Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques

Aldo Brigaglia

L'introduction de l'algèbre moderne en Italie

Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques 1re série, tome 10 (1989), p. 323-349

<http://www.numdam.org/item?id=CSHM_1989__10__323_0>

L'INTRODUCTION DE L'ALGÈBRE MODERNE EN ITALIE

PAR ALDO BRIGAGLIA*

* Conférence donnée le 23 mars 1988 au Séminaire d'Histoire des Mathématiques.

Nella prima metà degli anni '20 in Italia furono pubblicati tre libri d'algebra e di teoria dei numeri, cioè:

1. M. Cipolla, Teoria dei gruppi d'ordine finito e sue applicazioni, (1920-'22).

2. G.Scorza, Corpi Numerici ed Algebre, (1921).

3. L.Bianchi, Lezioni sulla Teoria dei Numeri Algebrici, (1923).

Vi è qualcosa di sorprendente in queste pubblicazioni per varie ragioni.

Il primo fatto è che tale produzione pone il breve periodo di tre anni dal 1920 al 1923 come del tutto eccezionale nel quadro della produzione di trattati di algebra moderna italiana; infatti a fronte di una tale produzione nel corso di tutto il resto della prima metà del secolo XX non possono porsi che ben pochi altri:

I testi del 1900 e del 1911 dello stesso Bianchi sulla teoria dei gruppi e sulla teoria delle forme algebriche; quelli ancora di Bianchi sui gruppi di Lie, e quello di Fubini sui gruppi discreti, tutti precedenti il periodo considerato, e poi più tardi, quello dello stesso Scorza sulla Teoria dei Gruppi.[1]

Questa impressione è resa ancora più acuta se si guarda all'impostazione di questi testi e agli argomenti trattati: ad esempio il testo di Teoria dei Numeri di Bianchi è il primo testo italiano (come vedremo non in italiano) a dare trattazione sistematica alla teoria degli ideali di Dedekind, così come quello di Scorza è il primo a contenere una trattazione della teoria assiomatica dei campi. Ebbene bisognerà attendere gli anni '50 inoltrati per disporre in Italia di altri testi che svolgano questi argomenti[2]. La sola teoria che troverà, soprattutto negli anni trenta, sviluppo in Italia è in effetti la teoria dei gruppi.

Un altro elemento di stupore è il fatto che nessuno degli autori (con l'eccezione di Cipolla ancora una volta per la teoria dei gruppi), era fino a quel momento noto come specialista di algebra o teoria dei numeri. Scorza era conosciuto come geometra algebrico della scuola italiana, interessato soprattuttto allo studio delle superfici iperellittiche e delle varietà abeliane, Bianchi era un ben

---

1 Do qui di seguito una schematica bibliografia dei testi in questione: si tratta di a) L.Bianchi, Lezioni sulla teoria dei gruppi di sostituzioni, Pisa, 1900; b)id., ; c) id., Lezioni sulla teoria dei gruppi continui e finiti di trasformazioni, Pisa, 1903; d) U.Amaldi, ; e) G.Fubini, ; f) G.Scorza

2. Si tratta dei testi Zappa-Permutti, Gruppi, corpi,equazioni, Milano, 1963, (edizione litografata, napoli 1950) e Lombardo Radice, Istituzioni di algebra astratta, Roma 1958

noto geometra differenziale di impostazione classica. I testi in questione sembrano quindi contraddire l'accettata convinzione che solitamente dei testi maturi siano la <u>conclusione</u> e non <u>l'inizio</u> del formarsi di una scuola di ricerca.

Un'ulteriore motivo di stupore è, a mio avviso, il fatto che questi trattati, uniti al resto della produzione algebrica italiana del periodo, pongono improvvisamente la matematica italiana in una posizione di avanguardia su scala mondiale proprio sul terreno dell'introduzione dei linguaggi assiomatici, che sarà successivamente, per almeno un quarantennio, uno dei punti deboli dello sviluppo della matematica italiana.

In questa trattazione vorrei spingermi alquanto indietro nel tempo, cercando di vedere come le tendenze emerse negli anni '20 non provengano dal nulla, non sorgono all'improvviso, ma si collegano piuttosto ad un filone ben vivo e presente nella matematica italiana sin dalla fine del XIX secolo ed in particolare con un filone vicino a quello che è stato uno dei maggiori vanti della matematica italiana, la geometria algebrica.

§ 1. <u>La situazione dell'algebra italiana alla fine del XIX secolo</u>

Facciamo quindi un balzo indietro di circa 40 anni, agli anni '80 del secolo precedente. Riguardo all'algebra[3] di quegli anni lo scenario che si presenta ai nostri occhi è per molti versi analogo a quello degli anni '20. Certo, il contesto è diverso; diverso il referente internazionale che non consiste nelle tendenze astratte di Emmy Noether, Emil Artin e i loro gruppi, ma piuttosto, in quelle di Dedekind e Kronecker, che comunque costituiscono il precedente immediato di quelle altre.

Diverso è anche il referente nazionale, la matematica italiana negli anni '80 è infatti nel momento del suo massimo sviluppo. L'opera, immediatamente successiva all'unità d'Italia, della prima generazione, dei Brioschi(1824-97), Cremona(1830-903), Betti(1823-92), Casorati(1835-90), Beltrami(1835-900), Battaglini(1826-94), Bertini(1846-933), Dini(1845-918) ha già dato ottimi frutti. In Italia opera ormai una generazione giovane, formata da trentenni ed anche

3 E' lontana da me ogni pretesa di completezza. Quanto esporrò qui di seguito serve come supporto alle tesi di fondo che ho esposto nell'introduzione, e mi limito a dare al lettore le informazioni che ritengo sufficienti per comprendere il mio punto di vista. In particolare manca del tutto una trattazione della teoria delle forme, la cui importanza non può essere sottovalutata, come anche sulla teoria di Galois in Italia (è appena accennato il fondamentale testo di Bianchi), e come gran parte della teoria dei gruppi.

ventenni, che in brevissimo tempo porterà il livello della matematica italiana ai primissimi posti su scala internazionale. Per limitarmi ai più noti, cito Bianchi(1856-928), Peano(1858-932), Veronese(1854-917), Cesaro(1859-906), Capelli(1855-910), Pincherlé(1853-936), Ricci(1853-925), e, già nel pieno della loro attività creativa, i giovanissimi Segre(1863-924), e Volterra(1865-940).

E' in questo quadro che si pone impellente per la matematica italiana il problema di un generale recupero sulle più avanzate scuole nazionali in tutti i campi, e quindi anche nell'algebra. Anche questa volta, come negli anni '20, un atto concreto che muove in questa direzione è la pubblicazione di libri di testo avanzati sul piano internazionale. Questa volta però l'operazione culturale principale è data attraverso un nucleo di traduzioni di testi dal tedesco, e ciò è comprensibile tenendo conto della fretta e dell'assenza di una tradizione precedente.

Le opere a cui principalmente mi riferisco sono:

E. Netto, Teoria delle Sostituzioni e sua applicazione all'algebra, Torino, 1885 (edizione originale:1882), traduzione di G.Battaglini.

P.G.Dirichlet, Lezioni sulla teoria dei numeri, con appendici di R.Dedekind, Venezia, 1881, (edizione originale, la 3ª, del 1879), traduzione di A.Faifofer

G.Peano, Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H.Grassmann, Torino, 1888[4]

G.C.C. von Staudt, Geometria di posizione, Torino, 1889, (edizione originale, 1844), traduzione di Mario Pieri, introduzione di Corrado Segre.

Questi quattro testi sono in effetti molto diversi ed il loro accostamento può sembrare arbitrario. Li esaminerò brevemente uno per volta, cercando di mostrare, che pur tra molte differenze, essi sono uniti da un solido filo di comuni esigenze.

Il primo dei quattro testi citati è uno dei più noti testi di teoria dei gruppi esistenti in quel momento in Europa. In Italia, dove pure persisteva l'eco dei contributi di Betti alla riformulazionme della teoria di Galois, il merito di avere portato a livello universitario la conoscenza della teoria moderna delle equazioni, e quindi la formulazione di una compiuta teoria dei gruppi di sostituzioni, spetta a

4 Come è ben noto in questo caso non si tratta di una traduzione, ma di un testo nuovo ispirato alle teorie di Grassmann. L'ho voluto citare in questo quadro perchè ha una grande importanza nella storia dell'algebra e perchè anch'esso ha tra i suoi fini quello di diffondere in Italia teorie poco note, ma assai rilevanti.

