Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques

Martin Zerner

La rectifiabilité des courbes dans les traités d'analyse français de la deuxième moitié du XIXème siècle

Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques 1re série, tome 10 (1989), p. 267-281
<http://www.numdam.org/item?id=CSHM_1989__10__267_0>

LA RECTIFIABILITE DES COURBES DANS LES TRAITES D'ANALYSE FRANCAIS DE LA DEUXIEME MOITIE DU XIXème SIECLE

Martin ZERNER *
Université de Nice
et équipe REHSEIS

Afin d'éviter un malentendu, j'ai légèrement modifié le titre annoncé pour l'exposé oral de ce séminaire. Le terme quelque peu barbare de rectifiabilité indique que je ne m'occupe pas de la détermination effective (par calcul ou à l'aide d'un instrument) de la longueur d'une courbe. Et pour cause: cet exposé est le sous-produit d'une étude plus longue ayant pour objectif de préciser comment un exposé d'enseignement des fondements du calcul différentiel était né, celui qui a eu cours jusque dans les années 1950. Ce travail, qui a fait l'objet de discussions au sein du groupe GRIMM, est donc aussi proche de l'histoire de l'enseignement que de celle des mathématiques. J'en ai extrait un point un peu plus technique, donc plus proche de l'histoire habituelle des mathématiques.

Pourquoi justement celui-ci? Je vois trois raisons que j'indique très brièvement, elles s'éclaireront par la suite. Une raison évidente est que la condition nécessaire et suffisante de rectifiabilité apparaît pour la première fois dans le traité de Jordan. Une deuxième raison est que dans une série de traités, ceux que j'appelle la deuxième génération, le problème de la rectification est le premier qui mette en jeu le principe de substitution des infinitésimaux. La troisième, qui me paraît la plus importante, est que c'est un des points où l'on voit apparaître, directement ou indirectement, explicitement ou implicitement, un présupposé qui m'apparaît comme inséparable du principe de substitution. Il s'agit de ce que j'appellerai la monotonie par morceaux: pour toute fonction continue sur un intervalle borné, on peut trouver une division finie en sous-intervalles sur lesquels elle soit croissante ou décroissante. Cauchy avait déjà utilisé des fonctions de la forme $x^k \sin(1/x)$ qui mettent en défaut cette affirmation. Il n'empêche: tous les auteurs ultérieurs l'utilisent, en l'explicitant à des degrés divers, jusqu'à, mais non compris, Jordan dans la première édition de son cours de l'Ecole Polytechnique. C'est un des faits qui m'amènent à nuancer fortement, sans toutefois la contredire, l'affirmation d'Hélène Gispert [4] qui fait de cette première édition un traité d'analyse comme les autres de son époque.

* Conférence donnée au Séminaire d'Histoire des Mathématiques le 24 février 1988.

La classification des traités

J'ai pris le parti de travailler sur un corpus choisi selon quelques critères dont le premier est d'avoir eu une édition au moins entre 1870 et 1914. J'ai donné ailleurs [9] plus de précisions sur ces critères et je n'y insiste pas ici, on trouvera en annexe la liste des ouvrages qu'ils m'ont amené à retenir. A l'exception de Jean Dhombres [3] qui n'a pas publié jusqu'ici ce qui concerne le contenu, je crois être le seul à travailler sur un corpus systématique et autant que possible exhaustif. La méthode est astreignante, mais elle a de sérieux avantages: on ne voit pas un livre du même œil quand on le situe dans une série. Elle a aussi des limites évidentes, en particulier à cause des ouvrages qu'elle écarte de son champ.

