserve l'enseignement secondaire à la rentrée prochaine ?[20] La classe de spéciales de Bar-le-Duc, qui en ce moment compte 4 élèves, sera-t-elle conservée ? Me nommera-t-on ailleurs ? Toutes sortes de choses dont je n'ai pas idée précise pour l'instant. Dans tous les cas, puisque j'ai encore six mois de complète liberté, je tâcherai d'en profiter pour avancer mes travaux le plus possible ; peut-être pourrai-je d'ici là les grouper sous un titre encore indéterminé (je ne peux pas décemment intituler ma thèse : Sur quelques points de la théorie des fonctions !), si j'ai un ensemble de propositions suffisant pour faire un tout.

Je crois d'ailleurs qu'il ne manquera pas d'archicubes de 93, 94 ou 95 plus désireux que moi de la place de bibliothécaire[21] ; et je commence à être déjà un peu ancien, étant sorti de l'Ecole depuis trois ans, pour occuper la place de l'un d'entre eux.

Je te suis bien reconnaissant d'avoir pensé à moi à ce sujet, et je regrette de ne pas arriver à te faire une réponse plus nette ; mais j'espère que tu comprends les différents motifs qui me font pencher pour ou contre, plutôt contre que pour. En résumé, je ne me mets pas en avant ; si toutefois, ce que je crois peu vraisemblable, il y avait pénurie de candidats, on pourrait regarder de mon côté.

Tu reçois probablement, en même temps que ma lettre, une lettre de Volterra[22], à qui j'ai fait voir ton livre[23], et qui doit sans doute appeler ton attention sur le théorème de Poincaré[24] ; il paraît que ce théorème a été trouvé aussi par lui, ainsi que d'autres auteurs Je te demande la permission de garder ces épreuves un jour ou deux, n'ayant pas encore trouvé le temps de les lire complètement[25].

Si tu fais présenter ma note par Appell[26] présente lui également mes respects. Amitiés à Drach et aux archicubes.

Remerciements et cordiale poignée de main.

René Baire

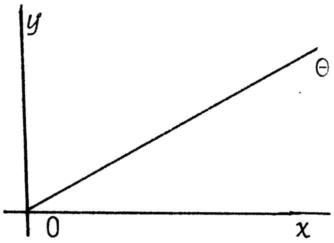
J'oubliais une grave raison tout à l'heure ; mon atroce écriture n'est-elle un cas rédhibitoire pour des fonctions d'ordre administratif !

II[27]

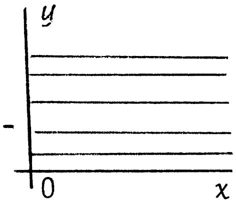
Turin, 13 mars [[1898]][28]

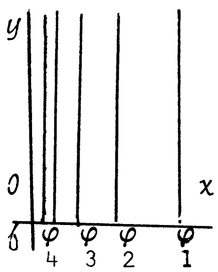
Mon cher Borel,

Je suis parvenu ces derniers jours à terminer complètement la résolution d'une des questions que je m'étais posées, à savoir la recherche de toutes les fonctions discontinues susceptibles d'être obtenues sur $O\Theta$, quand il y a continuité par rapport à x et y .



On est d'ailleurs conduit à traiter en même temps le cas où on prend une fonction continue partout, sauf sur Oy, où il y a seulement continuité par rapport à x ; les démonstrations relatives à l'un s'appliquent à l'autre. D'ailleurs, ce dernier problème conduit à la remarque suivante. Toute



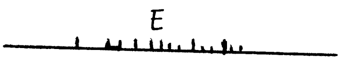


fonction représentable de la manière indiquée sera la limite d'une fonction continue $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$ et *la réciproque a lieu*. Par suite ces fonctions sont aussi celles qui peuvent être représentées par une série de fonctions continues, lorsqu'on suppose seulement la convergence pour chaque valeur de x. En particulier, on a ce premier résultat : Si

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots ,$$

où les u sont continues, est convergente pour $a < x < b$, c'est une fonction ponctuellement discontinue.

Mais voici maintenant le théorème restrictif nouveau, que j'ai trouvé il y a quelques jours. Dans ce qui suit, j'introduirai la notion de fonction *considérée par rapport aux points d'un ensemble donné* E, c'est-à-dire que je fais en quelque sorte abstraction des valeurs de la fonction aux points qui ne sont pas dans E, et je définis, en chaque point limite de E, comme je les définis pour un continu, le maximum par rapport à E, le minimum par rapport à E, l'oscillation de la fonction par rapport à E[29].



On pourra ainsi parler de fonctions continues, ponctuellement discontinues, totalement discontinues sur un ensemble E, cette notion étant complètement indépendante des valeurs de la fonction aux points qui ne sont pas dans E.

Cela posé, voici le théorème :

Si une fonction est représentable (de l'une ou l'autre des manières indiquées plus haut), sur tout ensemble *parfait* la fonction est *ponctuellement discontinue*.

Sous forme négative : Une fonction telle qu'il existe un *ensemble parfait* où elle est *totalement discontinue*, n'est pas représentable.

J'ai repris alors l'étude des fonctions qui ne prennent que l'une des valeurs 0 ou 1 , au point de vue de cette représentation, et voici les notions que j'ai été conduit à introduire. (La restriction que je faisais de supposer que les points où $f = 1$ forment un ensemble non condensé est inutile.) Soit P l'ensemble des points de discontinuité, ensemble essentiellement fermé ; formons, s'il y a lieu, P^{Ω} , qui sera *parfait ;* dans P^{Ω} , prenons les points qui sont points de discontinuité *par rapport à* P^{Ω} ; soit P_1 l'ensemble de ces points. (Nous savions déjà que P ne doit être condensé dans aucun intervalle ; de même P_1 ne doit être jamais condensé *par rapport à* P^{Ω} .) P_1 peut contenir un P_1^{Ω} ; soit P_2 l'ensemble des points de P_1^{Ω} où il y a discontinuité par rapport à P_1^{Ω} , etc. L'opération peut prendre fin si on arrive à un ensemble P_n dénombrable, car alors $P_n^{\Omega} = 0$, $P_{n+1} = 0$, ou bien si sur P_n^{Ω} la fonction est continue. On peut démontrer que dans ces conditions la fonction est représentable.

S'il y a toujours des P_n , comme on a

$$P > P_1 > P_2 > \dots > P_n > \dots$$

et comme ces ensembles sont fermés, il y a un p.g.c.d. P_ω . On continue sur P_ω , on obtient $P_{\omega+1}$, etc., et généralement P_α , α nombre transfini quelconque. On démontre par voie de récurrence que si $P_\alpha = 0$ pour un certain α , la fonction est représentable.

D'autre part, des raisonnements calqués sur ceux de Bendixson pour les ensembles dérivés(*Acta* II[30]) montrent qu'il existe nécessairement un α tel que l'on a :

$$P_\alpha = P_{\alpha+1} = \dots = P_\Omega \ .$$

Alors si $P_\alpha = 0$, la fonction est *représentable*. Si $P_\alpha > 0$ la fonction *n'est pas représentable,* en effet on a un ensemble *parfait* P_α^{Ω} sur lequel la fonction est totalement discontinue. On peut dire que les fonctions *représentables* sont caractérisées par l'équation $P_\Omega = 0$.

Passons maintenant aux fonctions quelconques ; on emploiera la même méthode avec quelques modifications. Etant donné un nombre *positif* σ , soit P l'ensemble des points où l'oscillation $\geqslant \sigma$, P est fermé ; on prend P^{Ω} ; dans P^{Ω} , soit P_1 l'ensemble des points où l'oscillation *par rapport à* P^{Ω} est $\geqslant \sigma$, etc. A tout σ correspond une suite d'ensembles P_α parfaitement définis. Une condition nécessaire est que, pour chaque σ , il y ait un α tel que $P_\alpha = 0$, car sans cela on trouve un ensemble parfait où la fonction est totalement discontinue. Enfin on peut démontrer que cette condition est suffisante ; d'ailleurs si elle est remplie, il existe un α tel que, pour tout σ , on a $P_\alpha = 0$.

En résumé, on a une classe parfaitement déterminée de fonctions discontinues, qui *possèdent et sont seules à posséder* les différentes propriétés indiquées plus haut, et l'on peut énoncer une condition *nécessaire et suffisante* pour qu'une fonction donnée appartienne à cette catégorie.

Quel nom convient-il de donner à ces fonctions ? Fonctions représentables ? Fonctions discontinues limites de fonctions continues ? Fonctions limites ?

Il me semble qu'elles en méritent un. Remarque que, par exemple, les dérivées, lorsqu'elles existent en tout point, sont des fonctions de cette catégorie.

Comme cette question me semble ainsi traitée d'une manière assez complète, j'ai l'intention de rédiger tout de suite une note à l'Institut pour la séance du 21 sur ce sujet.[31]

J'ai lu avec grand intérêt les feuilles que tu m'a envoyées[32], d'autant plus que les remarques finales sur les fonctions pouvant être déterminées par une infinité dénombrable de conditions ne sont pas sans rapport avec les questions précédentes. Je te renvoie ces épreuves.

Je continue à trouver ici l'existence agréable,et particulièrement la fréquentation presque permanente du professeur Volterra contribue à me rendre mon séjour utile[33].

Je te serre la main.

René Baire
Via S. Quintino 45

IV

Rome, 25 avril [[1898]][34]
Hôtel S. Chiara (chambre n°68)
Via S. Chiara, n°18

Mon cher Borel,

En vertu de ce principe que, quand on prend de l'Italie, on n'en saurait trop prendre, je me suis décidé à voir les choses complètement, et j'ai pris à Turin un billet circulaire, qui me permet de voir Gênes, Pise, Rome, Naples, Florence, Bologne, Venise, Milan. Le professeur Volterra a été appelé à Rome pour faire partie d'une commission universitaire, c'est ce qui m'a décidé à y venir avec lui. J'ai donc quitté Turin le 14 de ce mois, je me suis arrêté d'abord à Gênes, qui est fort intéressante et pittoresque, par la belle situation de son port, et par le contraste que présentent les palais de marbre avec les petites ruelles infectes (comme dit Franc-Nohain[34]).

Je suis allé ensuite à Pise, où j'ai retrouvé Volterra, qui s'y arrêtait pour saluer ses anciens collègues de l'Université et de l'Ecole Normale[35]. J'ai fait ainsi la connaissance de quelques professeurs, notamment de Bianchi, qui est, je crois, quelque chose comme le Tannery[36] de l'Ecole Normale de Pise. Bien entendu, ces messieurs m'ont fait visiter la dite Ecole, fondée sur le modèle de celle de Paris, il y a déjà une quarantaine d'années, je crois, et qui a produit un grand nombre de mathématiciens de l'époque actuelle. Il y a section des lettres et section des sciences, cette dernière exclusivement, ou à peu près, pour les mathématiques. J'ai contemplé à mon aise, bien entendu, l'inclinaison de la tour penchée, la cathédrale, avec la lampe de Galilée (?) et les quelques autres curisités de la ville, de cette toute petite ville. Pise compte en effet 26.000 habitants, et vit par son université ; la vie à l'Ecole normale diffère par suite assez notablement de celle de notre Ecole ; les élèves sortent quand ils veulent, jusqu'à 10 heures du soir, et l'on étonne les anciens élèves de Pise en leur disant qu'à l'Ecole de Paris les élèves n'ont pas la liberté de sortir à volonté.

Après Pise, Rome. J'y suis débarqué il y a huit jours, et je crois y être encore pour huit autres. Rome, comme Paris, est une ville qui offre sans cesse du nouveau et de l'imprévu au visiteur. J'ai fait, grâce à Volterra, la connaissance de plusieurs géomètres : Beltrami, Dini, Bertini (de Pise), Dino (de Naples), Pittarelli (de Rome), ces quatre derniers composent avec Volterra la commission chargée d'examiner les titres d'environ 80 candidats à une place à 2.400 lires !

Dini, contrairement à ce qu'on m'avait dit en France, est un homme qui a à peine dépassé la cinquantaine ; ce qui est vrai, c'est qu'il a commencé à travailler très jeune, et qu'il s'est arrêté également très jeune, pour se lancer dans la politique ; c'est d'ailleurs en Italie un fait très général ; les savants ont leur place marquée au Sénat (dont les membres sont nommés par le roi) ; Cremona est actuellement vice-président du Sénat, Veronese est député ; Dini, après avoir été député, est maintenant sénateur, il paraît d'ailleurs que la politique ne lui a pas porté chance ; et aujourd'hui il tend à revenir à la mathématique ; il vient de publier un mémoire dans les *Annali di Matematica*.

Parlons maintenant un peu de science. Je t'avais parlé la dernière fois d'une classification rationnelle des fonctions discontinues, en partant des fonctions continues (classe 0), des fonctions limites de fonctions continues (classe 1) qui sont caractérisées par le théorème indiquée dans ma note, puis des fonctions de classe $2,3,\ldots,n$, $\ldots,\omega$, etc. α .

On peut démontrer *a priori* que l'on ne dépasse pas ainsi le nombre de la α-classe, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de classe Ω. Il suffit d'utiliser le théorème de Cantor : une suite dénombrable de nombres de la première ou deuxième classe a pour limite supérieure un nombre de ces mêmes classes. Mais il serait désirable de caractériser chaque classe de fonctions ; même pour les fonctions de classe 2, je ne suis pas encore parvenu à une condition nécessaire et suffisante, analogue à celle relative à la classe 1.

Toutefois, j'ai obtenu une condition nécessaire, dont l'énoncé présente des analogies avec celle-là. Il y a des définitions nouvelles à poser et des études à faire sur les ensembles de points, à un point de vue en quelque sorte géométrique. La distinction suivante dans les ensembles (linéaires) me paraît avoir de l'importance ; je dirai que P est de première catégorie s'il existe une infinité dénombrable d'ensembles $P_1,P_2,\ldots,P_n,\ldots$, chacun d'eux n'étant *dense dans aucune portion du continu*, telle que tout point de P fasse partie d'un au moins des ensembles P_n . Ainsi, P peut être *non dénombrable*, il peut être aussi *dense dans tout le continu*, mais il est *limite* d'un ensemble qui n'est dense dans aucune partie du continu. Un ensemble qui n'est pas de première catégorie sera dit de seconde catégorie[37]. On reconnaît que le complément, par rapport au continu, d'un ensemble de première catégorie, est un ensemble de seconde catégorie ; une infinité dénombrable d'ensembles de première catégorie forme un ensemble qui est encore de première catégorie ; en gros, l'ensemble de première catégorie, tout en pouvant être *non dénombrable* et *dense partout*, joue malgré cela le rôle d'ensemble *exceptionnel*.

Cela posé, soit une fonction dans un ensemble ; soient M_0 et m_0 les limites[38] ; nous définissons de nouvelles limites M_1 et m_1 : $M_0 \geqslant M_1 \geqslant m_1 \geqslant m_0$ possédant les propriétés suivantes : si $\lambda > M_1$, l'ensemble des points où $f(x) \geqslant \lambda$ est de première catégorie, si $\lambda < M_1$, l'ensemble des points où $f(x) \geqslant \lambda$ est de seconde catégorie, et de même pour m_1. On peut dire, en quelque sorte, que M_1 et m_1 sont les limites lorsqu'on *néglige* les ensembles de première catégorie. On définira ensuite les limites M_1 et m_1 *en un point* x_0, et aussi $\omega_1(x_0) = M_1 - m_1$ qu'on pourra appeler oscillation du second ordre. Enfin, des notions analogues s'obtiendront si, au lieu du continu, on prend pour base d'études un ensemble parfait quelconque.

J'ai démontré ce théorème : Si une fonction est de deuxième classe, la fonction $\omega_1(x_0)$ a son minimum nul en tout point, ce qui est l'analogue du théorème : Si une fonction est de première classe, $\omega(x_0)$ a son minimum nul en tout point (autrement dit la fonction est ponctuellement discontinue). Si on considère un ensemble parfait, il y a une fonction $\omega_1(x_0)$ relative à cet ensemble parfait ; elle a aussi son minimum nul en tout point.

Mais des difficultés se présentent dans le problème réciproque. Une fonction présentant les conditions précédentes est-elle de deuxième classe ?[39]. Voici la différence profonde avec le cas des fonctions de première classe ; pour une fonction quelconque, le $\omega(x_0)$ relatif à un ensemble parfait dont x_0 fait partie est $\leqslant$ au $\omega(x_0)$ relatif au continu. Au contraire, le $\omega_1(x_0)$ tel qu'il a été défini ne possède pas cette propriété, ce qui ne permet pas de suivre la même marche que pour étudier les fonctions de première classe. Si on définissait des nombres M_2, m_2, ω_2, en *négligeant* cette fois non plus les ensembles de première catégorie, mais les ensembles dénombrables, on pourra énoncer une condition suffisante : pour qu'une fonction soit de deuxième classe, il suffit que $\omega_2(x_0)$, pour chaque ensemble parfait, ait un minimum nul en tout point. Mais cette condition n'est pas nécessaire, comme des exemples le montrent. Faut-il chercher la vraie condition entre les deux précédentes, l'une nécessaire, l'autre suffisante au moyen d'une nouvelle oscillation ω_3, comprise entre ω_1 et ω_2 , je n'ai pas terminé la question.

Il y aurait lieu aussi d'étudier la fonction de trois variables, continue par rapport à chacune d'elles ; on peut démontrer que sur une courbe de l'espace quelconque elle forme une fonction discontinue qui n'est pas de classe supérieure à 2 ; il resterait à voir si toute fonction de classe 2 est représentable de cette manière.

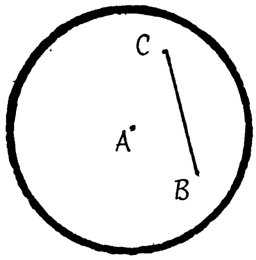
Il faudrait étudier également la classification des fonctions de plusieurs variables, d'abord celles de deux variables, préciser en premier lieu les caractères que doit présenter une fonction de classe 1, c'est-à-dire une fonction de (x,y), *limite* d'une fonction continue par rapport à (x,y) . Les choses seront sans doute une peu plus difficiles que pour une variable, parce que les ensembles parfaits dans le plan me semblent plus difficiles à manier que les ensembles linéaires ; ici, il existe des intervalles parfaitement déterminés, tels que l'ensemble est constitué par les points non intérieurs à ces intervalles ; quelle sera la notion analogue dans le plan ? Peut-être, il me semble, des polygones convexes, pouvant avoir une infinité de côtés.

Voilà à peu près à quel point j'en étais en quittant Turin ; dans le courant de mon voyage, j'ai réfléchi à cette autre question, que je m'étais posée tout au début, l'intégration des équations aux dérivées partielles, par exemple de

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0 ,$$

lorsqu'on ne suppose **pas** la continuité des dérivées, ni même celle de $f(x,y)$ par rapport à l'ensemble (x,y) . J'ai obtenu ce résultat : *si l'on suppose la fonction continue par rapport à l'ensemble* (x,y) , *il n'y a que les fonctions* $\varphi(x-y)$ *qui satisfont à l'équation*[40].

Voici la marche générale de la démonstration. En premier lieu, il convient de faire une étude des fonctions de (x,y) , continues par rapport à chacune d'elles, et possédant en tout point un $\frac{\partial f}{\partial x}$ et un $\frac{\partial f}{\partial y}$. Cette étude présente des analogies avec les études faites dans les questions précédentes. Etant donné un ensemble parfait de points E dans le plan (qui pourra être toute une aire, ou bien une courbe, ou bien un ensemble de points sur une droite, etc.), un point A de cet ensemble E sera dit *régulier* par rapport à E , si à ε on peut faire correspondre un cercle de centre A à l'intérieur



duquel on aura les propriétés suivantes. Soient B et C deux points de E compris dans le cercle et d'ailleurs quelconques. Soit $\alpha = (Ox, BC)$. On devra avoir :

$$\left| \frac{f_C - f_B}{\text{longueur de } BC} - \left[\frac{\partial f}{\partial x_A} \cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y_A} \sin\alpha \right] \right| < \varepsilon$$

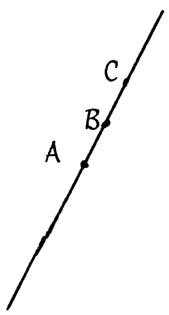
autrement dit, les lois de dérivation suivant une direction quelconque s'appliquent dans le cercle, à ε près, pourvu qu'on ne considère que les points de l'ensemble E.

Cela posé, je démontre que, au voisinage de tout point de E, existent des points réguliers par rapport à E.

Appliquons ce théorème à une fonction qu'on suppose satisfaire en tout point à

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

et prenons un ensemble parfait E situé sur une droite $x - y = a$ (l'ensemble pouvant être en particulier un segment continue de la droite). Si un point A est régulier par rapport à E, à ε près,



on peut faire correspondre un segment ayant A pour milieu, et dans lequel, B et C étant deux points quelconques de E, on aura :

$$\left| \frac{f_B - f_C}{\text{longueur de } BC} \right| < \varepsilon .$$

J'exprimerai le résultat en disant que sur l'ensemble E la fonction est *ponctuellement variable*. (Pour une fonction quelconque, considérons un intervalle ; formons, dans cet intervalle, tous les rapports

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} ;$$

ils ont un max. et un min., qu'on peut appeler coefficient de *croissance* et de *décroissance* ; on définira les coefficients de *croissance* et de *décroissance* en x_0, comme limites des précédents. Au point A régulier, les coefficients de croissance et de décroissance sont tous deux *nuls*. Cette notion s'applique à une fonction quelconque ; les coefficients de croissance et de décroissance seront tous deux égaux à la dérivée, si celle-ci existe et est *continue*.)

