CAHIERS DU SÉMINAIRE D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

LUCA DELL'AGLIO

GIORGIO ISRAEL

La théorie de la stabilité et l'analyse qualitative des équations différentielles ordinaires dans les mathématiques italiennes : le point de vue de Tullio Levi-Cwita

Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques 1re série, tome 10 (1989), p. 283-321

<http://www.numdam.org/item?id=CSHM_1989__10__283_0>

LA THEORIE DE LA STABILITE' ET L'ANALYSE QUALITATIVE DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES ORDINAIRES DANS LES MATHEMATIQUES ITALIENNES: LE POINT DE VUE DE TULLIO LEVI-CIVITA (*)

Luca DELL'AGLIO – Giorgio ISRAEL *
Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
P.le A. Moro, 2
00185 – ROMA

Cette note historique fait partie d'un programme de recherche plus général ayant pour but de reconstruire le concept d'analyse qualitative (où, si l'on veut, de "qualitatif", tout court) dans l'histoire des mathématiques italiennes modernes et, en particulier, dans la période qui va de la fin du siècle passé à la deuxième guerre mondiale.[1]

Il s'avère qu'une catégorie très intéressante pour étudier ce problème (et, plus généralement, pour déceler les caractéristiques les plus importantes des mathématiques italiennes modernes) est le rapport (et l'opposition) entre *tradition* et *innovation* , c'est-à-dire cette tension souvent complexe et contradictoire que Thomas Kuhn a appelé la "tension essentielle".[2] Ce rapport prend dans les mathématiques italiennes une

(*) Recherche effectuée dans le cadre d'un programme en histoire des mathématiques italiennes de la Faculté des Sciences Mathématiques, Physiques et Naturelles de l'Université de Rome "La Sapienza" et du contrat de recherche n° 86.02096.01 en histoire des mathématiques italiennes du Consiglio Nazionale delle Ricerche .

1 Voir en particulier Dell'Aglio L., Israel G. 1987 et Israel G. 1988.

2 Sur les ambiguités qui peuvent s'attacher à ce genre d'oppositions, voir les intéressantes observations de Koyré (Koyré A.1961, voir l'étude sur Condorcet).

* G. Israel a donné le 9 mars 1988 une conférence au Séminaire d'Histoire des Mathématiques intitulée *Levi-Civita, Volterra, la théorie de la stabilité et l'analyse qualitative des équations différentielles ordinaires*.

forme tout à fait particulière, voire même paradoxale. On peut l'énoncer de la manière suivante: chaque fois qu'un élément d'innovation se présente, il apparaît strictement lié à un point de vue traditionnel, parfois même conservateur. Nous donnerons très synthétiquement quelques exemples pour mieux expliquer notre point de vue.

Le premier exemple est donné par l'introduction du concept de fonction de ligne de la part de Vito Volterra. Il est difficile de nier qu'il s'agit d'une démarche novatrice, qui ouvre la voie à une branche nouvelle de l'analyse moderne, c'est-à-dire à l'analyse fonctionnelle. Et pourtant une des difficultés les plus grandes dans l'appréciation de la signification et de la portée de la contribution de Volterra[3] est liée précisément au fait que ce concept se présente dans l'œuvre de Volterra d'une façon radicalement opposée à la définition algébrique moderne (liée au concept d'espace fonctionnel abstrait).[4] Il s'agit d'un concept qui découle d'un côté des exigences et des problèmes de nature physico-mathématique (les problèmes d'hystérèse et, plus généralement les problèmes héréditaires) et d'un autre côté représente (selon Volterra) l'application d'un principe très classique, qu'il appelle le "passage du discontinu au continu".[5] Il s'agit d'un principe très ancien: «le guide [...] est toujours le même, l'idée simple et féconde qu'Archimède a employée lorsqu'il a étudié, il y a 22 siècles, la quadrature de la parabole».[6] De ce point de vue la définition la plus proche de celle de Volterra est la définition de fonction de ligne qu'on trouve dans la *Mécanique Analytique* de Lagrange.[7] Pour Volterra l'algèbre est le point

---

3 Sur ces thèmes voir Dieudonné J. 1978, 1981.
4 Voir sur ce point Israel G. 1984a,b et Israel G. 1988.
5 Voir, par exemple, Volterra V. 1913, 1932.
6 Volterra V. 1913, p.20.
7 Lagrange J.-L. 1788, p.50-1.

de départ pour obtenir des généralisations de plus en plus poussées incluant le "noyau" algébrique:

> «La source des plus importantes propriétés du calcul infinitésimal a été le transport dans le domaine de ce calcul des propriétés connues de l'Algèbre finie et de l'Arithmétique. [...] Toute question infinitésimale a été envisagée comme un cas limite d'une question touchant le discontinu.
>
> La théorie des fonctions ordinaires *renferme* l'étude des propriétés de toute quantité obtenue par des opérations algébriques. Comme Lagrange l'a remarqué, l'Algèbre n'est qu'une *branche* de la théorie des fonctions, car les résultats des opérations algébriques sont les fonctions les plus élémentaires de l'analyse.»[8]

L'algèbre est donc une partie de l'analyse: il est bien clair que ce point de vue est opposé à la démarche axiomatique qui considère l'algèbre comme un cadre plus général incluant les cas plus "riches" en structures comme des cas particuliers.

Et pourtant il serait impossible de dire que ce programme, si profondément inspiré par les problèmes et les méthodes (et en particulier par les méthodes mathématiques) de la physique mathématique classique, ne soit pas novateur. Volterra a donné une contribution importante aux débuts de l'analyse fonctionnelle moderne, mais le fait paradoxal est qu'il l'a fait non pas *malgré* son point de vue traditionnel, mais *à cause* de ce point de vue – et cela parce qu'il s'est ramené au point de vue réductionniste de Lagrange.

Le deuxième example est donné par la géométrie algébrique italienne de Castelnuovo et Enriques. Ce sujet très complexe et très intéréssant demanderait une analyse détaillée: nous nous limiterons ici seulement à un aperçu très bref.

---

8 Volterra V. 1913, p.1-2.

Les développements les plus récents de la géométrie algébrique moderne ont fait justice de certaines évaluations négatives trop sommaires et superficielles de la contribution de l'école italienne de géométrie algébrique.[9] La méthode des géomètres italiens (et d'Enriques en particulier) n'était pas seulement une "mauvaise" méthode de démonstration, même si personne n'est plus disposé aujourd'hui à renoncer aux avantages de clarté et de sûreté des démonstrations présentées par la méthode axiomatique. Il s'agissait d'une démarche inspirée par une conception "psychologiste" des concepts mathématiques et par une conception "élargie" de la logique de la démonstration.[10] Le résultat de ce point de vue fut un développement scientifique tout à fait original et "moderne" et qui pourtant était inspiré par une idée très traditionnelle: la réévaluation de la géométrie synthétique. Certes, Enriques et Castelnuovo (sous l'influence de Corrado Segre) se détachèrent d'une façon assez nette des excès "puristes" de l'école de Luigi Cremona et n'acceptèrent jamais la dévaluation de l'analyse défendue par cette école. Et pourtant la racine du point de vue de la "deuxième" école géomètrique italienne[11] – la réévaluation du point de vue synthétique contre plus de deux siècles d'hégémonie du point de vue analytique découlant de l'œuvre de Descartes et de Fermat – est très classique et "ancienne" . Les résultats de cette démarche sont contradictoires. D'un côté on assiste à un puissant essor des recherches dans des domaines nouveaux de la géométrie algébrique (en particulier, la classification des surfaces algébriques). Mais, d'un autre côté, on assiste aussi à la prétention de réduire l'analyse à la géométrie, suivant

9 Voir par example Shafarevic I.R. 1977.

10 Voir Enriques F. 1906. Pour une analyse de la conception psychologiste de Enriques, voir Israel G. 1987.

11 La "première" est précisément celle de Cremona.

l'idée selon laquelle le point de vue géométrique qualitatif permet de faire tomber toute la théorie des équations différentielles dans le domaine de la géométrie.[12] L'hostilité contre le point de vue analytique, qui conduit Enriques à s'opposer à toute la tradition de la physique mathématique classique, et en particulier à la tradition 'à la Fourier', a certes des aspects curieux et parfois même excessifs. Mais il est aussi à l'origine des aspects positifs: par exemple, l'attitude très favorable de Enriques et Castelnuovo à l'égard de la théorie de la relativité est une conséquence directe de la parenté qui existe selon eux entre le point de vue qualitatif géométrique (c'est à dire, l'analyse synthétique et globale des propriétés de l'espace) et la conception einsteinienne de l'espace physique. Le lien est representé par la conception de la géométrie et de l'espace physique qui découle de l'œuvre de Riemann. On peut bien dire que personne n'a inspiré les développements de l'école italienne de mathématiques après l'Unité, autant que Riemann. C'est dans l'influence de son œuvre qu'on doit chercher les racines de conceptions qui ont inspiré plus d'un demi-siècle de mathématiques italiennes.[13]

Et nous voilà à notre troisième exemple, qui est l'objet principal de cette note: la contribution de Tullio Levi-Civita à la théorie de la stabilité et à l'analyse qualitative des équations différentielles ordinaires. Il s'agit encore d'un exemple de cette "tension essentielle" entre tradition et innovation. Une tradition qui a ses racines – nous l'avons à peine dit – dans l'œuvre de Riemann: peu de mathématiciens italiens apparaissent influencés par l'enseignement de Riemann comme Levi-Civita. Certes, l'influence de Riemann sur la pensée de Levi-Civita n'est pas directe. Il

12 Voir, par example, Enriques F. 1920.

13 Sur ce thème voir Volterra V.1902, 1909.

n'est pas possible de reconstruire ici la genèse de la pensée de Levi-Civita[14]: nous nous limiterons donc à souligner que l'influence de la pensée de Riemann apparaît d'une manière directe sur deux grands maîtres des mathématiques italiennes modernes, Betti et Beltrami, qui influencèrent beaucoup le maître de Levi-Civita, Luigi Bianchi. Mais après Betti c'est aussi l'école de physique mathématique française qui influence les développements des mathématiques italiennes.