Ce corpus une fois constitué, il fallait le classer, et d'abord le périodiser. Une première indication est donnée par les dates de la première édition. Un fait frappe au premier coup d'œil: le traité élémentaire de Lacroix (1802) et les éléments de Boucharlat (1813) sont réédités jusqu'en 1881 et 1891 respectivement, ayant eu chacun neuf éditions (il existe même un tirage de Boucharlat de 1926). Après eux, bien des traités ont été écrits qui n'ont pas été réédités à partir de 1870. Le premier à l'être sera les *éléments de calcul infinitésimal* de Duhamel (1856). Voilà donc un premier groupe de deux traités bien individualisé chronologiquement, je l'appelle la première génération. A l'autre bout de la période, autre groupe bien individualisé, par le contenu cette fois, celui des traités modernes, caractérisés par une construction logique des nombres irrationnels et une démonstration rigoureuse des propriétés des fonctions continues. Je l'appelle la troisième génération, considérant qu'il n'y en a qu'une entre la première et lui. Le premier représentant en est l' *introduction à la théorie des fonctions* de Jules Tannery.

La deuxième génération est caractérisée par la présence du principe de substitution des infinitésimaux sur lequel je reviendrai plus loin. Il y figure comme un résultat central toujours présenté au début de l'ouvrage. On sait que cette conception avait été introduite par Duhamel (Thierry Guitard [5]).

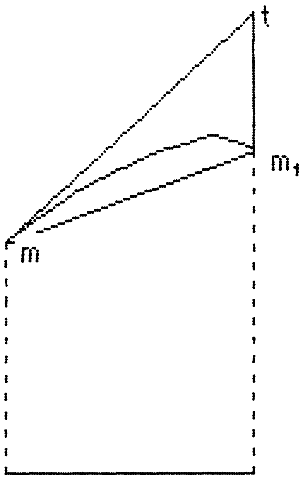
Tous les ouvrages parus entre 1856 et 1885 ne comportent pas le principe de substitution. Mais ceux qui ne le contiennent pas, peu nombreux, présentent quelques autres caractères qui les rapprochent de la première génération. Il semblerait donc qu'ils correspondent, lors de leur parution, à un mode d'exposition appartenant au passé (il ne faut pas voir là un jugement de valeur). C'est ce que j'appelle des archaïsmes de deuxième espèce, la première correspondant au cas de Boucharlat et Lacroix, puis à ceux de Sturm (1857) et Serret (1868), ouvrages de la deuxième génération qui ont été réédités jusqu'en 1929 et 1911 respectivement. Par la suite, on trouve aussi des archaïsmes de deuxième espèce se rattachant à la deuxième génération.

Cette classification ne prétend pas s'appliquer au delà du problème qui fait l'objet de mon étude et du corpus que j'ai constitué à cet effet. Dans ce cadre, son efficacité est marquée entre autres par le fait que sur 27 ouvrages, 3 seulement lui échappent et ces trois sont très nettement des ouvrages de transition (voir l'annexe pour la classification ouvrage par ouvrage).

La première génération: pas de problème

Dans les ouvrages de la première génération, on considère comme une évidence que le rapport de l'arc à la corde a pour limite un quand l'un et l'autre tendent vers zéro. La formule donnant la différentielle de l'arc en résulte immédiatement. Cette façon de procéder se retrouve dans les archaïsmes de deuxième espèce se rattachant à la première génération.

A titre d'intermède, voyons comment la question est traitée en 1841 par Cournot [2]. Lui qui est en général prolixe et compliqué est ici simple et bref (n° 174). Après avoir affirmé lui aussi que l'arc était équivalent à la corde (pour le dire en langage moderne), il ajoute "voici comment on a coutume de [le] démontrer". Il se place sur un arc où la concavité ne change pas (on voit que le présupposé de monotonie par morceaux de la dérivée intervient ici). Il admet, avec Archimède, que de deux courbes joignant deux points et tournant leur concavité du même côté, l'extérieure est la plus longue. (Ceci peut naturellement se démontrer directement pour les lignes polygonales, mais ici on l'utilise aussi pour l'arc de courbe.) On a alors la figure suivante:



et les relations (ici et par la suite, je remplace les barres de fraction horizontales et les symboles de racine carrée des originaux par des barres obliques et des exposants pour des raisons de commodité):

$$mm_1 = (\Delta x^2+\Delta y^2)^{1/2}$$

$$mt = \Delta x\,(1+y'^2)^{1/2}$$

$$tm_1 = y'\,\Delta x - \Delta y$$

$$mtm_1/mm_1 = [(1+y'^2)^{1/2} + y' - \Delta y/\Delta x]/[1+(\Delta y/\Delta x)^2]^{1/2}$$

Un calcul qui ne fait intervenir que la définition de la dérivée montre que ce rapport tend vers un. Le rapport de l'arc à la corde est compris entre 1 et le précédent, il a donc la même limite.

