CAHIERS DU SÉMINAIRE D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

JEAN MAWHIN

Problème de Cauchy pour les équations différentielles et théories de l'intégration : influences mutuelles

Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques 1re série, tome 9 (1988), p. 231-246

<http://www.numdam.org/item?id=CSHM_1988__9__231_0>

PROBLEME DE CAUCHY POUR LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES ET THEORIES DE L'INTEGRATION : INFLUENCES MUTUELLES

par JEAN MAWHIN ★

1. INTRODUCTION

Nul ne conteste le rôle des équations différentielles dans la création et le développement du calcul différentiel et intégral. Painlevé [24] écrit en 1904 : "La théorie des équations différentielles est née avec le calcul infinitésimal". D'ailleurs, jusqu'à la fin du XIXe siècle, la théorie des équations différentielles figure inmanquablement dans la partie "calcul intégral" des grands traités d'analyse. Le but de ce modeste travail est de montrer l'interaction constante, à chaque tournant de ces théories, entre la notion correspondante d'intégrale et le concept de solution d'une équation différentielle. On constatera que l'enrichissement mutuel entre ces questions a été constant du XVIIe siècle à nos jours.

2. NEWTON, LEIBNIZ, EULER

Des problèmes équivalents à la résolution d'une équation différentielle du premier ordre

$$y'(x) = f(x,y(x))$$

ont été posés et résolus bien avant la création du calcul différentiel et intégral. Il s'agissait de trouver une courbe dont la tangente (ou la sous-tangente) vérifiait une propriété caractéristique. Ces problèmes inverses des tangentes, déjà étudiés par Kepler en 1615 pour les sections coniques, furent formulés en toute généralité par Debaune, qui invita publiquement, en 1638, les mathématiciens français à fournir les solutions de quelques problèmes particuliers. L'existence de ces problèmes avait été reconnue la même année par Fermat qui écrivait : "La propriété de la tangente étant donnée, chercher la courbe pour laquelle cette propriété est satisfaite". Des problèmes inverses des tangentes furent résolus vers 1670 par Barrow et James Gregory, dans le langage géométrique qui prévalait à l'époque pour les problèmes de tangentes et d'aires.

Ces années sont déjà contemporaines de la création du calcul différentiel et intégral par Newton et par Leibniz, et la correspondance entre ces deux géants révèle le rôle important joué par le problème inverse des tangentes

★ Conférence donnée le 28 octobre 1987 au Séminaire d'Histoire des Mathématiques.

dans la genèse de leurs algorithmes respectifs [30]. Elle révèle aussi les différences de leurs conceptions. On sait le rôle joué par les séries infinies dans la création et le développement du calcul différentiel et intégral newtonien; on ne s'étonnera pas qu'il propose de "supposer une série pour toute quantité inconnue de laquelle les autres puissent être commodément dérivées, et rassembler les termes homologues de l'équation résultante en vue d'expliciter les termes de la série de départ" (Lettre à Oldenburg, 3/11/1676). S'il utilise aussi les séries infinies, Leibniz refuse de s'en contenter et cherche à exprimer les solutions en termes de quadratures de fonctions connues. Il est conscient de la difficulté du problème, puisqu'il écrit à Oldenburg, le 1er juillet 1677 : "Nous ne possédons pas encore, autant que je sache, la méthode inverse des tangentes", et à Huyghens, le 29 décembre 1691 : "Si quelqu'un peut donner l'art de réduire toujours la converse des tangentes aux quadratures, il donnera ce que je souhaite le plus en cette matière". Ce qui est toutefois commun à Newton et à Leibniz, c'est la place fondamentale qu'ils assignent aux équations différentielles dans leur nouveau calcul. Comme l'a si bien observé récemment E. Giusti [13] : "Dans la formulation de Newton, et tout autant dans celle de Leibniz, les problèmes inverses ne sont pas ceux de la dérivation et de l'intégration, mais le problème direct et le problème inverse des tangentes; en langage moderne, la dérivation d'une part et l'intégration des équations différentielles de l'autre".