Ces influences différentes sont toutes présentes dans la pensée mathématique de Levi-Civita, qui d'un côté apparaît comme un mathématicien très "géomètre", épris d'esprit qualitatif et intuitif, mais en même temps soucieux de la rigueur logique des démonstrations; et, d'un autre côté, comme un savant profondément inspiré par les thèmes de la physique mathématique classique. Ces aspects qui conduisent tour à tour à considérer Levi-Civita comme un géomètre ou comme un physico-mathématicien (sans qu'il soit possible de choisir d'une façon nette entre les deux classifications) ont été très clairement perçus par Hodge qui observait que les travaux de Levi-Civita n'ont pas été toujours appréciés, même s'il s'agit souvent de résultats de tout premier niveau sur le plan mathématique, parce que d'un côté ils donnent l'impression de problèmes particuliers qui n'intéressent pas le mathématicien "pur" et d'autre côté ils apparaissent de nature trop "théorique" au mathématicien "appliqué".[15]

Et voilà donc l'aspect spécifique que la tension entre tradition et innovation prend dans la pensée de Levi-Civita. D'un côté, ce sont des problèmes très classiques et traditionnels de la physique mathématique classique qui l'intéressent. D'un autre côté, les mathématiques de Levi-

---

14 Pour plus de détails voir Dell'Aglio L. 1987.

15 Hodge W.V.D. 1942, p.158.

Civita ne sont pas du tout traditionnelles: c'est la synthèse entre le point de vue de la géométrie différentielle, dans l'esprit de l'œuvre de Bianchi, et le calcul infinitésimal qui aboutit à cet "étrange" produit qu'est le calcul différentiel absolu (consideré plutôt "étrange" et très peu apprécié avant son utilisation par Einstein).[16]

L'attitude de Levi-Civita sur la question de la validité de la théorie de la relativité et l'histoire de ses rapports avec Einstein,[17] sont des exemples fascinants des résultats de cette tension contradictoire entre tradition et innovation qui est présente dans la pensée scientifique de Levi-Civita. En tant que physico-mathématicien classique, épris de la pensée de Lagrange, Levi-Civita ne peut qu'être méfiant à l'égard de cette nouvelle théorie "révolutionnaire". Et en 1919, quand il est déjà du côté de la relativité, il énonce très nettement, dans une célèbre conférence, la nécessité d'une attitude conservatrice dans la recherche scientifique:

> «In politica non sono molti quelli che amano chiamarsi puramente e semplicemente conservatori, perché conservatore si prende spesso a sinonimo di misoneista. Questo pericolo non c'è evidentemente in scienza. Nessun ricercatore può essere misoneista, ma molti cultori di scienza possono, quasi direi debbono essere conservatori per la loro stessa missione di custodire con gelosa cura un certo patrimonio intellettuale ben consolidato, e di vagliare con severo spirito critico tutto ciò che importa variazione o alienazione del patrimonio stesso.»[18]

Mais comme mathématicien Levi-Civita comprend très bien la portée de la synthèse d'Einstein et c'est de ce côté – du côté mathématique – qu'il parviendra non seulement à accepter la théorie, mais à donner une des

---

16 Sur la méfiance qui accueillit l'œuvre de Ricci-Curbastro, voir Dell'Aglio 1987.

17 Sur ces thèmes voir De Maria M. 1983, De Maria M., Cattani C. 1985, Dell'Aglio L. 1987.

18 "Come potrebbe un conservatore giungere alla soglia della nuova meccanica" (Levi-Civita T. 1919, p.197).

contributions les plus importantes à l'affermissement de ses fondements mathématiques et à son accueil par les milieux scientifiques.[19]

Le but de cette note est d'analyser une partie très peu connue de l'œuvre de Levi-Civita: ses contributions à la théorie qualitative des équations différentielles ordinaires et à la théorie de la stabilité. On voit ici encore une fois l'intervention paradoxale de cette tension entre tradition et innovation dont nous avons parlé jusqu'ici; et qui fait que Levi-Civita, *à cause* de son attitude traditionnelle, donne des contributions importantes, originales et novatrices à une théorie qui est à ses débuts.

On peut bien se demander pour quelle raison les méthodes qualitatives dans la théorie des équations différentielles ordinaires, introduites pour la première fois d'une façon cohérente et systématique par Poincaré,[20] ont connu depuis un si long oubli. Il s'agit d'un problème historiographique très complexe que nous n'avons pas la prétention d'aborder ici. Une contribution tout à fait partielle et pourtant utile serait d'établir qui et comment a conservé et développé ces méthodes pendant la longue période (plus d'un demi-siècle) qui sépare les travaux de Poincaré de la reprise massive qui a eu lieu pendant les dernières trente années.[21] On voit assez aisement que la conservation et le développement de cette tradition sont dus d'un côté aux contributions de quelque savant isolé et

---

19 Voir encore De Maria M. 1983 et De Maria M., Cattani C. 1985.

20 Il est bien vrai que les premières contributions à cette direction de recherche sont contenues dans deux travaux de Hill de 1877 et 1878 (Hill G.W. 1905, **1**, pp.243-70, 284-335) concernant l'étude des solutions périodiques des équations différentielles du mouvement de la lune. Mais l'importance des travaux de Hill fut comprise seulement une dizaine d'années plus tard par Poincaré qui établit les fondements d'une théorie générale dans le cas non linéaire (l'analyse de Hill était confinée au cas linéaire).

21 Cette reprise est liée surtout aux noms de S. Smale, V.I. Arnold, J. Moser et R. Thom. Voir en particulier Smale S. 1967 et Smale S. 1980 et Arnold V.I. 1976 et la bibliographie de ces travaux. Une des contributions les plus importantes dans le sillon ouvert par Poincaré a été la démonstration du théorème KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser): voir Moser J. 1973.

d'un autre côté à quelques écoles nationales qui se sont montrées particulièrement sensibles à ce genre de problèmes. Pour ce que concerne les savants isolés on doit surtout mentionner le nom de I. Bendixson qui perfectionna le théorème de Poincaré sur l'existence des cycles limites[22] et, pour ce que concerne les écoles nationales, c'est aux écoles russes et américaines qui revient le mérite d'avoir poursuivi les recherches qualitatives. Dans le cas de l'école mathématique russe on se souvient tout de suite de A. Lyapounov, de son analyse du concept de stabilité et de sa "deuxième méthode" qui permet de surpasser, dans l'analyse de la stabilité d'un équilibre, le cadre classique de la théorie des valeurs propres. Pourtant la théorie de Lyapounov, bien qu'il s'agisse d'un instrument désormais classique dans l'analyse qualitative des systèmes dynamiques, est fondée sur un point de vue surtout local. Il faut attribuer surtout aux recherches de Pontriaguine et Andronov sur la théorie des oscillations le mérite d'avoir développé une analyse de type global, consacrée en particulier à la recherche des solutions périodiques: les travaux de Pontriaguine et Andronov étaient suggérés par des problèmes techniques dans le domaine de la théorie des servomécanismes ("timons de Watt"), dans lesquels on assistait à l'apparition de cycles limites, c'est-à-dire à des phénomènes de type "bifurcation de Hopf". Le fameux théorème de la

---

[22] Que l'on appelle depuis "théorème de Poincaré-Bendixson" (voir Bendixson I. 1901).

bifurcation de Hopf est l'aboutissement naturel de cette ligne de recherche.[23]

La contribution de l'école américaine au développement de la théorie est due presque exclusivement à G.D. Birkhoff et est d'une nature tout à fait différente: Birkhoff était aussi un algébriste et son point de vue était rigoureusement abstrait et axiomatique, donc tout à fait différent de celui de l'école russe. Ses travaux portèrent surtout sur les fondements de la théorie et en particulier sur une définition tout à fait générale et abstraite du concept de système dynamique comme groupe infini de difféomorphismes sur une variété différentiable, qui généralise la notion de système de courbes solutions d'une équation différentielle vectorielle dans l'espace des phases. La théorie moderne est en fait la synthèse du cadre général et abstrait établi par Birkhoff et des contributions spécifiques de l'école russe qui se placent dans le contexte des problèmes de la mécanique classique qui avaient inspiré Poincaré dès le début de la théorie.

A ces contributions, qui sont sans aucun doute les plus importantes, on peut ajouter, à notre avis, une contribution non négligeable de la part de l'école mathématique italienne et, en particulier, de la part de Tullio Levi-Civita. Nous allons maintenant donner une synthèse des aspects principaux de cette contribution.

---

23 Hopf. E. 1943. Dans le cadre du problème que nous avons énoncé au début de cette section (expliquer pour quelle raison les méthodes qualitatives ont connu un si long oubli) on peut se demander si l'intérêt de l'école russe, et aussi de quelques mathématiciens allemands comme Hopf, pour ces méthodes, n'était pas dû à la place prédominante attribuée à la mécanique classique en Union Soviétique et en Allemagne à la fin des années trente. On se souvient en effet que la physique théorique (relativité et mécanique quantique) a été dédaignée en Union Soviétique pendant beaucoup d'années en tant qu'idéologie inspirée par une forme de "relativisme bourgeois" et en Allemagne en tant que science "juive" (il suffit de penser au point de vue de J. Stark et H. Dingler).