Ainsi, si une fonction satisfait à

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \ ,$$

et si l'on considère la valeur qu'elle prend sur $x-y = a$, cette fonction d'une variable est *ponctuellement variable* sur tout ensemble parfait.

A présent, je démontre que, parmi les fonctions *continues*, il n'existe que les fonctions constantes satisfaisant à cette condition ; autrement dit, si une fonction est *continue* et *non constante*, il existe un ensemble parfait sur lequel elle est *totalement variable*. Cela démontre le résultat énoncé au début. Mais il reste à étudier le cas où l'on n'élimine pas à l'avance les discontinuités de $f(x,y)$ par rapport à l'ensemble (x,y) .

J'avais l'intention de faire une note sur ce sujet, pour poser la question et donner la réponse, mais j'espérais trouver, ce que je n'ai pas encore fait, la solution complète ; je ne sais pas si je dois me contenter de cette première partie du résultat.[41]

En somme, le champ de ces études s'est considérablement élargi, et je crois qu'il n'y a pas lieu d'espérer traiter complètement et rapidement toutes les questions qui se posent. Il serait peut-être bientôt temps que je songe à la rédaction de ma thèse[42] ; je ne serais pas fâché d'avoir quelques renseignements précis sur le rituel en usage pour la présentation du travail, la détermination du jury, le choix d'un recueil pour l'impression, etc. A ce propos, il me semble que les *Annales de l'Ecole* doivent être fort encombrés d'ici longtemps ; la thèse de Le Roy n'est sans doute pas complètement publiée ; les thèses de Drach et de Marotte vont prendre encore de la place. Or, Dini, à qui j'ai envoyé ma dernière note, voyant qu'elle ne contenait que des résultats, et pensant que je publierai les démonstrations dans un prochain mémoire (il n'est pas complètement au courant des usages français en ce qui concerne la publication des résultats à l'Institut avant les mémoires définitifs),parlait vaguement de me proposer de publier ce mémoire dans les *Annali di Matematica*. Serait-il possible d'accepter cette hospitalité[43] tout en présentant ce travail comme thèse à la Sorbonne ? Je voudrais avoir ton avis là-dessus.

Je continue ainsi à mener de front la visite d'Italie avec l'étude des fonctions les plus bizzares ; ma dernière démonstration a été ébauchée sur le port de Gênes, approfondie à Pise, perfectionnée en chemin de fer, entre minuit et sept heures du matin, enfin achevée à Rome. Volterra me dit que je traiterai le cas de la fonction discontinue à Naples.

Je suis à Rome sans doute jusqu'à la fin de la semaine ; en tout cas, j'y reviendrai après avoir été à Naples.

Je te serre la main.

R. Baire

V

22 mai [[1898]][44]
Hôtel de la ville et de Bologne
Turin
Cours Victor Emanuel, 60[45]

Mon cher Borel,

Me voici de retour à Turin, après avoir exploré toute l'Italie, en gros et en détail. J'ai séjourné près de trois semaines à Rome, y compris un voyage de quatre jours à Naples ; j'ai repris ensuite la direction du Nord pour Florence, Bologne, Venise, Padoue, Milan et Turin. A Bologne j'ai vu les professeurs Pincherle, Arzela et Enriques; avec les deux premiers je me suis entretenu quelque peu de mes études. Après être resté quatre jours à Venise, qui m'intéressait beaucoup, je suis parti pour Padoue, où j'ai vu Levi-Civita, avec qui j'ai passé une partie de la journée, et qui m'a fait dîner dans sa famille ; il m'a présenté aussi aux professeurs Ricci et d'Arcais. Enfin, Milan étant rentré dans le calme depuis les fameuses journées des 7 et 8 mai, j'ai pu m'y aventurer sans crainte, et j'y ai fait la connaissance de Yung, professeur à l'Institut technique supérieur et l'un des quatre directeurs des *Annali*.

Il a eu la complaisance de se déranger pour moi auprès de l'imprimeur, pour lui demander dans quelles conditions on pourrait imprimer mon travail ; d'après les chiffres qu'il m'a donnés, la chose serait beaucoup meilleur marché que chez Gauthier-Villars.

Je suis rentrée avant-hier soir à Turin, pour peu de jours sans doute ; je suis à peu près décidé à rentrer en France mardi au plus tard, et dans tous les cas je serai à Paris pour la Pentecôte. Volterra est toujours disposé, je crois, à s'y rendre au commencement de juin, je serai bien heureux de l'y retrouver.

J'ai continué l'étude de mon grand problème, l'équation aux dérivées partielles, mais je n'ai pas encore la solution complète, toutefois j'ai trouvé en route quelques résultats qui sont peut-être intéressants en eux-mêmes, nous allons avoir tout le temps d'en causer

A bientôt.

R. Baire

VI

Montpellier, 4/2 1902[46]

Mon cher ami,

Je te prie d'excuser mon silence de ces derniers temps ; il est dû autant à ce que, après quelques mois de demi-santé, je me trouve de nouveau, depuis six semaines environ, sous l'influence d'un retour offensif, assez accentué encore, de ma neurasthénie. La chose n'est pas pour m'étonner, elle m'inquiète encore moins, mais cela est tout de même fort désagréable ; on s'habitue à tout, et j'en ai pris mon parti, ayant appris la patience l'année dernière ; mais je ne sais quand je retrouverai ma belle santé d'il y a trois ans. Je n'ai d'ailleurs aucun symptôme nouveau, rien que des choses que je finis par connaître par coeur. Quant aux médecins, ils sont impuissants contre ce genre d'affection ; tous m'ont affirmé que je n'avais aucune lésion d'organe, c'est tout ce que je leur demande.

Je m'étais chargé à la Faculté de conférences relatives à l'agrégation. Il n'y a ici qu'un candidat, qui est déjà très ancien, a été boursier à Toulouse, n'a jamais été admissible (quoique ayant un certain acquis) et occupe un petit emploi de préparation au PCN[47]. Pour l'instant, comme je ne peux pas aller à la Faculté, je me contente de lui donner des rendez-vous chez moi, et nous nous occupons, soit de leçons, soit de problèmes. Mais un travail suivi ne m'est pas possible en ce moment ; il était temps que je quitte les lycées, j'aurais certainement été dans l'obligation de demander un nouveau congé, ce qui serait plutôt ruineux, mes ressources se réduisant à 0 F,00. Heureusement que les choses s'arrangent mieux dans l'Enseignement supérieur. "Ménagez-vous" m'a écrit le doyen Sabatier. "Prenez votre service en douceur" me dit Dautheville.

Cette question de santé ne laisse pas que de rendre ma situation peu délicate en ce qui concerne ma candidature éventuelle au cours Peccot. Je suis né le 21/1/74 (le lendemain du jour où Darboux signa son mémoire sur les fonctions discontinues, fatale coïncidence !!!)[48] ; je viens donc d'avoir 28 ans. Il est bien entendu que, santé à part, je serais très heureux, si l'on voulait bien me confier le poste en question, d'avoir une occasion d'habiter pour un moment mon vieux Paris. Maintenant, deux graves questions se posent. Situation pécuniaire ; il est bien évident que je ne peux pas demander un congé d'un an sans traitement, ne pouvant pas me contenter de 3.000 de la Fondation ; m'accorderait-on, le cas échéant, un congé de quatre mois, par exemple, ou une combinaison différente ? J'ignore sur ce point les usages suivis, s'il y en a.

D'autre part, le bénéficiaire de la chose est-il contraint à certaines conditions au point de vue de la matière d'enseignement ? Quel est au juste le degré de liberté qu'on lui donne à ce point de vue ? (Soit en droit, eu égard aux clauses de la fondation, soit en fait, c'est-à-dire eu égard aux opinions et tendances de ceux dont le vote désigne le titulaire.) Je suppose que, malgré tout, les conditions doivent être larges, le Collège de France devant être libéral par essence. D'ailleurs, Lebesgue et moi, nous ne recontrerons sans doute que, chez Jordan, chez Hadamard, les mêmes mauvaises volontés par ailleurs.

En ce qui concerne mes travaux, il est bien entendu que ce n'est que par intervalles fort espacés que j'ai pu y penser un peu dans ces deux dernières années, et que la rédaction de toute publication à ce sujet est nécessairement ajournée à une date ultérieure, peut-être très ultérieure. Mais la chose avance tout de même, d'une manière latente en quelque sorte. Un résultat que j'ai obtenu me transforme en quasi-conviction cette idée que je soupçonne depuis longtemps, qu'une fonction discontinue définissable est développable en une série *triple* de polynômes, qu'en tout cas il n'y a pas de classe 4 (d'après ma note du *6 juin 98*, dont le principal énoncé deviendrait ainsi sans objet : E s'y décomposait en classes marqués $0,1,2,\ldots,n,\ldots,\omega,\ldots,\alpha,\ldots$)[49] ; à l'heure actuelle, je crois que E ne comprend que les classes 0,1,2,3. Je crois en tout cas gagner à coup sûr en précisant que la fonction la plus baroque qu'on me citera est une série triple de polynômes !

Le résultat ne brillerait pas par la banalité, mais il est encore loin d'être acquis. Quoi qu'il en soit, j'affirme qu'on peut (et par suite qu'on doit ?) étudier les relations du discontinu et du continu : la discontinuité est parfaitement maniable. Cela ne me paraît pas sans intérêt au point de vue de la philosophie des mathématiques, de la vraie philosophie des mathématiques, tout entière à faire ou à peu près.

Pour sortir de ces hautes spéculations, j'avouerai que je me trouve arrêté parfois par des choses beaucoup plus simples. C'est ainsi que j'ai quelque peine à saisir le genre de ce qu'il faudrait trouver comme exercices sur les fonctions elliptiques au point de vue de l'agrégation. Le problème de 1901 me semble enserré de pièges et je ne vois pas trop bien ce qu'on veut, étant donné qu'on donne une courbe *unicursale* à étudier par les fonctions elliptiques[50]. Celles-ci ne jouent-elles dans la question qu'un rôle de parade ? En tout cas, il me semble bien que le traité d'Appell-Lecour[51] ne suffit pas pour être maître de la question, et qu'un candidat connaissant le programme imposé pouvait raisonablement perdre du temps à chercher, par exemple, un parallélogramme de périodes oû à un point de la courbe aurait correspondu *un seul* point ; chose impossible, mais d'après des théories qui ne me paraissent pas rentrer dans le programme. Je ne sais si je me trompe. Les exercices d'Appell-Lacour sont pour la plupart ou trop faciles, ou sont des vérifications de calcul. [[...]] Je ne suis pas parvenu à fabriquer un problème comme on en pourrait demander à l'agrégation.

Pour l'instant d'ailleurs, je ne vais passablement qu'à la condition de ne faire à peu près rien. Je ne garde pas la chambre complètement, en ce sens que je fais de petites sorties dans les rues voisines (je demeure 16 rue Baudin), sorties de 10 à 20 minutes ; une des formes les plus persistantes de ma maladie est en effet une sorte de vertige, d'étourdissement, qui me met dans l'impossibilité de rester dehors. L'hôtel Villaret (rue Maguelone) m'envoie mes repas. Je reprends, à peu de choses près, l'existence que j'ai menée à Bar-le-Duc, l'an dernier. Je pense tout de même que cette crise va prendre fin, mais je suis bien obligé de compter avec les nouvelles rechutes possibles.

J'ai reçu des nouvelles de Lebesgue il y a quelques jours.
[[...]]

Je ne me trouve pas mal à Montpellier, à part cela. J'ai perdu, de force, mon goût de jadis pour les déplacements, et n'ai pas encore bougé d'ici, depuis mon arrivée, fin septembre.

Cordialement à toi. Remerciements.

R. Baire

[[...]]

VII

Montpellier, 11/3 [[1902]][52]

Mon cher ami,

Je continue à être peu brillant, à suivre une courbe infiniment sinueuse, sans dérivée peut-être, mais peu importe. Il y a un mois, au mardi gras, j'ai reçu la visite d'un trio d'archicubes de mon temps, Marijon, le professeur de taupe de Nîmes, Buisson, maître de conférences à Marseille, Lattès, un confrère en neurasthénie, d'Aix ; il m'avait été impossible de faire le voyage de Nîmes, où l'on devait se donner rendez-vous. Quelques jours après, j'ai eu une nouvelle accentuation de mon malaise, une sorte de petite rechute dans la grande, ou de grande dans la petite, comme on voudra, suivant qu'on se place au point de vue de l'intensité ou de la durée. Je commence seulement à m'en remettre un peu, et fort lentement. Tout cela est pour dire que je ne peux pas considérer comme très vraisemblable mon déplacement à Pâques ; d'ailleurs l'expérience de l'an dernier m'a appris combien il fallait me défier des retours apparents de santé. Toutefois il est bien entendu que je mettrai toute la bonne volonté possible, et si je me sens apte à un déplacement, je tâcherai d'aller te voir.[54] [[...]]

Pour les raisons déjà dites plus haut, je ne peux guère me considérer comme un candidat sérieux au cours Peccot ; pour l'instant, qu'il puisse être question de ma candidature éventuelle, en principe pour ainsi dire, ça ne peut pas être une mauvaise chose ; peut-être est-ce que cela me donnerait des titres pour l'année prochaine, où je veux croire que je serai en meilleur état ?

Hier, pour la première fois depuis plusieurs mois, je me suis transporté à la bibliothèque de l'Université (drôle de bibliothèque, entre parenthèse) ; comme par hasard je vois sur le dernier numéro de la *Revue philosophique* un nouvel Evellin et Z. Un coup d'oeil rapide et distrait me fait croire qu'à présent l'inintelligence du sujet a fait place à la mauvaise foi[55].

[[...]]

VIII

Annecy, 28/7/02

Mon cher ami,

Je suis venu promener mes nerfs ici en Savoie, avec l'intention de faire un séjour une peu prolongé dans une station encore à préciser, Saint-Gervais probablement. En attendant je reste quelques jours ici à Annecy, pour me reposer de la première partie de mon voyage, accompli d'ailleurs par petites étapes, et sans grande fatigue ; je suis plutôt dans une période d'amélioration. Cela n'empêche pas que je ne dois pas m'emballer sous aucun prétexte, et qu'il me faut compter avec toute l'année prochaine pour me ramener à l'état normal : au point de vue du service et des relations avec les collègues, je n'ai rien à désirer de mieux que Montpellier.

Je souhaite vivement que le cours Peccot soit donné à Lebesgue, plutôt qu'à un rentier, si sympathique soit-il d'autre part.

[[...]]

IX

Hôtel du Mont Joli
St Gervais-les-Bains
(H^te^ Savoie)[56]
19/8/1902

Mon cher ami,

Je n'ai eu avec Jordan que de très courtes conversations ; il me paraît surtout désireux de prendre l'air et de se reposer ; il est justement parti ces jours-ci pour excursion, sinon au Mont Blanc, ce qui serait un peu exagéré, du moins je crois à la Tête Rousse, qui est sur le chemin ; toujours très vert, très gai, à ce qu'il semble[57] ; il a, je crois, avec lui, une soeur malade, qui ne descend jamais, soignée par une soeur de charité, avec laquelle on la voit blaguer à une petite table, aux heures de repas ; en outre, un gros lourdaud de 18 ou 20 ans, fils ou neveu, je ne sais.

Avant de recevoir ta dernière lettre, j'avais dis quelques mots du cours Peccot, et de ce qu'il m'a répondu je crois crois pouvoir inférer que :

1° il n'a pas connaissance d'autre candidature que celle de Lebesgue [[...]]

2° il trouve la condition < 30 ans assez restrictive pour qu'on ne puisse raisonnablement en exiger d'autres. Je ne crois donc pas que des objections à une solution de concentration entre Rennes[58] et Collège de France pourraient venir de lui.

J'ai reçu de Lebesgue une lettre datée 1/8 (le 14 !), mais pas de réponses aux deux lettres envoyées de 3 et de 10 [[...]]

X

Montpellier, le 15 décembre
1902

Mon cher ami,

Je serais heureux d'avoir ton avis sur la question suivante.

Je considère toutes les suites de nombres entiers possibles :

$$(A) \quad a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots .$$

On dit que (B) est plus croissant que (A), si, à partir d'un certain rang, on a $b_n > a_n$. On peut ainsi former des ensembles de suites de plus en plus croissantes, ce serait, en langage de Cantor, des ensembles *bien ordonnés* dont le nombre ordinal sera un nombre transfini ω, $\omega+1$, etc. Tout ceci est une affaire entendue.

Mais je voudrais, si possible, trouver un caractère de comparaison applicable à deux suites *quelconques*, permettant donc, étant données deux suites (A) et (B) de mettre l'une avant l'autre, soit $(A) < (B)$, satisfaisant à la condition que $(A) < (B)$, $(B) < (C)$ entraînent $(A) < (C)$ (en langage de Cantor, le caractère en question doit ranger l'ensemble de toutes les suites en un ensemble simplement ordonné[59]); enfin, il faudrait que, si (B) est plus croissante que (A), on ait, d'après le caractère, $(A) \leqslant (B)$. En d'autres termes, le caractère en question doit comprendre, comme cas particulier, le caractère de croissance plus ou moins grande.

J'ai bien peur que la question ne soit pas résoluble, mais alors il serait intéressant de démontrer l'impossibilité de la chose.

Il m'arrive ainsi de temps à autre, pas très souvent, de penser à des questions transcendantes de cette nature. Je ne suis toujours pas très resplendissant, mais j'espère toutefois me sentir mieux que les deux années précédentes. J'ai pris la bonne précaution, d'une part, d'espacer mon service (une heure tous les deux jours) au rebours de ce que font en général les collègues bien portants, avec raison, d'autre part, de me charger des sujets faciles, questions des cours de licence, exercices. Nous n'avons pas d'ailleurs à faire cette année d'agrégation.

J'ai été content d'apprendre la nomination de Lebesgue[60]. Mais ce voyage hebdomadaire n'est-il pas fatigant ?

[[...]]

XI

Montpellier, le 20/12/1902

Mon cher ami,

Nous sommes parfaitement d'accord sur le procès en question, et en état, je crois, de nous entendre à demi mot dans cet ordre d'idées, en ajournant la rigueur absolue. Voici donc quelques réflexions autour du fait.

La *comparaison* des suites d'entiers me paraît être une opération fondamentale dans l'Analyse réduite aux principes les plus abstraits, on l'a rencontre dans toutes sortes de questions, reconstitution du continu (nombres irrationnels), théorie des fonctions discontinues, fonctions croissantes, etc. Or, comment comparer deux suites ? Par le commencement, ou par la fin. On peut préciser.

Appelons *caractère initial* un caractère tel que, s'il range deux suites A et B dans l'ordre $A < B$, il y a n (dépendant de

A et de B) tel que, si A' et B' ont en commun avec A et B respectivement les n premiers termes, on a aussi $A' < B'$. C'est ce qui arrive, par exemple, quand on considère les suites de quotients incomplets de fractions continues, et qu'on les range dans l'ordre correspondant à la grandeur des nombres irrationnels correspondants. On voit qu'un tel caractère range un *bloc* de suites derrière un bloc d'autres suites, puis divise chaque bloc en plusieurs (ou ∞) autres, etc.

Appelons *caractère final* un caractère tel que s'il range A et B dans l'ordre $A < B$, il range aussi dans le même ordre A' et B' dès que A' et B' sont obtenus en modifiant arbitrairement un nombre quelconque de termes au commencement de A et de B. C'est le cas pour la comparaison des suites croissantes.

Je crois bien qu'un caractère *final* ne peut pas être applicable à toutes les suites possibles, ou bien ne satisfait pas à $A < B$, $B < C$ entraîne $A < C$. On doit rencontrer là une impossibilité de même nature (peut-être même *complètement équivalente*) à celle dont je t'ai parlé depuis longtemps déjà (1898), et qui peut se ramener à l'impossibilité du problème suivant :

Partager le continu (0,1) en deux ensembles P et Q de manière que dans une portion $\alpha\ \beta$ quelconque du continu, *aucun* des deux ensembles P et Q ne soit composé d'une ∞ dénombrable d'ensembles non denses.

Ma conviction est depuis longtemps faite sur cette impossibilité, sans que je l'ai démontrée.

Il me semble que plusieurs questions différentes confluent ici. La fameuse question de Cantor : Ranger les nombres en un ensemble bien ordonné est probablement pour moi sans solution. En effet, un caractère *initial* range les suites en un ensemble *simplement* ordonné, mais pas *bien* ordonné[61], car entre deux suites en existent toujours d'autres. D'autre part, un caractère *final* ne peut pas s'appliquer à toutes les suites, il n'en rangera jamais qu'une partie. Quant à un caractère *mixte*, ou bien composé de plusieurs caractères de la nature précédente, je ne crois pas qu'il arrive à nous faire sortir du dilemme ; il aura, si je puis dire, les inconvénients des deux autres sans en avoir les avantages.

Passons à un autre ordre d'idées. Il y a certains ensembles *bien ordonnés* d'objets dont on peut démontrer qu'ils sont nécessairement dénombrables (ou encore, marqués par un nombre de Cantor de la 2e classe) : voici quelques exemples.

Le plus ancien est de Bendixson dans les *Acta* (II)[62]. Etant donné un ensemble fermé, la suite de ses dérivées successifs est dénombrable. (Il y a un α de la classe II pour lequel P^{α} est parfait ou nul.)