Cournot ajoute là-dessus que l'existence elle-même de l'arc de courbe demande une justification puisqu'on ne peut pas comparer directement un arc de courbe à un segment de droite, ce qui fait la différence avec une surface plane. Mais il ne donne pas cette justification.

Quelques mots sur le principe de substitution

Nous avons vu que le principe de substitution des infinitésimaux se trouvait au début des traités de la deuxième génération. Il est presque toujours énoncé en deux parties:

1. Si α et β sont des infiniment petits et α' et β' n'en diffèrent

que de quantités infiniment petites par rapport à eux, le rapport α'/β' a la même limite que le rapport α/β.

2. Si la somme à termes positifs $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n$ a pour limite S quand n tend vers l'infini et si β_i ne diffère de α_i que par une infiniment petit d'ordre supérieur, alors $\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n$ a aussi S pour limite.

Ces énoncés s'appellent théorèmes, théorèmes fondamentaux ou principes, mais presque tous les auteurs insistent sur leur importance. C'est évidemment le second qui est vraiment caractéristique. Plusieurs auteurs ajoutent un énoncé synthétique des deux, par exemple: "Deux infiniment petits a et b peuvent être substitués l'un à l'autre et l'on peut négliger leur différence soit dans la recherche d'une limite de rapport , soit dans celle d'une limite de somme, pourvu que cette différence soit infiniment petite par rapport à l'un d'eux." (Bertrand)

Naturellement, l'énoncé 1 est à la base du calcul différentiel et l'énoncé 2 à la base du calcul intégral. Certains auteurs le disent, d'autres pas. Mais presque tous ajoutent immédiatement la démonstration que l'aire d'une courbe (comprendre: l'aire comprise entre la courbe et l'axe des abscisses) est limite de la somme

$$(x_1-x_0)\,f(x_0) + (x_2-x_1)\,f(x_1) + \ldots + (x_n-x_{n-1})\,f(x_{n-1}) \quad .$$

L'existence de l'aire est considérée comme une évidence *a priori* par tous ces auteurs à l'exception de Boussinesq, qui est pour plusieurs autres raisons un auteur exceptionnel. (Boussinesq considérait dès 1878 que l'existence de l'aire demandait une démonstration, on le sait par une note de son article philosophique [1] .) La démonstration qu'elle est égale à la limite des sommes ci-dessus utilise toujours implicitement ou explicitement le présupposé de la monotonie par morceaux.

Avant de passer à la question même de la rectifiabilité des courbes, une dernière remarque sur le principe de substitution est nécessaire. Nos auteurs le comprennent de deux façons différentes: soit comme un outil technique à mettre en œuvre dans des démonstrations, soit comme un véritable principe qui justifie sans plus toute espèce de passage à la limite. Il serait peut-être difficile de partager tous les auteurs un à un entre ces deux positions, mais, par exemple, Sturm m'apparaît comme un tenant type de la première et Hoüel comme un extrémiste de la seconde (voir sa préface et la démonstration d'existence pour les équations différentielles , livre IV, ch. I, §IV, p.316 et suivantes du tome 2 de son traité de 1878).

La rectifiabilité des courbes dans la deuxième génération

Tous les ouvrages de la deuxième génération donnent une démonstration de l'existence de la longueur d'un arc de courbe. La démonstration se trouve dans le calcul différentiel sous le titre "différentielle d'un arc de courbe". Seuls les éléments de Duhamel font exception sur ce point, ils ont un plan qui ne sera repris par personne. La courbe est donnée comme graphe d'une fonction. L'hypothèse, presque toujours implicite, est l'existence d'une dérivée continue. Deux types de démonstrations se trouvent dans ces livres.