Les raisons pour lequelles Levi-Civita s'intéressa à la théorie de la stabilité et de l'analyse qualitative des équations différentielles ordinaires sont essentiellement trois. La première raison est liée à ses méthodes de recherche qui – comme nous l'avons souligné – étaient inspirées par un point de vue géométrique et se fondaient sur l'utilisation préliminaire et systématique de modèles géométriques. La deuxième raison est liée à l'intérêt que Levi-Civita marquait pour la mécanique classique et la mécanique céleste et en particulier pour le problème des trois corps: nous savons que les recherches qualitatives de Poincaré étaient issues de ce domaine. La troisième raison est liée à son intérêt pour les problèmes de la stabilité du mouvement, dans le domaine de la mécanique analytique.

Il faut tout d'abord souligner que Levi-Civita était peut-être le seul mathématicien italien de la fin du siècle dernier connaissant très bien tout les travaux le plus importants dans le domaine de la théorie de la stabilité et de l'analyse qualitative des équations différentielles ordinaires. Il mentionne les résultats de Lyapounov déjà dans un article de 1897.[24] Il ne faut pas oublier que l'article le plus important de Lyapounov sur la stabilité parut en russe en 1892, mais fut traduit seulement en 1907[25]: les résultats de Lyapounov (son premier article en français parut en 1897[26]) étaient connus seulement à partir de quelques courts résumés parus à partir de 1893 dans le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*. Levi-Civita mentionne aussi les résultats de Bendixson dans un article de 1901[27] quelques mois seulement après leur parution.[28] Les références aux

24 Levi-Civita T. 1897.
25 Liapounov A. 1907.
26 Liapounov A. 1897.
27 Levi-Civita T. 1901.
28 Bendixson I. 1900.

travaux de Poincaré – et en particulier aux articles "sur les courbes définies par une équation différentielle"[29] et à la "Mécanique céleste"[30] – sont très fréquentes. En revanche, Levi-Civita était assez polémique à l'égard des recherches de l'école anglaise et en particulier de E.J. Routh et W. Thomson (Lord Kelvin). On sait bien que le fondement de ces recherches était l'utilisation systématique d'une approximation linéaire des champs vectoriels associés aux équations différentielles, sans aucune justification de la légitimité de ne pas tenir compte des perturbations dues aux termes non linéaires. Un des grands mérites de Lyapounov est d'avoir démontré le caractère essentiel de la *non-linéarité* dans un très grand nombre de systèmes d'équations différentielles ordinaires et d'avoir détaché l'analyse qualitative des bornes imposées par l'école anglaise. L'attitude critique de Levi-Civita à l'égard du point de vue "linéariste" de l'école de Routh et Thompson – qu'il qualifie de non rigoureux – est tout à fait semblable à celle de Lyapounov:

> « ... ancora rimangono fuor di questione tutte le ricerche non rigorose, istituite specie dagli autori inglesi, col cosidetto metodo delle piccole oscillazioni.» [31]

D'autre part, si Levi-Civita voit très bien les limites du point de vue traditionnel de l'école anglaise et sait apprécier la nouveauté des recherches de Poincaré et de Lyapounov, sa conception du point de vue *qualitatif* est assez différente et le conduit presque toujours à rattacher les nouveaux concepts au contexte classique de la mécanique. On se souvient que Poincaré en introduisant le point de vue qualitatif n'avait nullement

29 Poincaré H. 1881, 1882, 1885, 1886.

30 Poincaré H. 1892-99.

31 Levi-Civita T. 1897, p.311.

prétendu détruire l'ancien point de vue quantitatif. Il s'agissait seulement de mettre, à côté de l'analyse quantitative, une analyse qualitative qui s'avérait nécéssaire en raison de l'impossibilité d'obtenir des solutions exactes pour une classe considérable d'équations différentielles ordinaires, en particulier pour les équations ressortant du problème des trois corps. Le modèle scientifique de Fourier restait pour Poincaré tout à fait valable[32]: l'idéal scientifique serait de conduire "les solutions jusqu'aux dernières applications numériques, condition nécessaire de toute recherche et sans laquelle on n'arriverait qu'à des transformations inutiles".[33] Il s'avérait malheureusement que cela n'était pas toujours possible et Poincaré, fidèle à sa conception réductionniste "souple", une fois encore montrait comment plier les cadres sans les briser[34]: il s'agissait d'introduire avant et à côté de l'analyse quantitative une analyse qualitative permettant, sinon de déterminer les solutions d'une façon explicite (ce qui est très rarement possible) ou d'une façon approximée (ce qui n'est pas toujours possible), de *construire géométriquement* les courbes définies par les équations différentielles. Le point de vue de Levi-Civita est assez différent. Son intérêt pour l'analyse géométrique n'est pas dicté par des considérations relatives aux difficultés du programme newtonien mais présente des caractéristiques tout à fait autonomes: on peut bien dire que l'esprit géométrique est dominant dans la conception de Levi-Civita. D'autre part,

32 «Les résultats qu'il [Fourier] a obtenu sont certes intéressants par eux mêmes, mais ce qui l'est plus encore c'est la méthode qu'il a employée pour y parvenir et qui servira toujours de modèle à tous ceux qui voudront cultiver une branche quelconque de la physique mathématique.» (Poincaré H. 1895).

33 Fourier J. 1821, p.xxii.

34 « Les théories anciennes reposent sur un grand nombre de coïncidences numériques qui ne peuvent être attribuées au hasard; nous ne pouvons donc disjoindre ce qu'elles ont réuni; *nous ne pouvons plus briser les cadres, nous devons chercher à les plier, et ils ne s'y prêtent pas toujours* . » (Poincaré H. 1912, p.360, l'italique a été ajouté par nous).

Levi-Civita est moins sensible que Poincaré au problème de l'analyse quantitative (et numérique). Bref, si pour Poincaré Fourier est un modèle de savant physico-mathématicien, pour Levi-Civita le vrai modèle reste Lagrange et sa conception abstraite et purement mathématique de la mécanique. A la vision lagrangienne, Levi-Civita "ajoute" une méthode fondée sur une analyse géométrique préalable des problèmes. Il se rallie donc d'une façon assez autonome et naturelle à l'analyse qualitative dans le sens de Poincaré (et de Liapounov) en raison de sa tendance à "voir" chaque problème d'un point de vue géométrique. Mais le cadre de sa conception de la mécanique reste très traditionnel et voisin de la conception abstraite et analytique de Lagrange[35]: nous verrons en effet que Levi-Civita essaie systématiquement de ramener tous les concepts "nouveaux" qui apparaissent dans la théorie de la stabilité et dans la théorie qualitative des équations différentielles ordinaires à des définitions déjà connues dans la tradition de la mécanique classique.

Les travaux de Levi-Civita dans lesquels les thèmes de l'analyse qualitative apparaissent d'une façon plus évidente sont, sans aucun doute, les travaux concernant la théorie de la stabilité. Il s'agit d'un groupe d'articles parus en 1900[36] et ensuite regroupés dans un article de 1901[37], qui furent écrits pendant le séjour de Levi-Civita à Padoue. Il faut ajouter à ces travaux l'article de 1897 déjà mentionné[38] et un autre de 1912.[39]

Le rapport complexe entre tradition et innovation est présent d'une façon tout à fait claire dans les définitions de stabilité utilisées par Levi-

35 Sur la conception de Levi-Civita des principes de la mécanique, voir Israel G. preprint.

36 Levi-Civita T. 1900a, b, c.

37 Levi-Civita T. 1901a.

38 Levi-Civita T. 1897.

39 Levi-Civita T. 1912.

Civita. Dans le cas de l'équilibre d'un système matériel, Levi-Civita adopte la définition d'équilibre stable donnée par Lagrange. Quand il étudie les propriétés de stabilité d'une solution quelconque d'un système d'équations différentielles de la forme:

$$[1] \qquad \frac{dx_i}{dt} = X_i\,(x_1,\dots, x_n; t) \qquad (i = 1,\dots,n)$$

il utilise une définition de stabilité analogue à celle de Lyapounov. Par exemple, dans son premier article de 1901 il donne la définition suivante de stabilité pour une solution périodique du système [1] dont les coefficients sont supposés périodiques et qu'il écrit (après un changement de variables) sous la forme $x_i = 0$ $(i = 1,\dots, n)$:

> « La soluzione $x_i = 0$ sarà a dirsi stabile [...] allora e solo allora che, per ogni intorno comunque piccolo E dell'origine, ne esiste un secondo H tale che, prendendo in H la posizione iniziale del mobile, questo rimane in E, per qualunque valore positivo o negativo di t. »[40]

Il faut observer que Levi-Civita ne se réfère pas à Lyapounov quand il donne cette définition, mais il l'appelle "stabilité inconditionnée à la Dirichlet",[41] ce qui n'est pas du tout fortuit. En effet, dans ses Leçons de Mécanique rationnelle, il explique la racine classique de la définition précédente, en montrant le lien qui la relie à la définition classique d'équilibre stable: et il le fait en interprétant la première définition dans l'espace de configuration[42], avec une représentation géométrique.[43] Il faut

---

40 Levi-Civita T. 1901a, p.42.

41 "Stabilità incondizionata alla Dirichlet". (Levi-Civita T., Amaldi U. 1923-6-7, Vol.II, p.464).