Si les "Institutiones Calculi Integrali" d'Euler en 1768 constituent le chef d'oeuvre de la période flamboyante du style leibnizien (des trésors d'ingéniosité ont été dépensé pour ramener à des quadratures d'innombrables équations différentielles particulières et, comme l'écrit Painlevé [24], "la vague s'arrêta quand tout ce qui était intégrable, dans les problèmes naturels, fut intégré"), on y trouve déjà l'amorce de la révolution suivante. Conscient de ce que l'équation différentielle la plus simple

$$y'(x) = f(x) \tag{1}$$

ne peut pas toujours s'intégrer en termes finis, Euler, au Chapitre 7 de la première section du Volume 1, retourne à la vieille idée de l'approximation de $y(x)$ par une somme finie en partitionnant x_0, x par les points

$$x_0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_{m-1} < a_m = x$$

et en approchant $y(x)$ par l'expression

(2) $$y(a_0) + \sum_{j=1}^{m} f(a_{j-1})(a_j - a_{j-1}) .$$

Il applique la même idée, au Chapitre 7 de la deuxième section du Volume 1, à l'intégration approchée d'une équation différentielle du premier ordre

(3) $$y'(x) = f(x,y(x))$$

en donnant pour la solution l'expression approchée

(4) $$y(a_0) + \sum_{j=1}^{m} f(a_{j-1},y_{j-1})(a_j - a_{j-1}) ,$$

où les y_j sont définis de proche en proche par les relations

(5) $$\begin{aligned} y_0 &= y(a_0) , \\ y_j &= y_{j-1} + f(a_{j-1},y_{j-1})(a_j - a_{j-1}) \qquad (1 \leq j \leq m-1) . \end{aligned}$$

La similitude entre les formules (4) et (2) est évidente, la seule différence étant le caractère implicite de (4), puisque les y_j sont définis de proche en proche. Euler ne s'occupe pas de la convergence des expressions (4) ou (2) vers la solution exacte du problème (dont l'existence n'est pas mise en question). Il se contente de conseils, d'ailleurs judicieux, sur la manière d'obtenir des approximations satisfaisantes en choisissant convenablement la partition de $[x_0,x]$.

3. CAUCHY, LIPSCHITZ

Cauchy avait lu les "Institutiones" d'Euler et la version modernisée qu'en avait donné Lacroix dans son monumental "Traité du calcul différentiel et du calcul intégral" de 1797-1798 [10]. Il va appliquer à l'intégrale et aux équations différentielles cette idée géniale qui lui a déjà servi à révolutionner l'étude des fonctions continues et dérivables : utiliser la notion de limite pour transformer des schémas connus d'approximation en démonstrations d'existence. Car, tout comme Gauss et Bolzano mais plus systématiquement encore, Cauchy se pose le problème de l'existence des êtres mathématiques étudiés. Convaincu de l'impossibilité de trouver, en général, les solutions explicites d'une équation différentielle, il pose et il résoud, dans des conditions assez larges, le problème de leur existence. Cauchy résume sa philosophie dans une note de 1842 [5] : "Dans mes leçons données à l'Ecole Polytechnique, comme dans la plupart des Ouvrages ou Mémoires que j'ai publié sur le Calcul intégral, j'ai cru devoir renverser cet ordre et placer en premier lieu la recherche, non pas des intégrales générales, mais des intégrales particulières; en sorte que la détermination des constantes ou des fonctions arbitraires ne fut plus séparée de la recherche des intégrales". Pour la théorie de l'intégration, cela signifie que la définition et l'étude de l'intégrale définie précédera celle de l'intégrale indéfinie; pour les équations différentielles, c'est l'apparition du problème de Cauchy : y_0 étant donné, trouver une solution y de (3) telle que

$$y(x_0) = y_0 \quad (6)$$

C'est ce que Cauchy exprime comme suit, dans la même note : "Dans les traités de Calcul intégral, on admettait, sans la démontrer, l'existence des intégrales générales des expressions et des équations différentielles; il importait de combler cette lacune. Pour y parvenir, j'ai suivi la marche que j'indiquais tout à l'heure; et, avant de prouver qu'à toute expression différentielle qui dépend d'une seule variable, correspond une intégrale ou fonction primitive, j'ai commencé par établir la nature des intégrales prises entre des limites données ou intégrales définies. J'ai démontré par l'Analyse leur existence, qui pouvait se déduire de considérations géométriques ... C'est en opérant toujours de la même manière que j'ai réussi ... à établir sur des bases rigoureuses l'intégration des équations différentielles de forme quelconque ... Si maintenant on considère un système quelconque d'équations différentielles du premier ordre, il ne sera plus généralement possible de les intégrer en termes finis. Mais on pourra du moins démontrer l'existence des intégrales générales, et même intégrer les équations proposées avec une approximation aussi grande que l'on voudra, soit à l'aide de la méthode que j'ai donnée dans mes Leçons de seconde année à l'Ecole Polytechnique, soit à l'aide des principes nouveaux que j'ai développés dans ce Mémoire, et qui transforment en méthode rigoureuse le procédé de l'intégration par séries. Or, dans l'une ou l'autre méthode, les constantes arbitraires, que doivent renfermer les intégrales générales d'un système d'équations différentielles du premier ordre, se trouvent remplacées par des valeurs particulières des inconnues, correspondant à une valeur particulière de la variable indépendante, et par conséquent le problème de l'intégration se trouve réduit à un problème complètement déterminé."