Giuseppe Battaglini, soprattutto nel periodo del suo insegnamento a Roma (tra il 1872 e il 1885) e poi a Napoli. Pur non avendo dato personale contributo allo sviluppo di queste teorie, egli, sul piano didattico, dette un impulso di prim'ordine allo sviluppo di tali discipline. Nel 1875-'76 un suo corso di teoria delle sostituzioni e delle equazioni venne frequentato da Capelli ed è molto probabile che anche Frattini(1852-1925) abbia appreso la teoria dei gruppi alla scuola di Battaglini.

Nel suo corso il matematico napoletano seguiva, come ci informa Capelli, i ben noti testi di Serret e di Jordan[5]. Mi sembra interessante quindi esaminare le differenze tra il testo di Netto e quelli dei matematici francesi, per potere intuire le motivazioni che spinsero Battaglini (su suggerimento di Capelli?) alla fatica di una traduzione assai impegnativa di un testo tanto recente.

In effetti il libro di Netto è il primo trattato a tener conto della profonda trasformazione che negli anni '70 era avvenuta nel concetto di gruppo, ad opera soprattutto della scuola tedesca (Frobenius, Dedekind, Klein e Kronecker, maestro di Netto). nella prefazione, l'autore espone con chiarezza gli elementi di novità tra il suo testo e quelli di Serret e Jordan:

> **Non vi ha dubbio che il circolo delle applicazioni di un algoritmo viene ad estendersi quando si viene a liberare i concetti fondamentali e la costruzione di esso da tutte le supposizioni non richieste assolutamente, e a dargli anche la possibilità d'invadere i campi più disparati di ricerche, per mezzo della generalità degli oggetti su cui si fa operare. Il fatto che la teoria della formazione dei gruppi è suscettibile di una tale esposizione, parla in favore della sua estesa significazione e del suo avvenire.**[6]

In primo luogo quindi il nuovo testo rispondeva ad una crescente necessità di generalità, e quindi di astrazione, richiesta dalle applicazioni ormai disparate, della teoria dei gruppi finiti. Ciò viene ottenuto attraverso un uso estensivo della ben nota definizione astratta di gruppo abeliano data da Kronecker nel 1870:

> **Siano $\theta', \theta'', \theta''', \dots$ elementi in numero finito e così**

---

5 Su questi testi, ed in generale sullo sviluppo della teoria dei gruppi alla fine del XIX secolo, il mio riferimento principale è H. Wussing <u>The Genesis of the abstract group concept</u>, Cambridge/London, 1984.

6 Netto, <u>Teoria</u>..., citato nel testo, p.VII

costituiti che da due qualunque di essi, per mezzo di una certa operazione, se ne deduca un terzo. Quindi, se il risultato di questa operazione s'indichi con f, per due elementi arbitrarii, che possono essere anche identici tra loro, dovrà esistere un θ''' che si uguale a $f(\theta',\theta'')$. Inoltre debba essere:

$$f(\theta',\theta'')=f(\theta'',\theta');$$
$$f(\theta',f[\theta'',\theta'''])=f(f[\theta',\theta''],\theta'''),$$

ma anche, sempre che θ'' e θ''' sono diversi tra loro,

$$f(\theta',\theta'')=f(\theta',\theta''').$$

Come si vede, le più importanti novità del testo di Netto rispetto a quello di Jordan, consistono nella ricerca di una maggiore generalità ed in una ricerca di astrazione accentuata. E' sintomatico che la definizione assiomatica di gruppo abeliano sia apparsa in un testo italiano praticamente nello stesso anno in cui apparve la definizione, che vedremo tra poco, di spazio vettoriale da parte di Peano. La necessità avvertita da Battaglini di fornire il giovane ricercatore italiano di uno strumento matematico adeguato per la ricerca nel campo della teoria dei gruppi, è meglio comprensibile se si da un'occhiata molto rapida ai progressi della produzione scientifica italiana in quegli anni, produzione che in quel momento raggiungeva risultati cospicui.

Non è qui mia intenzione una qualsiasi completezza; mi limiterò ad accennare ad un piccolo gruppo di lavori di Capelli e di Frattini che meglio degli altri danno indicazioni delle tendenze di fondo che muovono nella stessa direzione della pubblicazione del testo di Netto[7]. La caratteristica comune di questi lavori è la tendenza accentuata allo studio delle proprietà che oggi chiameremmo strutturali dei gruppi, sulla scia degli studi di Sylow e Frobenius. In effetti nel primo lavoro citato, del 1878, Capelli riscopre alcuni dei famosi risultati di Sylow del 1872. Evidentemente Capelli non conosceva i lavori del matematico norvegese poichè egli presenta i suoi risultati come nuovi. Può essere più interessante mostrare i termini esatti con cui Capelli presenta gli enunciati dei teoremi:

Un nuovo teorema relativo ad un gruppo qualunque di sostituzioni ...

Se $n=p^{\alpha}\cdot q^{\beta}\cdot r^{\gamma}\cdot\ldots$ è l'ordine di un gruppo G, decomposto nei

---

7 Si tratta dei seguenti lavori: 1) A.Capelli, Sopra l'isomorfismo dei gruppi di sostituzioni, Giornale di Matematiche, 16, 1878, 32-68; 2) id., Sopra la composizione dei gruppi di sostituzioni, Mem. della R.Acc. dei Lincei, XIX, 1884-85; 3) G.Frattini, Intorno ad alcune proposizioni della teoria delle sostituzioni, ivi, XVIII, 1883-84; 4) id., Intorno alla generazione dei gruppi di operazioni Nota 1 e 2, ivi, XX, 1885-86, 281-5 e .

Sulla teoria dei gruppi in Italia cf. G.Zappa, Il contributo italiano alla teoria dei gruppi dalle origini al 1939, in Atti del convegno celebrativo del I° centenario del Circolo Matematico di Palermo, Supplemento ai Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, II, 8, 1985, 205-15.

suoi fattori primi distinti p,q,r...; questo contiene dentro di se dei gruppi parziali P,Q,R... i cui ordini sono p^{α}, q^{β}, r^{γ}... rispettivamente...

Se p^{α} è la più alta potenza del numero primo p che divide l'ordine di un gruppo G, non esistono altri gruppi di ordine p^{α} contenuti in G, all'infuori di un unico gruppo P e di certi gruppi simili ad esso[8]

Non è qui mia intenzione percorrere per esteso questa interessante memoria di Capelli. Il mio scopo è sottolineare come ormai la teoria dei gruppi abbia un'interesse autonomo dalla teoria di Galois e come quindi un assetto più astratto e generale della teoria fosse un'esigenza ormai sentita negli anni '80 del XIX secolo. E' lo stesso Capelli a sottolineare questa sua impostazione:

E' ben vero che sono già stati fatti grandi progressi nell'analisi di alcune classi di gruppi speciali... ma di teoremi generali applicabili ad un gruppo qualunque di sostituzioni, non se ne contano finora che ben pochi.

Nondimeno alcune teorie generali si trovano già molto ben stabilite, e fra le altre questa dell'Isomorfismo... L'importanza di questa nozione è già stata messa in evidenza e convalidata con le applicazioni, in modo che... mi parve di ravvisare in essa la chiave naturale per lo studio delle sostituzioni, specialmente se si voglia prescindere da ogni aiuto dell'analisi[9]

Più noti i lavori di Frattini contenuti nelle memorie al numero quattro dei lavori citati nella nota 7. In essi l'algebrista romano introduce il sottogruppo che porta ancora il suo nome, essenziale nello studio degli automorfismi dei p-gruppi. Mi limiterò a ricordarli brevemente, rinviando per ulteriori informazioni ad un qualunque testo di teoria dei gruppi.

Il sottogruppo di Frattini di un gruppo G è definito come il sottogruppo di quelle che l'autore chiama **le sostituzioni che non possono efficacemente concorrere alla sua generazione**, cioè

$\Phi(G)=\{x\in G \mid (x\in H,\ (H)=G) \Rightarrow (H\setminus\{x\})=G\}$.