42 "Spazio degli atti di moto", dans le langage de Levi-Civita.

43 *Ibidem.*

aussi ajouter que la définition de Levi-Civita ne coïncide pas exactement avec la définition de Lyapounov: en effet, tandis que celle-ci est limitée à l'intervalle du temps $t \geq 0$, la définition de Levi-Civita est relative à une variation du temps sur l'axe réel tout entier. Levi-Civita reconnaît cette différence:

> «Per quanto mi fu dato rilevare dalle brevi relazioni dell'"Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik", l'Autore distingue la stabilità passata dalla futura e ottiene in quest'ordine di idee risultati di grande interesse.»[44]

Pourtant, dans ses travaux il ne fait jamais de différence entre stabilité passée et future pour des raisons qui sont évidemment liées au contexte mécanique de ses recherches et donc à l'hypothèse fondamentale de la réversibilité des phénomènes physiques. Il sera très clair sur ce point, qui montre encore un aspect de la dialectique tradition-innovation dans sa pensée:

> «Notiamo che nel caso dinamico di sistemi olonomi a vincoli indipendenti dal tempo e soggetti a forze conservative (o anche soltanto posizionali) le equazioni del moto restano invariate di fronte al cambiamento di t in $-t$ [...]. Perciò in tali casi, come già in quelli di equilibrio, la nozione di stabilità è applicabile senza limitazioni di tempo, vale a dire dal passato più remoto al più lontano futuro (per t variabile da $-\infty$ a $+\infty$).»[45]

On se rappellera que Poincaré utilise d'une façon fondamentale un autre concept de stabilité qu'il appelle ***stabilité à la Poisson*** : on dira que la trajectoire d'un point mobile est stable à la Poisson si, quand on décrit autour du point initial de la trajectoire un cercle ou une sphère de rayon r, le point , après être sorti de ce cercle (ou de cette sphère), y rentre une

---

44 Levi-Civita T. 1901, p.1.

45 Levi-Civita T., Amaldi U. 1923-6-7, Vol.II, p.466.

infinité de fois; et cela quel que soit r.[46] Or Levi-Civita n'utilise pas explicitement le concept de stabilité à la Poisson dans ses œuvres, mais il accepte explicitement le principe établi par Poincaré selon lequel *l'instabilité est la règle et la stabilité est seulement l'exception*. Ce principe est énoncé par Poincaré dans le cas des équations différentielles du premier ordre et du premier degré, tandis qu'il a une validité tout à fait générale (bien que d'un point de vue formel) dans les travaux de Levi-Civita. Cette conviction est fondée sur les arguments suivants.

Dans le cas d'un équilibre le théorème de Lagrange-Dirichlet a comme conséquence qu'on a la stabilité si le potentiel atteint un maximum. Or, les recherches de Lyapounov avaient montré que ce cas est exceptionnel: en général on a l'instabilité. C'est, en fin de compte, le problème de l'inversion du théorème de Lagrange qui avait été étudié par Levi-Civita dans le cas des systèmes mécaniques holonomes, à un seul degré de liberté et soumis à des forces positionnelles. Dans le cas des solutions statiques ou, plus généralement, périodiques d'un système différentiel de type [1] on a le théorème de Lyapounov énoncé par Levi-Civita de la façon suivante: une solution périodique est instable si au moins un de ses exposants caractéristiques a sa partie réelle différente de zéro.

Donc l'instabilité concerne la généralité des situations. Mais cette conclusion a, dans la pensée de Levi-Civita, une valeur "abstraite": en effet, en montrant que la stabilité est limitée à des cas exceptionnels, on finit par appauvrir cette notion du contenu physique qu'elle devrait revêtir surtout dans le contexte de la mécanique céleste. Donc, Levi-Civita observe:

---

46 En langage moderne on dira que la trajectoire doit contenir son ensemble ω-limite.

> «E' pur significante che venga fatto di accertare la instabilità proprio in un caso per il quale tutto sembrerebbe giustificare, dal punto di vista astronomico, la presunzione opposta.»[47]

Cela l'amène à distinguer entre l'aspect mathématique et l'aspect physique du concept de stabilité et c'est dans cette perspective qu'il fait allusion au rôle du concept de stabilité à la Poisson:

> « Bisogna concluderne che la stabilità naturale va intesa in un senso meno restrittivo. Tale è precisamente il concetto che informa le più recenti indagini del Sig. Poincaré.»[48]

L'utilisation de la méthode de Lyapounov dans les travaux de Levi-Civita montre le même type de dialectique entre tradition et innovation. Nous avons vu que Levi-Civita connaissait cette méthode avant 1897. Il l'utilisa dans des travaux de 1901 et 1906[49] et dans un article de 1912[50] consacré à l'analyse de la stabilité de la solution $x = 0, y = 0$ d'un système différentiel du deuxième ordre à coéfficients périodiques admettant un intégral quadratique $f = \text{const.}$ Mais dans tous les cas on voit qu'il ne considérait pas la méthode de Lyapounov comme quelque chose de vraiment nouveau. Une phrase montre très clairement que Levi-Civita est arrivé d'une façon tout à fait naturelle au concept de fonction de Lyapounov en passant par la démonstration de Dirichlet du théorème de stabilité de Lagrange (donc, encore une fois, il a suivi une voie classique pour s'approprier un concept 'nouveau'):

---

47 Levi-Civita T. 1901a, p.4.

48 *Ibidem.*

49 Levi-Civita T. 1901b, 1906b.

50 Levi-Civita T. 1912b.

> «E' ben conosciuto che se la forma f è definita, la detta soluzione è stabile.[51] E' sufficiente d'altronde (come ha fatto rimarcare l'autore) applicare all'integrale f = cost il ragionamento classico di Dirichlet per dimostrare il teorema di Lagrange sulla stabilità dell'equilibrio.»[52]

Toutes ces contributions sont intéressantes et importantes au point de vue de la méthode, mais le travail le plus important de Levi-Civita au point de vue de l'application des méthodes qualitatives est son article de1901 "sopra alcuni criteri di instabilità".[53] Ici on trouve réunis tous les aspects caractéristiques de la conception de Levi-Civita: sa tendance à l'analyse géométrique, l'attention pour le contenu mécanique des problèmes traités et la tendance à ramener les questions au point de vue de la mécanique analytique. Du point de vue des résultats ce travail est important pour deux raisons: il contient une analyse géométrique du problème de stabilité dans le problème des trois corps et il utilise d'une façon originale la méthode de surfaces de section de Poincaré. L'article commence avec une analyse géométrique préliminaire, tout à fait dans l'ésprit de la méthode de Levi-Civita. Il s'agit d'un modèle géométrique pour l'analyse de la stabilité d'une solution périodique d'un système différentiel qui consiste dans la réduction du problème de la stabilité des solutions périodiques à l'analyse de certaines transformations ponctuelles associées aux solutions. Dans ce modèle un rôle central revient à une méthode ("*méthode des transformations stables*") tout à fait analogue à la méthode des surfaces de section de Poincaré: mais, tandis que cette méthode se présente d'une façon occasionnelle et embryonnaire dans l'œuvre de Poincaré, ici elle est

---

51 Ici Levi-Civita renvoie à Lyapounov A. 1907.

52 Levi-Civita T. 1912b, p.238.

53 Levi-Civita T. 1901a.

présentée, d'une manière tout à fait générale, comme une théorie géométrique autonome, dans l'esprit de la "topologie dynamique" moderne.

Commençons par donner la définition de transformation stable. Soit

[2] $$x_i^{(1)} = f_i(x_1, \dots, x_m) \qquad (i = 1, \dots, m)$$

une transformation réelle, où les fonctions f_i sont analytiques et à jacobien non nul dans un voisinage C de l'origine, où elles sont nulles. Si on interprète les x_i et les $x_i^{(1)}$ comme les coordonnées des points P et P_1 du même espace de dimension m, on définit ainsi une application Γ, biunivoque et régulière sur C (c'est à dire un difféomorphisme):

[3] $$P_1 = \Gamma P$$

L'application inverse Γ^{-1} est définie par les équations:

[4] $$x_i^{(-1)} = \bar{f}_i(x_1, \dots, x_m) \qquad (i = 1, \dots, m)$$

Les itérées de ces transformations, sous l'hypothèse que les points restent dans C, sont:

[5] $$x_i^{(n)} = f_i\left(x_1^{(n-1)}, \dots, x_m^{(n-1)}\right) \qquad (i = 1, \dots, m)$$

[5'] $$x_i^{(-n)} = \bar{f}_i\left(x_1^{(-n+1)}, \dots, x_m^{(-n+1)}\right) \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

c'est à dire:

[6] $$P_n = \Gamma P_{n-1} \ ; \quad P_{-n} = \Gamma^{-1} P_{-n+1}$$

Il est évident que l'origine est un point fixe de Γ et de ses puissances.

Il est alors possible de donner la définition de la transformation stable. On dira que la transformation Γ est *stable* si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\eta > 0$ tel que, pour chaque P pour lequel $|x_i| < \eta$, on a $|x_i^{(n)}| < \varepsilon$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Dans le cas contraire on dira que Γ est instable.