Je l'ai généralisé plus tard (et c'est ce qui m'a permis de démontrer les théorèmes de ma thèse). Si on a une suite d'ensembles fermés

$$P_0 > P_1 > P_2 > \dots > P_n > \dots > P_\omega > \dots > P_{\omega^2} > \dots > P_\alpha > \dots$$

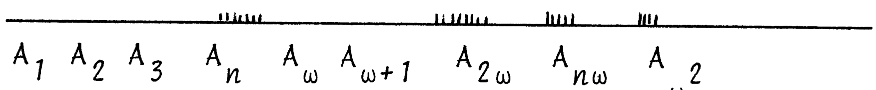
contenus les uns dans les autres, il y a un α de classe II tel que

$$P_\alpha = P_{\alpha+1} = \dots .$$

(Thèse § 47)[63]

Je n'ai donné ce théorème que comme un lemme, au point de vue où je me plaçai, mais je considère *son importance philosophique comme très considérable.*

Autre exemple. Plaçons sur un segment des points formant un ensemble *fermé,* mais tel que chaque point soit *isolé à droite.* On a ainsi un ensemble bien ordonné. On peut montrer qu'on peut ainsi



représenter tous les nombres de Cantor des classes I et II. (Ce serait même, à mon avis, la meilleure méthode pour faire comprendre les nombres de Cantor, en en donnant tout de suite une application concrète.) Mais on peut montrer qu'un tel ensemble est nécessairement dénombrable. (La chose se déduit de ce que 1° un ensemble fermé non dénombrable contient un ensemble parfait ; 2° un ensemble parfait contient des points qui sont limites à *gauche* et à *droite.*) ((Mais cette démarche en me paraissant indirecte, j'ai cherché et trouvé une nouvelle qui me plaît mieux.))

Encore une fois, je crois très digne d'attention ce fait qu'on a ainsi des ensembles nécessairement marqués par les nombre de la classe II, et la raison philosophique en serait à approfondir (j'ai, je crois, commencé à le faire.)

Je voudrais à présent essayer de transposer la question dans un ordre d'idées voisin. Faut-il répondre "oui", "non" ou "la question n'a pas de sens" à la question suivante.

Un ensemble déterminé *bien ordonné* de suites

$$A_1 < A_2 < \dots < A_n < \dots < A_\omega < \dots < A_{\omega^2} < \dots < A_{\omega^\omega} < \dots,$$

tel que si $A_\alpha < A_\beta$ la suite A_β croît plus que A_α (sens de ma dernière lettre[64]), est-il nécessairement dénombrable ? En tout cas, il ne faudrait pas se hâter d'y voir une contradiction avec le théorème de du Bois-Raymond[65], en dépit d'une certaine apparence. (Sur les exemples de la page précédente, un raisonnement assez spécieux pourrait aussi faire croire que le résultat est en contradiction avec ce fait qu'on peut trouver un ensemble marqué par un nombre plus grand qu'une ∞ d'autres déjà obtenus.) La contradiction, si elle existe, devra être démontrée, et peut être la difficulté analogue à celle que tu signales (*Leçons sur la théorie des fonctions*, Note II, note en bas de la page[66]), secondaire en apparence, pourrait bien prendre une place plus importante qu'on ne le croirait. D'autre part, peut-on dire qu'on *définit* un ensemble bien ordonné, de nombre Ω ? (C'est plutôt encore ici que s'appliquerait la remarque sur la difficulté que je viens de rappeler).

Dans tous les cas, il y a, je crois, une différence essentielle entre le problème actuel et les exemples de la page précédente. Ici on compare les suites par la *fin*, dans ces exemples on les compare par le *commencement*. (La chose n'est pas immédiate pour l'exemple des ensembles fermés, mais une analyse détaillée le montre.)

En ce qui concerne la représentation des fonctions discontinues (classes 1,2,3), je l'ai dit il y a quelques mois que je croyais impossible de définir une fonction non représentable par une série *triple* de polynômes[67]. Je détaille un peu l'état de la question. Le fait serait certain en admettant deux postulats bien distincts. Le premier est (sous une forme plus générale) celui que je rappelle plus haut, page 2, en accolade. Je dis sous une forme plus générale, eu égard à ce que je transporte la théorie dans ce que j'ai appelé en décembre 1899 (*Comptes Rendus*):*ensembles de suites d'entiers*[68], et que j'appellerai volontiers, si je ne craignais de me faire enfermer : ensemble ou espace à *0* dimensions ; c'est l'expression qui conviendrait le mieux à cette notion nouvelle[69].

Le second postulat est, en un certain sens, une généralisation du théorème rappelé page 3 en accolade (thèse § 47). J'ai longtemps cru qu'il y a là un théorème (impossible à énoncer pour l'instant, il me faudrait plusieurs pages de définitions), et depuis quelques jours seulement, à la suite des réflexions précédentes, je crois qu'il y a peut-être encore là un fait à admettre. La chose aurait assez d'analogie avec le fait d'admettre, par exemple, ceci (comme page 4) :

On ne peut *définir* qu'un ensemble *dénombrable*, qui soit bien ordonné, de suites croissantes de plus en plus.

Quoi qu'il en soit, depuis longtemps j'ai reconnu qu'en admettant ce second postulat on aurait le résultat suivant : On connaîtrait la condition *nécessaire* et *suffisante* pour qu'une fonction fasse partie de l'ensemble E défini dans ma thèse (fonctions de classes $0,1,2,\ldots,n,\ldots,\omega,\ldots,\alpha$)[70]. Mais, grâce à un résultat (*bien précis celui-là*) obtenu en janvier dernier, le même postulat donnerait bien mieux encore, à savoir ceci : E se composerait seulement des classes 0,1,2,3. Donc on aurait ceci : Toute fonction développable en série quadruple (ou n^{uple}, ou ω^{uple}) est développable en série triple. En admettant en outre le premier postulat, qui reviendra à ce que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction fasse partie de E est toujours observée par une fonction *définie*, on aura ceci, que toute fonction définie peut se représenter par une série triple.

Je tiens à signaler ce fait qu'il ne faut pas s'arrêter au caractère arbitraire de ce chiffre 3. (Pourquoi 3, me dit-on ?). Je puis en effet démontrer en toute rigueur que le résultat en question, vrai ou faux, est la conséquence d'énoncés (les 2 postulats, non démontrés) dans lequel *rien n'existe de ce caractère arbitraire.*

Il est à notre que la question de la représentation par une série double (fonctions de classe 2) passe au second plan. Il y a lieu d'étudier le développement en série *triple* avant le développement en série *double*, ce qui, après tout, n'est pas plus extraordinaire qu'autre chose.

Voilà bien les questions en suspens. De plus en plus je suis convaincu qu'il faudra arriver, dans bien des cas, à remplacer la question :

Une chose est ou n'est pas
par celle-ci
On ne peut définir que des choses qui soient, etc.

Mais saisir *a priori* ce qui est possible de définir est bien difficile.

[[...]]

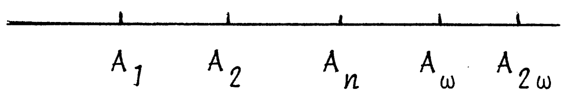
XII

Montpellier, le 3/1/1903

Mon cher ami,

[[...]]

Encore un petit mot sur le transfini. Mon avis n'est pas qu'il est impossible de définir un ensmble bien ordonné non dénombrable. Je crois au contraire que les derniers mémoires de G. Cantor (traduction Marotte, plus ou moins fidèle)[71] sont excellents au point de vue logique et rigueur, et qu'il en ressort la définition nette d'un ensemble bien ordonné de nombre Ω . J'adopterais très volontiers cette exposition, en l'illustrant simplement par un exemple concret (celui des ensembles de points sur un segment, chaque point



étant *isolé à droite*).

J'estime qu'alors les nombres transfinis de la classe II sont aussi bien et *aussi mal* définis que les nombres entiers. (Je considère en effet que la théorie de la numération est encore à faire, mais passons pour l'instant.) Mais cela laisse pendantes d'autres questions, en particulier celle-ci :

Définissons un ensemble de suites d'entiers correspondant aux nombres de Cantor I et II, tels que si $A < B$, à partir d'un certain rang les termes de B > ceux de A .

J'ai ici, à droite, un essai de formation d'un tel ensemble :

Nombres de Cantor	Suites d'entiers	
1	$1\ 1\ 1\ 1\ \dots$	
2	$2\ 2\ 2\ 2\ \dots$	
...	....	
n	$n\ n\ n\ n\ \dots$	
...	....	
ω	$1\ 2\ 3\ 4\ \dots\ p\ \dots$	$\omega = \lim 1, 2, \dots, n, \dots$
$\omega+1$	$2\ 3\ 4\ 5\ \dots$	
...	....	
$\omega 2$	$2\ 4\ 6\ 8\ \dots\ 2p\ \dots$	$\omega 2 = \lim \omega+1, \dots, \omega+n, \dots$
$\omega 2+1$	$3\ 5\ 7\ 9\ \dots\ 2p+1\ \dots$	
...	....	
$\omega 3$	$3\ 6\ 9\ 12\ \dots\ 3p\ \dots$	
...	....	
ωn	$n\ 2n\ 3n\ \dots$	
...	....	
ω^2	$1^2\ 2^2\ 3^2\ \dots\ p^2\ \dots$	$\omega^2 = \lim \omega, \omega 2, \dots, \omega n, \dots$
...	....	
ω^3	$1^3\ 2^3\ 3^3\ \dots$	
...	....	
ω^n	$1^n\ 2^n\ 3^n\ \dots\ p^n\ \dots$	
...	....	
ω^ω	$1^1\ 2^2\ 3^3\ \dots\ n^n\ \dots$	$\omega^\omega = \lim \omega, \omega^2, \omega^3, \dots$
...	....	
$\omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}$	$1\ 2^2\ 3^{3^3}\ 4^{4^{4^4}}\ \dots\ \overbrace{p^{p^{p^{p^{\cdot^{\cdot^{p}}}}}}}^{p}\ \dots$	

$$\omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}} = \lim \omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \dots .$$

Mais on se trouve arrêté par ceci. Etant donné un α, on prend une suite $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ tendant vers α, et on peut ainsi donner une loi déterminée de formation des suites, applicable tant qu'on saura, étant donné α, choisir la suite $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$. Tout reviendrait donc à ceci. Donner une loi qui, étant donné un α, lui fera correspondre d'une manière *déterminée* une suite

α_1, α_2, ..., α_n, ... tendant vers α. Cela me semble probablement impossible.

Je n'insiste pas, d'autant plus qu'il ne m'est pas sain de rester trop longtemps dans ces abstractions. Je serais quand même heureux de connaître ton opinion là-dessus.

[[...]]

XIII

Montpellier, le 21/1/1903

Mon cher ami,

[[...]]

Nous sommes d'accord sur le transfini, mais j'estime qu'on ne doit pas dire qu'"on donne des noms aux nombres transfinis". Non, on en donne seulement à ceux du début, et la question est importante. Je crois que cette difficulté existe déjà, en un certain sens, pour les nombres entiers ordinaires, et n'a jamais été remarquée, pas plus par Drach que par Tannery, et je ne parle pas de Couturat. J'y reviendrai une autre fois. Grossièrement, c'est ceci : on ne connaît pas les entiers *très grands*, parce que, pour les écrire, pour les nommer, il faudrait déjà connaître les entiers très grands (quel que soit le système de numération employé) ((défini nécessairement par un nombre *fini* de conventions)).

Bien à toi.

René Baire

XIV

Montpellier, le 14 mars 1903

Mon cher ami,

Une étude aussi approfondie qu'impartiale des indicateurs de chemin de fer me montre que ce serait toute une histoire pour moi d'entreprendre le voyage de Montpellier à St Paul, à moins peut-être d'attendre les vacances de Pâques ; mais, comme je crois pouvoir être en mesure de circuler un peu à ce moment, je me propose de faire un petit voyage dans le Sud-Ouest, Toulouse, Bordeaux, Pau, et je n'aurais pas trop pour réaliser ce projet de ma quinzaine, car je dois éviter toute fatigue excessive et me réserver quelques jours de repos avant la reprise de mes cours. Si tu te décides à venir passer un moment ici, tout sera pour le mieux ; mais voici maintenant une troisième solution, qui, malgré son apparence baroque, n'est peut-être pas si mauvaise. Si nous nous donnions rendez-vous à mi-chemin, à Bédarieux[72] ?

La réalisation me paraît fort commode. Départ de Montpellier : 8 h 20 matin, de St Paul 8 h 41, et arrivée commune à Bédarieux vers 10 h 1/2, presque à la même heure. Journée passée là jusqu'à 6 h du soir environ. De cette manière, pas de dérangement considérable, à peine 2 heures de voyage pour chacun à l'aller, autant au retour, pas de logis à trouver en cours de route, et, en mettant la chose un samedi, conciliation parfaite avec mes cours et leur préparation. (Je fais mes leçons lundi, mercredi, vendredi, l'après-midi.)

[[...]]

XV

Montpellier, 27/3/1903

Mon cher ami,

J'ai reçu tes deux cartes et ton mémoire[73]. Avant de demander un changement, j'écris à Drach pour savoir d'une manière précise ce qu'il fait à Lille. C'est bien la ville qui me tenterait le plus, quoique pas belle et mal pavée ; c'est aussi la seule compatible avec le Collège de France, au cas où la question se poserait[74].
[[...]]

Je viens de recevoir un petit mémoire d'un nommé Severini[75], qui m'envoie consciencieusement tout ce qu'il fait ; mon impression est qu'en général il ne donne que des choses bien peu profondes, des conséquences simples de faits acquis ; toutefois son mémoire actuel : *Sur les séries de fonctions analytiques*, renferme peut-être quelque chose ; il se propose, entre autres, de rechercher la condition nécessaire et suffisante pour qu'une série de fonctions analytiques soit une fonction analytique ; et donne une telle condition. En réalité, il transforme le problème ; dans son énoncé il dit, entre autres : il faut que la série soit intégrable terme à terme. Malgré cela, la transformation est peut-être intéressante, et si tu n'as pas reçu de lui cet opuscule, je pourrais te l'envoyer ; tu verras, tout de suite, s'il peut être considéré comme faisant faire un progrès à la question.

J'ai vu que Lebesgue a fait une note aux *Comptes Rendus*[76], que, d'autre part, Picard a fait un compte rendu de sa thèse dans le *Bulletin des Sciences mathématiques*, très élogieux, comme il sied, et se terminant par ces mots (dois-je les prendre pour moi ?) : "L'auteur fait preuve, en même temps que d'une grande puissance d'abstraction, du souci d'*appliquer les généralités à des exemples particuliers*"[77]. Je constate sans trop de dépit que le *Bulletin* a fait autour de ma thèse à moi la conspiration du silence ; peut-être il est trop tard pour parler encore d'elle, comme disait Musset. Je crois que Cotton partage le même sort[78] ; cette méthode d'éliminer certains périodiques[79] est bizzare, et il n'y a sans doute que peu de temps que paraissent des comptes rendus pour les thèses, considérées à part des recueils où elles paraissent.

[[...]]

XVI

Montpellier, 22/5/03

Mon cher ami,

[[...]]

Quel fouillis se prépare dans l'enseignement supérieur mathématique ? Lebesgue m'écrit que Lacour en a assez de Nancy ? Bizzare. Si on veut m'y renvoyer pour la 3^{e} fois, je marche. [[...]]

Un tuyau précis (que je demande), pas moyen d'arriver à une réponse nette sur ceci : les correspondants de l'Institut ont-ils, comme les membres, le droit à la prolongation au-delà de 70 ans ? Je crois bien que non, mais certains soutiennent que si.

J'ai fait, à Pâques, le voyage que je me proposais de faire, dans le Sud-Ouest ; mais cela m'a fatigué, et je crois qu'il ne me serait pas prudent de prendre pour le Collège de France la solution de Lebesgue ; un congé de 3 mois serait préférable.

[[...]]

XVII

Montpellier 28/5/03

Mon cher ami,

[[...]]

En tout cas, Nancy ne serait pas pour me déplaire. La Lorraine a joué un rôle assez bizzare à mon égard, pendant mon existence et même avant (c'est le pays de mon père et de ma mère[80]), je n'y ai mis les pieds que le jour où l'on m'envoya débuter en Elémentaire à Nancy ; au bout de 8 jours, contre-ordre, on me propose Troyes, j'accepte, on me nomme, on oublie de me le dire, je me morfonds toute une semaine dans cette ville, avant de m'en aller définitivement à Troyes. Plus tard j'ai bien cru rentrer à Nancy, à la Faculté, en remplacement du même Lacour (1900) ; quand je n'y pensais plus, on m'y a envoyé malgré moi au Lycée (1901). [[...]]

XVIII

Montpellier 12/11/03

Merci pour la bonne nouvelle, mais surtout merci pour avoir fait en sorte qu'elle fut bonne[81]. Je crois que les détails de réalisation ne présenteraient aucune difficulté sérieuse. Je demande au secrétaire s'il peut être admis de faire 3 leçons par semaine, par suite le cours en deux mois ; dans tous les cas, je commence à la rentrée de janvier. Une grosse question était à résoudre hier, trouver le titre. Je ne voulais pas prendre un titre trop vague, d'autre part je ne voulais pas non plus quelque chose de trop ambitieux ; je me suis arrêté à ceci : M. Baire traitera des rapports entre les notions de continuité et de discontinuité dans quelques questions d'analyse.

Il est entendu, n'est-ce pas, que cela n'engage à rien pour le titre ultérieur du petit livre correspondant au cours, si j'en fais un[82]. Je crois que je m'y déciderai, il y a toutefois lieu de réfléchir un peu à la question.

Je fais dès maintenant 4 leçons à la Faculté, j'en ferai autant à mon retour, dans ces conditions j'aurai fait un service complet ; j'ai d'ailleurs prévenu le doyen et le recteur, qui ne soulèvent aucune objection.

J'ai envoyé mon manuscrit à Mittag-Leffler[83] qui vient de m'en accuser réception et me dit qu'il ne peut commencer à m'imprimer cette année. Cela veut dire, sans doute, que je ne paraîtrai qu'en 1905, au plus tôt. Il me dit de m'entendre avec Phragmen.

Je me suis mis en correspondance, par l'intermédiaire de Segre, de Turin, avec M. Beppo Levi dont je t'ai emprunté deux notes[84]. Il m'écrit : "Je dois avouer que j'ai trouvé dans mes démonstrations quelques lacunes, etc. ; d'autres occupations m'ont détourné provisoirement de ces recherches, etc."

En somme, il s'était avancé à la légère dans ses affirmations ; il n'en est pas moins vrai, à mon avis, que ses propositions fausses sont connexes à une intuition juste ; il y a d'ailleurs quelque chose d'analogue dans du Bois-Reymond (*Théorie des fonctions*[85]) qui affirme à un certain endroit que tous les ensembles qu'on définit sont dénombrables ou sont des continus diminués d'ensembles dénombrables, ou quelque chose d'approchant. Je crois être plus près de la vérité que du Bois-Reymond et que Beppo Levi, mais ne suis pas encore en mesure même d'exposer mon idée.

[[...]]

XIX

Montpellier, 16/12/03

Mon cher ami,

Je compte partir dans une huitaine et être à Paris le 25 [[...]]

Je suis en train d'achever ici le cours de fonctions elliptiques ; à raison de 3 par semaine, plus une conférence ; j'ai été tellement absorbé par cet ordre d'idées que j'ai dû naturellement laisser provisioirement de côté le domaine tout différent où je vais rentrer dans huit jours.

Je vois qu'un peu de bruit commence à se faire autour du transfini ; l'occasion ne serait pas mauvaise pour que j'essaye, à mon tour, de dire comment je le comprends, c'est ce que je tâcherai de faire peut-être dans mon cours. Pour l'instant, je me contente de résumer mon opinion en deux mots : il ne faut pas craindre le *mot*, mais il faut bien définir la chose. Je crois qu'une démonstration où l'on parle de transfini pourra toujours être remplacée par une autre où l'on n'en parlera pas *et c'est précisément cela qui fera la légitimité et l'utilité du transfini*, mais où la notion sera dissimulée sous des périphrases ; si je dis cela, c'est parce que j'ai essayé, moi aussi, d'opérer cette transformation.

Il faudra arriver à présenter la chose de manière qu'elle ne renferme rien de plus mystérieux que les imaginaires, qui ont fait couler tant d'encre autrefois.

Voici une comparaison élémentaire. Pour démontrer

$$\cos(a+b+...+l) = ...$$
$$\sin(a+b+...+l) = ...$$

deux méthodes : 1° directe, par récurrence, un peu longue ; 2° par les imaginaires, calcul rapide, résultat immédiat.

Pourtant les imaginaires n'existent pas dans le fond de la question.

Je ne veux pas discuter plus profondément le pour et le contre, faute de loisir, mais je crois que le transfini sera, dans certaines questions, plus utile encore que les imaginaires dans cet exemple, plus *essentiel*, et tout aussi *rigoureux*.

Je me propose de publier une Note aux *Comptes Rendus* dans une quinzaine, histoire de dire quel est l'état de la question de la représentations des fonctions discontinues[86], puisque le *Bulletin* lui-même veut bien s'y intéresser (tout en commettant quelques inexactitudes, évitables si j'avais été consulté)[87]. Je ferai d'abord un résumé de mon mémoire de Stockholm[88]. Ce sera une rentrée en scène comme une autre.

Je n'ai pas encore d'idées nettes sur ma première leçon, la plus importante, mais cela va se cristalliser, une fois fermé le robinet elliptique.

J'ignore profondément si Lebesgue est garçon, marié, veuf ou divorcé[89].

A bientôt.