Le premier type se trouve chez Duhamel, Bertrand, Jordan et Boussinesq. Il se base sur un usage général et assez flou du principe de substitution, sur lequel seul Duhamel est le seul à s'appuyer clairement. Ces démonstrations sont par conséquent difficiles à analyser. Ceci est particulièrement vrai pour Duhamel qui lui consacre deux pages et demi dans lesquelles il n'y a pas le moindre symbole ni une référence à une figure. Il dit d'abord qu'on peut se limiter à un arc convexe (toujours le présupposé de la monotonie par morceaux de la dérivée). On considère d'abord un mode de partage particulier par 2^n points ayant des abscisses régulièrement espacées. Les polygones correspondants ont des périmètres croissants "et, comme on peut assigner une quantité finie au dessous de laquelle il reste toujours, il tendra évidemment vers une certaine limite." On notera les deux "évidemment" et en particulier le premier qui semble recouvrir l'axiome que Cournot s'était donné le mal d'expliciter en se référant à Archimède. Il faut alors démontrer que tout autre mode de division conduit à la même limite. On inscrit deux polygones "ayant les côtés extrêmement petits", un du type précédent et un autre. On en construit un troisième: celui dont les sommets sont tous ceux des deux précédents. On étudie le rapport de la longueur de ce nouveau polygone à celle de l'un ou l'autre des précédents. "... [les longueurs des côtés du troisième polygone] qui seront comprises entre deux ordonnées consécutives auront un rapport [au côté correspondant du polygone précédent] d'autant plus près de l'unité que les côtés seront plus petits; car leurs directions différeront infiniment peu de celle de la tangente voisine. D'où il suit que le rapport des deux périmètres tend indéfiniment vers l'unité à mesure que les côtés tendent vers zéro." (Duhamel a cru démontrer l'existence de la tangente.)

Etrangement l'auteur qui est le plus proche de Duhamel sur ce point, auquel il ne consacre pourtant qu'une courte demi page est Jordan (dans la première édition bien entendu). "Pour justifier cette définition, il faut montrer que cette limite est indépendante de la façon dont sont placés les sommets du polygone sur l'arc de courbe considéré." (Il ne semble pas éprouver le besoin de démontrer l'existence.) On inscrit deux polygones "dont chaque côté soit infiniment petit", puis le polygone ayant tous les sommets de ces deux. Chaque côté de ce troisième polygone fait un angle infiniment petit avec sa projection sur un côté du premier (l'existence et le continuité de la tangente sont ici des hypothèses). "On pourra donc, en ne commettant qu'une erreur relative infiniment petite, substituer à chaque côté de π [le troisième polygone] sa projection sur le côté correspondant du premier polygone. La somme de ces projections n'est autre que P [le premier polygone]. Donc on a bien:

$$P/\pi = 1+\varepsilon$$

ε étant infiniment petit."

Duhamel et Jordan sont les seuls à utiliser la technique du troisième polygone. Nous la retrouverons dans la démonstration ultérieure de Jordan mais avec un rôle radicalement différent. Surtout la démonstration de Jordan est la seule de ce type à ne pas utiliser la convexité par morceaux.

Passons au deuxième type de démonstration. Contrairement au précédent il est parfaitement réglé et ne varie pas de l'un à l'autre des auteurs qui l'emploient, à savoir Sturm, Serret et Souchon, ainsi qu'Appell mais dans sa première édition seulement. Sturm semble en être le premier auteur.

Voici cette démonstration. Divisons l'intervalle en n sous-intervalles par les points $x_0=a$, x_1, x_2, ..., $x_n=b$. Soient $y_i=f(x_i)$ et M_i le point de coordonnées x_i,y_i. Traçons la courbe représentative de la fonction $[1+f'(x)^2]^{1/2}$. D'après ce qui a déjà été démontré, l'aire comprise sous cette courbe est la limite de la somme S_n des $(x_{i+1}-x_i)[1+f'(x_i)^2]^{1/2}$. On a d'autre part:

$$M_iM_{i+1} = (x_{i+1}-x_i)\,[1+(y_{i+1}-y_i)^2/(x_{i+1}-x_i)^2]^{1/2} \quad .$$