La méthode de Levi-Civita est une combinaison de cette notion avec la notion de surface de section. Il considère un système d'équations différentielles de type [1], où les X_i sont analytiques par rapport aux x_i et périodiques par rapport à t et de période T. On suppose, comme toujours, qu'on connaît une solution périodique particulière $x_i = \varphi_i(t)$ $(i = 1,..., m)$ de période T, qu'on écrit sous la forme $x_i = 0$ $(i = 1,..., m)$ (moyennant la transformation de coordonnées $y_i = x_i - \varphi_i(t)$) et vérifiant la définition de stabilité que nous avons donnée auparavant. Soit:

$$[7] \qquad x_i = F_i\left(x_1^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}; t\right) \qquad (i = 1,\dots,m)$$

une intégrale générale de l'équation [1], où les F_i s'annulent à l'origine, restent dans un voisinage de l'origine et, pour chaque valeur finie de t, sont des fonctions analytiques des valeurs initiales $x_i^{(0)}$ des x_i. La périodicité des X_i entraîne alors la rélation suivante:

$$[8] \quad F_i\left(x_1^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}; t\right) = F_i\left(x_1^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}; t - nT\right) \ (i = 1,\dots m \ ; \ n \in \mathbb{Z})$$

où avec $x_i^{(n)}$ on dénote les valeurs de [7] pour $t = nT$. En indiquant par $f_i(x_1^{(0)},\dots, x_m^{(0)})$ les valeurs des fonctions F_i quand $t = T$, c'est à dire:

$$[9] \qquad x_i^{(1)} = f_i\left(x_1^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}\right) \qquad (i=1,\ldots,m)$$

on obtient les expressions suivantes pour les $x_i^{(n)}$:

$$[10] \qquad x_i^{(n)} = f_i\left(x_1^{(n-1)}, \ldots, x_m^{(n-1)}\right) \qquad (i=1,\ldots,m\ ;\ n\in\mathbb{Z})$$

Les transformations [9] définissent une transformation ponctuelle qui, avec ses itérées [10], donne les points $(x_1^{(n)},\ldots, x_m^{(n)})$, qui sont les intersections de la trajectoire générique [7] de [1] avec le "plan du temps" $t = nT$. Il s'agit précisément de la transformation considérée par Poincaré dans sa méthode des surfaces de section. On peut alors appliquer à cette définition la notion de stabilité et démontrer que l'instabilité de la transformation entraîne l'instabilité de la solution périodique $x_i = \varphi_i(t)$. On peut arriver à une conclusion analogue dans le cas où il y a stabilité; même si la situation est compliquée, parce que l'on ne sait pas *a priori* si la trajectoire sortira du voisinage dans l'intervalle de temps $(nT, (n+1)T)$.

Donc l'analyse de la stabilité des solutions périodiques est réduite à l'analyse des transformations ponctuelles. On voit de quelle manière Levi-Civita se place dans le courant des recherches qui de Poincaré aboutira aux résultats de Birkhoff sur les propriétés qualitatives des systèmes dynamiques. L'idée d'une théorie des transformations stables est déjà présente dans l'œuvre de Poincaré, mais d'une façon embryonnaire. Ici on a quelque chose de plus: c'est-à-dire une théorie systématique des transformations stables qui est présentée comme une théorie autonome et indépendente de la nature particulière de la transformation étudiée. L'introduction très longue à l'article de Levi-Civita a précisément pour but d'établir des critères généraux de stabilité (ou d'instabilité) pour une transformation stable quelconque. C'est la vision géométrique des problèmes analytiques qui permet à Levi-Civita de se placer à ce point de vue général.

L'analyse préliminaire, ayant pour but d'établir des critères généraux de stabilité et d'instabilité, est fondée sur la nature des termes présents dans l'équation [2], que Levi-Civita réécrit de la façon suivante:

$$[2^*] \qquad x_i^{(1)} = c_{i1}x_1 + \dots + c_{im}x_m + f'_i \qquad (i = 1,\dots,m)$$

où les f'_i contiennent seulement des termes d'ordre supérieur au prémier par rapport aux x_i ; il est fondé, en fin de compte, sur les propriétés des multiplicateurs de la transformation, c'est-à-dire des valeurs propres de la partie linéaire de [2*], solutions de l'équation algébrique en w :

$$[11] \qquad D(w) = \det(C - wI) = 0 \quad \text{avec} \quad C = [c_{ij}]_{i,j=1,\dots,m}$$

Le premier résultat important de Levi-Civita est le suivant: les transformations ponctuelles sont instables quand les valeurs propres n'ont pas toutes le module égal à 1.[54] L'interprétation de ce théorème dans le cas des transformations ponctuelles associées à des solutions périodiques permet à Levi-Civita d'obtenir une autre démonstration du théorème de Lyapounov. Effectivement, les multiplicateurs des transformations sont les $e^{\alpha_i T}$ où les α_i sont les exposants caractéristiques de la solution périodique considérée et T est la période du système. Donc la solution sera instable si les exposants caractéristiques ne sont pas tous imaginaires, c'est-à-dire si un au moins d'entre eux a sa partie réelle non nulle.

[54] Levi-Civita T. 1901a, p.20.

Le travail de Levi-Civita est important aussi parce qu'il permet de traiter des cas qui ne rentrent pas dans la théorie de Lyapounov, c'est-à-dire quand l'approximation du premier ordre n'est plus suffisante. Ses résultats ont aussi des conséquences importantes dans le domaine de l'astronomie.

Levi-Civita analyse, pour des raison de simplicité, le cas de dimension 2 (m=2), où, relativement aux différentes espèces de multiplicateurs unitaires, $(\pm 1, \mp 1)$, $(\pm 1, \pm 1)$, $(e^{i\vartheta}, e^{-i\vartheta})$, on obtient les transformations suivantes:

$$[12] \qquad \begin{cases} x_1 = x + f(x,y) \\ y_1 = y + g(x,y) \end{cases}$$

$$[13] \qquad \begin{cases} x_1 = x + f(x,y) \\ y_1 = y + x + g(x,y) \end{cases}$$

$$[14] \qquad \begin{cases} x_1 = x \cos\vartheta - y \sin\vartheta + f(x,y) \\ y_1 = x \sin\vartheta + y \cos\vartheta + g(x,y) \end{cases}$$

L'analyse du cas (14) se ramène à celle du cas [12] quand ϑ est commensurable avec 2π. Levi-Civita étudie donc seulement les cas (12) et [13] en démontrant l'instabilité sous des hypothèses peu restrictives.[55]

Les arguments utilités par Levi-Civita dans sa démonstration sont très intéressants parce qu'ils sont fondés sur l'utilisation d'une notion analogue à celle d'ensemble invariant, dans le sens contemporain. Par exemple, la démonstration du cas [12] procède de la manière suivante. On

[55] Les formes quadratiques φ et ψ de f et g ne doivent pas avoir de facteurs communs, dans le cas de [12] ; tandis que, dans le cas [13], le coéfficient de Y^2 doit être différent de zéro.

considère un cercle C ayant comme centre l'origine et de rayon ε ; dans ce cercle on considère un secteur S du premier quadrant ayant sa base sur les abscisses et comme arc α. Si ε et α sont très petits, on peut démontrer que, quel que soit le point P(x,y) en S, le système vérifie les inégalités:

$$[15] \qquad x_1 \geq x + \frac{1}{2}x^2 \;,\; y_1 \geq 0 \;,\; \frac{y_1}{x_1} \geq \operatorname{tg}\alpha \,.$$

Les deux premières inégalités montrent que le point transformé $P_1(x_1,y_1)$ appartient au premier quadrant; la dernière inégalité montre qu'il appartient au secteur S. Donc le secteur jouit d'une propriété tout à fait analogue aux ensembles invariants:

> « [tale] settore gode dunque della proprietà che applicando ai suoi punti la trasformazione [...], non si esce mai attraverso ai lati.»[56]

Ce résultat permet à Levi-Civita d'obtenir des informations sur les propriétés de la solution périodique x=0, y=0 du système d'équations différentielles

$$[16] \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = X = X_1 + X_2 + \dots \\ \dfrac{dy}{dt} = Y = Y_1 + Y_2 + \dots \end{cases}$$

possédant des exposants caractéristiques $\alpha_1 = -\alpha_2 = i\alpha$ purement imaginaires avec α réel. En particulier il démontre que l'instabilité peut être transportée dans ce domaine pour des valeurs de α commensurables

---

[56] Levi-Civita T. 1901, p.29. On peut observer que si la transformation est stable, le secteur est un ensemble invariant dans un sens tout à fait strict. En effet, les points transformés du point P ne peuvent pas sortir de C: donc la succession des points P_n doit être convergente dans C, ce qui est absurde.

avec $2\pi/T$. Dans ces cas l'analyse du système se ramène à l'analyse développée dans le cas des transformations du type [12] (quand $\alpha \neq 0$) ou du type [13] (quand $\alpha = 0$).

L'article de Levi-Civita se termine avec une application de ses résultats au cas des équations canoniques et, en particulier, aux équations canoniques du problème restreint des trois corps.