Frattini dimostra tra le altre cose:

8 A.Capelli, op.cit. 1) nella nota precedente, p.54 e 65. Qui si dicono gruppi simili due gruppi legati da un isomorfismo interno.

9 ivi, p.32. Sottolineature mie.

1. $\Phi(G)$ è sottogruppo normale di G.

2. $\Phi(G)$ è l'intersezione di tutti i sottogruppi massimali di G.

3. Se H è sottogruppo normale di G, allora H possiede un complemento parziale se e solo se H non è contenuto in $\Phi(G)$.

4. $\Phi(G)$ è un sottogruppo "di Capelli", cioè ogni sottogruppo di Sylow di $\Phi(G)$ è normale.[10]

Non insisterò più oltre su questi aspetti dello studio della teoria dei gruppi in Italia negli anni '80. Spero soltanto di aver dato un'idea del fatto che la traduzione del testo di Netto non è un'operazione isolata, ma risponde a ben precise esigenze da parte della ricerca matematica italiana.

Mi sembra che si possa far risalire ad uno stesso tipo d'esigenze la pubblicazione del famoso testo di Dirichlet/Dedekind, che contiene, come è ben noto, nel suo supplemento XI la definizione e le proprietà fondamentali degli ideali di un anello[11]. Mi sembra particolarmente significativo il fatto che, neloo stesso periodo, non si sia riusciti a pubblicare una traduzione francese dello stesso testo. Rinviando per le motivazioni al libro di Dugac mi limito qui a sottolineare come ciò sia una ulteriore conferma del fatto che la situazione italiana di quegli anni si presenta come più favorevole di quella francesa verso i nuovi linguaggi algebrico-aritmetici.

Molto diverso appare il caso del testo di Peano che come è noto è soltanto ispirato a quello di Grassmann. Questo testo appare un po' come il <u>manifesto</u> dell'impostazione logico-critica dello studioso torinese. Esso è rimasto nella storia dell'algebra per più di un motivo. In particolare mi preme qui ricordare la prima definizione assiomatica di spazio vettoriale che è contenuta nel capitolo IX (<u>Trasformazioni di sistemi lineari</u>). La riporto nella terminologia originale che mi sembra molto significativa:

> **1. E' definita l'eguaglianza di due enti <u>a</u> e <u>b</u> del sistema, cioè è definita una proposizione, indicata con <u>a=b</u>, la quale esprime una condizione fra due enti del sistema, soddisfatta da certe coppie di enti e non da altre, e la quale soddisfa alle equazioni logiche:**

10 Il sottogruppo di Capelli, era stato introdotto nel lavoro 2) citato sopra.

11 Sul testo in esame e sull'importanza dei supplementi di Dedekind rinvio alla letteratura ed in particolare: P.Dugac, <u>R.Dedekind</u> cit, e ai vari lavori di T.Hawkins apparsi a più riprese negli Archives for the history of exact sciences.

$(\underline{a}=\underline{b}) = (\underline{b}=\underline{a}),\ (\underline{a}=\underline{b})\cap(\underline{b}=\underline{c}) < (\underline{a}=\underline{c})$.

2. E' definita la somma, ..., che soddisfa alle condizioni:

$(\underline{a}=\underline{b}) < (\underline{a}+\underline{c}=\underline{b}+\underline{c}),\ \underline{a}+\underline{b}=\underline{b}+\underline{a},\ \underline{a}+(\underline{b}+\underline{c})=(\underline{a}+\underline{b})+\underline{c}$

3. Supporremo che sia attribuito un significato alla scrittura $m\underline{a}$, qualunque sia il numero reale m, in guisa che siano soddisfatte le equazioni:
$(\underline{a}=\underline{b}) < (m\underline{a}=m\underline{b});\ m(\underline{a}+\underline{b})=m\underline{a}+m\underline{b};\ (m+n)\underline{a}=m\underline{a}+n\underline{a};\ m(n\underline{a})=(mn)\underline{a};$
$1\underline{a}=\underline{a}$

4. Infine supporremo che esista un ente del sistema, che indicheremo con $\underline{0}$, tale che, ... qualunque sia l'ente $\underline{a}$, ... $0\underline{a}=\underline{0}$

Def. I sistemi di enti per cui sono date le definizioni 1,2,3,4 in guisa da soddisfare alle condizioni imposte diconsi <u>sistemi lineari</u>[12]

Mi sembra che non vi sia alcun bisogno di tradurre nel simbolismo moderno la chiarissima esposizione di Peano. A parte la sua proverbiale precisione di linguaggio, è degno di nota il fatto che egli abbia sentito il bisogno di una definizione di questo genere, tanto simile nello spirito a quella di Kronecker di gruppo abeliano (anche se forse si può sottolineare come la terminologia e l'impostazione di fondo di Peano sia più "moderna" di quella del matematico berlinese). E' bene comunque precisare che nè Peano nè la sua scuola ha poi fatto un uso significativo della definizione su esposta. E neppure mi sembra che essi abbiano avuto una vera percezione dell'importanza di questo concetto.

L'unico che, sul finire del secolo, ed in un contesto diverso, ha fatto un uso appropriato della definizione peaniana è stato, credo, Pincherle, il quale nel corso dello sviluppo dell'analisi funzionale secondo le vedute di Arzelà ed Ascoli si è pienamente accorto che, rinunziando alla restrizione della dimensione finita, la definizione su esposta si adattava perfettamente al caso dello spazio di funzioni, permettendo una trattazione elegante e compatta. Il fatto che Pincherle nel suo lavoro del 1897[13] faccia esplicito riferimento alla definizione data dieci anni prima da Peano mostra a mio avviso che le sue concezioni non erano affatto

12 G.Peano, op. cit., p.141-2

13 S.Pincherle, <u>Mémoire sur le calcul fonctionnel distributif</u>, Mathematische Annalen, 49, 1897, 325-82

estranee per l'ambiente italiano.

L' ultimo trattato a cui ho fatto riferimento può sembrare del tutto estranee alle tendenze algebriche di cui ho finora parlato. In effetti il testo di von Staudt è generalmente considerato come il prototipo del programma di "purezza geometrica", vera antitesi rispetto a quello di algebrizzazione, astrazione e rigorosizzazione di cui i testi precedenti erano esempi noti ed importanti. Scrive a questo proposito J.Dieudonné:

> **Le mirage de la "pureté" n'a pas que des avantages: il favorise le relâchement de la riguer du raisonnement géométrique, en remplaçant ... les raisonnements algébriques élémentaires par des "principes" plus ou moins vague, introduits sans démonstration ... En outre, sans le secours de l'algèbre, l'intuition géométrique perd rapidement pied devant la complexité des phénomènes**[14]

L'opinione di Dieudonné è esatta nei confronti di molte tendenze "puristiche" manifestate nel corso del XIX secolo, ma non, così almeno ritengo, nei riguardi di Von Staudt, cui pure la citazione sopra riportata fa riferimento. In effetti, per quanto riguarda il "rigore", credo che la Geometrie der Lage di Von Staudt abbia costituito un grande passo avanti verso la sistemazione rigorosa ed assiomatica della geometria ed in particolare della geometria proiettiva secondo gli indirizzi di Pash, Peano, Pieri ed Hilbert. Inoltre per quanto riguarda l'uso eccessivo dell'"intuizione" che viene rimproverata alla tendenza puristica, si può solo notare che il lavoro di Von Staudt, il primo di geometria a non fare alcun uso di figure, era in effetti programmaticamente anti-intuitivo, anzi un passo decisivo verso una formulazione della geometria che non facesse alcun ricorso all'intuizione.

Certamente la Geometrie di Von Staudt è un lavoro estremamente puristico ed evita non solo qualsiasi ricorso all'algebra, ma perfino a considerazioni metriche. Ma da un lato ciò non fa che dimostrare che purismo, assenza di rigore, ricorso all'intuizione non costituiscono affatto una triade necessariamente unita e d'altro lato che solo dopo un'attenta (e "puristica") distinzione tra le varie proprietà geometriche le relazioni algebra-geometria potevano essere poste su base rigorosa. D'altra parte l'ultima parte dei Beiträge sono proprio destinate a ritrovare, attraverso la

14 J.Dieudonné, Cors de géométrie algèbrique, Paris, 1974, p.28

coordinatizzazione, il legame profondo tra algebra e geometria. Penso che occorra essere molto prudenti nell'esplorare le molte relazioni tra approccio puristico ed algebrico alla geometria, evitando di considerarli come divisi in due campi irriducibilmente opposti.