René Baire

XX

Montpellier 2/3/04

Mon cher ami,

Me voici rentré et réinstallé dans mon domicile normal. Cette petite crise s'est heureusement terminée, j'ai fait vendredi ma dernière leçon[90], quoique avec un peu de peine, et je suis parti le lendemain. Je viens de reprendre ici contact avec mes conditions habituelles. Tout ce passe ici dans l'ordre.

Bien cordialement.

R. Baire

XXI

Montpellier 12 avril 1904

Mon cher ami,

Il y a quelques semaines, j'ai écrit à Schoenflies, en remerciement d'un petit mémoire qu'il m'envoyait (dans *Mathematische Annalen*)[91] ; il m'a répondu par la lettre ci-jointe(voir à partir du bas de la page 2 : *Was nun meine*, etc.[92]). A l'aide d'un professeur d'allemand, j'ai pu finir par savoir que le mot souligné page 2 et le mot souligné page 3 sont non pas différents, comme je l'aurais cru tout d'abord, mais identiques ; dans le premier, le *d* est fait d'une façon un peu négligée (comme plus haut, page 2, ligne 6, *oder* pour *oder*). Il souligne ainsi, paraît-il, une analogie. Mais comme je ne connais pas exactement la démonstration de Heine pour la continuité uniforme, je ne la saisis pas nettement.

Je n'ai pas de nouvelles de Denjoy et de ses feuilles[93] ; je tiendrais à avoir dans les mains tout l'ensemble de mon cours pour faire les modifications, la division en chapitres, l'introduction, etc. Quand l'imprimeur sera-t-il disponible ?

Encore moins de nouvelles, bien entendu, de mon mémoire des *Acta*[94].

Je viens de recevoir les deux livres de la collection[95]. Merci.

Cordialement.

René Baire
2 allée des Arts
Montpellier

XXII

Montpellier 2 avril 04

Mon cher ami,

J'ai reçu il y a quelques jours de Denjoy le manuscrit de mon cours, et je viens de le lui renvoyer, avec modifications, corrections et tout ce qui s'ensuit (moins la préface, bien entendu). On peut donc le considérer comme prêt, et si par hasard Gauthier-Villars voulait bien le mettre à l'impression tout de suite, cela présenterait pour moi des avantages sérieux ; d'abord, parce que ce serait une affaire finie, et d'autre part parce qu'il y a bien des choses dans mon cours que je serais content de voir publier sans retard : exposition des nombres transfinis, démonstrations jusqu'ici inédites pour la plupart de mon théorème sur les fonctions de classe 1 (lesquelles se trouvent aussi dans mon mémoire de Stockholm[96], mais justement pour cela ont des chances de paraître plus tôt chez Gauthier-Villars).

J'ai essayé, par un mot écrit à Phragmen il y a 15 jours, d'avoir des nouvelles de susdit mémoire ; silence complet.

Bien cordialement.

R. Baire
2 allée des Arts
Montpellier

XXIII

Montpellier 27/5/04

Mon acher ami,

Je fais acte de candidature à la chaire de Poitiers, de complicité avec Drach. [[...]]

XXIV

Montpellier 13/7/04

Mon cher ami,

Merci des renseignements[97] ; je suis sur mon départ, me proposant de partir demain pour séjourner quelque temps à Annecy. Je vais écrire à Gauthier-Villars ; je m'occuperais volontiers de l'impression en vacances ; je suppose que le jeune Denjoy doit être à peu près libéré d'examens ; je m'entendrai avec lui pour partager la besogne ingrate de la correction des épreuves ; ce sera peut-être un peu fastidieux de correspondre entre Paris, Perpignan et Annecy ; mais on en voit bien d'autres.

Je me suis porté candidat pour la frime contre Drach. [[...]]

Je suis fortement déprimé par cette chaleur torride, et je suis bien content de trouver, comme j'espère, un peu de fraîcheur relative sur les bords du lac.

[[...]]

Je renonce complètement à faire acte de présence à Heidelberg. C'est vraiment trop loin, et il fait trop chaud[98].

XXV

Paris, 27/7/04
8 heures soir

Mon cher ami,

Je rentre à l'instant à Paris d'un petit voyage de 4 jours, et je trouve ta lettre ainsi qu'une épreuve, deuxième, des titre et préface, venant de Gauthier-Villars, qui me semble correcte.

Je lui avais remis la Préface sans m'occuper de la couverture, et c'est de chic qu'il avait confectionné cette première épreuve où il m'attribuait, sans me consulter, des titres pompeux qui malheureusement ne m'en viendront pas plus tôt. Tout est donné en bon à tirer, sauf cette couverture ; dès que tu le voudras, cette lacune sera comblée. Voilà donc mon affaire finie.

Je ne puis guère songer en ce moment à un nouveau livre[100]; je n'ai toujours pas de nouvelles de mon mémoire des *Acta ;* j'ai rédigé en partie le deuxième mémoire qui doit y faire suite ; et il me faudra penser au troisième, le plus dur !!

Cordialement à toi.

René Baire
30 rue de Vaugirard, 6ème

XXVI

Paris, 17 septembre 1904

Mon cher ami,

[[...]]

Les épreuves en placards avaient grand besoin de retouches, et j'ai dû y consacrer plusieurs après-midi. Sur les épreuves en pages mêmes, des changements assez notables s'imposaient dont quelques-uns m'ont été proposés par Denjoy. Je pense être arrivé à une rédaction à peu près claire.

Gauthier-Villars vient de me donner l'épreuve de la Préface, il doit te l'envoyer en même temps, j'attendrai ta réponse.

Je serais curieux de connaître la démonstration de König[101], mais le résultat m'intéresse moins que ne m'aurait étonné le contraire.

Pendant que j'y pense, une question de notation qui me paraît commode. Dans bien des questions, P étant un ensemble *quelconque*, on a à considérer la réunion de P et P^1. Je propose de l'appeler P^0 et *dérivé d'ordre 0 de* P. Avec cette convention, tout ensemble P a des dérivés d'ordre 0,1,2,... . P^0 est *fermé* et a pour dérivé P^1. Je l'ai mis dans mon mémoire des *Acta*[102], mais pas dans mon cours du Collège de France.

Bien cordialement.

René Baire
30 rue de Vaugirard
Paris 6e

Je pense m'absenter 4 ou 5 jours, à partir de *vendredi*, puis revenir et repartir pour Montpellier avant la fin du mois.

XXVII

Paris, 2 octobre [[1904]][103]

Mon cher ami,

J'ai donné, en ce qui me concerne, le bon à tirer du titre ; Gauthier-Villars attend le tien pour marcher ; il a fait le tirage de tout le texte. Comme par hasard, c'est après le tirage que je m'aperçois de quelques fautes dans la fin du livre, à la dernière page, celle qu'on lit rapidement en corrigeant les épreuves, énervé par la hâte d'avoir fini. Il s'agit d'ailleurs de mots mis en trop, qu'un lecteur avisé supprimera de lui-même après quelques instants de réflexion. Je pense que le reste va bien.

Je n'ai pas d'autres renseignements sur les hommages que le traité avec Gauthier-Villars qui porte : 40 Baire, 10 Borel, 50 éditeur, 50 publicité.

Voici maintenant une question d'un autre ordre, où je voudrais te consulter. Il s'agit du mémoire qui doit toujours sommeiller à Stockholm. Quand je l'avais rédigé, j'y avais mis un certain nombre de choses qui, à ce moment, étaient inédites, mais que j'ai depuis données dans mon cours du Collège de France, et par suite publiées dans mon livre ; il s'agit de l'ensemble des démonstrations pour les fonctions de classe 1 (conditions nécessaires, conditions suffisantes). Or, s'il est tout à fait logique qu'un livre didactique reproduise des mémoires antérieures, il n'y a, je crois, aucune raison pour qu'un mémoire reproduise un livre didactique. Donc, si j'avais en ce moment entre les mains mon mémoire, j'en modifierais une grande partie au commencement, me contentant de rappeler certains des énoncés, en renvoyant pour la démonstration à mon ouvrage. J'évalue de20 à 25 pages au moins (de mon manuscrit qui en comptait 110) l'économie qui en résulterait.[104]

Les 5 chapitres de mon livre[105] sont de deux sortes : I, III, IV sont de la vulgarisation à l'usage des gens non au courant ; II et V sont à l'usage des gens au courant. Dans II j'indique la manière dont je me sers du transfini ; dans V je donne, pour le cas le plus général, la démonstration de mon théorème. Si, comme je l'espère, j'ai réussi à la faire clairement, je n'ai pas de raison de souhaiter que ce texte soit de nouveau transcrit dans les *Acta* : je finirais plutôt par donner l'impression d'un rabâcheur. Cela d'autant plus que, dans mon second mémoire, il me faut encore une fois reprendre les mêmes choses, avec des modifications dans la base (espace à 0 dimensions au lieu d'espace à n) ; les gens trouveraient que *ça* tourne à la scie.

Maintenant, je me demande s'il faut, ou écrire à Mittag ou Phragmen pour leur faire part de mon désir, et les prier de me renvoyer pour un moment mon manuscrit, ou attendre l'impression, si elle doit avoir lieu prochainement, pour y donner des coups de ciseaux. Je pense, en tout cas, qu'ils trouveront mes raisons assez naturelles, et ne se fâcheront pas de ce que je leur propose un racourcissement. Entre parenthèses, Phragmen ne m'a jamais répondu, quand je lui ai demandé, à deux reprises, une indication sur la date possible de ma mise en impression.

Je résume les principaux points en question, traités dans mon livre et que je ne voudrais pas reproduire dans mon mémoire :

N° 61, 62, 63, qui établissent que si on a des ensembles fermés

$$P_0 \geqslant P_1 \geqslant \dots \geqslant P_\alpha \geqslant \dots ,$$

ces ensembles sont identiques à partir d'un certain rang.

N° 68. Condition nécessaire pour qu'une fonction soit de classe 1.

N° 73, 74. Condition suffisante.

Il y a aussi d'autres points, comme la question des séries uniformément convergentes, l'extension aux fonctions non bornées, que je traite dans mon mémoire, en parlant des fonctions de classe α quelconque. Mais cela crée une petite différence, qui ne me permet pas de renvoyer purement et simplement au livre.

J'attendrai d'avoir ton avis avant de prendre un parti. Je suis encore ici pour quelques jours, mais je compte partir vers la fin de la semaine.

Bien cordialement.

René Baire

XXVIII

Montpellier 10/10/04

Mon cher ami,

Me voici réinstallé à Montpellier, dans mon ancien quartier, tout près de la maison où tu m'as vu en 1903[106].

Je ne demande, en ce qui concerne les hommages, qu'à acquiescer au système déjà employé ; je désirerais seulement savoir les noms qui peuvent être comptés pour *hommage de l'auteur et de l'éditeur* ; quels sont, d'autre part, les professeurs du Collège de France à qui je suis tenu moralement d'adresser l'ouvrage (je parle des non mathématiciens, bien entendu) ; enfin, je suppose qu'il y a bien quelques exemplaires donnés aux rédacteurs, combien ? pris sur les miens, ou sur ceux de l'éditeur ?

Je souhaite beaucoup à garder au moins une dizaine d'exemplaires, pour les besoins futurs. Avec ma thèse, je me suis trouvé pris à court, en ayant disposé tout de suite de la presque totalité, de sorte qu'il ne m'en reste plus même pour poser ma candidature à un poste de titulaire. A ce propos, j'ignore encore à l'heure actuelle si j'ai été proposé en seconde ligne à Poitiers.

J'ai écrit hier à Bendixson ; je pense qu'il me répondra avec plus d'empressement que Phragmen.

Avant de quitter Paris, j'ai fait part à MM. Appell et Tannery de mes modestes *desiderata*, chargé de cours en vue de titularisation à la prochaine vacance (Dijon ?[107] ou ailleurs), et, en attendant, être porté de 4.500 à un traitement > .

Bien à toi.

René Baire
4 rue Flaugergues

XXIX

Montpellier 13/10/04

[[...]]

Voici donc un projet d'envoi.[108]

[[...]]

Je suis en train de rédiger un petit chapitre, moins scientifique que pédagogique : Théorie des nombres irrationnels et des limites. Je ne sais pas encore où je le publierai.[110]

Bien à toi.

René Baire
4 rue Flaugergues
Montpellier

XXX

17 oct. 04[111]

Entendu ainsi. J'écris à Gauthier-Villars de considérer tes propositions comme acceptées d'avance par moi, pour qu'il ne perde pas de temps à me réécrire à ce sujet.

Merci pour la thèse (la mienne) ; je te la demaderai peut-être, mais pour l'instant je n'en aurai pas besoin.

Bien à toi.

R. B.

XXXI

28/10/04

Mon cher ami,

Merci des renseignements. J'écrirai sans doute à Gauthier-Villars pour qu'il adresse directement l'exemplaire de Montel qui ne vient plus ici [[...]] Montel est probablement à Nancy, je le regrette beaucoup personnellement ; pour la première fois depuis que je suis en province, j'aurais pu causer mathématiques avec un camarade.

Le littéraire égaré dans la science que j'ai pris autrefois comme rapporteur de ma thèse[112] a, dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* de juin, des sévérités inattendues pour "les amateurs de théorèmes dont la généralité nuit à l'intérêt". Il ferait bien d'éclairer sa lanterne. J'accorde très bien qu'un théorème peut être général et manquer d'intérêt, mais je conteste que la généralité puisse enlever de l'intérêt à un théorème. Je ne dis pas que je ne publierai pas cette brève réponse, maintenant ou un peu plus tard[113].

Bendixson, à qui j'avais écrit dans le sens que je t'avais indiqué[114], m'a, d'accord avec Mittag-Leffler, renvoyé mon mémoire en me demandant d'en retrancher ce qui ne se trouverait plus inédit après l'apparition de mon livre. C'est ce que j'ai fait, et je le lui ai de nouveau adressé, allégé d'environ 30 pages de texte (sur 110). Ce sera autant de travail inutile d'évité, et de temps gagné, je l'espère.

Je me vais essayer de publier en librairie un petit opuscule[115]: Théorie des nombres irrationnels, des limites et de la continuité. Je ne sais si les éditeurs marchent volontiers pour d'aussi petits ouvrages (une qurantaine de pages, peut-être). Je vais toujours essayer, en commençant par tâter Gauthier-Villars. Mon but est d'exposer les matières suivantes : nombres irrationnels, opérations sur ces nombres, justification rigoureuse et complète de toutes les règles de calcul étendues à ces nombres, limites, notions de plus grande et plus petite limites, théorème de Cauchy (condition nécessaire et suffisante pour les limites), continuité des fonctions de plusieurs variables, définitions de a^x , $\log x$. Je me propose d'être complet, rigoureux, et, s'il est possible, clair et enfin *relativement court*, tout ça à la fois. Je suis arrivé à la conviction que c'est possible, à la condition expresse de bouleverser l'ordre sacramental établi. [[...]]

XXXII

Montpellier, le 9/11/1904

Mon cher ami,

J'ai reçu les listes d'hommages, mais n'ai pas encore vu les exemplaires eux-mêmes, Gauthier-Villars prend décidément son temps. Réflexion faite, puisque *Painlevé* présente ton livre, veux-tu lui demander de ma part de présenter en même temps *le mien* ?[116]
[[...]]

Je n'ai pas reçu l'opuscule de Zermelo, et ne sais pas de quoi il traite[117]. Pendant les vacances, j'avais reçu quelques mémoires américains, dont l'un parle des rapports entre ton théorème et la démonstration de Heine pour l'uniformité de la continuité[118].

Le jeune et sympathique Denjoy m'a envoyé un petit topo où il expose quelques résultats sur les fonctions[119]. [[...]]

Je ne voudrais pas être poursuivi pour incitation de mineurs à la débauche, mais il me semble qu'il n'y a rien là de blâmable en soi. Néanmoins, comme il me le dit d'ailleurs lui-même, il fera bien pour l'instant de se borner à la préparation de l'agrégation.

Cordialement à toi.

René Baire

XXXIII

Montpellier, le 13/11/1904

Mon cher ami,

J'ai reçu effectivement le paquet en question, et j'ai écrit à Painlevé et Gauthier-Villars pour l'exemplaire de l'Académie. J'ai commencé à parcourir avec intérêt les *Leçons de variables réelles*[120]. Voici quelques remarques au hasard.

La démonstration de la page 9 s'applique-t-elle *facilement* au cas de plusieurs variables ? [121] Sauf preuve du contraire, je croirais volontiers que non, à cause de l'obligation de refaire le raisonnement sur la borne supérieure. J'ai justement été contraint ces derniers jours à réfléchir aux avantages respectifs de différentes méthodes dans des questions analogues, à propos de mon petit travail (que *Nony* accepte d'éditer[122]). Les éléments de la théorie des ensembles et des fonctions contiennent un certain nombre de théorèmes simples qui ont entre eux des liens étroits et qu'il ne serait peut-être pas mauvais de synthétiser, si possible, en donnant un énoncé général qu'on appliquerait à des cas particuliers. La forme suivante me paraît assez avantageuse.

Soient plusieurs variables $x, y, \ldots$.

Soit (A) une propriété susceptible d'appartenir ou non à un champ et telle que, si elle appartient à un champ, elle appartient à tout champ contenu dans celui-là.

Soit C un champ borné. Je suppose que tout point du champ C soit intérieur à un champ possédant (A) ; je dis qu'il existe $\gamma > 0$ tel que tout champ partiel de C dont chaque dimension est $\leqslant \gamma$ possède (A) .

C'est ton théorème, sous une forme légèrement modifiée.

J'adopterais volontiers la démonstration suivante (principe dû à Lüroth pour la convergence uniforme[123].)

[[...]]

Pour la limite ∞ j'en parle dans le topo en question tout au début[124] ; je crois que c'est le meilleur parti à prendre.

Je suppose que Denjoy ne serait pas fâché si quelqu'un lui donnait le conseil de publier quelque chose ; certains des topos qu'il m'a envoyés pendant les vacances ressemblent un peu, pour le résultat, à la démonstration de la Note II[125] (sauf qu'il conserve l'emploi des nombres transfinis) ; autant que je me rappelle, il n'y avait pas là-dedans sensiblement plus que dans le théorème lui-même. Il y a davantage dans ce qu'il vient de m'envoyer. Mais j'avoue reculer un peu devant la responsabilité d'un conseil en pareille matière. En d'autre pays, en Italie par exemple, le gens font venir l'imprimeur pour beaucoup moins, mais nous ne sommes pas en Italie.

C'est un certain *Oswald Veblen* qui, dans le *Bulletin of the American Mathematical Society*, donne quelques développements sur le théorème Heine Borel.[126]

Bien cordialement à toi.

René Baire

Merci pour la recommandation au public du chapitre V ![127]

Sur 3 Cotton, frères et soeurs, il n'y en a plus qu'un en province !

Nony accepte de m'éditer, mais il fait réserve sur les droits d'auteur, qu'il ne paye que *si* ses frais sont couverts. Il est évident que je n'ai pas la prétention de faire une spéculation ; j'accepte donc cet arrangement.

XXXIV

Montpellier, le 15/11/1904

Mon cher ami,

Bricard m'écrit, au nom des *Nouvelles Annales*, pour me demander d'y faire un compte rendu de ton nouveau livre. J'ajourne ma réponse. Il me semble en effet qu'il y a là un point douteux à trancher. Les divers collaborateurs de la Collection[128] peuvent-ils raisonnablement se faire mutuellement des comptes rendus ? A supposer que la chose puisse se faire en général, est-ce que dans l'espèce une exception ne s'imposerait pas ? J'inclinerais plutôt vers cette manière de voir.

A toi.

R. B.[129]

XXXV

Montpellier, le 22/11/1904

Mon cher ami,

Nous sommes d'accord sur la question ; aussi j'écris à Bricard dans le sens négatif, en ajoutant que Buhl se chargerait volontiers du compte rendu en question. Laisant était justement de passage hier à Montpellier, et nous en avons dit un mot.

Je suis très reconnaissant à J. Tannery de vouloir bien m'analyser. J'aime mieux cela que les phrases vaguement agressives de E. Picard[130].

[[...]]

XXXVI

Montpellier, 9 décembre 1904

Mon cher ami,

Je vois seulement aujourd'hui le cahier des *Mathematische*

Annalen contenant la lettre Zermelo[131]. Pour un cercle vicieux, c'en est un ; il démontre tout au plus l'équivalence de deux faits également hypothétiques ; il me semble d'ailleurs en avoir conscience vaguement à la fin. Je m'étonne qu'Hadamard déclare y ajouter foi.[132] Si quelque *Revue Rose*, ou d'une autre couleur, ouvre une enquête, je n'hésiterai pas à faire connaître mon opinion[133]. (Ce sont nos rayons *N* , à nous[134]). D'ailleurs, la *Revue Verte* paraît devoir s'en occuper ; pour l'instant, j'ignore les considérations de König[135] ; prouve-t-il davantage que Zermelo ? Celui-ci me fait l'effet de quelqu'un qui manierait les nombres transfini pour la première fois. Qu'en pense Hilbert[136] ?

Il est étonnant que ce soient les races germaniques, à l'esprit lourd et correct, qui se lancent dans ces affirmations téméraires ; ce serait peut-être plus compréhensible chez ces écervelés de Latins.