Rappelons que Cauchy prouve l'existence de l'intégrale définie de f sur $[x_0,x]$, c'est-à-dire d'une solution de (1) sur cet intervalle, lorsque f est continue, en montrant l'existence de la limite de (2) lorsque

$$\max_{1\leq j\leq m} (a_j - a_{j-1}) \tag{7}$$

tend vers zéro. Il applique avec succès le même procédé au problème (3)-(6) avec f et $D_y f$ bornées et continues à partir des expressions approchées (4) et (5) où $y(x_0)$ est remplacé par y_0.

La récente découverte par Gilain [3] de feuilles du Résumé du Cours de Calcul Infinitésimal de Cauchy consacrées aux équations différentielles a magistralement mis en lumière la profonde unité de pensée de Cauchy dans son approche du calcul intégral. On trouvera de plus amples discussions dans les belles analyses de Dobrowolsky [9] , Gilain [3] et Guitard [14] , et l'on peut conclure, avec Dobrowolsky : "L'une des principales raisons qui ont amené Cauchy à créer sa première méthode (pour le théorème fondamental sur les équations différentielles) est celle-là même qui l'a poussé à la refonte de l'analyse dans son ensemble".

Notons qu'en 1835, dans son Mémoire sur l'intégration des équations différentielles [4] , Cauchy va utiliser son "calcul des limites" (c'est-à-dire la méthode des majorantes) pour transformer "en une théorie complètement rigoureuse l'intégration par séries d'un système quelconque d'équations différentielles". L'outil de base de ce mémoire est une autre création célèbre de Cauchy, l'intégration des fonctions holomorphes sur un chemin du plan complexe. Le méthode ne s'applique évidemment qu'au cas où f est elle-même holomorphe. En 1842, Weierstrass [32] obtiendra, indépendamment, un résultat semblable.

S'il est incontestablement révolutionnaire, l'apport de Cauchy n'en couronne pas moins les recherches de ses illustres prédécesseurs : par ses liens avec la méthode des polygones d'Euler, sa première méthode se rattache, en fin de compte, à la tradition leibnizienne; quant à sa seconde méthode, elle constitue la justification de l'algorithme d'intégration par les séries introduit par Newton.

Ignorant apparemment l'apport antérieure de Cauchy, Lipschitz [19] reproduit en 1868 la première méthode de Cauchy, sous des hypothèses légèrement plus faibles, puisqu'il suppose seulement f continue et telle que

$$(8) \qquad |f(x,y) - f(x,z)| \leq L\,|y - z|$$

au voisinage du point (x_0,y_0). C'est ce que l'on appelle maintenant une condition de Lipschitz. Elle intervient déjà implicitement dans le travail de Cauchy, qui la déduit de l'existence et de la continuité de $D_y f$ à l'aide de l'un de ses auxiliaires les plus fameux : la formule des accroissements finis [11, 14] . L'approche de Lipschitz se rattache directement à l'esprit de l'intégrale de Cauchy, ainsi que Lipschitz l'exprime lui-même : "Dans le cas où la fonction f ne contient pas la variable y, la fonction restant uniforme et continue par rapport à x, notre analyse montre que l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x} f(s)ds$$

a un sens déterminé et que la dérivée de cette fonction, prise pour une valeur de la variable égale à la limite supérieure de l'intégrale, est égale à f(x)."

4. RIEMANN, VOLTERRA, PEANO, DE LA VALLEE POUSSIN

On sait comment Riemann, en 1857, dans son célèbre mémoire sur les séries trigonométriques [28] , va créer la première théorie de l'intégration en cherchant à caractériser la classe des fonctions f pour lesquelles les sommes (déjà considérées par Cauchy)

$$\sum_{j=1}^{m} f(x_j)(a_j - a_{j-1})$$

convergent vers une même valeur lorsque (7) tend vers zéro, indépendamment du choix des $x_j \in [a_{j-1}, a_j]$ $(1 \leq j \leq m)$. C'est le cas, comme l'avait montré Cauchy, pour f continue, mais le procédé s'applique aussi à des fonctions discontinues. On ne trouve pas, chez Riemann, d'application de ses idées au théorème fondamental des équations différentielles. La tragique brièveté de sa vie en est peut-être la cause.