Les travaux que nous avons analysés jusqu'ici contiennent des exemples d'analyse qualitative qui se relient directement à son concept moderne; dans certains cas, comme celui de la méthode des transformations stables, on peut même dire que les techniques qualitatives exploitées sont plus voisines des techniques modernes que celles de Poincaré. Cela depend de la signification très étendue que Levi-Civita attribue à l'analyse qualitative (et qui souvent s'identifie à celle de modélisation géométrique). On peut donc inclure dans les résultats contenant des méthodes "qualitatives" certains travaux qui, d'un point de vue strict, s'éloignent de la conception classique d'analyse qualitative. Il s'agit, en particulier, d'un article concernant le "moyen mouvement du nœud lunaire"[57] et des contributions de Levi-Civita aux problèmes de la mécanique céleste, en particulier au problème des trois corps.[58]

L'article de 1911 sur le mouvement moyen du nœud lunaire étudie le comportement asymptotique de l'anomalie ϑ d'un point $P(x,y)$ en mouvement suivant la loi exprimée par le système d'équations différentielles:

57 Levi-Civita T. 1911.

58 Parmi lesquels nous nous référons surtout à Levi-Civita T. 1903a,b, 1904, 1906a

$$[17] \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$$

où les coefficients a_{ij} sont des fonctions périodiques de t, ayant la même période T.[59]

La voie la plus directe pour étudier ce problème serait d'analyser l'équation différentielle du premier ordre associée au système [17]:

$$[18] \qquad \frac{d\vartheta}{dt} = a_{11}\cos^2\vartheta + (a_{22} - a_{11})\cos\vartheta\,\sin\vartheta - a_{12}\sin^2\vartheta$$

Voici les raisons qui conduisent Levi-Civita à aborder la question d'un point de vue qualitatif:

> « Si è tentati di pensare che l'equazione [...] si presti bene alla discussione d'esistenza del moto medio asintotico. E' possibile che sia così. Devo tuttavia confessare che è esattamente a causa dell'arenarsi dei miei tentavivi in questa direzione che sono stato condotto ad aggirare le difficoltà con l'aiuto delle considerazioni sviluppate sin qui.» [60]

Il fera donc usage d'un modèle géométrique. Il commence par étudier la transformation linéaire S :

$$[19] \qquad \begin{cases} x = a\xi + b\eta \\ y = c\xi + d\eta \end{cases}$$

---

[59] On peut observer que la stabilité peu-être considerée comme une propriété du mouvement concernant le comportement asymptotique du rayon vecteur OP.

[60] Levi-Civita T. 1911, p.230.

où les a, b, c, d sont des fonctions continues de la variable t et les ξ, η sont les coordonnées du point π, que l'on suppose indépendentes de ce paramètre.

Dans cette étude un rôle particulier est joué par la rotation f du rayon vecteur OP dans le sens positif, à partir de $O\pi$. Levi-Civita démontre qu'il est possible d'établir une limite supérieure pour les oscillations de cette fonction (de t et de π). Plus précisement: si l'on considère un déplacement du point π dans la position π^* , et si l'on désigne avec P^* la position occupée par le point P à l'instant t, avec l'anomalie ϑ^* (si ϑ est l'anomalie de P) et avec f^* la valeur correspondante de f, alors, pour chaque t, l'inégalité suivante est vérifiée:

$$[20] \qquad |f^* - f| \leq |f_0^* - f_0| + \pi$$

Dans cette inégalité f_0^* et f_0 représentent les valeurs initiales de f^* et de f. Levi-Civita considère ensuite des substitutions linéaires pour lesquelles le comportement de la fonction f peut être décrit d'une façon simple, comme les substitutions périodiques ou semi-périodiques.[61] Dans ces cas le rayon vecteur prend, à la fin d'une période, une direction égale et opposée à celle initiale et par conséquent la relation suivante est vérifiée:

$$[21] \qquad f(t+T) - f(t) = N\pi$$

où N est un nombre entier, pair ou impair selon que ρ est positif ou négatif. Levi-Civita appelle N "index de la substitution semi-périodique".

La relation [21] permet d'écrire la fonction f de la façon suivante:

---

[61] Il s'agit des substitutions qui multiplient les quantités par un terme constant ρ après une période T (on obtient le cas périodique en posant $\rho = 1$).

$$[22] \qquad f(t) = \frac{N\pi}{T}t + \sigma(t)$$

où σ est une fonction périodique de période T. On en déduit que la différence $f(t) - (N\pi/T)t$, qui est toujours finie, s'annulle asymptotiquement par rapport à $N\pi/T$. On dira en ce cas que f possède un moyen mouvement "vrai" égal à $N\pi/T$. Ce cas est généralisé par Levi-Civita de la façon suivante:

> «Se una funzione f può essere rappresentata nella forma
>
> $$f(t) = \omega t + \varepsilon(t),$$
>
> dove $\varepsilon(t)$ rimane finita, anche per t indefinitamente grande, si dirà che essa ammette il "moto medio asintotico" ω. Si dirà analogamente che una sostituzione a coefficienti variabili possiede un modo medio asintotico se così è per la funzione f(t) (del punto rappresentativo P, attorno all'origine).»[62]

Il observe enfin que, si une substitution linéaire est le produit de deux transformations semi-périodiques (Σ et Σ'), elle possède un moyen mouvement asymptotique qui est la somme ou la différence - selon que le déterminant de Σ est positif ou négatif - des moyens mouvements "vrais" des substitutions qui la composent.

Le lien entre les considérations géométriques que nous avons exposées et l'étude de l'anomalie d'un point mobile suivant le système différentiel linéaire [19] est representé par la forme de l'intégrale générale de ce système. Il est nécessaire de distinguer le cas dans lequel les racines ρ_1, ρ_2 de l'équation caractéristique du système [19] sont réelles du cas dans

62 Levi-Civita T. 1911, p.217-8.

lequel elles sont complexes et conjuguées. Dans le premier cas l'intégrale générale du système [19] est:

$$[23] \qquad \begin{cases} x = a(t)\xi + b(t)\eta \\ y = c(t)\xi + d(t)\eta \end{cases}$$

où ξ, η sont des constantes d'intégration, $(a(t), c(t))$ et $(b(t), d(t))$ sont des solutions indépendantes de [19] et $a(t)$, $b(t)$ sont des fonctions semipériodiques avec un multiplicateur réel ρ_1.

Dans le cas de ρ_1 et ρ_2 complexes, la forme de l'intégrale générale est:

$$[24] \qquad \begin{cases} x = C_1 u_1 e^{\frac{K_1 t}{T}} + C_2 u_2 e^{\frac{K_2 t}{T}} \\ y = C_1 v_1 e^{\frac{K_1 t}{T}} + C_2 v_2 e^{\frac{K_2 t}{T}} \end{cases}$$

où les C_i sont des constantes d'intégration, les u_i , v_i sont des fonctions périodiques de période T et K_1, K_2 sont les exposants caractéristiques du système. La forme réelle de l'intégrale [24] est la suivante:

$$[25] \begin{cases} x = \alpha\tau + \beta\tau \\ y = \gamma\tau + \delta\sigma \end{cases} \qquad [25'] \begin{cases} \tau = \xi \cos(\frac{2\pi}{T} gt) - \eta \sin(\frac{2\pi}{T} gt) \\ \sigma = \xi \sin(\frac{2\pi}{T} gt) + \eta \cos(\frac{2\pi}{T} gt) \end{cases}$$

où $\xi = \mathrm{Re}\, C_1 = \mathrm{Re}\, C_2$, $\eta = \mathrm{Im}\, C_1 = -\mathrm{Im}\, C_2$; α, β, γ, δ sont des fonctions semi-périodiques de multiplicateur e^{-h} (où $h = -\mathrm{Re} \log \rho_1$) et g est une des déterminations possibles du coefficient de $2\pi i$ des exposants caractéristiques. Dans les deux cas – [23], [24] et [24'] – l'intégrale générale de l'équation [17] a donc la forme d'une substitution à coéfficients variables linéaires par rapport aux constantes d'intégration ξ,η. L'étude de l'anomalie ϑ associée à une solution générique de l'équation [17] peut être donc ramenée à l'étude déjà développée de la rotation f du rayon vecteur OP définie par cette transformation, étant donné que la différence $\vartheta - \varphi$ est toujours égale à une constante, c'est-à-dire à l'anomalie du point fixe $\pi(\xi,\eta)$. En particulier, la discussion du cas de ρ_1, ρ_2 complexes devient immédiate. Dans ce cas l'intégrale générale de l'équation [17] est le produit de deux substitutions semi-périodiques. On en déduit le résultat suivant: le point représentatif d'une solution quelconque de l'équation [17] possède un mouvement asymptotique moyen ω exprimé par la formule

$$[26] \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}(j \pm g)$$

avec le signe + ou - selon que le déterminant Δ de Σ est positif ou négatif.

On peut obtenir des conclusions analogues dans le cas de ρ_1, ρ_2 réels. Dans ce cas Levi-Civita considère avant tout la forme de l'intégrale générale quand $\eta = 0$, c'est à dire quand π se trouve sur l'axe des abscisses. On obtient ainsi des solutions semi-périodiques de la forme $x = \xi\, a(t)$, $y = \xi\, c(t)$ de sorte que la rotation du point mobile autour de l'origine est du type [22] où $\sigma(t)$ est une fonction périodique. Dans le cas général le comportement de la fonction f qu'on écrit

$$[27] \qquad f(t) = \frac{N\pi}{T} + \varepsilon(t)$$

est une conséquence de l'inégalité [20]. En effet, la différence entre l'équation [27] et sa correspondante dans le cas $\eta = 0$ ne peut pas surpasser, à un instant générique t, leur différence initiale de la quantite π. Donc $\varepsilon(t)$

restera finie, même si t croît indéfiniment. On en déduit l'existence d'un mouvement asymptotique moyen $N\pi/T$, qui est le même pour chaque solution du système donné.

En conclusion, le noyau le plus important de ce travail est un théorème qui démontre l'existence d'un mouvement asymptotique moyen pour les systèmes différentiels linéaires à coefficients périodiques. Ce résultat, qui s'applique surtout à la question du mouvement du nœud lunaire, est en un certain sens analogue aux questions concernant l'existence d'un cycle limite pour un système de trajectoires d'un système dynamique. Il faut pourtant observer que la méthode de Levi-Civita utilise un modèle géométrique qui est tout à fait autonome et indépendant de la nature des trajectoires: ce qui montre encore une fois le sens tout à fait général du concept de qualitatif dans l'œuvre de Levi-Civita.