J'ai vu la nouvelle *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable* de J. Tannery[137]. Je ne sais pourquoi il s'obstine, dans la question d'une série uniformément convergente,à donner cette définition baroque, que personne autre n'a donnée, à ma connaissance, et dont il s'évertue à démontrer le manque d'intérêt[138]. Qu'est-ce que ça peut faire que la somme d'un certain nombre de termes au commencement soit égal à la somme de la série, si les termes qui viennent ensuite n'ont plus rien en commun avec une série uniformément convergente. La définition de Dini est autrement intéressante[139]. Enfin, je continue à trouver qu'il serait du plus haut intérêt, dans l'enseignement élémentaire, de ramener le cas général des séries uniformément convergentes au cas particulier dit de Weierstrass[140]. Cela m'a fait échanger un mot avec Godefroy (bibliothécaire de Marseille), qui avait donné, dans *L'Enseignement Mathématique*, d'après Stolz, une méthode pour la dérivation des séries, sans passer par l'intégration[141]. Précisément, sur un tel exemple, la réduction au cas de Weierstrass simplifie énormément les choses.

Cela n'empêche pas le livre en question d'être extrêmement intéressant, mais pas fait pour les gens pressés.

Les Suédois continuent à ne pas m'imprimer. Je ne sais si, à titre de compensation,je leur demanderais d'accepter la seconde partie de mon travail, dont je suis en train d'achever la rédaction. Il est possible aussi que je lui donne un autre titre, qui serait celui-ci : Sur une extension de la notion d'ensemble de points[142].

Pour en revenir à Zermelo, n'y aurait-il pas lieu vraiment, je ne dis pas de faire un manifeste, mais de donner en commun une signature à l'affirmation de l'opinion que son topo ne vaut rien, ceci entre les gens qui pensent comme nous.

Bien à toi.

René Baire

XXXVII

Montpellier, 15/12/04

Mon cher ami,

J'ai reçu précisément hier les histoires de Couturat[143]. Oh ! oui ! faiblard, à tel point que je vais de cette même plume lui écrire un peu vivement, car, la vérité avant tout, je ne veux pas, par exemple, qu'il m'enrôle dans le bataillon de ceux qui couchent avec l'∞ : le procédé que j'adopte indique juste le contraire, que je vois une convention dans la définition, et convention qu'on pourrait si on le juge bon remplacer par une autre ; le jour où je me mêlerait d'entrer dans cette dispute des finitistes et infinitistes il y a des chances pour que je sois des finitistes. D'autre part il est vraiment assommant avec ses "sans le savoir".[144]

Le fait de traduire en formules les raisonnements faits en langage ordinaire[145] peut avoir quelques avantages : il a au moins 2 graves inconvénients : 1° ces gens paraissent croire qu'ils vont construire des cadres dans lesquels rentrera toute la science à venir, bon gré, mal gré ; 2° au rebours de ce que dit Couturat dans une de ses analyses de Peano, ou Schröder, ou Russell, le langage algébrique présente moins de sécurité pour la recherche que le langage adapté à chaque objet particulier. De cela, je vois une preuve éclatante dans l'erreur de calcul (!) commis par König. C'est pour moi ébouriffant d'aller faire du calcul dans la théorie des ensembles.

Je m'aperçois que la phrase de Zermelo, incomprise de moi, sur le produit des ensembles, etc. résulte précisément de ce que lui-même parle le langage de la logique : l'ensemble commun à des ensembles est, paraît-il, le produit logique de ces ensembles ? Que c'est tiré par les cheveux !

En attendant que ces choses soient mieux élucidées et mieux comprises, je ne demande qu'à faire connaître mon opinion sur le différent König-Zermelo, en modifiant ma phrase comme il suit[146] :

"Personnellement, je doute qu'une commune mesure puisse jamais se trouver entre le continu, ou ce qui, dans l'espèce, revient au même, l'ensemble de toutes les suites d'entiers positifs ; il y a là, pour moi, deux choses, dont chacune n'est définie que virtuellement, et il y a des chances pour que ces deux virtualités soient irréductibles."

Je viens maintenant te demander sans insister (ou en insistant seulement sur ce fait que je n'insiste pas) s'il te serait possible de consacrer quelques jours à la lecture du mémoire que je vais avoir achevé d'ici la fin du mois au plus tard. Il s'agit de ce fameux espace à 0 dimensions ; la question est très difficile à faire comprendre, et je serais très heureux si je pouvais, avant de me préoccuper de la publication, avoir mis au courant quelqu'un autre que moi. La publication ne pourra d'ailleurs être très prochaine, puisque je m'y appuie sur le premier mémoire des *Acta*, qui dort toujours là-haut, au pôle Nord.

Bien cordialement.

René Baire

XXXVIII

22/12/04

Mon cher ami,

Merci d'avoir lu aussi vite mon libellé ; si tu pouvais continuer à l'examiner encore un peu, j'en serais très content ; ce que j'essai d'y montrer, c'est la possibilité de la conception d'un nouveau point de départ ; mais la question des avantages que cette transformation présente est à peine effleurée au dernier chapitre ; c'est seulement au mémoire n° 3 que je compte la faire apparaître[147].

Je n'ose plus écrire moi-même à Phragmen, qui, par deux fois, il y a plusieurs mois, m'a laissé sans réponse. Si tu voulais bien agir un peu[148], je t'en serais reconnaissant. Je ne demanderais pas mieux que le second suivît le premier dans le même recueil ; mais marcheront-ils ? S'ils me font poser autant pour le second que pour le premier, j'ai le temps de décider plusieurs fois avant d'avoir fait mes révélations, et il faut pourtant bien que j'en sorte.

Merci, et bien cordialement.

René Baire

XXXIX

Montpellier 13/1 [[1905]][149]

Mon cher ami,

J'écris à Phragmen pour lui demander, dans le cas où les *Acta* accepteraient en principe mon second mémoire (la réponse est oui, d'après ce que tu me dis, mais je crois devoir le demander quand même), à quelle époque pourrait en avoir lieu la publication. Je crois que, de toute façon, il faut m'attendre à attendre ; la nature des chose le veut ainsi, sans doute ; mais tout de même, c'est un peu long.

Voudrais tu me renvoyer le susdit ? J'y ferai sans doute quelques retouches par endroits, il n'est pas toujours bon d'attendre pour cela les épreuves imprimées.

Je reçois depuis quelque temps force prospectus de Teubner concernant l'*Encyclopédie*. Est-ce une invitation indirecte à m'exécuter pour l'article qu me concerne ? Je serais presque tenté de le croire[150].

Je suis, scientifiquement parlant, dans une situation assez particulière, ayant à mettre au jour tout ce que j'ai gardé en tête depuis 5 ou 6 ans ; cette liquidation est commencée, elle n'est pas terminée, le mémoire n°3 me donnera plus de mal encore que les autres.

Cordialement.

R. B.

XL

Montpellier 24/3/05
(6ème anniversiare de ma thèse!)

Mon cher ami,

Merci du petit topo des *Mathematische Annalen*[151] ; espérons qu'il contribuera, pour un temps, à calmer les excès de zèle des néophytes.

Les Suédois ont vraiment des moeurs étranges ; après plusieurs lettres écrites à Phragmen et restées toutes sans réponse, je me suis décidé à écrire à Mittag lui-même : il me répond que j'aurais dû recevoir déjà des épreuves de mon mémoire, que la raison de la longue attente est l'impression de 3 tomes d'Abel[152], que cela ne se produira plus à l'avenir. Oui, mais quand commencera cet avenir ? Il faut m'attendre encore à 6 mois sans doute.

Je suis attelé en ce moment à une corvée plutôt assomante, l'article de l'*Encyclopédie* Molk. Il est assez difficile de choisir le point de vue auquel il faut se placer ; d'après ce que me dit Molk, il faudrait de la vulgarisation ; dans ces conditions, il faut alors presque éliminer le point de vue historique et ne pas trop se préoccuper d'être complet. J'avoue ne pas prendre la responsabilité de rendre exactement à chacun son dû. De toute façon, les divers articles de l'*Encyclopédie* ne pourront guère, à mon avis, présenter d'homogénéité dans leur ensemble. Les premiers articles parus en français sont relatifs à des questions que tout le monde connaît pratiquement ; la raison d'être de l'article est donc le point de vue historique ou philosophique. Il ne peut pas en être de même pour un article sur les ensembles, s'il est entendu, comme le veut Molk, que l'article s'adresse à des mathématiciens ignorant la question et qu'il faut mettre au courant. En écrivant mes *Leçons sur les fonctions discontinues*, j'avais mes coudées franches, j'exposais de la manière qui me paraissait la plus claire les théories dont j'avais l'intention de me servir. Je ne suis plus ici dans les mêmes conditions, je n'ai plus le droit de faire dévier la pensée de G. Cantor. Il me faut, bon gré, mal gré, parler de l'addition, de la multiplication des types ordinaux, etc., choses dont je ne connais pas la moindre application. Je ne peux tout de même pas en inventer. Le public en comprendra ce qu'il pourra.

Bien à toi.

René Baire

XLI

Montpellier 2/4 [[1905]][153]

Mon cher ami,

J'écris directement à Hadamard quelques réflexions. Voici les passages essentiels[154].

[[...]]

XLII

Montpellier, 17/5 [[1905]]

[[...]]

En ce qui me concerne, mes dispositions seraient plutôt inverses[155], et c'est sans déplaisir que je retournerais dans des contrées plus voisines de la capitale. Il paraît que Méray demande son maintient pour l'année qui va venir[156] ; lui accordera-t-on, contrairement aux précédents de ces dernières années?

J'ai enfin reçu la première épreuve de mon mémoire !! (*18 mois* seulement). J'en ai profité pour l'écourter encore un peu, de sorte qu'il occupe moins de 48 pages ; j'espère qu'on m'en saura gré pour faire bon accueil à la suite.

Il y a aussi l'article de l'*Encyclopédie* Molk. Celui-ci, toujours optimiste, me répond à toutes mes lettres en me disant qu'il est de mon avis, que cela ira bien, etc., etc. Je ne demande pas mieux.

Hadamard est-il toujours convaincu des raisonnements de Zermelo ?[157]

Bien cordialement.

René Baire
4 rue Flaugergues

XLIII

29/7 [[Montpellier 1905]][158]

[[...]] Suis toujours ignorant du sort qui m'attend, je ne sais même pas si Méray est mis ou non à la retraite , ou en congé de santé (?), suivant la méthode nouvelle qu'on paraît appliquer au moins dans le secondaire.

Mon mémoire à moi, dont j'ai envoyé le bon à tirer le 30 mai, n'est pas encore arrivé ! Deux ans pour imprimer 48 pages !

Bien cordialement.

R.B.

XLIV

Dijon, 11/1/06

Mon cher ami,

J'ai eu l'agréable surprise ces jours-ci de recevoir une indémnité de déplacement que je n'avais pas sollicité. Au cas où tu saurais d'où vient l'initiative de cette mesure, je serais heureux de pouvoir remercier qui de droit.

Félicitations pour Petit d'Ormoy[159].

Je suis fort absorbé par la confection de mon cours d'Analyse, voulant refaire tout à ma manière, et jamais satisfait des vagues bouquins faits à la hâte par nos illustres devanciers. Que d'erreurs! que de lacunes ! que de cercles vicieux inconscients ! que de redites hors de propos ! Je parle surtout, bien entendu, des deux derniers parus, Goursat et Humbert[160], qui devraient soi-disant servir de modèles à un cours de licence.

A part cela, la province est toujours la province.

Bien cordialement.

René Baire

XLV

Dijon, 9/6/1906

Mon cher ami,

Je viens de recevoir la thèse de Fréchet[161], qui me paraît de premier ordre (mais qu'en dira Picard ?). Je n'ai pas le loisir de creuser les analogies qu'il y a entre ces questions et ma notion d'espace à 0 dimensions ; le passage qui s'en rapproche le plus est évidemment le chapitre V, p.39, avec cette différence que (§ 61) les x_i sont chez lui des nombres quelconques et chez moi des entiers positifs. En tout cas, ce nouveau venu paraît avoir une puissance d'abstraction peu ordinaire ; cela prouve peut-être, si la chose avait besoin d'être prouvée, que nous autres,qui avons commencé à entrerdans cette voie il y a quelques années, nous n'avons pas semé dans le vide et que le terrain était en somme bien préparé.

Mon mémoire à moi (la 2e partie seulement !) est toujours en Suède et je n'en entends pas parler. Mittag-Leffler et ses divers scribes se contentent de me demander une photographie[162].

Je viens de passer une excellente année, mais complètement nulle au point de vue scientifique proprement dit. Je n'ai ni pensé, ni achevé mon fameux 3e mémoire, ni lu, m'étant consacré à mon cours. Comme je ne veux pas perdre cet effort fait, mon intention est de le publier, j'ai pressenti Gauthier-Villars à ce sujet, tâchant de lui expliquer que ce cours ne ferait nullement double emploi avec les cours existants. J'estime que l'enseignement courant peut et doit profiter des idées modernes, et qu'on peut, si j'ose dire, vulgariser la rigueur. Je voudrais donc traiter, en un *seul* volume (5 à 600 pages)[163], tout ce qui constitue un enseignement de licence, chaque chapitre s'arrêtant là où commencent les théories spéciales, mais les questions étant consolidées à la base d'une manière inébranlable. Un tel livre me paraîtrait utile, non seulement à ceux qui veulent apprendre, mais aussi à ceux qui veulent rapprendre les choses vues autrefois et mettre en ordre leurs idées. Celui qui l'étudierait serait en mesure ensuite d'aborder une quelconque des branches spéciales. Je répondrais à une phrase d'une de tes préfaces : "connaissances mathématiques peu étendues, mais solides"[164].

D'ailleurs, le cours s'harmoniserait avec la *Collection de monographies*[165], il serait la condition nécessaire et suffisante pour y donner accès.

Gauthier-Villars m'a donné son consentement de principe, je tâcherai l'an prochain de procéder à la réalisation de ce projet, dont je ne me dissimule pas d'ailleurs les difficultés.

L'*Officiel* vient de déclarer vacantes plusieurs chaires de Facultés, il y manque, comme par hasard, la mienne. Je veux croire que ce n'est qu'un retard momentané, et qu'on ne me fera pas attendre ma nomination plus tard qu'en juillet[166].

Bien cordialement.

René Baire

XLVI

Dijon 28/2 [[1907]][167]

Mon cher ami,

Je viens de faire ma rentrée aux *Comptes Rendus*, que j'avais boycottés pendant 7 ans[168] ; comme le mémoire où je développe mes démonstrations sera court, je voudrais tâcher de le publier le plus tôt possible. Y a-t-il des périodiques peu encombrés pour l'instant ? Je crois savoir que Jordan est mal portant, ce qui contre-indiquerait son *Journal*[169]. Je n'ai jamais rien publié au *Bulletin* Darboux-Tannery[170], et j'en ignore au juste les conditions.

Au besoin, je prendrais même volontiers la solution suivante : publier d'abord un petit mémoire *très court*, qui est rédigé (14 pages de manuscrit, soit la valeur de *deux* notes aux *Comptes Rendus*), ce mémoire ramenant la question à étudier, savoir l'inapplicabilité des continus à n et $n+p$ dimensions, à des questions d'ordre différent, roulant sur l'*Analysis situs* des courbes de Jordan et analogues de l'espace G_n[171]. La première partie est certainement la plus importante au point de vue nouveauté et simplicité. La seconde, concernant ces questions de l'*Analysis situs*, empiète nécessairement, pour le cas du plan, avec une foule de travaux de Schoenflies principalement, et de quelques autres. Serait-ce avantageux de publier ces 6 ou 8 pages dans le *Bulletin très prochainement*, en mettant : la suite au prochain numéro[172]. Je serais heureux d'avoir un renseignement là-dessus.

Gauthier-Villars marche pour mon cours ; l'impression des premières leçons commence déjà ; sauf accident, je pense que tout marchera à souhait ; j'ai un rédacteur très consciencieux[173] ; je m'assure en outre le concours de Denjoy pour une lecture des épreuves en page[174].

Mittag-Leffler ne m'a encore rien imprimé de la 2^e partie de mon mémoire, envoyé en mai 1905 ! Il a accepté d'imprimer, en même temps que cette 2^e, la 3^e que j'ai rédigée dans les dernières grandes vacances, et que je lui ai envoyée il y a un mois. Va-t-il en profiter pour retarder encore ?

L'article pour Molk est une corvée plus assommante. Je lui demande délais sur délais pour l'achèvement ; il y a à lire certains topos de Hausdorff, dont les Allemands font le plus grand cas ; je n'ai pas encore eu le temps de me faire une opinion personnelle sur ce point, et j'ai bien d'autres choses à faire. Molk veut bien admettre mes raisons.

Bien cordialement.

René Baire

XLVII

Dijon, le 31/1/08

Mon cher ami,[175]

Il se trouve, comme tu le sais, que j'ai déjà apporté ma part de collaboration à la fameuse *Encyclopédie*, et je dois dire que cela n'a pas été pour moi une tâche fort agréable ; c'est heureusement fini maintenant, du moins l'article est en pages ; mais j'ai bien juré mes grands dieux que je n'accepterai plus ce genre de corvée. L'esprit d'érudition à la manière dont l'entend par exemple Schoenflies m'est tout-à-fait étranger.

Cela dit, je crois que la meilleure solution serait en effet que chacun de nous se mit à la disposition de celui qui prendra à sa charge la rédaction du chapitre, pour lui fournir les renseignements concernant ses travaux, sans collaboration plus officielle. Par exemple, est-ce qu'on ne trouverait pas, soit parmi les plus jeunes de la liste que tu m'envoies, soit parmi les archicubes venant encore après, un homme de bonne volonté qui aurait ainsi l'occasion de faire son début ?

Molk a dû trouver que je n'avais pas apporté une très grande bonne volonté pour certaines parties telles que les travaux de Hausdorff où l'on manipule des alephs à perte de vue. Je ne me suis pas trouvé convaincu par le volumineux rapport de Schoenflies qu'il t'a sans doute envoyé aussi[176].

Mon tome II avance[177] ; je pense qu'il sera en vente avant la fin de l'année. Toujours aucune nouvelle de Stockholm ! Il y aura trois ans bientôt que j'ai adressé à Mittag-Leffler un mémoire et un an que je lui ai envoyé la suite. Je ne sais ce que cela veut dire.

Bien cordialement à toi.

René Baire

XLVIII

Dijon 17 mai 09
24 rue Audra

Mon cher ami,

Je reçois ta lettre du 14 en ce moment, sans doute à cause de la grève, et je te remercie de vouloir bien t'occuper de ma cuisine. Le grand maladroit que je suis se trouve toujours malade quand il ne faut pas (voir en 1901, au moment de mon entrée dans l'enseignement supérieur) ; j'ai passé un mauvais hiver[178], mais je suis maintenant dans la période d'amélioration ; les choses ont pu s'arranger à la Faculté, grâce à l'habileté de notre doyen et à la bonne volonté de Richard et Lebel, professeurs au lycée, qui se sont partagés ma besogne.

Pour en revenir à nos moutons, je déclare encore une fois que je suis candidat à un poste d'enseignement sur mes titres d'enseignant. J'émets donc avant tout le voeux qu'on fasse état de ce qui, dans mon Traité d'Analyse, peut être considéré comme nouveauté pédagogique par rapport aux traités antérieurs. (Je n'ai pas la naïveté de croire que de cette manière je m'attirerai les sympathies de Goursat, par exemple). Il ne me paraît pas utile de reindiquer ces nouveautés (ou prétendues telles par moi), ce travail je l'ai déjà fait en son temps : ce sont mes préfaces de mes deux tomes. Je constate à ce propos que la plupart des faiseurs de comptes rendus sont bien peu consciencieux ; à part *Bricard* (*Nouvelles Annales*, *Novembre 1907* ; la critique du t.II n'est pas encore parue[179]), la plupart ne cherchent pas à se faire une opinion personnelle ; il reproduisent par-ci par-là des affirmation de l'auteur. Je comprendrais un compte rendu comme il suit : prendre une à une toutes ces affirmations, et les juger pièces en main ; par exemple, je dis (préface t.I) avoir donné une définition nouvelle et claire des différentielles[180] ; on doit, selon moi, ou bien reconnaître le progrès, ou bien le nier en montrant que cela se trouvait déjà dans tel auteur, mais je n'admets pas qu'on passe sous silence une chose de cette importance, comme fait par exemple Lacour[181]. Et ainsi du reste. En résumé, pièce principale du procès : mon Traité ; commentaire : les préfaces.

J'ai été obligé de protester contre l'opinion purement gratuite que la Sorbonne, par la voie du doyen, m'a exprimée, d'après laquelle je ne dois pas sortir du terrain de l'Analyse pure. Je reconnais toutefois que ma nullité en Mécanique va jusqu'à ignorer les travaux, sans doute nombreux,publiés dans cette science par mes divers concurrents !

Quant à l'espace à 0 dimension et ce qui s'ensuit, je reconnais qu'il est bien difficile de résumer la question. Je crois qu'il y a là des idées, qui pourront être reprises plus tard, et dont la portée exacte ne peut être jugée que par la suite. Pour moi, j'ai l'intention de m'en tenir là pendant quelque temps au moins; ce sont d'ailleurs des circonstances indépendantes de ma volonté qui ont retardé l'apparition de ce dernier mémoire des *Acta*, les résultats essentiels qu'il contient ont été trouvés par moi de 1899 à 1902 !

Je demande quelques jours de délai pour envoyer la liste de mes travaux, préférant adresser tout de suite cette réponse provisoire. Je serais heureux d'avoir quelques renseignements, s'il n'y a pas indiscretion, sur les dessous de l'affaire, sur le nombre et la nature des candidats, car je ne sais rien, rien, rien.