Le premier auteur à mentionner les travaux de Riemann dans un travail sur les équations différentielles semble être Lipschitz dans le mémoire de 1868 analysé plus haut. Il ne le fait qu'en guise de conclusion, de la manière suivante : "Le Mémoire posthume de Riemann, sur la représentation d'une fonction par une série trigonométrique, a mis en lumière ce fait que l'existence de l'intégrale définie dépend d'une condition plus générale que la continuité", et il rappelle la définition de Riemann. Il conclut alors : "Mais, à ce qu'il me paraît, ces conditions n'entraînent nullement cette conséquence, que la dérivée de cette intégrale, prise pour une valeur de la variable égale à la limite supérieure de l'intégrale, soit égale à f(x) : aussi ai-je cru devoir conserver la condition de la continuité de la fonction f(x) pour ce qui est de l'étude de l'intégration des équations différentielles

$$dy/dx = f(x). \text{"} \tag{9}$$

L'intégrale de Riemann avait en effet brisé la complète réciprocité entre les opérations de dérivation et d'inégration indéfinie démontrée par Cauchy pour les fonctions continues. Il n'y a donc plus, dans ce cadre, équivalence entre la forme différentielle (9) de l'équation et sa forme intégrale

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s)ds \quad , \tag{10}$$

lorsque f est Riemann-intégrable mais pas continue. Et Lipschitz refuse de faire le premier pas vers le concept de solution généralisée de (9), à savoir une fonction y vérifiant (10).

Il appartenait à Volterra, encore étudiant (de Dini) à l'université de Pise, de franchir en 1881 le pas qu'avait refusé Lipschitz et d'intégrer magistralement les idées de Riemann au problème de Cauchy dans son mémoire intitulé "Sui principii del Calcolo integrale" [31]. Volterra, qui ne semble pas connaître l'existence du mémoire de Darboux de 1875 sur les fonctions discontinues [6], introduit comme ce dernier les intégrales inférieure et supérieure d'une fonction f bornée sur $[x_0,x]$ comme limites respectives des sommes

$$\sum_{j=1}^{m} m_j(a_j - a_{j-1}) \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{m} M_j(a_j - a_{j-1}) \tag{11}$$

lorsque (7) tend vers zéro, où

$$m_j = \inf_{[a_{j-1},a_j]} f \quad \text{et} \quad M_j = \sup_{[a_{j-1},a_j]} f \ .$$

Volterra répond aussi à une question de Dini en donnant un example d'une dérivée bornée non-intégrable au sens de Riemann, confirmant ainsi la complète dissymétrie entre les opérations de dérivation et d'intégration indéfinie dans le cadre des fonctions Riemann-intégrables. La Section III du mémoire est consacrée au problème de Cauchy. Volterra semble également ignorer la première méthode de démonstration de Cauchy puisqu'il écrit : "La première démonstration de l'existence de l'intégrale d'une équation différentielle passant par un point est due à Cauchy. Messieurs Briot et Bouquet ont démontré le théorème de Cauchy d'une manière très simple; la méthode impose des restrictions variées aux équations différentielles, qui consistent à déterminer les conditions sous lesquelles les intégrales seront développables en séries de Taylor. Indépendamment des considérations sur la possibilité de développer les intégrales en séries, MM. Lipschitz et Houël ont donné une démonstration de l'existence des intégrales des équations différentielles ordinaires, dans laquelle l'argument est analogue à celui de la démonstration de l'existence des intégrales définies de Riemann. En suivant le même argument, mais en applicant la méthode utilisée ici dans la démonstration du théorème de Riemann, on arrive à des résultats un peu plus généraux".

En fait, M étant le supremum de $|f|$ sur un voisinage C de (x_0,y_0), Volterra considère les sommes (11) où, cette fois, m_j et M_j sont définies de proche en proche par les formules

$$m_j = \inf_{R_j} f \quad , \quad M_j = \sup_{R_j} f \ ,$$

avec

$$R_j = [a_{j-1}, a_j] \times \left[y_0 + \sum_{k=1}^{j-1} m_k(a_k - a_{k-1}) - M(a_j - a_{j-1}),\ y_0 + \sum_{k=1}^{j-1} M_k(a_k - a_{k-1}) + M(a_j - a_{j-1})\right] ,$$

$(1 \leq j \leq m)$, où l'on suppose évidemment que l'on reste dans le voisinage C, ce dont on s'assure en prenant $|x - x_0|$ suffisamment petit. Volterra montre alors, comme on le fait pour l'intégrale de Riemann, que la condition nécessaire et suffisante pour que l'expression (4) ait une limite y(x) lorsque (7) tend vers zéro est que

$$\sum_{j=1}^{m} (a_j - a_{j-1}) D_j \tag{12}$$

tende vers zéro lorsque (7) tend vers zéro, où D_j désigne l'oscillation de f sur R_j $(1 \leq j \leq m)$. S'il en est ainsi, Volterra montre que y est continue, que l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x} f(s,y(s))ds$$