Mais lorsque les côtés deviennent de plus en plus petits les rapports des $(y_{i+1}-y_i)/(x_{i+1}-x_i)$ aux $f'(x_i)$ tendent tous vers un (toute question sur la nature de cette convergence serait évidemment indiscrète). La somme des M_iM_{i+1} (le périmètre de la ligne brisée) tend donc, d'après le

principe de substitution, vers une limite, la même que celle des S_n.
Notons que le principe de substitution est intervenu une fois via l'aire comme limite de sommes de rectangles et une deuxième fois directement.

La condition nécessaire et suffisante de Jordan

Jordan publie en 1882 le tome 1 de la première édition de son *Traité d'Analyse*. L'année précédente, il avait publié une brève note aux Comptes Rendus de l'Académis des Sciences [6] intitulée "Sur la série de Fourier". Ayant remarqué que la démonstration de convergence de Dirichlet s'applique à la différence de deux fonctions croissantes, il démontre qu'une fonction est de ce type si et seulement si elle est à variation bornée (il emploie à ce moment là l'expression "à oscillation limitée"). Rappelons cette condition dans une notation plus moderne: les sommes

$$|f(x_1)-f(x_0)|+|f(x_2)-f(x_1)|+ \dots +|f(x_n)-f(x_{n-1})|$$

obtenues pour toutes les divisions $x_0 , x_1 , \dots , x_n$ de l'intervalla considéré doivent rester bornées. Il ajoute : "Les fonctions à oscillation limitée forment une classe bien définie, dont l'étude pourrait présenter quelque intérêt." et il en indique certaines propriétés. Il est donc conscient, quand il rédige son traité, que la monotonie par morceaux ne va pas de soi. Nous retrouverons plus loin d'autres marques de cette prise de conscience.

Dans le tome 1 de son traité, Jordan renvoie certaines démonstrations à un supplément à paraître; c'est en particulier le cas de la continuité uniforme d'une fonction continue sur un intervalle fermé borné qu'on voit apparaître ici pour la première fois dans un traité français. D'autres caractères modernes y apparaissent aussi comme l'étude de la convergence uniforme des séries de fonctions.

Le supplément paraît effectivement en 1887 à la fin du tome 3 [7]. Il est certain que ce supplément est beaucoup plus complet que celui que l'auteur avait en tête en 1882.

On y trouve une construction des nombres réels par suites adjacentes et une brève remarque semble indiquer l'équivalence de cette construction avec celle des coupures; on y trouve aussi les démonstrations des propriétés des fonctions continues. Enfin, et c'est ce qui nous intéresse ici, on y trouve démontrée la condition nécessaire et suffisante de rectifiabilité des courbes. Elles sont données ici sous forme paramétrique:

$$x = \varphi(t) \quad y = \psi(t) \ .$$

On suppose simplement l'absence de point double, ce qui complique la condition: φ et ψ doivent être à variation bornée, mais aussi le point de coordonnées $(\varphi(t), \psi(t))$ doit se trouver sur le segment qui joint les limites à gauche et à droite de $(\varphi(t'), \psi(t'))$.

Je me contenterai de quelques indications sur cette démonstration, notant M_i le point de coordonnées $(\varphi(t_i), \psi(t_i))$. La condition nécessaire est assez facile. La longueur des polygones $M_0 M_1 \dots M_n$ est bornée puisqu'elle a une limite; or elle majore les sommes des projections des côtés sur les deux axes:

$$|\varphi(t_1)-\varphi(t_0)|+|\varphi(t_2)-\varphi(t_1)|+ \dots +|\varphi(t_n)-\varphi(t_{n-1})|$$