Il n'y a vraiment qu'en mathématiques que 5 ou 6 professeurs se disputent l'honneur de redevenir maîtres de conférences, avec traitement probablement réduit, augmentation des dépenses, et autres avantages accessoires. On dirait des chauves qui se battent pour avoir un peigne. Dois-je, pour mon compte, donner pour excuse que je suis Parisien de Paris ?[182]

Bien cordialement, et merci.

René Baire

XLIX

18/5/09

Mon cher ami,

A tout hasard, je donne une forme vaguement officielle à cette notice que je viens de bâcler, mais je te l'envoie quand même directement ; rien n'empêche de supposer, je pense, que le doyen te l'a transmise. Si d'autre part cette solennité est inutile, il n'y a qu'à considérer la première page comme non avenue.

Je livre ce que j'ai : à la Sorbonne d'en faire des choux et des raves, si bon lui semble. J'avoue toutefois que je ne suis pas très fanatique d'une présentation en $p^{\text{ième}}$ ligne ($p \geqslant 2$).

Si la santé me revient, je prendrai tout philosophiquement.

Cordialement à toi, et vifs remerciements.[183]

René Baire
24 rue Audra
Dijon

L

9/5/10

Mon cher ami,

Serait-il indiscret de demander ce que la Sorbonne a l'intention de faire en ce qui concerne le service Painlevé ?

[[...]]

Mon cours d'Analyse, qui a un succès d'estime auprès de quelques-uns, me paraît plutôt un four de vente : en 1909 (deuxième année de l'apparition) : 85 tome I, 75 tome II. En tout, jusqu'ici, 351 Tome I, 261 Tome II. Sans m'être jamais fait beaucoup d'illusion, je comptais sur un peu plus. A côté, mon opuscule des Fonctions discontinues se maintient à 56 l'an (434 en tout). Il y a là une disproportion que je ne m'explique pas facilement. J'aurais cru pouvoir compter, en permenence, sur 3 ou 4 Traités d'Analyse pour 1

Fonctions discontinues. Mais je vois que je n'y comprends rien.

J'ignore à ce propos si Goursat a fait paraître sa deuxième édition.

Merci d'avance et bien cordialement.

René Baire
24 rue Audra
Dijon[184]

NOTES DE LA RÉDACTION

1 En 1988, mettant de l'ordre dans l'invraisemblable entassement de livres déposés depuis des années dans le sous-sol de l'Institut Henri Poincaré, Jean Lefebvre a mis à jour la correspondance de Borel qui a dû rester après sa mort en 1956 dans son bureau à l'Institut dont il était le directeur. Ces lettres ont été répertoriées par Denise Lardeux.

Nous avons déjà publié de la correspondance de René Baire dans [1], p.341-358, 363-366, 368-379, et [2].

2 En février 1898, ayant obtenu une bourse d'études de la Faculté des Sciences de Paris, Baire va auprès de Vito Volterra, professeur à l'Université de Turin.

3 Plus tard, deux autres mathématiciens français séjourneront auprès de Vito Volterra : S. Mandelbrojt ([3],14-16) et A. Weil ([4],523).

4 G. Cantor écrit dans ses *Fondements d'une théorie générale des ensembles* ([5],407), traduit en français avec l'aide de H. Poincaré ([6], 69) :

"L'ensemble de toutes les fonctions continues, et même de toutes les fonctions susceptibles d'être intégrées, d'une ou de plusieurs variables, ne pourrait avoir, comme il me semble, que la puissance de la deuxième classe de nombres (II) ; cependant si on laisse de côté toutes les restrictions et qu'on considère l'ensemble de toutes les fonctions continues et discontinues d'une ou plusieurs variables, ce système aura la puissance de la troisième classe de nombres (III)."

E. Borel traitera de cette question dans une *Note* ajoutée à ses *Leçons sur la théorie des fonctions* ([7],108), publiées en 1898, note probablement influencée par ses discussions avec Baire.

5 Il y arrivera quelques jours plus tard ([1],318).

6 En effet, Dini donne ([8],145) le même exemple que celui de J. Thomae de 1870 ([1],314-315), sans citer le nom de Tomae, dans son cours sur le calcul différentiel à l'Université de Pise pendant l'année universitaire 1877-1878.

7 Anciens élèves de l'Ecole Normale Supérieure.

8 V. Volterra écrit lui-même à Borel le 6 mars (les lettres de Borel à Volterra sont déposées à l'*Accademia dei Lincei* à Rome) :

"Monsieur Baire est ici depuis presque deux semaines ; il a beaucoup de talent, et je suis très heureux de m'entretenir chaque jour avec lui des intéressantes questions qui forment l'objet de ses études."

9 Cachet de la poste.

10 Il s'agit de la note *Sur les fonctions discontinues développables en séries de fonctions continues* ([9]), présentée par Emile Picard à l'Académie des Sciences de Paris le 21 mars. On doit constater que la poste en Italie marchait autrement mieux à la fin du XIX^e siècle qu'en 1989 !

11 Partie IV de la note de Baire.

12 A cet endroit, dans la note de Baire,on a fait le renvoi suivant (c'est sans doute Borel qui l'a ajouté à la note de Baire) :

"Cette restriction n'est d'ailleurs pas nécessaire ; on peut se contenter de supposer, par exemple, que la somme $S_n(x)$ des n premiers termes est, pour toute valeur de x, inférieure à A^n, A étant un nombre fixe."

13 C'est la première ébauche de la classification de fonctions de Baire, qu'il exposera dans sa note à l'Académie des Sciences du 6 juin ([1], 320).

14 Il précisera dans sa note du 6 juin ([1],321) que l'ensemble de toutes les classes de sa classification a la puissance du continu.

15 Une élève de N. Luzin, Ludmila Keldych construira en 1930 ([1],335) une fonction effectivement de classe 4, puis en 1940 de toute classe α, $\alpha \leqslant \omega$.

16 Il énoncera ce théorème dans sa note du 6 juin ([10]).

17 Pour les fonctions de classe 2, il obtient seulement une condition nécessaire dans sa note du 6 juin ([1],321).

18 Baire a été pendant l'année scolaire 1895-1896 professeur de mathématiques spéciales à Troyes, puis pendant l'année scolaire 1896-1897 à Bar-le-Duc ([1],304-305) ; il était en congé pendant l'année scolaire 1897-1898.

19 A l'Ecole Normale Supérieure.

20 En octobre 1898 il reprendra son enseignement à Bar-le-Duc, et le rapport de l'inspection générale indique qu'il est un "professeur instruit et laborieux, d'une intelligence remarquable, un peu froid dans sa classe".

21 F.J. Bureau nous a raconté le 15 octobre 1988 que c'est grâce à

l'archicube J. Dieudonné qu'il a pu emprunter des livres à la Bibliothèque de l'Ecole Normale Supérieure lors de ses études à Paris.

22 Volterra écrit à Borel le 17 mars :

> "M. Baire vous a communiqué sans doute les derniers résultats qu'il a trouvés. Ils me semblent bien intéressants. Ils conduisent sûrement à une classification rationnelle des fonctions discontinues au moins de celles qu'on peut *concevoir*. Je me sers pour vous exprimer cela d'une expression très heureuse que j'ai trouvée dans les notes si intéressantes à vos belles *Leçons sur la théorie des fonctions*. Vous avez parfaitement raison de remarquer que plusieurs mathématiciens ont soulevé des difficultés sur la définition des fonctions qui a été donnée par Dirichlet. Même en les reconnaissants justes sous certains rapports, faut-il pour cela abandonner l'étude des fonctions discontinues ? Il est évident qu'en partant de l'idée seule des fonctions continues on est amené aux fonctions discontinues par l'examen des cas limites qui peuvent se présenter ; et l'on peut envisager par là des cas toujours plus compliqués.
>
> C'est dans cette direction que les recherches de M. Baire se poursuivent avec beaucoup de succès."

23 Il s'agit de [7]. Le livre a dû paraître en avril 1898.(Voir aussi les notes 4 et 25).

24 Il s'agit du théorème affirmant que l'ensemble des valeurs que peut prendre une fonction analytique multiforme en un point est dénombrable, théorème publié par Poincaré et par Volterra en 1888 ([6], 72-73).

25 Il devait s'agir des épreuves du livre [7].

26 La note a été présentée par Picard (voir la note 10) et non pas par Appell, beau-père de Borel.

27 Cette lettre est à lire avant la lettre qui précède.

28 Cachet de la poste.

29 Lebesgue écrira à Borel à propos des suppressions que celui-ci propose dans son livre en cours d'impression *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, le 1er octobre 1903 :

> "Il est même une suppression sur laquelle je ne suis pas du tout d'accord avec vous c'est celle concernant la définition du max et du min en négligeant certains ensembles.
>
> Sans doute le définition est très simple et très intuitive, mais il faut cependant dire une fois de quoi il s'agit. Et puis la démonstration qui la suit ne peut, elle non plus, être entièrement supprimée.
>
> D'ailleurs, à vous dire vrai, cette notion, introduite par Baire, me paraît, avec la définition des ensembles de seconde et de première catégorie, ce qu'il y a de plus important *de beaucoup* dans sa thèse.

Et en disant cela je ne veux pas diminuer le mérite de Baire ; je pense qu'il faut être plus original pour intoduire une notion nouvelle féconde que pour arriver à des théorèmes précis dans des domaines où tous les principes ont acquis une forme claire."

30 Voir [12].

D'après ces lettres de Baire, ce tome II des *Acta Mathematica* dirigés par G. Mittag-Leffler, contenant surtout presque la totalité des articles de Cantor publiées jusqu'en 1883, et dont la traduction a été supervisée par P. Appell, C. Hermite et H. Poincaré (voir la note 4), a joué un rôle essentiel dans les recherches de Baire. C'est un beau démenti à l'opinion exprimée par Hermite dans sa lettre du 13 avril 1883 à Mittag-Leffler à propos de ces articles de Cantor ([13],209) :

"L'impression que nous produisent les mémoires de Mr Cantor est désolante ; leur lecture nous semble à tous un véritable supplice, et en rendant hommage à son mérite, en reconnaissant qu'il a ouvert comme un nouveau champ de recherches, personne de nous n'est tenté de le suivre. Il nous est impossible, parmi les résultats qui sont susceptibles de compréhension, d'en voir un seul ayant un *intérêt actuel* ; la correspondance entre les points d'une ligne et d'une surface nous laisse absolument indifférents, et nous pensons que cette remarque, tant qu'on n'en aura point déduit quelque chose, résulte des considérations tellement arbitraires, que l'auteur aurait mieux fait de la garder et d'attendre. Mr Schwarz nous a appris cependant que Mr Cantor avait été récompensé de cette découverte par le titre de Correspondent de la Société Royale de Göttingen ; il se trouvera par conséquent des lecteurs qui trouveront à le lire et l'étudier un intérêt et un plaisir que nous n'avons point."

31 Voir la note 10.

32 Voir la note 25.

33 Cette correspondance montre que V. Volterra a exercé une influence sur la maturation de la pensée mathématique de Baire.

34 C'était le poète que Baire admirait le plus et "connaissait par coeur, en entier" ([1],303-304).

35 De Pise.

36 J. Tannery était sous-directeur de l'Ecole Normale Supérieure de Paris.

37 C'est la première idée de la notion de catégorie qui sera exposée dans la note de Baire à l'Académie des Sciences du 6 juin.

38 Supérieure et inférieure de la fonction. Voir le paragraphe IV de [10].

39 N. Luzin montrera en 1914 ([1],334) que la condition nécessaire que toute fonction d'une classe soit ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait quand on néglige les ensembles de première catégorie n'est pas suffisante.

40 Ce résultat sera énoncé dans sa note du 13 juin et généralisé dans sa thèse ([1],321) à des fonctions de n variables et pour toute équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre.

41 Ce qu'il fera effectivement dans [11].

La correspondance de Borel montre aussi qu'il fut l'intermédiaire entre E. Picard et P. Appell, membres de l'Académie des Sciences, et les mathématiciens qui envoyaient les notes traitant des sujets utilisant la théorie des ensembles de points.

42 Il terminera la rédaction de sa thèse le 25 juillet ([1],321).

43 Sa thèse sera publiée dans les *Annali di Matematica* et dédiée à Dini et à Volterra ([1],305).

44 Cachet de la poste.

45 Papier à lettres de l'hôtel.

46 L'année a été ajoutée probablement par Borel.

Baire a été nommé ([1],307) le 30 juillet 1901 maître de conférences à Montpellier, chargé de la préparation à l'agrégation de mathématiques, donnant deux leçons hebdomadaires d'une heure et demi à deux élèves. Mais, comme le note le doyen dans son rapport, il a "une santé déplorable" et "a été obligé de faire ses cours dans sa chambre".

47 Le premier cycle d'études universitaires : Physique, Chimie et Sciences naturelles.

48 Effectivement, le *Mémoire sur les fonctions discontinues* (Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, (2), 4(1875), 57-112) de Darboux porte la date du 20 janvier 1874 (p.112) : ainsi, dès sa naissance, Baire était prédestiné à étudier les fonctions discontinues dans toute leur généralité !

49 Voir la note 15. La note de Baire du 6 juin 1898, c'est [10].

50 *Agrégation des sciences mathématiques (concours de 1901)* (Nouvelles Annales de Mathématiques, (4), 1(1901), 516-519).

Il s'agit de la *Composition sur l'analyse et ses applications géométriques* (p.518-519) :

"On considère la courbe gauche définie, en coordonnées rectangulaires, par l'intersection des surfaces

$$x^2+y^2+z^2-8x = 0 \;, \quad z^2 = ax^2+3x \;,$$

où a est une constante.

1° En appelant s l'arc de cette courbe, compté à partir de l'origine jusqu'en un point $M(x,y,z)$, exprimer $\frac{ds}{dx}$ en fonction de x et déterminer a de façon que s soit donné en fonction de x par une intégrale elliptique de *première espèce*.

Dans tout ce qui suit, la constante a est supposée ainsi déterminée.

2° Exprimer les coordonnées x,y,z d'un point M de la courbe en fonction de s, en employant successivement les notations de Jacobi et celle de Weierstrass.

Quel est, dans un parallélogramme des périodes, le nombre de valeurs de s correspondant à un point donné de la courbe ?

3° Former la relation qui lie les valeurs de s correspondant à quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 de la courbe situés dans un même plan. En déduire les points de la courbe où le plan osculateur est stationnaire et discuter la réalité de ces points.

4° Calculer, en fonction de s, les coordonnées du centre de gravité de l'arc s supposé homogène."

51 P. Appell et E. Lecour, *Principes de la théorie des fonctions elliptiques et applications*, Paris (Gauthier-Villars), 1897.

53 Année ajoutée par Borel.

54 Borel devait se trouver à cette époque dans le Midi de la France.

55 Il s'agit d'une histoire à épisodes.

F. Evellin fait paraître en 1898 un article intitulé *L'infini nouveau* (Revue philosophique, 45(1898), 113-119), où il attaque la théorie de l'infini de Cantor et où il affirme (p.116) :

"Si, pour définir les nombres incommensurables, on introduit l'idée d'*ensemble* au sens de M. Cantor, c'est inutilement et avec péril."

Evellin reprend ces attaques, cette fois en collaboration de Z. - s'agit-il d'un mathématicien exaspéré par la montée du cantorisme en France ? Ils louent dans *L'infini nouveau* (Revue philosophique, 46(1898), 473-480) la "rigueur lumineuse" (p.480-481) de l'exposé de Borel sur "la théorie des *ensembles* et leurs applications principales".

Borel a dû être gêné d'avoir été embarqué dans cette galère et il fait paraître A *propos de l'"infini nouveau"* (Revue philosophique, 48(1899), 383-390), où, après avoir qualifié l'article d'Evellin de "remarquable", il ajoute (p.383) :

"Je voudrais montrer qu'il se pose, pour les mathématiciens, la question de savoir s'il est légitime d'introduire un *nouveau principe d'induction* ou, si l'on préfère, *un nouveau mode de raisonnement*. Je voudrais, en même temps, signaler cette circonstance aux philosophes, dans l'espoir que l'*observation*, appliquée à la formation de ce principe, permettra d'éclairer d'un jour nouveau les discussions *a priori* sur l'origine de principes analogues."

Il tient à préciser (p.384) qu'il attache une "haute valeur" aux travaux de G. Cantor, et démontre le théorème de P. du Bois-Raymond :

"Etant donnée une suite indéfinie quelconque de fonctions croissantes, il existe une fonction croissante plus grande que chacune d'elles."

Mais Evellin et Z. trouvent,dans un nouvel épisode de *L'infini nouveau* (Revue philosophique, 49(1900),135-143),que Borel ne se défie plus de Cantor dans l'article précédent (p.136) :

"Il n'y a plus trace de cette défiance dans les quelques pages d'un si haut intérêt que M. Borel a publiées ici même, et c'est pourquoi nous souscririons moins volontiers à tout ce qui s'y trouve."

Ils affirment (p.138) que "la suite des fonctions croissantes, non dénombrable par la démonstration de M. Borel, est au contraire dénombrable par la nôtre" !

Ils ajoutent ensuite que les nombres transfinis (p.139) "ne constituent qu'une notation systématique commode et qu'on n'emploie que dégagée de la notion d'infini que M. Cantor y a mise". A l'appui de cette thèse, ils citent le mémoire de Baire *Sur les fonctions de variables réelles* ([14]), qui écrit (p.36) :

"Il n'y a donc, dans l'usage que nous pouvons faire de la locution *nombre transfini*, rien de plus que l'emploid'un langage commode."

Borel reprendra la discussion sur le problème du transfini dans *L'antinomie du transfini* (Revue philosophique, 49(1900), 378-383) où il note (p.378) :

"La lecture de l'article publiée récemment ici même par MM. Evellin et Z. [[même tome de la revue]] m'a montré que, dans les quelques pages que j'ai écrites sur l'*infini nouveau* [[dans le tome 48(1899)]] ou *transfini*, le passage le plus important n'est pas suffisamment clair. Il me paraît donc utile de chercher à élucider définitivement la manière dont se présente, *en mathématiques*, la notion de transfini ; j'ajouterai ensuite quelques observations sur les conséquences qui me paraissent en découler relativement à l'origine psychologique de la notion d'infini."

Borel ajoute à la fin de son article (p.383) :

"C'est donc dans les propriétés fondamentales de l'*addition* (commutativité, etc.) que nous trouvons l'origine de la notion d'*indéfini*. Nous ne nous étendrons pas sur les développements mathématiques que trouveraient ici leur place ; rappelons seulement les travaux de M. Drach, et notamment sa thèse (*Essai sur une théorie générale de l'intégration et sur la classification des transcendantes* (Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, 1898))dans laquelle il montre comment on peut construire les mathématiques en partant seulement des *propriétés* des opérations fondamentales : addition, multiplication, différenciation."

P. Tannery, dont Evellin et Z. ont utilisé les arguments sur la droite transfinie contre Cantor p.476 du tome 46(1898), réplique p.389 de son article sur *La droite transfinie* (Revue philosophique, 50(1900), 388-390) :

"MM. Evellin et Z. ont cru trouver, dans le concept d'une droite transfinie, une contradiction dont ils ont argué contre celui du nombre transfini. La contradiction existerait-elle, ils n'auraient, à mon sens, rien gagné contre G. Cantor ; la thèse que j'ai soutenue, bonne ou mauvaise, ne peut ni confirmer ni compromettre la sienne.

Quant aux arguments, d'apparence mathématique, qui ont été mis en avant pour faire ressortir la contradiction prétendue, j'aurais préféré les passer sous silence."

Et il considère comme "prématurée" la polémique sur "les idées de G. Cantor" , quinze ans après qu'il a essayé, "le premier, de les faire connaître" aux lecteurs de la *Revue philosophique* (p.390) dans son article sur *Le concept scientifique du continu. Zénon d'Elée et Georg Cantor* (Revue philosophique, 20(1885), 385-410).

F. Evellin et Z. écrivent avec une parfaite mauvaise foi p.292 de *L'infini nouveau* (Revue philosophique, 51(1901), 292-299) :

"Dans une lettre récente, M. Paul Tannery se plaint, au sujet de la droite transfinie, que nous ayons imparfaitement exprimé sa pensée. Nous regrettons d'avoir bien mal exprimé la nôtre, si l'on a pu croire que notre dessein était de rechercher et de faire connaître les idées de M. Paul Tannery. Ayant à parler de la droite transfinie, nous ne pouvions nous dispenser de signaler au lecteur l'article où, à notre connaissance elle était présentée sous ce nom pour la première fois. Cela fait, nous n'avions plus à songer à cet article."

Ils considèrent (p.293) qu'ils n'ont commis "aucune des deux erreurs contre lesquelles M. Borel met en garde le lecteur" et ils affirment (p.299) "que la suite formée par les procédés que M. Borel indique est une suite dénombrable".

Borel reprend la plume dans *L'antinomie du transfini. Réponse à MM. Evellin et Z.* (Revue philosophique, 51(1901), 525-526) et il écrit (p.525) :

"Je m'excuse tout d'abord de parler encore d'une question sur laquelle je n'ai rien de nouveau à dire ; mais je ne puis laisser passer sans quelques mots de réponse certaines affirmations, qui pourraient induire en erreur ceux des lecteurs de la *Revue* qui ne sont pas familiers avec la théorie des fonctions.

Le théorème de Paul du Bois-Reymond, sur lequel repose essentiellement l'*antinomie du transfini, n'est sujet à aucune exception ni à aucune restriction.*".

De plus (p.526) :

"Ce théorème n'est contesté par aucun mathématicien et ce n'est pas par des arguments vagues que l'on peut en démontrer l'inexactitude ; il serait nécessaire de mettre en évidence une faute de raisonnement ayant échappé depuis 1877 à tous les mathématiciens qui se sont occupés de cette question."