existe, au sens de Riemann, et que y vérifie l'équation intégrale

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s,y(s))ds \ . \tag{13}$$

Il reste alors à trouver des conditions sur f pour que la condition (12) soit satisfaite et à discuter le lien entre les solutions de (13) et celles du problème de Cauchy correspondant. Volterra montre tout d'abord que la condition (12) entraîne nécessairement l'unicité de la solution de (13) et que toute solution de (13) est une solution classique du problème de Cauchy lorsque f est continue sur C. Il prouve alors que (12) est satisfaite lorsque f est continue sur C et y vérifie la condition de Lipschitz (8). Plus généralement, il démontre alors que la condition (12) est vérifiée si les conditions sur f que nous venons de décrire sont satisfaites sur C à l'exception d'un ensemble de points qui peut être recouvert par une famille au plus dénombrable de rectangles à côtés parallèles aux axes (x,y) dont la somme des longueurs des côtés parallèles à l'axe des x est arbitrairement petite. Dans ce cas, la fonction y vérifie l'équation différentielle (3) en chaque point x auquel correspond un y(x) tel que f soit continue en (x,y(x)).

Volterra pose alors la question de savoir si la seule continuité de f sur C entraîne l'existence de la solution du problème de Cauchy (3)-(6). Il y répond de manière affirmative sous l'hypothèse supplémentaire que f(s,.) soit croissante ou décroissante pour tout $s \in [x_0,x]$. Cette dernière restriction sera levée par Peano en 1886 [26]. Dès 1883, Peano [25] avait complètement libéré l'intégrale de Riemann de la notion de limite (la subordonnant entièrement à la notion d'ordre) en observant que les intégrales inférieure et supérieure pouvaient être définies respectivement comme supremum et infimum des expression (11) sur toutes les partitions finies $x_0 = a_0 < a_1 < \dots < a_{m-1} < a_m = x$ de $[x_0,x]$. Dans son article cité en [26] , Peano applique alors la même idée au problème (3)-(6) avec f continue en montrant que l'infimum Y_1 (resp. supremum Y_2) des fonctions y_1 (resp. y_2) telles que

$$y_i(x_0) = y_0 \quad (i = 1,2)$$

et

$$y'_1(s) > f(x,y_1(s))$$

$$(\text{resp.} \quad y'_2(s) < f(x,y_2(s)) \quad)$$

pour $s \in [x_0,x]$, fournit une solution de (3)-(6) et que toute autre solution y du problème vérifie, sur cet intervalle, l'inégalité

$$Y_1(s) \leq y(s) \leq Y_2(s)$$

(solutions minimale et maximale). Comme Lipschitz et Volterra, Peano semble ne pas connaître la contribution de Cauchy basée sur les polygones d'Euler (il ne cite que le résultat de Cauchy pour f holomorphe et la simplification de Briot et Bouquet), mais il se réfère au mémoire de Lipschitz [19], aux traités d'analyse de Houël [15] et Gilbert [12] , et à l'article de Volterra [31], remarquant qu'il répond à une question laissée en suspens par ce dernier. En 1898, Osgood [23] démontrera le résultat de Peano, sous les même hypothèses, par une approche plus voisine de celle de Volterra. Contrairement aux méthodes de Cauchy, Lipschitz et Volterra, celles de Peano dans [26] et d'Osgood ne s'étendent pas au cas d'un système d'équations différentielles, et l'existence d'au moins une solution dans ce cas pour le problème de Cauchy, sous la seule hypothèse de continuité de f, sera démontrée en 1890 par le même Peano [27] , par une combinaison de la méthode d'approximation d'Euler-Cauchy et du théorème d'Ascoli-Arzela. Sa démonstration sera simplifiée par de la Vallée Poussin [7] , Mie [22] et Arzela [1] . On notera pour terminer que, dans aucun de ses travaux, Peano n'a cherché à affaiblir les conditions de continuité sur f.

Ignorant l'existence du travail [31] de Volterra, mais bien au courant des contributions de Gilbert [12] et du mémoire de Darboux [6] , de la Vallée Poussin obtient, en 1893, des résultats semblables à ceux de Volterra par une méthode entièrement similaire [8] . Sa motivation s'exprime très clairement dans l'Introduction de son mémoire : "Le présent travail nous a été inspiré par l'étude du Mémoire sur les fonctions discontinues, de M. Darboux, et de la Note que M. C. Jordan a ajoutée au troisième volume de son Traité d'analyse. Nous nous proposons d'étendre, dans la mesure du possible, aux équations différentielles à une seule variable indépendante, la notion d'intégrabilité introduite par Riemann pour le problème particulier des quadratures. De même que l'on peut intégrer des fonctions discontinues, nous avons voulu montrer que l'on peut intégrer des équations différentielles où figurent de telles fonctions". Comme Volterra et contrairement à Lipschitz, de la Vallée Poussin n'hésitera pas à appeler "intégrale de l'équation (3) une fonction y qui vérifie, quel que soit x, la relation (13)", et donc à considérer des solutions qui ne sont pas partout dérivables. Parmi les points qui complètent le travail de Volterra, signalons la démonstration de la dépendance continue de la solution y par rapport à y_0 lorsque la condition (12) est satisfaite, et l'obtention d'une intéressante condition sur f, qui préfigure celle de Caratheodory, pour que (12) soit vérifiée, à savoir l'intégrabilité au sens de Riemann de f(.,y) sur $[x_0,x]$ pour chaque y fixé, et l'existence et la continuité en y de $D_y f$ dans la région C . Ainsi, de la Vallée Poussin donne l'exemple de l'équation