Nous dirons quelque chose, en conclusion, sur les œuvres qui présentent des connexions partielles avec les thèmes de l'analyse qualitative, et en particulier sur une partie des recherches concernant le problème des trois corps. Nous mentionnerons surtout un article de 1903 sur les "trajectoires singulières et les chocs dans le problème restreint des trois corps".[63] Le résultat le plus important de l'article est la caractérisation des trajectoires singulières, c'est-à-dire des trajectoires de choc. Il s'agit d'une classe particulière du système d'équations différentielles qui décrit le mouvement. Levi-Civita analyse un système canonique qui décrit le mouvement dans les cas du problème des trois corps restreint: trois points matériels P, S, J de masses $0, 1 - \mu, \mu$. On

63 Levi-Civita T. 1903c. Il s'agit d'un article qui réunit les résultats exposés dans deux notes publiées en 1903 dans les *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences* (Levi-Civita T. 1901a,b).

pose $r = d(P,S)$, $\Delta = d(P,J)$, $\vartheta = \angle(ISP)$ et on dénote avec U le poténtiel unitaire de P par rapport à S et J. Le système est le suivant:

$$[28] \qquad \begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial R} & \dfrac{d\vartheta}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial \Theta} \\ \dfrac{dR}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial r} & \dfrac{d\Theta}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial \vartheta} \end{cases}$$

l'hamiltonien étant:

$$[29] \qquad F = \frac{1}{2}\left[R^2 + r^2\left(\frac{\Theta}{r^2} - 1\right)\right] - U + \mu r\cos\vartheta - \frac{1}{2}r^2$$

La condition supplémentaire pour la détermination des trajectoires singulières, par exemple dans le cas du choc entre P et S, est que l'on ait

$$[30] \qquad \lim_{t \to t_1} r(t) = 0$$

où t_1 est fini. L'équation [30] et l'intégrale de l'énergie $F = -C$ permettent de déduire le système réduit:

$$[31] \qquad \frac{d\vartheta}{d\rho} = -2\rho^2 \frac{\vartheta'}{H} \quad , \quad \rho\frac{d\vartheta'}{d\rho} = -4(\vartheta' + 1) - 2\mu\rho\frac{W}{H}$$

où $\rho = |\sqrt{r}|$, $\vartheta' = (\Theta/\rho^4) - 1$, $H = -\rho R$, et R est obtenue des équations $F = -C$, $W = \sin\vartheta(1 - 1/\Delta^3)$. Ce système d'équations différentielles caractérise les trajectoires singulières de la façon précisée par le théorème suivant: les trajectoires singulières le long desquelles se produit un choc entre P et S, dans un temps fini, sont toutes les solutions du système [31] – et uniquement de ce système – analytiques pour $\rho = 0$. [64]

Sur la base de ce résultat Levi-Civita développe "une application de nature qualitative"[65] concernant l'analyse d'un type particulier de trajectoires singulières, c'est-à-dire les trajectoires fermées qui sont caractérisées par le fait d'être simultanément des trajectoires de "collision" et d'"éjection" (qui "naissent et meurent en S"). Après avoir montré que dans le cas du problème des deux corps ($\mu = 0$) ces trajectoires, en tant que solutions des équations correspondantes, se présentent pour des valeurs négatives de la constante de l'énergie, il étend en partie ce résultat au cas général, sous l'hypothèse que μ soit très petit pour $C > 1$. Donc dans ce cas l'appellation "qualitatif" se réfère au fait qu'une classe particulière de trajectoires se présente pour des valeurs particulières d'un paramètre.

Le concept de "qualitatif" apparaît aussi dans un article "sur la résolution qualitative du problème restreint des trois corps"[66] qui est consacré encore à la question des chocs dans le problème des trois corps: son point de départ est la constatation de l'impossibilité de considérer les corps célestes comme des points matériels. Par conséquent, la régularité du mouvement, c'est-à-dire l'absence des chocs, est liée à une limite insurmontable concernant les distances mutuelles entre les corps:

> « ... riconoscere a priori sui dati iniziali quando ciò avviene, ecco il fine ultimo dell'analisi qualitativa del nostro problema.»[67]

---

64 *Ibidem*, p.297.

65 *Ibidem*.

66 Levi-Civita T. 1906a (et aussi Levi-Civita T. 1904, qui est un compte rendu du travail précédent).

67 *Ibidem*, p.420.

Dans ce cas l'"analyse qualitative" ne signifie pas seulement étudier la correspondance entre les valeurs de certain paramètres et le type de trajectoire considerée (régulière ou singulière), mais aussi étudier les propriétés globales du mouvement, c'est-à-dire, avec les mots de Levi-Civita, "percevoir la nature du mouvement".[68]

Pour ce qui concerne le contenu de ce travail, nous dirons seulement qu'il s'agit d'une étude de l'équation de Hamilton-Jacobi du système canonique et, en particulier, de l'équation suivante, qui est une conséquence de l'équation de Hamilton-Jacobi:

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = \beta \qquad [32]$$

où W est une intégrale complète de l'équation de Hamilton-Jacobi. Le résultat le plus important de cette recherche est le suivant: on peut délimiter un domaine D contenant S, tel que, si P entre dans D, son mouvement se vérifie nécessairement le long d'une des courbes définies par l'équation [32].

Ce qui précède donne une idée assez précise des caractéristiques de la contribution de Levi-Civita à l'analyse qualitative des équations différentielles ordinaires et à la théorie de la stabilité. Nous soulignons encore une fois, en concluant cette note, les aspects apparemment paradoxaux auquels donne lieu la tension entre tradition et innovation dans le contexte des résultats de Levi-Civita que nous avons examinés ici. On a vu que le "conservatorisme" de Levi-Civita, ses liens avec les thèmes de la mécanique classique dans un sens tout à fait lié à un point de vue 'à la Lagrange', le pousse à accepter avec une très grande prudence les

68 "Percepire la natura del moto" (*Ibidem*).

définitions nouvelles dans le domaine de la stabilité et, en tout à cas, à s'efforcer toujours de relier ces nouvelles définitions au contexte classique. D'autre côté c'est un de ces aspects "traditionalistes" qui conduit Levi-Civita à des innovations importantes: il s'agit de la démarche géométrique avec laquelle il aborde des classes de problèmes de mécanique céleste et de stabilité. Un point de vue "conservateur", parce que pour Levi-Civita l'utilisation de la géométrie se situe dans une optique du type riemannien et ne réprésente pas une "méthode nouvelle" comme c'est le cas de Poincaré: il faut bien souligner, à cet égard, que Levi-Civita ne parle jamais d'*analysis situs*. Et pourtant ce point de vue "conservateur" engendre des résultats vraiment nouveaux précisément à cause de sa nature géométrique générale et non lié *a priori* au problème spécifique étudié. La construction de modèles géométriques pour l'analyse qualitative de systèmes différentiels issus des problèmes de la mécanique se relie directement au point de vue de l'analyse qualitative moderne.

BIBLIOGRAPHIE

ARNOLD V. 1976, *Les Méthodes Mathématiques de la Mécanique Classique*, Editions MIR, Moscou (1ère éd. russe 1974).

BENDIXSON I. 1901, "Sur les courbes définies par des équations différentielles", *Acta Mathematica*, **24**, pp.1-88.

BIRKHOFF G.D. 1920, "Surface transformations and their dynamical applications", *Acta Mathematica*, **43**, pp.1-119.

BIRKHOFF G.D. 1927, *Dynamical Systems*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol.9, Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island.

BRIGAGLIA A. 1984, "La teoria generale delle algebre in Italia dal 1919 al 1937", *Rivista di Storia della Scienza*, **1**, n°2, pp.199-237.

DELL'AGLIO L. 1987, *Sul contributo di Tullio Levi-Civita all'analisi qualitativa delle equazioni differenziali ordinarie*, Tesi di Laurea, Dipartimento di Matematica, Università di Roma "La Sapienza".

DELL'AGLIO L., ISRAEL G. 1987, "I temi della stabilità e dell'analisi qualitativa nell'opera di Levi-Civita e di Volterra", dans *La Matematica tra le Due Guerre mondiali (Milano, Gargnano del Garda, 8-11 Ottobre 1986)*, Pitagora Editrice, Bologna, pp.125-42.

DE MARIA M. 1983, "L'impatto della relatività in Italia (echi di una polemica in un paese marginale)", dans *Atti del III Congresso Nazionale di Storia della Fisica (Palermo, 11-16 Ottobre 1982)*, a cura di F. Bevilacqua e A. Russo (2 Voll.), C.N.R., Vol.I, pp.559-568.

DE MARIA M., CATTANI C. 1985, "The 1915 epistular controversy between A. Einstein and T. Levi-Civita", dans *Proceedings of the 4th Marcel Grossmann Meeting on the recent developments of General Relativity (Roma 1985)*, à paraître.

DIEUDONNE' J. 1978, *Abrégé d'histoire des mathématiques (1700-1900)*, (2 vols.), Hermann, Paris.

DIEUDONNE' J. 1981, *History of Functional Analysis*, North-Holland, Amsterdam.

ENRIQUES F. 1906, *Problemi della scienza*, Zanichelli, Bologna.