Borel ajoute enfin à propos de l'inachèvement de la théorie du transfini :

"Il se présente là une occasion exceptionnelle, pour ceux des philosophes qui s'intéressent à ces questions, d'observer une notion en formation."

C'est la réponse d'Evellin et Z. que Baire a lu à la Bibliothèque de l'Université de Montpellier : *L'infini nouveau. Le théorème de P. du Bois-Reymond* (Revue philosophique, 53(1902), 142-157), où ils "montrent" encore une fois (p.148) que le théorème de P. du Bois-Reymond "est inexact" !

56 Papier à lettres de l'hôtel.

57 Jordan est né le 5 janvier 1838.

58 Lebesgue enseignait à Rennes.

59 Voir p.498 de [15].

60 Comme chargé du cours Peccot au Collège de France.

61 Voir p.503 de [15].

62 Voir [12].

63 Voir [14].

64 Voir la lettre X.

65 Voir la note 55.

66 Voir [7], p.108.

67 Voir la lettre III.

68 Voir la note [16] du 4 décembre 1899.

69 Notion introduite dans [17], p.134.

70 Voir [14], p.68-71.

71 G. Cantor, *Sur les fondements de la théorie des ensembles transfinis*, traduction de F. Marotte, Paris(Hermann), 1899.

72 A 71 kilomètres de Montpellier.

73 Sur les publications de Borel de 1903, voir p.102-103 de ses *Oeuvres*, t.I, Paris(C.N.R.S.), 1972.

74 Pour le cours Peccot.

75 Voir p.419 du *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, t.34 (1903).

76 C'est à partir de cette époque que Baire aura le sentiment qu'on donne plus d'importance aux travaux de son émule Lebesgue qu'aux siens.

La note de Lebesgue, *Sur l'existence des dérivées* (p.659-661, t.I, *Oeuvres scientifiques*, Genève(L'Enseignement mathématique), 1972), a été présentée à l'Académie des Sciences de Paris le 16 mars par E. Picard.

77 Baire fait allusion au compte rendu de Picard sur la thèse *Intégrale, longueur, aire* de Lebesgue, dont le dernier chapitre est consacré au problème de Plateau, et Picard écrit (Bulletin des Sciences mathématiques, (2), 27(1903), 1^e^ partie, 58-61 ; p.61) :

"Il termine très bien cette thèse remarquable où l'auteur montre une grande puissance d'abstraction en même temps que le souci d'appliquer les généralités à des problèmes particuliers."

Notons que E. Picard a été le rapporteur de la thèse de Baire, passée en 1899, ainsi que celle de Lebesgue, soutenue en 1902. Picard écrivait dans son *Rapport sur la thèse de René Baire* ([1], 341) :

"L'auteur nous paraît avoir une tournure d'esprit favorable à l'étude de ces questions qui sont à la frontière de la mathématique et de la philosophie et qui sont aujourd'hui fort en honneur. Nous ne lui conseillerions pas d'ailleurs de s'y cantonner exclusivement."

78 E. Cotton, *Sur les variétés à trois dimensions* (Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse pour les Sciences mathématiques et les Sciences physiques, (2), 1(1899), 385-438).

79 La thèse de Lebesgue a été publiée, comme celle de Baire, dans les *Annali di Matematica pura ed applicata*, mais dans le tome 7(1902).

80 Les parents de René Baire ([1],299), Georges Baire et Catherine Perrin, étaient originaires de Lorraine : son père de la région d'Algrange, commune de la Moselle, et sa mère de la région de Mailly, près de Nancy, commune de la Meurthe-et-Moselle.

81 Il s'agit de la nomination de Baire comme chargé du cours Peccot au Collège de France. D'après cette lettre, Borel aurait pris le part de Baire dans son différent avec Lebesgue à propos de cette charge de cours. Voir à ce propos [1], p.308-309 et 364-366, ainsi que le paragraphe *3. Lettres de Lebesgue à Borel* de [18].

82 Ce sera [19].

83 Le 2 novembre 1903 ([1],372-373). C'est Borel qui est intervenu auprès de Mittag-Leffler pour la publication de [20].

84 Probablement les deux Notes publiées dans le tome 134(1902) des *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris* : *Sur la résolution des points singuliers des surfaces algébriques* (p.222-225) et *Sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables* (p.642-644).

85 P. du Bois-Raymond, *Théorie générale des fonctions*, traduit de l'allemand par G. Milhaud et A. Girot, Nice(Imprimerie Niçoise), 1887.

86 Cette Note n'a pas été publiée.

87 Il s'agit de l'article de J. Tannery sur la thèse de Baire publié dans le *Bulletin des Sciences mathématiques*, t.27(1903), première partie, p.293-298, où il écrit (p.293) :

> "Le beau travail de M. Baire, dédié à MM. Dini et Volterra, qui avaient accueilli l'auteur avec une extrême bienveillance pendant le séjour qu'il a fait en Italie en 1898, a été une importante contribution à la théorie des fonctions. Le résultat si simple et si précis qu'il a obtenu relativement aux fonctions développables en séries de polynômes, les remarques subtiles et profondes qu'il a faites sur les fonctions qui satisfont à certaines équations aux dérivées partielles, ont frappé les mathématiciens. Les problèmes qui l'ont conduit à ces résultats, les notions qu'il a été amené à introduire ont d'ailleurs un intérêt propre."

Il ajoute encore que Lebesgue, "qui avait fait une étude approfondie" du mémoire de Baire [21], l'a "entretenu à diverses reprises de ses recherches sur ce sujet".

88 [20].

89 Lebesgue s'est marié en novembre 1903 et ce mariage a été la cause directe du conflit ([1],364) qui l'a opposé à Baire à propos du cours Peccot.

90 Au Collège de France.

91 Il s'agit probablement des *Beiträge zur Theorie der Punktmengen II*, t.59(1904), p.129-160, suite des *Beiträge zur Theorie des Punktmengen I* (Contributions à la théorie des ensembles), t.58(1903), 195-234.

Cette lettre éclaire d'un jour nouveau les recherches qu'entreprendra Baire pour démontrer le théorème sur la non-existence d'un homéomorphisme entre $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ lorsque $n \neq p$, tentative de Baire pour ne pas se "cantonner exclusivement" dans les "questions qui sont à la frontière de la mathématique et de la philosophie", comme le lui demandait Picard (voir la note 77).

La lettre de Schoenflies à Baire, jointe à la lettre de Baire à Borel du 12 avril 1904, montre que l'inspiration de sa Note du 11 février 1907 ([22]) *Sur la non-applicabilité de deux continus à n et à $n+p$ dimensions* provient des recherches de Schoenflies, et que les recherches de celui-ci sur la théorie des ensembles ont joué un rôle important dans le développement des mathématiques à cette époque.

D'ailleurs, il écrit à propos de ses recherches (p.130) :

"Sie sollen *die geläufigen Begriffe und Sätze der Analysis situs mit den Mitteln der Mengentheorie prüfen und in voller Allgemeinheit begründen.*"

("Elles doivent *prouver les notions communes de l'Analysis situs à l'aide de la théorie des ensembles et les fonder dans toute leur généralité.*")

Scheonflies écrit dans sa lettre à Baire :

"Es ist mir ebenfalls nicht bekannt, dass ein strenger algemeiner Beweis der von Ihnen genannten Satzes - dass ein C_n und ein C_m eineindeutig und stetig nicht abbildbar sind - bereits irgendwo veröffentlich wäre."

("Il m'est également inconnu si on a publié quelque part déjà une démonstration rigoureuse du théorème que vous mentionnez qu'un C_n et C_m bijectifs et continus ne sont pas applicables l'un sur l'autre.")

92 Dans cette partie de la lettre il s'agit du théorème de Heine-Borel. Sur cette question, voir notre étude détaillée [18], où nous avons

exposé dans les paragraphes 6 à 13 la longue querelle sur les questions de priorité liés à ce théorème.

Schoenflies écrit à Baire à ce propos :

"Was nun meine Bezeichung "Heine-Borel"schen Theorem betrifft, so hat est damit folgende Bewandtnis. Der Borelsche Satz, besagt nichts anderes, als dass zu *jedem* Punkt einer Strecke - ich beschreinke mich auf den einfachsten Fall - ein gewisses ihn einschliessendes Intervall existirt. Es ist damit die gleiche Intervall bedingung erfüllt, die bei der Stetigkeit zu *jedem* Punkt vorhanden ist. Aus ihr folgest Heine bekanntlich die gleichmässige Stetigkeit, und diese ist doch aequivalent mit der Behauptung, die der Borelsche Satz ausspricht. Dass ist die innere Beziechung, die ich in den Sätzen von Heine und Borel erblicke, und derhalb habe ich S. 51 meines Berichts den Satz von Borel als Erweiterung des Satzes von Heine verzeichnet. Den Satz von Heine habe ich auf S. 119 meines Berichts angeführt (*Journ. f. Math.* 74, S.188)."

("En ce qui concerne la dénomination du théorème de "Heine-Borel", voici ce qu'il en est. Le théorème de Borel ne signifie rien d'autre que ceci : à *tout* point d'une droite - je me borne au cas le plus simple - correspond un intervalle qui le contient. Par ce moyen on obtient le même intervalle qui se présente lors de la continuité en *tout* point. De là on déduit la continuité uniforme bien connue de Heine, et cela est équivalent avec l'assertion qu'exprime le théorème de Borel. C'est la relation intime que je vois entre les théorèmes de Heine et de Borel, et c'est pourquoi j'avais p.51 de mon Rapport désigné la théorème de Borel comme une extension du théorème de Heine. J'ai cité le théorème de Heine p.119 de mon Rapport (*Journ. f. Math.* 74, p.188)."

Le Rapport que cite Schoenflies est *Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten* (Le développement de la théorie des ensembles)(Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 8(1900), zweites Heft), et le mémoire de Heine indiqué est *Die Elemente der Functionenlehre* (Les éléments de la théorie des fonctions) (Journal für die reine und angewandte Mathematik, 74(1872), 172-188).

93 Qui rédige [19].

94 [20].

95 Un de ces livres de la Collection Borel devait être celui de Lebesgue, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, Paris(Gauthier-Villars), 1904, qui venait de paraître, et qui n'a pas dû faire un plaisir extrême à Baire.

96 [20].

97 Sur les questions de candidature à une chaire de mathématiques et sur l'impression de son livre chez Gauthier-Villars.

98 Il s'agissait du troisième Congrès international des mathématiciens

qui devait avoir lieu de 8 au 13 août 1904.

A ce Congrès ont assisté G. Cantor et E. Borel (voir p.12 des *Verhandlungen des dritten Mathematiker-Kongresses*, Leipzig(Teubner), 1905), et il est hautement probable que Cantor a dû expliquer à Borel que Weierstrass a finalement approuvé les théories de Cantor sur l'infini, comme semble le suggérer la carte envoyé à Borel de Suisse :

"Isenfluh, 20 Août 1904

Mon cher Monsieur Borel,

Monsieur de Dijek, à qui j'avais donné la lettre de Weierstrass (addressée à moi en 1891) m'écrit qu'il ne pourrait pas me la rendre maintenant, parce qu'il est allé aux Bains de Juist, mais qu'il ira la chercher dans l'archive de la *Deutsche Mathematikervereinigung* lorsqu'il sera revenu à Munich dans quatre semaines. Alors je vous l'enverrai.

Tout à vous.

Georges Cantor"

C'est la seule lettre qui a été retrouvée dans cette correspondance de Borel découverte à l'Institut Henri Poincaré.

Nous n'avons jamais entendu parler de cette lettre de Cantor à Borel et nous ignorons complètement de quelle lettre de Weierstrass à Cantor il s'agit.

Sur les rapports de Cantor avec Weierstrass, voici quelques indications caractéristiques :

- Le 27 décembre 1873, Cantor écrit à Dedekind ([23],118), à propos de l'article qu'il allait publier avec sa démonstration qu'il n'existe pas de bijection entre l'ensemble des nombres entiers positifs et [0,1], que Weierstrass lui avait conseillé de supprimer dans son article "la remarque sur la différence de nature des ensembles".
- Le 28 mai 1885, Weierstrass écrit à Schwarz ([24],88) que les travaux de Cantor - mais pas ceux sur le transfini, précise-t-il - jouent un rôle essentiel dans l'élaboration d'une nouvelle définition de l'intégrale.

99 Probablement pour la Collection Borel.

100 La deuxième et la troisième partie ont été publiées dans [17] ([1],377).

101 J. König avait donné au troisième Congrès des mathématiciens à Heidelberg en août 1904 une démonstration d'où il résultait que le

continu ne pouvait pas être bien ordonné.(Voir p.248 du livre de J. Dauben *Georg Cantor*, Cambridge, Massachusetts(Harvard University Press), 1979). On s'est rendu compte très rapidement (voir le paragraphe 2 de [18]) que la démonstration de König était lacunaire.

102 Voir [20], p.9.

103 Cachet de la poste.

104 Ce qui sera fait. (Voir [20], p.1.)

105 Voir [19].

106 Voir la lettre XIV, p.61-62.

107 Baire sera nommé en 1905 chargé d'un cours à la Faculté des Sciences de Dijon.

109 De son livre à paraître chez Gauthier-Villars. On y trouve les noms suivants : Lebesgue, Darboux, Jordan, Poincaré, Appell, Hadamard, Molk, Tannery, Volterra, Dini, G. Cantor, Schoenflies, Mittag-Leffler, Bendixson, Langevin.

Il est intéressant de noter que sur cette liste figure le nom de A. Vieillefond, à Reims, qui a étudié avec Lebesgue à l'Ecole Normale Supérieure et qui, d'après le témoignage de Lebesgue (voir le paragraphe 10 de [18]) aurait démontré avec Lebesgue en 1898 le théorème de Borel-Lebesgue dans le cas d'un ensemble non dénombrable d'intervalles.

Notons que Borel a ajouté sur la lettre de Baire les noms de Cousin, Fréchet, Hilbert et Osgood.

110 Voir [25] et [1], p.331 et 363-364.

111 Carte postale.

112 Il s'agit d'Emile Picard (voir la note 77), qui a fait un compte rendu du livre de H. Lebesgue *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* ((2), 28(1904), 1^{e} partie, 180-183).

Picard y parle (p.180) des "études subtiles sur les fonctions", et il ajoute :

"La mauvaise humeur de ceux qui regretteraient de voir des auditeurs enfermés pendant vingt leçons dans un sujet, profond sans doute, mais étroit malgré l'apparence, n'a pas lieu de s'exercer, comme elle pourrait le faire, s'il s'agissait d'un enseignement d'une autre nature. Au surplus, M. Lebesgue a montré ailleurs qu'il n'était pas disposé à s'enfermer dans un seul coin de la Science."

Il est probable que Baire s'est déjà senti visé par ce passage puisqu'il venait d'être chargé, comme Lebesgue, du Cours Peccot au Collège de France. Mais c'est le passage final du compte rendu de Picard qui l'a le plus irrité (p.183) :

"Il n'est pas rare, ajoutons-le, que dans maintes théories on ait des démonstrations plus rapides et plus compréhensibles, en se plaçant à un point de vue plus général ; la vue du cas trop spécial peut cacher les raisons simples des choses. Il ne faut pas d'ailleurs que ceci devienne une excuse pour les amateurs de théorèmes dont la généralité nuit à l'intérêt, mais je n'ai pas besoin de dire que ce n'est pas le cas de M. Lebesgue qui termine par quelques applications sur la recherche des fonctions primitives et la rectification des courbes."

113 Il semble que Baire n'a pas publié cette "brève réponse" à Picard.

114 Voir les lettres XXVII et XXVIII.

115 Voir la note 110.

116 Le compte rendu du livre [19] de Baire a été fait par Pierre Boutroux (*Bulletin des Sciences mathématiques*, (2), 29(1905), 1^{e} partie, 249-252).

117 Il s'agit probablement de l'article de Zermelo *Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann* (Démonstration que tout ensemble peut être bien ordonné) (Mathematische Annalen, 59(1904), 514-516).

118 Voir le paragraphe 11 de [18].

119 A. Denjoy, *Sur quelques propriétés des fonctions de variables réelles* (Bulletin de la Société mathématique de France, 33(1905), 98-114).

Il écrit à ce propos dans *Articles et mémoires*, Paris(Gauthier-Villars), 1955, t.I, p.VI :

"A la fin de ma seconde année à l'Ecole Normale, en 1904, tout imprégné des leçons de Baire, je donnai au *Bulletin de la Société mathématique* mon premier article. Il traitait d'une propriété des fonctions de variable réelle. Je délaissai ensuite celles-ci pendant plus de huit ans. Mais Baire m'avait initié aux ensembles cartésiens, à la quasi-identité de l'ensemble parfait totalement discontinu et du continu partout dense, quand il s'agit des propriétés descriptives des fonctions réelles. Il m'avait appris le transfini."

C'est à l'occasion de ses études sur les fonctions d'une variable complexe qu'il apprit "les idées métriques, indifférentes à Baire, ignorées de lui".

120 E. Borel, *Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynômes*, rédigées par M. Fréchet, avec des notes par P. Painlevé et H. Lebesgue, Paris(Gauthier-Villars), 1905.

121 Il s'agit de la démonstration du théorème (voir sur se sujet le paragraphe 10 de [18]) :

"Si l'on a sur le segment (0,1) une infinité E d'intervalles partiels MN, tels que tout point de la droite soit intérieur (au sens strict) à l'un au moins de ces intervalles, il existe *un nombre limité* de ces intervalles, tels que tout point de la droite soit intérieur au sens étroit à au moins l'un d'eux."

Borel ajoute en note :

"L'extension au domaine à n dimensions est immédiate."

Et il donne comme référence son article *Contribution à l'analyse arithmétique du continu*, publié en 1903 (*Oeuvres*, t.III).

122 Voir la note 110.

123 J. Lüroth a généralisé en 1873 le théorème de Heine à un compact de $\mathbb{R}^n$: une fonction réelle continue y est uniformément continue (voir [1], p.322).

Pour la démonstration de Baire voir [25], p.50-51.

124 Voir [25], p. 17.

125 Il s'agit de la Note II insérée dans le livre de Borel, cité dans la note 120 : *Démonstration d'un théorème de M. Baire* par H. Lebesgue

126 Voir la note 118.

127 Borel écrit p.93, en note, du livre cité dans la note 120 :

"Pour tout ce qui concerne les fonctions discontinues, je ne puis mieux faire que de renvoyer aux *Leçons sur les fonctions discontinues* de M. Baire, qui paraîtront dans quelques semaines après cet ouvrage. M. Baire faisait son cours au Collège de France en même temps que je faisais le mien à l'Ecole normale, et j'ai été bref sur les parties qu'il traitait. On sait d'ailleurs quelle autorité ses travaux si profonds et si personnels confèrent à M. Baire dans ces questions."

128 Collection Borel chez Gauthier-Villars.

129 Sur la lettre de Baire figure la réponse de Borel :

"Pas d'objection de principe, mais peut-être la place relativement considérable qu'occupent tes recherches dans mon dernire livre est-elle une raison pour que tu refuses."

130 [19] a été finalement "analysé" par P. Boutroux (voir la note 116). J. Tannery a rendu compte de [25] (voir [1], p.331).

Notons que Borel a été apparentéà Picard. En effet, C. Hermite a épousé la soeur de A. et J. Bertrand. P. Appell s'est marié avec la fille de A. Bertrand. E. Picard a épousé la fille de C. Hermite et E. Borel celle de P. Appell.

131 Voir la note 117

132 Voir, par exemple, p.261-263 de [26].

133 Il semble donc que ce soit Baire qui a été à l'origine de la correspondance qui a abouti à [26].

134 Nous avons rencontré les rayons *N* au cours de nos recherches sur la correspondance de Poincaré, mise à notre disposition par son petit-fils François Poincaré, et dont nous avons publié la correspondance avec des mathématiciens ([27]).

Il existe, en effet, dans cette correspondance plusieurs lettres de R. Blondlot (1849-1930), inventeur des rayons *N* , avec H. Poincaré. J. Cazenobe nous écrivait le 19 mars 1984 :

"Je savais que Poincaré avait plus ou moins soutenu Blondlot dans cette malheureuse affaire des rayons *N* .J'ignorais, ce que les lettres de Blondlot semblent indiquer, que Poincaré avait participé assez activement à la conduite du travail de Blondlot, en prenant la peine de suggérer des expériences."

135 Voir la note 101.

136 Hilbert devait en penser du bien, car l'article en question est une lettre adressée à Hilbert et publiée dans une revue dirigée par Hilbert.

137 Tome I, Paris(Hermann), 1904.

138 P.280-282.

139 U. Dini, *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali*, Pisa(Nistri), 1878.

140 Baire donnera à cette convergence le nom de convergence normale ([28],29).

141 M. Godefroy, *Sur la dérivation des séries uniformément convergentes* (L'Enseignement Mathématique, 6(1904), 294-296)

Baire a développé son point de vue dans [29].

142 Baire n'a pas changé de titre pour la seconde partie ([17]).

143 Dans cette correspondance de Borel, déposée à l'Institut Henri Poincaré, se trouve une lettre à Borel de Couturat, du 13 décembre, avec deux notes de Couturat sur le même sujet.