Questa digressione mi è servita per riaffermare che l'approccio di Segre e Pieri nell'intraprendere la pubblicazione del classico testo di Von Staudt non può essere affatto considerato come "puristico", ma è mosso invece dalle stesse esigenze di generalità e rigore che hanno mosso la pubblicazione degli altri trattati.

Nella sua prefazione Segre è estremamente esplicito nell'enunciare i suoi scopi:

> **Se è vero che le varie scienze debbono prestarsi scambievoli aiuti... non è men vero che risultati altrettanto importanti si sono visti ad esempio nell'analisi, nella geometria, nella meccanica, quando ... si è cercato di ridurre i postulati, i metodi e gli strumenti al minor numero possibile. ...**
>
> **Ammirabile è il rigore che regna in quest'opera. Ogni proposizione è enunciata con tutte quelle restrizioni che occorrono perchè essa sia assolutamente vera...**
>
> **La grande accuratezza e precisione del linguaggio rendono poi impossibile le ambiguità.**

Vedremo che non si tratta di semplici dichiarazioni di principio, ma che proprio sulla base di tali concezioni Segre è riuscito a fare un uso importante dei risultati algebrici della scuola tedesca nel far compiere i primi passi decisivi alla scuola italiana di geometria algebrica. E' forse interessante esaminare un attimo il testo del 1891 con cui doveva avere inizio la famosa polemica tra Corrado Segre e Giuseppe Peano. In essa Segre non si dimostra affatto un piatto difensore della intuizione versus il rigore, dei metodi geometrici contro quelli algebrici, tutt'altro:

> **Il matematico non può essere pienamente soddisfatto della conoscenza di una verità se non quando è riuscito a dedurla con la massima semplicità e naturalezza dal minor numero possibile di proposizioni note, di postulati indipendenti, evitando ogni ipotesi, ogni mezzo di dimostrazione che non appaia necessario per lo scopo[15]**

Ma è proprio nella fase, svoltasi tra l'anno della laurea,

15 C.Segre <u>OPERE</u>, Roma, 1963, v.IV, p.396

1883, e il 1891 in cui Segre si dedica alla costruzione della geometria proiettiva degli iperspazi, e poi, sulla base di quella, alla geometria algebrica su di una curva che la stretta connessione tra la sua visione geometrica e l'algebra viene sempre più evidenziandosi. Cercherò di dare una breve esposizione dell'evoluzione delle idee geometriche di Segre sotto la crescente influenza dlle idee algebriche della scuola tedesca che egli studiava con interesse via via maggiore.

Nel 1883 veniva pubblicata la prima parte della tesi di Segre[16] in cui era espresso con chiarezza il programma di lavoro e 'il debito che egli riteneva di avere nei confronti dell'impostazione algebrica, soprattutto della teoria di Weierstrass dei divisori elementari[17].

> **Io ho appunto cercato di approfondire dal lato geometrico quel teorema di Weierstrass e di dedurre dalla parte di esso riguardante le forme quadratiche il modo di fare una classificazione geometrica completa delle quadriche in uno spazio ad *n*-1 dimensioni**

Proprio questa impostazione di dedurre da teoremi di natura algebrica il modo di fare ragionamenti geometrici completi è come vedremo meglio avanti lo stile caratteristico del primo decennio di attività di Segre; l'intuizione geometrica non è affatto il dato di partenza, ma semmai essa viene conquistata attraverso la traduzione sistematica dei risultati algebrici (in questo caso soprattutto dei risultati della nascente algebra lineare). D'altro canto non è l'intuizione geometrica, ma la coerenza interna a dare legittimità matematica a quella che è stata la prima grande concezione del giovane matematico piemontese, la geometria degli iperspazi.

> **La geometria degli spazi ad un numero qualsiasi *n* di dimensioni ha preso ormai il suo posto tra i rami della mtematica; e, anche quando la si consideri all'infuori delle importanti applicazioni alla geometria ordinaria di cui essa è capace, cioè anche quando l'elemento o punto di un tale spazio non si consideri come un ente geometrico dello spazio ordinario (e neppure, il che poi fa lo stesso, come un ente analitico costituito dai valori di *n* quantità variabili), ma bensì come un ente a se, la natura intima del quale si**

---

16 C.Segre, Studio delle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni, 1883,

17 Il lavoro a cui Segre fa riferimento è soprattutto K.Weierstrass, Zur theorie der bilinearen und quadratischen formen, Monats. Akad. Berlin, 1868. Per un'analisi del significato e dell'importanza storica dell'impostazione di Weiersrass cf. T.Hawkins, Weierstrass and the theory of matrices, Arch. His. of Ex. Sc., 17, 1977

lascia indeterminata, non si può rifiutarla di ammetterla come scienza, in cui tutte le proposizioni sono rigorose, perchè dedotte con ragionamenti essenzialmente matematici; la mancanza di una rappresentazione pei nostri sensi degli enti che essa studia non ha molta importanza pel matematico puro[18]

Qui mi pare si possa rilevare come non vi sia alcun impaccio nel riconoscere una validità matematica ad una teoria formalmente coerente, indipendentemente dal modello concreto cui fare riferimento. Si può comprendere quindi l'attenzione che una tale impostazione avrebbe continuato a riservare agli ulteriori sviluppi formali del discorso geometrico. Nella polemica con Peano è quindi alquanto azzardato attribuire a Segre la posizione di difensore dell'intuizione e al suo avversario del rigore e dell'astrazione. Se è vero che i procedimenti di Peano sono molto più rigorosi di quelli di Segre, la questione sull'astrazione è molto meno evidente. Non ho qui il tempo di esaminare in dettaglio tale polemica, ma può essere indicativo riportare il parere di Mario Pieri, che si può considerare uno dei pochi matematici italiani che abbia compreso e seguito i due punti di vista, collaborando proficuamente con entrambi. Scrive Pieri:

Astratto in quanto prescinde da ogni interpretazione fisica delle premesse, e quindi anche dallla loro evidenza, ed intuitività geometrica: a differenza di una altro indirizzo (che chiamerei fisico-geometrico) secondo il quale gli enti primitivi e gli assiomi vogliono essere desunti dall'osservazione diretta del mondo esterno, e identificati con le idee che si acquistano per via d'induzione sperimentale da certi determinati oggetti e fatti fisici (PASCH, PEANO, ...)[19]

E' invece frequente da parte di Pieri il riferimento esplicito a posizioni "astratte" di Segre analoghe a quelle che ho già citato sopra e che restano per lui esempi dell'uso della terminologia geometrica indipendentemente da ogni significato esplicito attribuito agli enti di cui si tratta. Queste diverse concezioni non rimangono pure diatribe di carattere filosofico, ma entrano nel vivo dei concreti sviluppi del linguaggio matematico italiano. A mio avviso

18 Questa citazione come la precedente è presa da C.Segre, op.cit. Le sottolineature sono mie.

19 M.Pieri, Un sistema di postulati per la geometria astratta degli iperspazi, in Rivista di Matematica, 6, 1896/99, 9-16

pertanto fanno parte integrante di uno studio volto a comprendere l'evoluzione degli studi algebrici in Italia.