$$y'(x) = \sum_{j=0}^{n} X_j(x)y^j$$

où les fonctions X_j sont Riemann-intégrables sur $[x_0,x]$. Notons enfin que, dans un appendice historique au mémoire rédigé à la demande d'un des rapporteurs, P. Mansion, de la Vallée Poussin compare brièvement ses résultats à ceux de l'article [26] de Peano. L'histoire ne dit pas si ce fut l'occasion, pour de la Vallée Poussin, de remonter jusqu'au mémoire de Volterra.

5. LEBESGUE, CARATHEODORY ET KURZWEIL

On sait quel progrès Lebesgue fit faire à l'analyse en créant son intégrale et comment il a utilisé cet outil admirable dans l'étude des séries de Fourier et le calcul des variations. On ne trouve chez Lebesgue que quelques lignes, dans sa thèse de 1902 [18], sur l'impact possible de son intégrale dans la théorie des équations différentielles : "Elle permet en effet de résoudre le problème fondamental du calcul différentiel dans tous les cas où la fonction dérivée est bornée, et, comme conséquence, elle permet d'intégrer des équations différentielles qui se ramènent à des quadratures. Par exemple, f(x) étant une fonction bornée quelconque, nous saurons reconnaître si l'équation

$$y' + ay = f(x)$$

admet des solutions, et, si elle en admet, les trouver". Il ajoute, dans une note au bas de la page : "Cette remarque conduit à des problèmes intéressants. Par example, f(x) et g(x) étant bornées, toutes les solutions de l'équation

$$y' + f(x)y = g(x)$$

sont-elles comprises dans la formule classique

$$y = \int g(x)e^{\int f(x)dx}dx \;.\; e^{-\int f(x)dx} \quad ?"$$

Il appartenait à Caratheodory [2] d'intégrer l'apport de Lebesgue à la théorie fondamentale des équations différentielles ordinaires. Ses conditions correspondent en quelque sorte, dans ce cadre nouveau, à la synthèse de celles de de la Vallée Poussin et de Peano puisqu'il suppose $f(.,y)$ mesurable sur $[x_0,x]$ pour chaque y fixé, $f(s,.)$ continue pour presque tout $s \in [x_0,x]$ et

$$|f(s,y)| \leqslant F(s)$$

sur C (presque partout en s), avec F Lebesgue-intégrable sur $[x_0,x]$. Une solution au sens de Caratheodory de (3)-(6) sera une solution de l'équation intégrale (13) et elle vérifiera l'équation différentielle (3) presque partout sur $[x_0,x]$. Le théorème de convergence dominée de Lebesgue est l'outil fondamental pour passer des solutions approchées aux solutions exactes, après extraction d'une sous-suite convergente à l'aide du théorème d'Ascoli-Arzela.

Les conditions et la méthode de Caratheodory serviront de modèle pour l'obtention, par Kartak [16] et Manougian [20], de théorèmes d'existence du problème de Cauchy dans le cadre d'intégrales plus générales que celle de Lebesgue, comme celles de Perron et de Denjoy.

L'équation (13) peut encore servir de base à une intéressante extension motivée par le fait que d'importantes propriétés de la solution y, en particulier des questions de dépendance continue par rapport à un paramètre, s'expriment en fonction de l'application F définie par

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} f(s,y)ds \tag{14}$$

plutôt que de f lui-même. Pour motiver cette extension, soit y une solution de (13) et (y_m) une suite de fonctions constantes par morceaux

$$y_m(s) = y(s_j) \quad , \quad s \in [a_{j-1},a_j[\quad , \; s_j \in [a_{j-1},a_j] \tag{15}$$

où

$$x_0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_{m-1} < a_m = x \quad , \tag{16}$$

telles que (y_m) converge vers y uniformément sur $[x_0,x]$. Alors, en vertu des conditions de Caratheodory,