144 Couturat écrit à Borel le 13 décembre 1904 :

"Je crois devoir, ne fût-ce qu'en guise de remerciement, te communiquer la note que je viens de rédiger pour rendre compte de ton livre et de celui de Baire dans la *Revue de Métaphysique*. J'espère que je ne vous fais pas dire trop de bêtises. Comme tu le prévoyais, c'est du livre de Baire que j'ai tiré le plus de profit, sans doute parce qu'il est plus élémentaire que le tien (il m'a même fait mieux comprendre certaines de tes théories, et je vais relire ton livre, que j'avais lu avant Baire). Je t'offre en même temps quelques *Remarques de logicien* que j'ai rédigées à ton intention, et que j'envoie également à Baire."

Couturat écrit ensuite à propos des "idées de Russell" :

"Comme je le dis à Baire, à propos de sa note de la p.121, Russell a bien mis en lumière ce fait que la Mathématique pure repose sur la notion d'ordre, sur les relations "ordinales" des nombres, et par suite sur la Logique des relations, puisque tout ordre se définit au moyen de relations".

Il s'agit ici de la note suivante de Baire dans [19]:

"Il est intéressant de remarquer un fait que met en évidence notre définition et qui est, je crois, assez peu connu. La notion de limite ne suppose pas nécessairement donnée la définition des opérations sur les nombres irrationnels, mais seulement la définition de ces nombres en tant que formant avec les nombres rationnels un ensemble ordonné."

Couturat ajoute encore :

"En commençant à lire ton livre, j'avais été très frappé de voir que tu énonçais le théorème de Weierstrass sans supposer, comme on le fait toujours, la fonction bornée ; j'avais bien compris que tu considérais le point à l'infini comme point-limite quand il y a des points de l'ensemble en dehors d'un cercle de rayon R, si grand que soit R. Et j'ai trouvé ensuite à la fin du livre de Baire l'explication et la justification de cette généralisation de la notion de limite. Cela m'a fait d'autant plus plaisir que, dans mon *Infini mathématique*, j'ai soutenu que le point à l'infini peut être un point ordinaire, et qu'une fonction peut rester continue à l'infini, malgré les définition usuelles et le langage courant."

(Sur Couturat et l'infini on peut lire [30].)

A cette lettre, Couturat a joint son compte rendu des *Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développement en séries de polynômes* de Borel et de [19]. Il y écrit :

"Nous n'avons pas à les analyser ici, mais seulement à signaler par quoi ils peuvent intéresser les philosophes. Le fait qui ressort de leur lecture est l'importance croissante de la théorie des ensembles comme fondement de l'Analyse. On en trouvera notamment dans l'ouvrage de M. Baire un exposé aussi clair et aussi élémentaire que possible : l'auteur y démontre rigoureusement l'existence (logique) des nombres transfinis, et en même temps la fait toucher du doigt par des exemples bien choisis: ensembles dérivés d'ordre infini, suites de points d'un segment, suites d'entiers."

Il ajoute à propos de l'extension de Baire de son théorème aux fonctions non bornée "(qui deviennent infinies), par une généralisation très simple des notions de limite et de continuité" :

"Ainsi non seulement l'infini peut être considéré comme une "valeur" ordinaire de la variable et de la fonction, mais il peut être pour celle-ci un "point de continuité" (autrement dit, le point à l'infini n'est pas nécessairement une discontinuité). Qu'en penseront les finitistes à la Renouvier ? Rien sans doute, et pour cause ; et ils continueront pendant un siècle encore à ressasser comme vérités d'Evangile les lieux communs d'une pseudo-critique des sciences qui a tant contribué à amener la réaction anti-intellectuelle et anti-scientifique d'aujourd'hui."

Voilà donc Baire embarqué dans la croisade de Couturat du côté des "infinitistes" !

Dans les *Remarques d'un logicien* sur les deux ouvrages précédents, Couturat note :

"Les deux auteurs ont employé, sans le savoir, presque toutes les notions fondamentales de la Logique mathématique de Peano."

C'est ce "sans le savoir" qui a irrité Baire, d'autant plus qu'au cours de son séjour en Italie il a dû se familiariser avec les théories de Peano : Volterra, qui n'aimait pas Peano, a dû aussi lui en parler.

Couturat écrit à Borel le 16 décembre 1904 :

"Inutile de te dire que je n'ai garde de confondre l'infini de la théorie des fonctions ou de la géométrie analytique avec les nombres transfinis de Cantor. A propos de ceux-ci, je crois que ce que Baire a montré, ce n'est pas qu'on ne puisse pas les *définir* tous, mais seulement qu'on ne peut pas les *représenter* tous par un système de signes, ce qui est bien différent : il en est de même pour les nombres entiers, et cela ne constitue pas une sorte de défaut logique pour les nombres transfinis."

Baire a dû en effet écrire à Couturat, mais "la vérité avant tout" ne devait pas être trop dure, car celui-ci écrit à Borel :

"Baire m'apprend une nouvelle intéressante qu'il tient de toi, à savoir, que König s'est trompé dans son mémoire de Heidelberg."

Et Couturat ajoute :

"Baire me parle d'un savant qui aurait démontré, au contraire de König, que le continu peut être mis sous forme d'ensemble bien ordonné. Mais ... je ne peux pas déchiffrer son nom : est-ce Zermelo ? Si tu sais de qui il s'agit, tu serais bien aimable de me le dire, et de me donner en même temps la référence. Sa démonstration n'a pas pour Baire plus de valeur que celle de König, sans doute parce qu'elle repose sur les "alephs"."

Dans sa lettre du 19 décembre à Borel, Couturat entreprend une défense en règle de la "Logique *des* mathématiques" et il ajoute :

"Je n'ai pas besoin de te dire que ces réflexions ne s'adressent pas à toi en particulier, mais aux idées explicites ou implicites de Baire et de Lebesgue, que tu connais mieux que moi."

145 Comme le fait Peano dans son formulaire mathématique.

146 Cette note de Baire a été ajoutée par E. Borel dans son article *Quelques remarques sur les principes de la théorie des ensembles* (Mathematische Annalen, 60(1905), 194-195) = *Oeuvres*, t.III, p.1251-1252, Paris(C.N.R.S.), 1972. Elle est précédée de l'indication suivante :

"On me permettra de citer quelques ligne d'une lettre de M. Baire(Montpellier), qui me paraissent résumer avec beaucoup de netteté une opinion que je crois très juste et qui est sans doute très répandue."

147 Voir la note 100.

148 Toute la correspondance relative aux *Acta Mathematica* se trouve actuellement à l'Institut Mittag-Leffler à Djursholm (Suède).

149 Cachet de la poste.

150 Voir [15].

151 Voir la note 146.

152 Voir [1], p.373-374.

153 Cachet de la poste.

154 Voir p.263-264 de [26]. La correspondance de J. Hadamard a été détruite pendant la guerre 1939-1945 ([31],164).

155 De celles d'un de ses collègues qui se plaît à Montpellier.

156 A Dijon, où Baire lui succèdera le 1er octobre 1905.

157 Voir [26], p.269-272.

158 Cachet de la poste.

159 Le prix reçu par E. Borel et grâce auquel il a fondé *La Revue du Mois* (voir le paragraphe 5 de [18]).

160 G. Humbert, *Cours d'analyse*, tomes I et II, Paris(Gauthier-Villars), 1903-1904.

E. Goursat, *Cours d'analyse mathématique*, tomes I et II, Paris(Gauthier-Villars), 1902-1905.

Le tome I de Goursat a été déjà traduit en 1904 en anglais : *A course in mathematical analysis*, translated by E.R. Hedrick, Boston(Ginn).

E. Lampe, rédacteur du *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, écrit dans le tome 36(1905), p.345, à propos de ce cours de Goursat, et à juste titre à notre avis, qu'il est *ein glänzendes Zeugnis von der Höhe auf dem der mathematische Unterricht in Frankreich sich augenblicklich befindet, sowie dass der Student, der sich den Inhalt des vorliegenden Bandes angeeignet hat, für das Studium der neueren funktionentheoretischen Originalarbeiten gut ausgerüstet ist* (un brillant témoignage du niveau atteint actuellement par l'enseignement en France, de sorte que l'étudiant, qui aurait assimilé le contenu du présent volume, serait bien armé pour l'étude des nouveaux travaux originaux sur la théorie des fonctions").

161 M. Fréchet, *Sur quelques points du calcul fonctionnel* (Rendiconti di Circolo matematico di Palermo, 22(1906), 1-74).

Fréchet cite dans sa thèse ([1],338) la note de Baire [16]. Il écrit également (p.26) qu'on avait pu croire "que les généralités de la première partie de sa thèse étaient uniquement un résumé des propriétés communes aux classes particulières considérées dans la seconde partie" et "que, par la suite, il faudrait les abandonner dès qu'on étudierait d'autres classes". Mais il n'en est rien, car "un exemple viendrait à l'appui", c'est l'espace considéré par Baire "sous le nom d'espace à zéro dimension".

162 Voir [1], p.375.

163 Son cours aura deux volumes ([32],[28]) d'un total de 591 pages.

164 E. Borel écrit dans la *Préface* aux *Leçons sur les fonctions entières*, Paris(Gautgier-Villars), 1900, p.V :

"Ce petit livre a été rédigé d'après les leçons faites à l'Ecole Normale pendant l'année scolaire 1897-1898. Ces leçons s'adressaient aux élèves de seconde année, c'est-à-dire à des jeunes gens dont les connaissances en analyse sont généralement peu étendues, mais solides."

165 *Sur la théorie des fonctions* publiée chez Gauthier-Villars sous la direction de E. Borel.

166 Baire a été nommé professeur à la Faculté des Sciences de Dijon le 1er janvier 1907.

167 Cachet de la poste.

168 Voir [22] et [1],p.335-336.

169 *Journal des Mathématiques pures et appliquées.*

170 *Bulletin des Sciences mathématiques*, où sera publiée effectivement le mémoire de Baire ([33]).

171 P.94 de [33].

172 Il n'y aura pas de suite ([1],336). On peut lire à ce sujet aussi le commentaire de H. Freudenthal, p.441-443 des *Collected works* de L.E.J. Brouwer, Amsterdam(North-Holland).

173 Voir [32], p.VIII.

174 Voir [28], p.VIII.

175 Molk avait écrit à Borel le 25 janvier 1908 pour lui demander "quelques conseils au sujet de la distribution des articles concernant la théorie des fonctions d'une ou plusieurs variables *réelles*", et, en particulier, de "prendre la direction de ce plan général et de cette distribution de chapitres de la théorie des fonctions de variables réelles". A la suite de cette demande, Borel adresse le 30 janvier une lettre circulaire à P. Boutroux, Fréchet, Lebesgue, Montel, Zoretti et Baire, en précisant qu'il est disposé, "en principe, à accéder au désir" de Molk - et nous sommes vraiment étonné par l'activité protéiforme de Borel - car "il y a à sa réalisation un intérêt scientifique et un intérêt français", et demandant aux destinataires de lui faire "toutes les suggestions qui peuvent être utiles".

C'est à cette lettre de Borel que Baire répond ici.

176 A. Schoenflies, *Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten* (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 8(1900), zweites Heft).

177 [28].

178 Le recteur de l'Académie de Dijon signale, dans son rapport sur Baire pour l'année universitaire 1907-1908, "un point noir : l'état de santé de M. Baire, qui semble le prédestiner à la neurasthénie et qui l'empêche de travailler et d'enseigner comme il le voudrait". En effet, le certificat médical du 14 juin 1908 affirme que Baire est "atteint de neurasthénie" et celui du 22 décembre qu'il est "atteint de troubles nerveux prononcés". Il prend un congé de trois mois à partir du 1er janvier 1909, suivi d'un autre, également de trois mois, à partir du 1er mai.

179 R. Bricard, *Leçons sur les théories générales de l'analyse, par René Baire*(Nouvelles Annales Math., (4), 7(1907), 508-512 ; 10(1910), 381-384).

180 [32], p.VI-VII.

181 E. Lacour, R. *Baire, Leçons sur les théories générales de l'analyse* (Bulletin des Sciences mathématiques, 1ère partie, (2), 31(1907), 237-242 ; 32(1908), 258-263).

182 Baire est né à Paris 16 rue du Dragon.

183 *Rapport sur les titres et travaux de M. René Baire*
Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Dijon

La liste des travaux mathématiques et des services universitaires que M. Baire à jointe à sa lettre de candidature (annexée au rapport) me dispense de rappeler le détail de ces travaux et de ces services ; je me contenterai d'en faire ressortir brièvement l'importance.

La valeur des services rendus par M. Baire tant dans l'enseignement secondaire (1895-1901) que dans l'enseignement supérieur (depuis 1901) n'est pas attestée seulement par le témoignage plus ou moins direct de ses élèves et de ses chefs. Dans de nombreux ouvrages didactiques, M. Baire a exposé les méthodes très personnelles, ingénieuses et profondes, par lesquelles il s'est toujours efforcé d'introduire dans son enseignement à la fois plus de rigueur et plus de simplicité. Ce double caractère se trouve également dans l'exposition qu'il a donné au Collège de France de parties difficiles de la théorie des ensembles, et dans les questions plus élémentaires d'Analyse qu'il aborde dans ses *Leçons sur les théories générales de l'Analyse*. Ce dernier ouvrage n'est pas indigne d'être cité à côté des grands traités d'analyse dont la tradition est chère à notre pays et où les savants du monde entier se plaisent à reconnaître les qualités d'ordre, de clarté et de précision qui sont parmi les meilleures de notre race.

Mais, quelle que soit l'importance de ces travaux didactiques et quelle que soit la valeur de M. Baire comme professeur, c'est surtout par ses recherches originales qu'il s'impose à notre attention. D'un esprit très pénétrant et très profond, il a longuement réfléchi aux principes de l'Analyse et a su renouveler,par des vues entièrement nouvelles, des questions qu'on aurait pu croire épuisées. Il a posé des problèmes qu'on n'avait pas osé aborder avant lui et en a donné la solution. L'influence de ces recherches a été considérable et elles n'ont pas été moins appréciées à l'Etranger qu'en France. Qu'il me suffise de citer : la classification des fonctions discontinues au moyen des séries de polynômes et la détermination des conditions pour qu'une fonction soit de classe zéro ou un ; la théorie des fonctions d'un élément de l'espace à zéro dimension, conception entièrement originale et qui est loin d'avoir épuisé ses conséquences.

Je crois devoir ajouter que, bien que d'une santé assez délicate, M. Baire n'a pas cessé depuis quinze ans de consacrer tous ses loisirs à la réflexion sur les questions les plus abstraites de la théorie des ensembles et de la théorie des fonctions ; ceux qui ont abordé ces questions savent combien est grande la fatigue intelectuelle qu'elles occasionnent ; aussi ne sont-ils pas étonnés que M. Baire ait dépassé parfois la limite de surmenage intellectuel compatible avec la santé physique ; mais il n'a jamais cessé de tendre tout ce qu'il avait de forces vers un seul but : la recherche désintéressée de la vérité scientifique, donnant ainsi un très bel exemple d'ascétisme laïque.

Je dois conclure que la candidature de M. Baire, envisagée isolément, est on ne peut plus digne d'être prise en considération ; par son enseignement et par ses travaux, il est de ceux dont la place est à l'Université de Paris, mais il n'est pas le seul qui soit dans ce cas parmi les candidats effectifs ou possibles ; la comparaison des titres de ces divers candidats sort du cadre de ce rapport

Emile Borel

Juin 1909

184 C'est la dernière lettre de Baire qui se trouve dans les papiers laissés par Borel à l'Institut Henri Poincaré.

Dans les papiers laissés par Baire et qui nous ont été confiés par Marguerite Baire sa nièce on trouve une seule lettre de Borel a Baire, lettre que nous avons donnée à l'Institut Henri Poincaré pour qu'elle figure parmi les lettres de Baire à Borel:

"Paris, le 6 mars 1922

Mon cher ami,

Je suis heureux de t'annoncer une nouvelle qui, je l'espère, te fera plaisir : la section de géométrie a décidé, à l'unanimité, de te présenter en première ligne comme correspondant, en remplacement de Noether. Bien qu'il soit d'usage de remplacer les étrangers par des étrangers et les nationaux par des nationaux, nous avons jugé que la grande valeur de tes travaux justifiait une exception à cet usage.

L'élection aura lieu probablement dans un mois.

Bien cordialement à toi.

Emile Borel"

Voici quel fut l'itinéraire de la vie de Baire depuis sa dernière lettre à Borel. Il assura son enseignement à la Faculté des Sciences de Dijon de 1910 à 1914, date à laquelle il se mit en congé. Il fut admis à la retraite à partir du 1er juin 1925 et mourut le 5 juillet 1932, après avoir été transporté d'urgence à l'Hôpital psychiatrique de Bassens-Chambéry. A. Denjoy nous a déclaré le 19 novembre 1973 que Baire était "un des plus profonds génies mathématiques produits par la France".

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. DUGAC, *Notes et documents sur la vie et l'oeuvre de René Baire* (Archive for History of Exact Sciences, 15(1976), 297-383).

[2] P. DUGAC, *Lettres à René Baire* (Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques, 1(1980), 37-50).

[3] S. MANDELBROJT, *Souvenirs à bâtons rompus, recueillis en 1970 et préparés par Benoît Mandelbrot* (Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques, 6(1985), 1-46).

[4] A. WEIL, *Oeuvres scientifiques*, tome I, Springer(Berlin), 1980.

[5] G. CANTOR, *Fondements d'une théorie générale des ensembles* (Acta Mathematica, 2(1883), 381-408).

[6] P. DUGAC, *Georg Cantor et Henri Poincaré* (Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche, 4(1984), 65-96).

[7] E. BOREL, *Leçons sur la théorie des fonctions*, Paris(Gauthier-Villars), 1898.

[8] U. DINI, *Analisi infinitesimale, parte I, Calcolo differenziale*, Pisa(Litografia Gozani), 1878.

[9] R. BAIRE, *Sur les fonctions discontinues développables en séries de fonctions continues* (Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 126(1898), 884-887).

[10] R. BAIRE, *Sur les fonctions discontinues qui se rattachent aux fonctions continues* (Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 126(1898), 1621-1623).

[11] R. BAIRE, *Sur le problème de l'intégration au point de vue des variables réelles* (Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 126(1898), 1700-1703).

[12] I. BENDIXSON, *Quelques théorèmes de la théorie des ensembles de points* (Acta Mathematica, 2(1883), 415-429).

[13] *Lettres de Charles Hermite à Gösta Mittag-Leffler (1874-1883)* (Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques, 5(1984), 49-285), publiées par P. DUGAC.

[14] R. BAIRE, *Sur les fonctions de variables réelles* (Annali di Matematica pura ed applicata, (3), 3(1899), 1-123).

[15] R. BAIRE, *Théorie des ensembles. Exposé d'après l'article allemand de A. Schoenflies*, tome I, volume I, p.489-531 de l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques*, Paris(Gauthier-Villars), 1909.

[16] R. BAIRE, *Sur la théorie des ensembles* (Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 129(1899), 946-949).

[17] R. BAIRE, *Sur la représentation des fonctions discontinues, 2^e^ partie* (Acta Mathematica, 32(1909), 97-176).

[18] P. DUGAC, *Sur la correspondance de Borel et le théorème de Dirichlet-Heine- Weierstrass-Borel-Schoenflies-Lebesgue* (Archives internationales d'Histoire des Sciences) (sous presse).

[19] R. BAIRE, *Leçons sur les fonctions discontinues*, rédigées par A. DENJOY, Collection de monographies sur la théorie des fonctions publiée sous la direction de E. BOREL, Paris(Gauthier-Villars), 1905.

[20] R. BAIRE, *Sur la représentation des fonctions discontinues* (Acta Mathematica, 30(1906), 1-48).

[21] R. BAIRE, *Nouvelle démonstration d'un théorème sur les fonctions discontinues* (Bulletin de la Société mathématique de France, (2), 28(1900), 173-179).

[22] R. BAIRE, *Sur la non-applicabilité de deux continus à n et à n+p dimensions* (Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 144(1907), 318-321).

[23] P. DUGAC, *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques*, Paris(Vrin), 1976.

[24] P. DUGAC, *Eléments d'analyse de Karl Weierstrass* (Archive for History of Exact Sciences, 10(1973), 41-176.

[25] R. BAIRE, *Théorie des nombres irrationnels, des limites et de la continuité*, Paris(Vuibert), 1905.

[26] R. BAIRE, E. BOREL, J. HADAMARD et H. LEBESGUE, *Cinq lettres sur la théorie des ensembles* (Bulletin de le Société mathématique de France, 33(1905), 261-273).

[27] H. POINCARE, *La correspondance avec des mathématiciens*, publiée par P. DUGAC (Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques, 7(1986), 59-219 ; 10(1989), 83-229).

[28] R. BAIRE, *Leçons sur les théories générales de l'analyse*, tome II, Paris(Gauthier-Villars), 1908.

[29] R. BAIRE, *Une simplification dans l'enseignement des séries (A propos d'un article de M. Maur. Godefroy)* (L'Enseignement Mathématique, 7(1905), 42-43).

[30] P. DUGAC, *Louis Couturat et Georg Cantor*, p.55-61, *L'oeuvre de Louis Couturat*, Paris(Presses de l'Ecole Normale Supérieure, 1983.

[31] P.DUGAC, *Des correspondances mathématiques des XIX^{e} et XX^{e} siècles* (Revue de Synthèse, (3), 97(1976), N°81-82, 149-170).

[32] R. BAIRE, *Leçons sur les théories générales de l'analyse*, tome I, Paris(Gauthier-Villars), 1907.

[33] R. BAIRE, *Sur la non-applicabilité de deux continus à n et à $n+p$ dimensions* (Bulletin des Sciences mathématiques, (2), 31(1907), 94-99).