Nei successivi anni 1884 e 1885, Segre prosegue la sua esplorazione dei risultati più significativi della scuola tedesca di algebra lineare, in particolare degli studi di Frobenius e Kronecker[20]. Progressivamente la posizione di Segre sull'utilizzo dell'algebra nella geometria si andrà chiarendo:

> **Questa memoria** [di Frobenius NdA] **è di grande importanza sì per l'analisi che per la geometria; nel presente lavoro do applicazioni geometriche di alcuni dei risultati in essa contenuti, ma vari altri di questi condurrebbero pure, convenientemente tradotti, a proposizioni geometriche importanti**[21]

Non soltanto qui è esplicito il riferimento al rapporto algebra-geometria come di un rapporto di traduzione (altro che autonomia!), ma è chiara la convinzione della necessità di proseguire lungo una strada tanto fruttuosa. Anche negli stessi anni matura una concezione più precisa del concetto di isomorfismo tra spazi lineari e del suo profondo significato in geometria:

> **Si applica il fatto evidente che tutte quelle proprietà di una varietà lineare che dipendono unicamente dalla sua linearità e dalla sua estensione, sussistono pure per tutte le varietà lineari aventi la stessa estensione qualunque ne siano gli elementi. Questo fatto mette in luce l'importanza della geometria proiettiva ad n dimensioni, quando all'elemento o punto non si attribuisca alcun carattere speciale: da ciascun risultato, a cui essa conduce, si potrà poi, fissando che quel punto sia l'elemento di diverse varietà, ottenere più proposizioni diversissime tra loro**[22]

Segre non si limita ad affermazioni di principio ed utilizza immediatamente questo fatto per trasferire le proprietà dei

20 I lavori a cui faccio riferimento sono soprattutto C.Segre, Ricerche sui fasci di coni quadrici in uno spazio lineare qualunque, 1884 e id., Ricerche sulle omografie e sulle correlazioni in generale e particolarmente su quelle dello spazio ordinario considerate nella geometria della retta, Memorie della R.Acc. delle Scienze di Torino, II, 37, 1885, 395-425. I lavori algebrici più utilizzati da Segre in questo contesto sono G.Frobenius, Über lineare Substitutionen und bilineare Formen, J. für Math., 84, 1878 e L.Kronecker, Zur Theorie der orthogonalen Substitutionen, 1874 e id, Über die congruenten trasformationen der bilineraen Formen, Berl. Monatsber., 1874

21 C.Segre, Ricerche sulle omografie...., cit.

22 C.Segre, Considerazioni intorno alla geometria delle coniche di un piano e alla sua rappresentazione sulla geometria dei complessi lineari di rette, Atti della R.Acc. delle Scienze di Torino, 20, 1884-5, 487-504

complessi lineari di rette di uno spazio tridimensionale (che costituisce uno spazio a cinque dimensioni) allo spazio delle coniche di un piano. Certamente nella trattazione di Segre siamo lontani dal rigore e dalla precisione di linguaggio di Peano che protesterà vivacemente contro la terminologia usata dal collega. Però mi sembra che le esigenze comuni siano più d'una e che la ricchezza dei risultati del Segre avrebbero ben meritato uno sforzo di collegamento tra i due linguaggi piuttosto che di opposizione frontale.

Alla fine di questo processo di avvicinamento della geometria all'algebra lineare Segre può ormai affermare perentoriamente:

La geometria projettiva equivale alla moderna algebra delle trasformazioni lineari[23]

Prima di abbandonare definitivamente l'argomento vorrei far vedere come, nel già citato lavoro del 1885, Segre applichi concretamente il suo metodo di traduzione e come il successo stesso dell'opera sua portasse in se i germi di un possibile successivo distacco del linguaggio geometrico da quello algebrico. La prefazione a questo lavoro contiene una dichiarazione programmatica completa ed interessante:

Una delle teorie algebriche più interessanti e più studiate è quella delle sostituzioni lineari ortogonali. ... essa divenne da un lato completa quando più recentemente il sig. Frobenius, colla considerazione dei divisori elementari di un determinante ed in base a noti lavori del sig. Weierstrass , potè stabilire le condizioni che caratterizzano ina sostituzione lineare atta a trasformare in se stessa una forma quadratica di determinante non nullo. E' singolare che non siasi ancora tentato di trarre profitto da quelle ricerche per la geometria. Esse danno immediatamente proprietà delle omografie di uno spazio lineare ad n dimensioni ... Nel § 3 mi occupo delle correlazioni in uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni, mostrando varie loro importanti proprietà ed in particolare come esse si possano studiare e classificare basandosi su due teoremi del sig. Kronecker intorno alle trasformazioni cogredienti delle forme bilineari.

Mi sembra che la visione storica sia ampia e che Segre abbia davanti un quadro realistico delle tendenze algebriche

---

23 C.Segre, <u>Su alcuni indirizzi nelle investigazioni geometriche</u>, in Rivista di Matematica, I, 1891, 42-66

contemporanee e delle enormi possibilità che esse aprono agli studi di geometria. Non è qui possibile seguire nei dettagli le tecniche (peraltro assai dirette) usate nell'operare questa traduzione, ma mi sembra opportuno accennare almeno, usando le stesse parole di Segre, ad un esempio del suo procedimento. Egli enuncia il teorema algebrico di Kronecker nei termini seguenti:

> **Per l'omografia appartenente ad una correlazione i divisori elementari del suo determinante caratteristico $|pa_{ik} + qa_{ki}|$ sono a coppie di ugual grado e corrispondenti a radici reciproche, esclusi quelli di grado pari che s'annullassero per p:q=+1 e quelli di grado impari che s'annullassero per p:q=-1**[24]

Enunciato questo teorema egli prosegue:

> **Per riconoscere meglio il significato geometrico dell'ultimo terema...**

e conclude con il nuovo enunciato ormai "tradotto" in terminologia geometrica:

> **Se per una correlazione qualunque si considerino i due piani che corrispondono ad un punto qualunque (nella correlazione stessa e nella sua inversa), quel piano del loro fascio che passa pel punto corrisponde a questo in un determinato sistema nullo L ed il piano coniugato armonico di esso rispetto alla quadrica F^2 luogo dei punti che stanno sui piani corrispondenti. Questi due nuovi piani determinano come elementi doppi un'involuzione tale che due piani del fascio coniugati in essa e facienti dati rapporti anarmonici coi quattro già considerati corrispondono al punto in una determinata correlazione e nella sua inversa. Sono pure coniugati in quell'involuzione due piani passanti per ispazi fondamentali di punti (dell'omografia corrispondente alla correlazione considerata) corrispondenti a radici reciproche**

Non è qui il caso di spiegare in dettaglio il procedimento di Segre nè di addentrarsi nella sua terminologia. Ciò che mi interessava era dare un'idea al lettore della tecnica usata. Mi sembra comunque che quanto detto dimostri a sufficenza che la geometria proiettiva iperspaziale secondo la scuola italiana, lungi dall'essere una costruzione eminentemente sintetica, fu fondamentalmente basata sulle tecniche

---

24 id., <u>Ricerche sulle omografie...</u>, cit.

algebriche della scuola tedesca. Resta da comprendere perchè nel giro di un ventennio la situazione sia tanto profondamente mutata e la geometria algebrica italiana, che degli studi di Segre è l'erede diretta, sia diventata sinonimo di intuizione geometrica contrapposta a metodi algebrici. Una prima risposta la da la lettura più approfondita di un'opera come quella appena citata del geometra torinese.

Le applicazioni del teorema di Kronecker possono si essere sviluppate direttamente, ma è sempre possibile sostituire l'uso di tale teorema con la sua traduzione geometrica. E' ciò che Segre fa, ad esempio, nel completare la classificazione di Battaglini delle correlazioni nello spazio ordinario. In un certo senso è proprio il successo del suo programma a determinarne il superamento: la <u>forma</u> geometrica dei teoremi prende il sopravvento, la straordinaria capacità geometrica di Segre e della sua scuola (Severi e Castelnuovo soprattutto) rende ormai la formulazione ~~dlla~~ gemetria proiettiva iperspaziale un nuovo <u>punto di partenza</u> per nuove scoperte, per realizzare le quali il linguaggio algebrico non pare più indispensabile. E così, a partire dal 1885, la presenza dell'algebra nella geometria italiana pare affievolirsi. Ma come vedremo, ciò non avviene senza una profonda dicotomia e talvolta anche scontri acuti all'interno della scuola italiana.

In particolare questa dicotomia è presente nello stesso Segre. Se, come ho già detto, per circa un decennio la sua opera appare ormai svincolata dal linguaggio algebrico, ciò nonostante egli mantiene una viva attenzione agli sviluppi dell'algebra con la piena coscienza che gli ulteriori progressi della geometria ed in particolare della geometria algebrica si baseranno sui legami da lui usati con tanto successo nei suoi anni giovanili. Particolarmente importante mi pare a questo proposito un rapido esame dell'opera probabilmente più famosa di Corrado Segre, <u>Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito</u>[25], certamente quella di maggiore influenza sulla nascente scuola italiana di geometria algebrica.