$$f(s,y_m(s)) \longrightarrow f(s,y(s))$$

pour presque tout $s \in [x_0,x]$ et

$$\int_{x_0}^{x} f(s,y_m(s))ds \longrightarrow \int_{x_0}^{x} f(s,y(s))ds$$

en vertu du théorème de convergence dominée de Lebesgue. D'autre part,

$$\int_{x_0}^{x} f(s,y_m(s))ds = \sum_{j=1}^{m}\int_{x_0}^{x} f(s,y(s_j))ds = \sum_{j=1}^{m}\left[F(a_j,y(s_j)) - F(a_{j-1},y(s_j))\right] ,$$

où F est définie en (14). En d'autres termes, y peut s'obtenir comme limite des expressions

$$y_0 + \sum_{j=1}^{m} F(a_j,y(s_j)) - F(a_{j-1},y(s_j)) \tag{17}$$

lorsque $m \to \infty$, c'est-à-dire lorsque la partition de $[x_0,x]$ définie par (15) et (16) est prise de plus en plus fine. Le second membre de (15) possède une indéniable similitude avec des sommes de Riemann associées aux a_j et aux s_j . Cette observation, que nous tirons de l'exposé [29] , a conduit Kurzweil [17] en 1957 à introduire la généralisation suivante des sommes de Riemann. Si

$$U : [x_0,x] \times [x_0,x] \to \mathbb{R} , \quad (a,s) \mapsto U(a,s)$$

et si

$$A = \{ a_0,s_1,a_1,s_2, \dots , a_{m-1},s_m,a_m \}$$

où les a_j et s_j vérifient (15) et (16), sont donnés, Kurzweil introduit la <u>somme de Riemann généralisée</u>

$$S(U,A) = \sum_{j=1}^{m}\left[U(a_j,s_j) - U(a_{j-1},s_j)\right] , \tag{18}$$

qui se réduit à la somme de Riemann usuelle lorsque

$$U(a,s) = f(s)a \tag{19}$$

avec $f : [x_0,x] \to \mathbb{R}$. On voit aussitôt que le second terme de (17) est la somme de Riemann généralisée associée à la fonction U définie par

$$U(a,s) = F(a,y(s)) .$$

Il est alors naturel de définir l'intégrale de Kurzweil

$$\int_{x_0}^{x} DU(a,s)$$

associée à U comme limite des sommes (18) et la seconde contribution importante de Kurzweil consiste à modifier le filtre des partitions sur lequel la limite se calcule pour arriver à une intégrale suffisamment générale pour se réduire, lorsque U est donné par (19), à l'intégrale de f au sens de Perron (voir par exemple [21]). Cette modification, introduite indépendamment par Henstock quelques années plus tard, a eu, en théorie de l'intégration, d'importantes répercussions que nous ne pouvons pas décrire ici.

Partant maintenant d'une fonction quelconque $F : [x_0,x] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ quelconque, Kurzweil définit une solution du problème de Cauchy pour l'<u>équation différentielle généralisée</u>

$$y'(x) = DF(x,y(x)) \tag{20}$$

comme étant une fonction y qui vérifie l'équation

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} DF(a,y(s)) \tag{21}$$

où l'intégrale du membre de droite est interprétée au sens de Kurzweil défini plus haut. On voit que la notation différentielle (20) est devenue purement symbolique, puisque la solution de (21) n'aura pas nécessairement de dérivée. Bien entendu, comme précédemment, il faudra trouver des conditions explicites sur F qui assurent l'existence de l'intégrale dans (21) et déterminer les propriétés de régularité d'une solution y. On pourra consulter, à ce sujet, l'exposé donné en [29] et ses références, où l'on démontre en outre que les équations différentielles généralisées au sens de Kurzweil contiennent comme cas particuliers, outre celui de Caratheodory, les équations différentielles au sens des mesures et les équations décrivant des phénomènes de chocs et des conditions d'interface. Lorsque

$$F(x,y) = A(x)y$$

avec A à variation bornée, les solutions de (20) sont celles de l'équation intégrale

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} y(s)dA(s)$$

où l'intégrale de droite est une intégrale de Perron-Stieltjes.

6. <u>CONCLUSION</u>

Les beaux travaux de Dobrowolsky, Gilain et Guitard ont mis en évidence l'unité du calcul intégral et de la théorie des équations différentielles dans l'oeuvre de Cauchy. Nous espérons que les pages qui précèdent convaincront le lecteur de la permanence de cette unité dans l'histoire du problème de Cauchy, et de sa fécondité dans l'évolution ultérieure de la théorie fondamentale des équations différentielles ordinaires.

BIBLIOGRAPHIE

1. ARZELA, C., Sull'integrabilità delle equazioni differenziali ordinarie, Memorie Acc . Sci. Bologna (5) 5 (1895) 257-270 .