et la somme analogue en ψ. Reste à vérifier la condition aux points de discontinuité qui est assez claire géométriquement. Pour la réciproque, on remarque d'abord que la longueur de $M_0 M_1 \dots M_n$ est majorée par la somme des deux sommes ci-dessus, donc par la somme des vairations totales de φ et de ψ. Soit alors L la borne supérieure de cette longueur. Pour ε fixé, il existe un polygone $M_0 M_1 \dots M_n$ de longueur au moins égale à $L-\varepsilon/2$. Ce polygone est désormais fixé dans toute la suite du raisonnement. Soit encore $M_0' M_1' \dots M_n'$ un autre polygone inscrit de longueur L'. On construit le nouveau polygone $M_0'' M_1'' \dots M_p''$ qui a pour sommets tous les M_i et les M_i' et on appellera L'' sa longueur, au moins égale à $L-\varepsilon/2$ et à L'. Reste alors à faire la partie la plus technique de cette démonstration. Elle consiste à trouver un nombre δ tel que s'il majore tous les côtés du polygone $M_0' M_2' \dots M_n'$, on ait $L''-L' < \varepsilon/2$. Le fait que le polygone $M_0 M_1 \dots M_n$ ait été fixé joue là un rôle essentiel. On voit donc réapparaître le "troisième polygone" qui se trouvait déjà chez Duhamel et dans la première édition de Jordan, à l'exclusion des autres auteurs, mais son rôle est bien transformé!

Bien entendu, cette démonstration est reprise dans la deuxième édition du tome 1 (1893, la troisième et dernière en est une copie conforme). Tannery la reprendra dans le tome 2 de la deuxième édition (1910) de son *Introduction à la théorie des fonctions*. Goursat (1902) la donne dans une (très longue) note en bas de page. Les autres auteurs de la troisième génération se bornent à citer le résultat en donnant la référence à Jordan et à faire la démonstration pour les courbes continûment dérivables.

Autres interventions de la monotonie par morceaux

La plupart des auteurs de la deuxième génération démontrent le théorème de Rolle, en le dégageant ou pas, comme la principale étape de la démonstration du théorème des accroissements finis. On trouve deux variantes dans la démonstration. Première variante: on dit que la fonction, partant de zéro pour revenir à zéro, commence par exemple par croître et doit décroître à partir d'un certain point; l'intervention du présupposé de la monotonie par morceaux est ici très claire. Deuxième variante: on admet comme une évidence l'existence d'un maximum ou d'un minimum; il est dificile de se rendre compte s'il s'agit pour ces auteurs d'une évidence première ou d'une conséquence, effectivement évidente, de la monotonie par morceaux.

Un fait m'apparaît alors comme caractéristique: au lieu de passer par le théorème de Rolle, Jordan, dans la première édition du tome 1, reprend pour le théorème des accroissements finis une vieille démonstration dont le principe se trouve déjà chez Lagrange et Cauchy (cf. Gispert [4]). Il me semble qu'il a préféré revenir à cette démonstration vieillie (et, il devait le sentir, fautive) plutôt que de faire intervenir la monotonie par morceaux. Dès le supplément de 1887, après avoir donné l'exemple de Weierstrass, il prend soin de faire remarquer que la fonction ainsi construite n'est à variation bornée sur aucun intervalle.

Tannery fera de même dans le tome 1 de la deuxième édition (1904) de son *Introduction à la théorie des fonctions*. Dans la première édiition, il aborde très clairement la question à propos du théorème: une fonction dont la dérivée est positive est croissante. Comme il le fait remarquer, la monotonie par morceaux l'entraîne facilement, mais on a construit des fonctions qui ne sont croissantes ou décroissantes sur aucun intervalle. Dans la deuxième génération, seuls Souchon et Hoüel utilisent là le théorème des accroissements finis.

Le principe de substitution change de fonction

J'ai déjà mentionné qu'Appell donnait la démonstration du type Sturm dans la première édition de son cours d'analyse pour la supprimer ensuite, laissant l'existence de la longueur d'une courbe sans démonstration. Le seul autre traité archaïque de deuxième espèce se rattachant à la deuxième génération à en donner une est celui de Rouché et Lévy. Cette démonstration, restreinte aux courbes continûment dérivables, ne fait pas appel au principe de substitution. Sans l'analyser, ce qui n'apporterait pas grand chose, j'indique qu'elle aurait besoin d'être à peine modifiée pour montrer que les longueurs des polygones inscrits vérifient le critère de Cauchy. Mais ce critère n'est pas établi dans l'ouvrage.