Come scrive Severi[26], con quest'opera

> **Siamo ... in pieno nella trattazione con spirito sintetico delle proprietà delle funzioni algebriche di una variabile**

---

25 in Annali di Matematica, II, 22, 41-142

26 F.Severi, <u>Prefazione</u>, in C.Segre, <u>Opere</u>, v.I, Roma, 1957

di fronte al gruppo delle trasformazioni birazionali

Lo stesso Segre sottolinea come la sua opera si affianchi e sia diversa nel metodo sia a quella funzionale di Riemann che a quella algebrico-geometrica di Brill e Noether che infine a quella algebrico-aritmetica di Kronecker da un lato e di Dedekind-Weber dall'altro. Ciò è appunto ben noto e del tutto esplicito.

Ma a mio avviso altrettanto esplicita è l'attenzione prestata da Segre verso i lavori della scuola algebrico-aritmetica e soprattutto dell'attenzione in questa direzione che non si stanca di indicare ai suoi allievi. Si veda questa osservazione apposta in nota:

> **Valgano alcune di queste ultime a richiamar l'attenzione di qualche geometra su certi lavori aritmetico-algebrici, sulla teoria generale dell'eliminazione, ecc. del Kronecker e della sua scuola; i quali lavori mi pajono d'importanza capitale per <u>fondare solidamente</u> l'edifizio geometrico (degli enti algebrici).**

Come si vede siamo ben lontani dal riaffermare un'autonomia di linguaggio della geometria. Severi non sottolinea questo aspetto che per lui resta del tutto secondario, ma come vedremo altri leggeranno queste parole esattamente in questa direzione. D'altra parte la definizione, giustamente famosa, di varietà algebrica data da Segre è interamente tratta dal lavoro di Kronecker, ed interamente algebrica nello spirito:

> **Il modo più generale di definire le varietà algebriche [agginto in nota: suggeritomi dallo studio del <u>Festschrift</u> del Kronecker: <u>Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen</u>, Journal für Math., 92, 1881, pp.1-122)] consiste invece nel considerar come tale <u>l'insieme dei punti le cui coordinate soddisfano ad un numero qualunque di date equazioni algebriche, nelle quali possono anche comparire razionalmente dei parametri indeterminati</u>**

Come si vede, anche se ormai l'attività principale è indirizzata verso lo studio del linguaggio puramente geometrico, l'attenzione verso le novità dello sviluppo dell'algebra è ancora alto. Un'attenzione che Severi doveva ben conoscere, perchè ribadita nel corso di geometria numerativa tenuto dal Segre nel 1899/900 e da Severi frequentato. Ancora una volta il maestro spinge in una precisa direzione gli allievi. A proposito della dimostrazione del teorema di Plücker sul computo delle costanti osserva:

solo esigerà le definizioni precise di varietà algebriche ed i teoremi sulle loro intersezioni che si trovano in Kronecker ecc., e che io qui non voglio esporre. Sarebbe cosa da fare

E ancora nel 1904, nel discorso pronunziato al Congresso Internazionale di Heidelberg, confermava:

La geometria deve ricorrere all'algebra per la dimostrazione dei suoi principi, per la trattazione rigorosa delle varietà algebriche e delle loro intersezioni. Una tale trattazione si è già cominciato a fare seguendo i concetti di Kronecker ed altri

...Si avvvera quanto il Klein nel 1892 profetava, cioè che col tempo la unione della geometria colla teoria delle funzioni non sarebbe più bastata, ma come terza alleata avrebbe dovuto entrare la teoria dei numeri![27]

Voglio qui sottolineare che non pochi contemporanei hanno interpretato in questo senso l'opera di Segre, cioè come di qualcuno particolarmente interessato alle relazioni tra l'algebra moderna del suo tempo e la geometria. La più tipica testimonianza in questo senso mi pare quella di Zeuthen nell'articolo Geometria numerativa dell'Enzyklopedie. E' molto caratteristico che egli dedichi l'appendice dal titolo (cito dalla traduzione francese) :Etablissement de nouveaux liens entre la géométrie énumérative et l'algèbre in buona parte proprio al Segre, citando soprattutto la definizione, da me riportata poco fa, di varietà algebrica. Il traduttore francese, Mario Pieri, che di Segre, pur essendo leggermente più anziano può considerarsi allievo, non solo conferma, ma corrobora questa posizione di Zeuthen con opportune ulteriori citazioni.

Nè Pieri è l'unico allievo ad intendere così la lezione del grande geometra italiano. Si può anzi dire che dall'insegnamento di Segre provengono due distinte scuole geometriche, una dall'impostazione puramente geometrica, di cui fanno parte G.Castelnuovo (1865-1952), F.Enriques (1871-1946) e F.Severi (1879-1961), l'altra ad indirizzo prevalentemente algebrico che comprende M.Pieri (1860-1913), G.Giambelli (1879-1953) e il già citato G.Scorza. Delle due la più famosa e quella che ha dato contributi decisivi allo

27 C.Segre, La geometria d'oggidi e i suoi legami coll'analisi, Verhandlungen des III Internationalen Mathematiker-Kongress, Leipzig, 1908

sviluppo della geometria algebrica all'inizio del secolo è stata senz'altro la prima, ma la seconda, i cui risultati sono ora in corso di rivalutazione, ha anch'essa dato contributi di grande rilievo. Il più netto difensore della concezione algebrica fu Giovanni Giambelli che si contrappose con durezza a Severi e che si espresse con gran foga:

> **E' importante osservare che nelle dimostrazioni del § 10 non si introducono concetti geometrici, si procede con mezzi puramente algebrici ... Non si deve infine lasciare inosservato come dalla presente memoria risulti che l'algebra considerata da un nuovo punto di vista simbolico, fornisce un valido e indispensabile aiuto alle questioni più generali della geometria numerativa[28]**
>
> **Le ricerche numerative non si devono poi tralasciare perchè perfezionando lo studio analitico degli enti algebrici si potrà togliere ogni dubbio sulla esattezza della quasi totalità dei risultati ... Per giungere al più presto a tale scopo conviene ridurre al minimo l'uso dei ragionamenti geometrici[29]**

Dopo un'aspra polemica con Severi la carriera accademica di Giambelli venne stroncata[30], ma si può dire che un filo algebrico rimase aperto seppure nascosto all'interno della tradizione matematica italiana, un filo che riaffiora appunto nrgli anni '20, ma che malgrado le buone propettive iniziali non riuscì a conseguire l'obbiettivo di mantenere i contatti tra la scuola italiana e gli sviluppi internazionali.

§ 2. La situazione degli anni '20. Il riemergere della tradizione algebrica in Italia

Prima di procedeere più oltre, vorrei brevemente trattare questo argomento, che mi sembra decisivo. E' ben noto che sono proprio gli anni '20 gli anni decisivi per la creazione dell'algebra moderna, ad opera soprattutto della scuola tedesca di Emmy Noether con l'apporto decisivo della scuola anglosassone (soprattutto Dickson, Moore e Weddeburn). In un primo momento da questo processo sembrano tagliate fuori proprio Italia e Francia[31], ma mentre la scuola francese

---

28 G.Giambelli, Risoluzione del problema generale numerativo per gli spazi plurisecanti di una curva algebrica, Mem.Acc.Sc.Torino, 69, 1909

29 id., Le applicazioni del principio di conservazione del numero e l'indirizzo di H.Schubert, Rend.Circolo Mat.Palermo, 40, 1915

30 cf il mio, La geometria algebrica italiana di fronte al 15° problema di Hilbert, Atti del Convegno, la storia delle matematiche in Italia, Cagliari, 1984

31.Cf. sulla situazione francese, P.Dubreil, L'algèbre en France de 1900 à 1935, Cahiers du Séminaire d'histoire des mathématiques, 3, 1982, 69-81 opererà negli anni trenta un pieno recupero ad opera della nuova generazione degli Herbrand, degli Chevalley, dei Weil, dei Cartan, dei Dieudonné, in Italia il faticoso recupero avverrà soltanto molto più tardi, negli anni sessanta. Orbene, a chi avesse guardato la situazione all'inizio degli anni '20, la situazione sarebbe apparsa come del tutto capovolta: non solo l'esposizione di Bianchi della teoria degli ideali non ha alcun corrispettivo confrontabile nè nella Francia nè negli Stati Uniti in quegli anni, ma se poi si esamina il testo di Scorza riguardante la teoria delle algebre, si può vedere che anche nell'ambiente tedesco non esisteva e non esisterà ancora per vari anni nulla di comparabile.