ENRIQUES F. 1920, "La evolución del concepto de la geometria y la escuela italiana durante los ùltimos cincuenta años", *Revista Matemàtica Hispano-Americana*, Tomo II, Nùms.1-2, pp.1-17.

FOURIER J. 1821, *Théorie analytique de la chaleur*, Paris.

GOODSTEIN J.R. 1975, "Levi-Civita, Albert Einstein and relativity in Italy", dans *Tullio Levi-Civita. Convegno Internazionale celebrativo del centenario della nascita, (Roma, 17-19 Dicembre 1973)*, Accademia Nazionale dei Lincei.

HILL G.W. 1877, "On the Part of the Motion of the Lunar Perigée which is a Function of the Mean Motions of the Sun and Moon", *Acta Mathematica*, **8**, pp.1-36.

HILL G.W. 1905, *Collected Mathematical Works*, 4 vols. (Johnson Reprint Corp., 1965).

HODGE W.V.D. 1942, "Tullio Levi-Civita", *Obituary Notices of Fellows of the Royal Society*, **4**, pp.151-65.

HOPF E. 1943, "Abzweigung einer periodischen Lösung von einer stationären Lösung eines Differential system, *Ber. Vehr. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Nat. Kl.*, **95**, No.1, pp.3-22.

INGRAO B., ISRAEL G. 1985, "General Economic Equilibrium Theory. A History of Ineffectual Paradigmatic Shifts" (I), *Fundamenta Scientiae*, 6, pp.1-45.

ISRAEL G. 1984a, "Vito Volterra, un fisico matematico di fronte ai problemi della fisica del Novecento", *Rivista di Storia della Scienza*, **1**, n°1, pp.39-72.

ISRAEL G. 1984b, "Le due vie della matematica italiana contemporanea", dans *La ristrutturazione delle scienze fra le due guerre mondiali (Atti del Convegno "La* *ristrutturazione delle scienze fra le due guerre mondiali", Firenze-Roma, 28 Giugno-3 Luglio 1980)*, a cura di G. Battimelli, M. De Maria, A. Rossi, (2 vols.), Editrice Universitaria di Roma" La Goliardica", Vol.I ("L'Europa"), pp.253-87.

ISRAEL G. 1987, "Federigo Enriques: A Psychologistic Approach for the Working Mathematician" (preprint), à paraître dans *Perspectives in Psychologism* (M.A. Notturno ed.), Nijhoff, Boston (sous presse).

ISRAEL G. 1988 , "Volterra and "Analytical Mechanics" of Biological Associations", (preprint).

KOYRE' A. 1961, *Etudes d'histoire de la pensée philosophique*, A. Colin, Paris.

LAGRANGE J.-L. 1788, *Mécanique Analytique*, Paris.

LEVI-CIVITA T. 1897, "Sulla stabilità dell'equilibrio per i sistemi a legami completi", *Atti dell'Istituto Veneto*, **LV**, pp.1247-1250.

LEVI-CIVITA T. 1900a, "Sur l'instabilité de certaines substitutions", *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, **CXXX**, pp. 103-6.

LEVI-CIVITA. T 1900b, "Sur le problème restreint des trois corps", *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, **CXXX**, pp.236-39.

LEVI-CIVITA T. 1900c, "Sur l'instabilité de certaines solutions périodiques, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, **CXXX**, pp.465-7.

LEVI-CIVITA T. 1901a, "Sopra alcuni criteri di instabilità", *Annali di Matematica Pura e Applicata*, Serie III, **V**, pp.221-308.

LEVI-CIVITA T. 1901b, "Sulla determinazione di soluzioni particolari di un sistema canonico quando se ne conosce qualche integrale o relazione invariante", *Rendiconti dell'Accademia dei Lincei*, s.5, **X**, pp.3-9.

LEVI-CIVITA T. 1903a, "Sur les trajectoires singulières du problème restreint des trois corps", *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, **CXXXV**, pp.82-4.

LEVI-CIVITA T. 1903b, "Condition du choc dans le problème restreint des trois corps", *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, **CXXXV**, pp.221-3.

LEVI-CIVITA T. 1903c, "Traiettorie singolari ed urti nel problema ristretto dei tre corpi", *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, s.3, **IX**, pp.1-32.

LEVI-CIVITA T. 1904, "Sur la résolution qualitative du problème restreint des trois corps", in *Vehr. des Intern. Math. Kongresses, Heidelberg 1904*, pp.402-408.

LEVI-CIVITA T. 1906a, "Sur la résolution qualitative du problème restreint des trois corps", *Acta Mathematica*, **30**, pp.305-27.

LEVI-CIVITA T. 1906b, "Sur la recherche des solutions particulières des systèmes différentiels et sur les mouvements stationnaires", *Prace mat.-fiz.*, ***XVII***, pp.1-40.

LEVI-CIVITA T. 1911, "Sur les équations linéaires à coefficients périodiques et sur le moyen mouvement du nœud lunaire", *Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, s.3, **28**, pp.325-76.

LEVI-CIVITA T. 1912, "Sur les systèmes linéaires, à deux inconnues, admettant une intégrale quadratique", *Annaes da Acad. Polytechnica do Porto*, **VII**, pp.193-206.

LEVI-CIVITA T. 1915, "Sulla regolarizzazione del problema piano dei tre corpi", *Rendiconti dell'Accademia dei Lincei*, s.5, **XXIV**, pp.61-75.

LEVI-CIVITA T. 1916, "Sur la régularisation du problème des trois corps", *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, **CLXII**, pp.625-8.

LEVI-CIVITA T. 1919, "Come potrebbe un conservatore giungere alla soglia della nuova meccanica", *Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Roma*, **V**, pp.10-28.

LEVI-CIVITA T. "Commemorazione del Socio Nazionale Gregorio Ricci-Curbastro", *Memorie dell'Accademia dei Lincei*, s.6, **I**, p.555-64.

LEVI-CIVITA T. 1927, "Sur les chocs dans les problèmes des trois corps", *Comptes-Rendus du 2ème Congrès International de Mécanique Appliquée, Zurich*, pp.96-106.

LEVI-CIVITA T. 1960, *Opere Matematiche*, pubbl. a cura dell'Accademia Nazionale dei Lincei, (5 Voll.), Accademia Nazionale dei Lincei, Roma.
LEVI-CIVITA T., AMALDI U. 1923-6-7, *Lezioni di Meccanica Razionale*, (3 vols.), Zanichelli, Bologna.
LEVI-CIVITA T., RICCI CURBASTRO G. 1900, "Méthodes du calcul différentiel absolu et leurs applications", *Mathematische Annalen*, **LIV**, pp.125-201.
LYAPOUNOV A. 1897, "Sur l'instabilité de l'équilibre dans certains cas où la fonction des forces n'est pas un maximum", *Journal de Mathématique*, S.5, III, pp.81-94.
LYAPOUNOV A. 1907 (1892), "Problème général de la stabilité du mouvement", *Annales de la Faculté de Science de Toulouse*, S.2, 9, pp.203-474.
MOSER J. 1973, *Stable and Random Motions in Dynamical Systems*, Annals of Mathematics Studies No.77, Princeton University Press, New Jersey.
POINCARE' H. 1881, "Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle", *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, S.3, **7**, pp.375-422.
POINCARE' H. 1882, "Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle", *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, S.3, **8**, pp.251-296.
POINCARE' H. 1885, "Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle", *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, S.4, **1**, pp.167-244.
POINCARE' H. 1886, "Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle", *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, S.4, **2**, pp.151-217.
POINCARE' H. 1892-9, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, (3 vols.), Gauthier-Villars, Paris.
POINCARE' H. 1895, *Théorie analytique de la propagation de la chaleur*, Gauthier-Villars, Paris.
POINCARE' H. 1912, "Les rapports de la matière et de l'éther", *Journal de Physique Théorique et Appliquée*, 5ème série, **2**, pp.347-60.
ROUTH E.J. 1877, *Essay on the stability of steady motion*, Cambridge.
SHAFAREVICH I.R. 1977, *Basic Algebraic Geometry*, Springer, Berlin.
SMALE S. 1967, "Differential Dynamical Systems", *Bulletin of the American Mathematical Society*, **73**, pp.747-817.
SMALE S. 1980, *The Mathematics of Time, Essays on Dynamical Systems, Economic Processes and Related Topics*, Springer, New York.
THOMSON W., TAIT P.G. 1879, *Treatise on natural philosophy*, Cambridge.
VOLTERRA V. 1902, "Betti, Brioschi, Casorati. Trois Analystes italiens et trois manières d'envisager les questions d'Analyse", *Compte rendu du 2ème Congrès intern. des math., Paris 1900*, Paris, Gauthier-Villars, pp.43-57.
VOLTERRA V. 1909, "Le Matematiche in Italia nella seconda metà del secolo XIX", *Atti del Congresso Internazionale dei Matematici, Roma, 6-11 Aprile 1908*, Vol.I, Roma, Salviucci, pp.55-65.
VOLTERRA V. 1913, *Leçons sur les fonctions de lignes* (professées à la Sorbonne en 1912), recuillies et rédigées par Joseph Pérès, Gauthier-Villars, Paris, 1913.
VOLTERRA V. 1932, "Le calcul des variations, son évolution et ses progrès, son rôle dans la physique mathématique", *Publ. par les Facultés des sciences de l'Université Charles et de l'Université Masaryk, Praha-Brno, 1932*.
VOLTERRA V. 1962, *Opere Matematiche. Memorie e Note*, pubbl. a cura dell'Accademia Nazionale dei Lincei col concorso del C.N.R. (5 Voll.), Accademia Nazionale dei Lincei, Roma.