On voit par là que le principe de substitution, présent dans les archaïsmes de deuxième espèce de la deuxième génération, n'y joue plus le même rôle. Indice d'un souci de rigueur (que nous trouvons maintenant fallacieux) dans la période précédente, il indiquerait maintenant plutôt que la rigueur est considérée comme secondaire. Reste à savoir pourquoi on le maintient. Sans être capable de donner une réponse précise à cete question qui me paraît à approfondir, je conclurai par quelques indications à ce sujet.

Une constatation frappante concerne tous les ouvrages archaïques de deuxième espèce, indépendamment de la génération. Ce sont des ouvrages destinés à la formation, initiale ou permanente, des ingénieurs civils (au sens de non polytechniciens).

On est alors amené à avancer deux hypothèses. Première hypothèse: s'agissant de formation d'ingénieurs, on pense qu'il faut faire simple, la rigueur étant un luxe qu'on sacrifiera à la simplicité si c'est nécessaire. Or l'exposé issu de l'école de Weierstrass paraît, peut-être à tort, compliqué à la plupart des auteurs élevés dans la tradition de Duhamel. Deuxième hypothèse: les auteurs se rendent compte que le principe de substitution n'apporte pas la rigueur qu'il promettait dans l'exposé de l'analyse, mais ils estiment qu'on ne peut pas s'en passer pour justifier les applications à la géométrie et à la mécanique. C'est la position que prendra Osgood [8] plus tard et dans un autre contexte. Il est bon d'ajouter que ces justifications font très rarement appel explicitement au principe de substitution. De plus, il peut très bien y être remplacé par les propriétés de l'intégrale de Riemann. On se trouverait alors en présence d'un relâchement de la réflexion sur les rapports entre mathématique et mécanique, relâchement dont les causes elles mêmes demanderaient à être étudiées.

ANNEXE

${}_{3}1887$ signifie "3ème édition en 1887".

Les dates données correspondent au tome 1 quand il y en a plusieurs.

La liste donnée ici a subi de légères modifications par rapport à celle de [9].

La première génération

LACROIX S.-F. Traité élémentaire du calcul différentiel et du calcul intégral
Paris ${}_{1}1802$, ${}_{2}1806$, ${}_{3}1820$, ${}_{4}1828$, ${}_{5}1837$, ${}_{6}1861$, ${}_{7}1867$, ${}_{9}1881$

BOUCHARLAT J.-L. Elémens de calcul différentiel et intégral
Paris ${}_{1}1813$, ${}_{2}1820$, ${}_{3}1826$, ${}_{4}1830$, ${}_{5}1838$, ${}_{6}1852$, ${}_{7}1858$, ${}_{8}1881$, ${}_{9}1891$

Archaïsmes de deuxième espèce

SONNET H. Premiers éléments de calcul infinitésimal à l'usage des jeunes gens qui se destinent à la carrière d'ingénieur
Paris ${}_{1}1869$, ${}_{2}1879$, ${}_{3}1884$, ${}_{4}1889$, ${}_{5}1897$, ${}_{6}1902$, ${}_{7}1909$, ${}_{8}1919$

COLLIGNON E. Cours d'analyse de l'Ecole préparatoire à l'externat de l'Ecole des Ponts et Chaussées
Paris ${}_{1}1877$

PAULY J. Notions élémentaires du calcul différentiel et du calcul intégral
Paris ${}_{1}1887$, ${}_{3}1920$

Transition entre archaïsmes de deuxième espèce se rattachant à la première et la deuxième génération

HAAG P. Cours de calcul différentiel et intégral
Paris ${}_{1}1893$

Deuxième génération

DUHAMEL J.-M. C. Eléments de calcul infinitésimal
Paris $_{1}$1856, $_{2}$1860, $_{3}$1874, $_{4}$1886