Il testo, citato nell'introduzione, di Bianchi (1856-1928) è forse il più importante per comprendere gli scopi della fioritura degli studi di argomento algebrico negli anni venti. E' infatti alla sua opera che si deve principalmente questo sviluppo, dato che sia Scorza che Cipolla erano stati suoi allievi a Pisa che si può considerare la vera culla dell'algebra italiana.

Non è tra le finalità di questa mia esposizione dare un esame completo del testo di Bianchi[32]. Mi limito a ricordare che esso contiene una trattazione completa, come ho più volte già sottolineato, della teoria degli ideali ad un livello avanzato ed a riportare dalla introduzione dei passi significativi sugli intendimenti didattici del nostro. Scrive Bianchi:

> **L'aritmetica, questo antico ramo delle scienze matematiche, colla semplicità dei suoi fondamenti, col rigore delle sue deduzioni, e soprattutto colla bellezza ed armonia delle sue verità ... ha sempre esercitato un fascino potenete sulle menti dei più grandi matematici. Ma soltanto nel secolo scorso, per opera quasi esclusiva di matematici tedeschi, l'aritmetica ha trovato, si può dire, la via <u>regia</u>, elevandosi ad aritmetica generale dei corpi algebrici. E qui sono apparsi, completamente, i molteplici legami delle verità aritmetiche colle teorie dell'algebra, colla teoria dei gruppi finiti ed infiniti, e colle proprietà delle più notevoli trascendenti dell'analisi, quali le esponenziali, le funzioni ellittiche e modulari, le funzioni automorfe in generale, la (s) di Riemann ecc. persino nella geometria ... i concetti aritmetici trovano applicazioni e corrispondenze essenziali.**

32indice

Ed ancora:

Contribuire alla diffusione di queste teorie aritmetiche, troppo trascurate e presso che ignorate fra noi, è lo scopo che mi propongo colla pubblicazione di questo libro.

Ora mi preme sottolineare alcuni aspetti di quanto detto da Bianchi. Si tratta certo di sforzarsi di rilanciare in Italia una branca estremamente trascurata come la teoria dei numeri, ma non solo di questo: si tratta, a mio avviso, di aderire pienamente all'impostazione di Dedekind[33] che vede la teoria algebrica dei numeri, attraverso la teoria degli ideali, come l'elemento fondamentale dell'unità della matematica e la sua espressione più alta.

Occorre ben chiarire quindi che il testo di Bianchi offre un punto di vista ben più avanzato rispetto alle pur numerose, e talvolta pregevoli, ricerche aritmetiche diffuse in quel periodo in Italia e che si riferivano in modo quasi esclusivo a problemi quali congruenze elementari e simili. Esso, ponendo al centro uno sviluppo dettagliato della teoria dei numeri algebrici e degli ideali, si pone con lungimiranza lungo una strada che avrebbe visto entro il decennio appena iniziato uno sviluppo impetuoso da parte della scuola tedesca.

Mi pare estremamente interessante, per comprendere il significato dell'operazione culturale compiuta da Bianchi, osservare ancora una volta, come questo testo costituisca quasi il suo esordio nel campo della teoria dei numeri trattata con i metodi della teoria degli ideali di Dedekind. I suoi non molti lavori sull'argomento[34] (6 complessivamente, di cui il più significativo è quello del 1922 sugli ideali primari assoluti), vanno dal 1920 al 1923 e si può ben dire che non da essi sia scaturito l'interesse di Bianchi per l'insegnamento della teoria dei numeri, ma che viceversa essi siano il frutto di un impegno fondamentalmente didattico. E' mia impressione, quindi, che quello del matematico lombardo sia stato un generoso tentativo di sopperire a quella che veniva ritenuta una precisa carenza nel campo della cultura

---

33 Sull'opera di Dedekind cf. ad esempio P.Dugac, Richard dedekind et les fondements des mathématiques, Paris, 1976

34 L.Bianchi, Osservazioni circa il carattere quadratico dei numeri di un corpo quadratico, Rend.Acc. dei Lincei, (5), 29, 1920, 223-30; id., Dimostrazione elementare della infinità degli ideali primi di primo grado in ogni corpo algebrico, Rend.Acc. dei Lincei, (5), 31, 1922, 413-5; id., Prova di un teorema aritmetico di Jacobi, Boll.UMI, 1, 1922, 41-3; id., Sugli ideali primari assoluti in un corpo algebrico, Journ. de math., 1, 1922, 1-18; id., Sulla composizione degli ideali primari assoluti in un corpo algebrico, Rend.Lincei, (5), 32, 1923, 101-6; id., Sulle radici primitive per moduli (ideali) composti nei corpi algebrici, Rend.Lincei, (5), 32, 1923, 53-8

matematica italiana, piuttosto che frutto di specifici interessi di ricerca.

Questa impostazione di Bianchi pervade in effetti tutta la sua opera, soprattutto dopo che, a partire dall'inizio del XX secolo, iniziò ad operare con vigore sempre crescente nel campo della didattica nell'ambito della Scuola Normale Superiore di Pisa, di gran lunga la più prestigiosa scuola matematica italiana. Così è caratteristico del suo modo di operare che , mentre la sua vastissima produzione scientifica (le opere complete occupano 12 volumi) è quasi interamente dedicata alla geometria differenziale, la sua opera didattica spazia su campi vastissimi ed ha asai spesso una problematica algebrica al suo centro, soprattutto nello sforzo di rinnovare il linguaggio matematico e porre i suoi allievi nelle condizioni di seguire da vicino il concreto evolversi della ricerca matematica internazionale. Ciò può essere visto anche solo dando un'occhiata ai titoli dei trattati da lui prodotti nel primo quarto del XX secolo e che sono tutti basati sulle lezioni da lui impartite presso l'università o la scuola normale[35]. Ancora più caratteristico è il fatto che molti degli allievi laureatisi con lui avevano trattato temi riguardanti l'algebra o la teoria dei numeri. Cito ad esempio negli anni considerati Sansone e Fantappiè che avrebbero successivamente raggiunto fama in campi diversi.

Una situazione diversa presenta il testo di Scorza (1876-1939). Anche in questo caso si tratta praticamente di un'opera prima: i primi lavori sulla teoria delle algebre del matematico calabrese datano infatti esattamente dal 1921 e il suo libro non è preceduto da alcuno di essi, ma a differenza del caso di Bianchi qui siamo in presenza di quello che sarà, da allora in poi e fino alla morte, il campo principale degli interessi scientifici di Scorza, inoltre diversa è la collocazione del suo testo nel panorama internazionale.

Infatti, in questo caso non si tratta soltanto del primo testo italiano sull'argomento, ma in assoluto il primo testo su scala mondiale a trattare della teoria delle algebre (il volumetto di Dickson del 1914[36] è ancora troppo esile per essere confrontato con il trattato di Scorza). Ho già esaminato con qualche dettaglio altrove[37] questo testo ed i

---

35 Oltre a quelli già elencati precedentemente, si tratta dei seguenti

36 L.E.Dickson, Linear algebras, Cambridge (Mass), 1914

lavori di Scorza e della sua scuola negli anni '20 e a tali lavori rinvio. Qui mi voglio limitare a sottolineare come la teoria delle algebre venisse a presentarsi come un frutto maturo di uno dei campi più tradizionalmente presenti nella matematica italiana, quello cioè della geometria algebrica, ed in particolare dello studio delle varietà abeliane. E' proprio questo legame fra la rinascita dello studio dell'algebra in Italia negli anni '20 e la tradizione della geometria algebrica italiana che io voglio in particolare indagare per sommi capi in questo studio.