STURM C. Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique
Paris $_{1}$1857, $_{2}$1863, $_{3}$1868, $_{5}$1877, $_{7}$1884, $_{8}$1884, $_{9}$1888, $_{10}$1895, $_{12}$1901, $_{14}$1909, $_{15}$1929

BERTRAND J. Traité de calcul différentiel et de calcul intégral
Paris $_{1}$1864

SERRET J. Cours de calcul différentiel et intégral
Paris $_{1}$1868, $_{2}$1879, $_{3}$1886, $_{4}$1894, $_{5}$1900, $_{6}$1911

SOUCHON A. Eléments de calcul différentiel et de calcul intégral
Paris $_{1}$1870

HOUEL J. Cours de calcul infinitésimal professé à la Faculté des sciences de Bordeaux
Paris $_{1}$1871

HOUEL J. Cours de calcul infinitésimal
Paris $_{1}$1878

JORDAN C. Cours d'analyse
Paris $_{1}$1882

BOUSSINESQ J. Cours d'analyse infinitésimale de l'Institut Industriel du Nord
Lille $_{1}$1883

BOUSSINESQ J. Cours d'analyse infinitésimale à l'usage des personnes qui étudient cette science en vue de ses applications mécaniques et physiques
Paris $_{1}$1887

Archaïsmes de deuxième espèce

APPELL P. Eléments d'analyse mathématique
Paris $_{1}$1898, $_{2}$1905, $_{3}$1913, $_{4}$1921, $_{5}$1937, $_{6}$1950

ROUCHE E. et LEVY L. Analyse infinitésimale à l'usage des ingénieurs
Paris $_{1}$1900

DEMARTRES M. Cours de calcul différentiel et intégral
Lille $_{1}$1909

Transition entre la deuxième et la troisième génération

LAURENT H. Traité d'analyse
Paris $_{1}$1885

DEMARTRES M. Cours d'analyse
Paris $_{1}$1892

<u>Troisième génération</u>

TANNERY J. Introduction à la théorie des fonctions d'une variable
Paris $_{1}$1886, $_{2}$1904

JORDAN C. Cours d'analyse
Paris $_{2}$1893, $_{3}$1909

GOURSAT E. Cours d'analyse mathématique
Paris $_{1}$1902, $_{2}$1910, $_{3}$1917, $_{4}$1924, $_{5}$1927, $_{6}$1942

HUMBERT G. Cours d'analyse professé à l'Ecole Polytechnique
Paris $_{1}$1903

BAIRE R. Leçons sur les théories générales de l'analyse
Paris $_{1}$1907

ADHEMAR R. d' Leçons sur les principes de l'analyse
Paris $_{1}$1912

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOUSSINESQ J. *Conciliation du véritable déterminisme mécanique avec l'existence de la vie et de la liberté morale. Précédé d'un rapport de M. Paul Janet à l'Académie des Sciences morales et politiques.* Paris, Gauthier-Villars 1878

[2] COURNOT A. A. *Traité élémentaire de la théorie des fonctions et du calcul infinitésimal.* Tome 1 Paris 1841

[3] DHOMBRES J. French mathematical textbooks from Bézout to Cauchy *Hist. Scientiarum* 28 (1985) p. 91-137

[4] GISPERT H. Sur les fondements de l'analyse en France *Arch. for the hist. of ex. sc.* 28 (1983) p. 37-106

[5] GUITARD T. La querelle des infiniment petits à l'Ecole Polytechnique au XIX^{e} siècle *Hist. Scientiarum* 30 (1986) p.1-61

[6] JORDAN C. Sur la série de Fourier *C. R. de l'Ac. des Sc. de Paris* 92 (1881) p. 228-230. Reproduit dans O.C. tome 4 p. 393-395 (Paris 1964)

[7] JORDAN C. *Cours d'analyse* tome 3 Paris 1887

[8] OSGOOD W. F. Is there a student standard of truth. A reply. *Am. Math. Monthly* 34 (1927) p. 365-366

[9] ZERNER M. Sur l'analyse des traités d'analyse: les fondements du calcul différentiel dans les traités français, 1870-1914 *Cahiers de didactique des mathématiques* (IREM Paris-Sud) n° 30