In Scorza l'affermazione della necessità dello sviluppo dell'assiomatica come metodo d'indagine è ben più netta e decisa che in Bianchi e nello stesso Cipolla. Mentre gli ultimi due guardano ancora all'algebra astratta alla Dedekind e alla Kronecker, gli occhi di Scorza sono puntati sulla scuola americana e su quella tedesca di Artin e Noether. L'assiomatica è ormai vista come il metodo per eccellenza della matematica:

> **Chi ha conosciuto, che teorie concrete distinte, occupantisi di enti toto coelo diversi, schematicamente danno luogo ad una medesima teoria astratta, non ha potuto far questo, se non perchè, trattosi fuori da ciascuna di esse, è riuscito a guadagnare un punto di vista superiore da cui guardarle simultaneamente ... Il matematico, che non possiede la teoria generale di ciò che si dice un corpo numerico, conosce, a traverso l'algebra, la teoria delle equazioni, a traverso la teoria dei numeri, quella delle congruenze rispetto ad un modulo primo, a traverso i trattati sui numeri algebrici, quella delle congruenze rispetto ad un ideale primo; tre teorie di cui, se pure ha colto qualche analogia, non vede gli intimi legami[38]**

Si vede subito qui che Scorza ha per referente un matematico che già conosca la teoria degli ideali alla Dedekind e che qui sottolinei come sia proprio la struttura astratta a far compiere un ulteriore passo avanti al livello di comprensione della intima unità della matematica.

Come ho già detto, per un esame dei contributi italiani alla teoria delle algebre rinvio interamente ai miei studi precedenti, in questa sede però mi sembra utile ricordare

---

37 A.Brigaglia, La teoria generale delle algebre in Italia dal 1919 al 1937, Riv.Stor. sci., 1, 1984, 199-237

38 G.Scorza, Opere Scelte, 3 tomi, Roma, 1961, v.III, 51

brevemente alcuni dei tratti salienti che riguardano la collocazione di tali lavori nell'ambito degli studi internazionali.

Come ho già detto il testo di Scorza è il primo trattato sull'argomento uscito su scala internazionale. Esso resterà unico per due anni, fino al 1923, quando venne affiancato dal testo di Dickson <u>Algebras and their arithmetics</u>, destinato a divenire famoso soprattutto attraverso la sua traduzione tedesca del 1927 (<u>Algebren und ihre Zahlentheorie</u>), largamente rimaneggiata ed ampiamente usata dalla scuola di Emmy Noether fino alla pubblicazione del libro di Deuring, <u>Algebren</u>, del 1935.

A mio avviso fino appunto al 1927 il testo di Scorza, ben conosciuto all'estero, si può considerare ai più avanzati livelli mondiali. Sarà soltanto negli anni '30 che la scuola italiana non riuscirà a mantenere il contatto con quella tedesca ed americana.

Non fu solo il testo di Scorza a manifestare i sintomi di una significativa presenza italiana nel quadro degli studi algebrici europei degli anni '20. Anche sul piano più specifico della produzione scientifica la scuola italiana nei primi anni '20 apportò contributi significativi. A parte quelli dello stesso Scorza[39], mi pare indispensabile sottolineare quelli, decisamente i più significativi forniti dalla scuola italiana, di Francesco Cecioni (18 -19), il cui contenuto ho già più volte esaminato e che qui sono costretto a riprendere perchè la valutazione del suo valore costituisce elemento essenziale del mio punto di vista.

Si tratta soprattuttto di un lavoro del 1923[40], dedicato alla soluzione di un problema lasciato aperto da Wedderburn nel 1921, cioè quello di determinare per $n > 9$ l'esistenza di algebre di divisione centrali su di un campo K non cicliche[41]. Nel suo lavoro Cecioni risolve quasi completamente il problema nel senso di costruire con metodo generale quelli che poi saranno chiamati prodotti incrociati (**crossed products**), e di verificare per n=4 che questo metodo generava effettivamente

11 Cf. ad esempio G.Scorza,

40 F.Cecioni, <u>Sopra un tipo di algebre prive di divisori dello zero</u>, Rend.Circolo Mat. di Palermo, 47, 1923, 209-54

41 Qui e nel seguito per la parte tecnica faccio riferimento al libro di I.N.Herstein, Titolo, . Qualche cenno sul metodo utilizzato da Cecioni può trovarsi nel mio lavoro già citato nella Rivista di Storia delle Scienze, oltre che ,naturalmente, con maggior profitto nel legibilissimo testo originale di Cecioni. Colgo qui l'occasione per ricordare che devo molte conferme sul ruolo e sulla influenza del lavoro di Cecioni sulla scuola americana e in particolare su Albert, ad alcune conversazioni avute con il compianto prof. Herstein, recentemente scomparso.

algebre del tipo cercato. Il metodo di Cecioni trovava poi molti miglioramenti nell'opera della scuola americana e tedesca; ad esempio negli anni '30 veniva dimostrato il **famoso** teorema di Albert/ Hasse/ Brauer/ Noether, che tra l'altro provava definitivamente che le algebre a cui il metodo di Cecioni dava luogo non potevano essere in generale isomorfe ad algebre ottenute con metodi noti.

Non è compito di questo lavoro segnalare il fatto, ben noto, che la costruzione dei prodotti incrociati fu un elemento determinante nel compimento di quel magistrale edificio matematico che è la teoria di Brauer e Noether delle rappresentazioni dei gruppi finiti.

E' a mio avviso istruttivo seguire il modo come il contributo di Cecioni, citatissimo per tutti gli anni '20 dalla scuola americana, sia stato poi del tutto dimenticato; è istruttivo perchè mostra come, ben al di là delle singole rivalità di scuole o di persone il singolo contributo individuale rischi sempre di essere dimenticato e travolto quando non sia sorretto da un ampio lavoro di squadra.

Nel 1934, al suo discorso ufficiale al congresso internazionale dei matematici, che segnò ad un tempo la sua consacrazione personale e quella della nuova algebra astratta, Emmy Noether così si riferiva ai prodotti incrociati:

> **Such crossed products were first considered by Dickson (cf. his book Algebren und ihre Zahlentheorie, § 34** [42]

Ma ecco appunto cosa afferma Dickson nel § 34 del libro citato dalla Noether:

> **Dieser Schritt ist eine Verberserung des Beweises von Cecioni, ..., wir entleihen ihm auch Satz 14** [43]

Cioè, la parte considerata dalla Noether è un **miglioramento** di quanto dimostrato da Cecioni. L'errata attribuzione dell'algebrista tedesca passò inosservata perchè nel frattempo in Italia nessuno, tranne il solo Scorza, aveva avuto il benchè minimo sentore dell'importanza e del significato del lavoro di Cecioni che è credo tuttora sconosciuto a tutta la comunità matematica.

Ho portato l'esempio di Cecioni perchè a mio avviso è essenziale percepire come negli anni '20 in Italia non si fosse sviluppato soltanto un'attività didattica nella

42 E.Nother, citare

43 E.L.Dickson, Algebren..., cit.

direzione dell'algebra astratta, ma si fosse effettuato un significativo collegamento nelle tematiche di ricerca con le più avanzate tendenze internazionali, producendo i primi significativi risultati. Ho già esaminato altrove[44] gli avvenimenti successivi agli anni '20 dando alcune ipotesi sulle ragioni dell'esaurirsi di questa spinta iniziale.

Conclusioni

Concludendo ritengo che la situazione dell'algebra italiana degli anni '20 presenti non poche analogie con quella degli anni '80 del secolo precedente. In entrambi i casi siamo in presenza di un grande e cosciente sforzo di riavvicinamento alle correnti internazionali più avanzate, in entrambi i casi sullo sfondo, ma in posizione dominante, sta la questione dei rapporti tra linguaggio algebrico e geometrico, soprattutto quello della geometria algebrica. In entrambi i casi in fin dei conti si trattò di un'occasione mancata e l'auspicato ricongiungimento non avvenne. ma mentre negli anni '80 siamo in un momento fortemente espansivo della matematica italiana e quindi il ritardo passò inosservato, negli anni '20 ci troviamo in un momento ben diverso e il ritardo accumulato fu duramente pagato per vari decenni successivi.

---

44 A.Brigaglia, L'Algebra e la teoria dei numeri in Italia tra le due guerre mondiali, in La matematica in Italia tra le due guerre mondiali, Milano, 1986