   Sull'esistenza degli integrali nelle equazioni differenziali ordinarie, ibid. (5) 6 (1896) 131-140.
2. CARATHEODORY, C., "Vorlesungen über reele Funktionen", Teubner, Leipzig, 1918.
3. CAUCHY, A., "Equations différentielles ordinaires", Cours inédit, fragment, édité par C. GILAIN, Etudes vivantes, Johnson Reprint, Paris, 1981.
4. CAUCHY, A., Mémoire sur l'intégration des équations différentielles, Prague, 1835, reproduit dans les "Exercices d'analyse et de physique mathématique, 1840, Oeuvres de Cauchy (2) 11, 399-465.
5. CAUCHY, A., Note sur la nature des problèmes que présente le calcul intégral, Exercices d'analyse et de physique mathématique, 2 (1841) 263-271, Oeuvres de Cauchy (2) 12, 263-271.
6. DARBOUX, G., Mémoire sur les fonctions discontinues, Ann. Ecole Norm. Sup. (2) 4 (1875) 57-112.
7. DE LA VALLEE POUSSIN, Ch., Sur l'intégration des équations différentielles, Ann. Soc. Sci. Bruxelles (Première partie) 17 (1892) 8-12.
8. DE LA VALLEE POUSSIN, Ch., Mémoire sur l'intégration des équations différentielles, Mém. couronnés et autres mém. publiés par l'Acad. Roy. de Belgique 47 (1893), 82 pp.
9. DOBROVOLSKY, W.A., Contribution à l'histoire du théorème fondamental des équations différentielles, Arch. Intern. Hist. Sci., 1969, 223-234.
10. DUGAC, P., "Sur les fondements de l'analyse à la fin du XVIIIe siècle d'après le Traité de S.F. Lacroix", Univ. Pierre et Marie Curie, Paris, 1982.
11. DUGAC, P., Histoire du théorème des accroissements finis, Arch. Intern. Hist. Sci. 30 (1980) 86-101.
12. GILBERT, "Cours d'analyse infinitésimale", Gauthier-Villars, Paris, 1892.
13. GIUSTI, E., A tre secoli dal calcolo : la questione delle origini, Boll. Un. Mat. Ital. (6) 3-A (1984) 1-55.
14. GUITARD, Th., La querelle des infiniments petits à l'Ecole Polytechnique au XIXe siècle, Historia Scientiarum 30 (1986) 1-61.
15. HOUEL, J., "Cours de calcul infinitésimal", Gauthier-Villars, Paris, 1878.

16. KARTAK, A generalization of the Caratheodory theory of differential equations, Czech. Math. J. 17 (92) (1967) 482-514.

17. KURZWEIL, J., Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter, Czech. Math. J. 7 (82) (1957) 418-449.

18. LEBESGUE, H., Intégrale, longueur, aire, Annali Mat. Pura Appl.(3) 7 (1902) 231-359.

19. LIPSCHITZ, R., Disamina della possibilità d'integrare completamente un dato sistema di equazioni differenziali ordinarie, Ann. Mat. Pura Appl. (2) 2 (1868) 288-302; trad. franç. Bull. Sci. Math. (1) 10 (1876) 149-159.

20. MANOUGIAN, M.N., The Perron integral and existence and uniqueness theorems for a first order nonlinear differential equation, Proc. Amer. Math. Soc. 25 (1970) 34-38.

21. MAWHIN, J., Présences des sommes de Riemann dans l'évolution du calcul intégral, Cahiers Sémin. Hist. Math. 4 (1983) 117-147.

22. MIE, G., Beweis der Integrirbarkeit gewöhnlicher Differentialgleichungs-systeme nach Peano, Math. Ann. 43 (1893) 553-568.

23. OSGOOD, W.F., Beweis der Existenz einer Lösung der Differentialgleichung dy/dx = f(x,y) ohne Hinzunahme der Cauchy-Lipschitz'schen Bedingung, Monat. Math. Phys. 9 (1898) 331-345.

24. PAINLEVE, P., Le problème moderne de l'intégration des équations différentielles, Bull. Sc. Math. 28 (1904) 193-208.

25. PEANO, G., Sulla integrabilità delle funzioni, Atti Acc. Sci. Torino 18 (1883) 439-446.

26. PEANO, G., Sull'integrabilità delle equazioni differenziali di primo ordine, Atti Accad. Sci. Torino 21 (1886) 677-685.

27. PEANO, G., Démonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires, Math. Ann. 37 (1890) 182-228.

28. RIEMANN, B., Ueber die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe, Abh. Kön. Ges. Wiss. Göttingen 14 (1867).

29. SCHWABIK, S., "Generalized Differential Equations. Fundamental Results", Rozpravy Cesk. Akad. Ved. Rocnik 95, Academia, Praha, 1985.

30. SCRIBA, C.J., The inverse method of tangents : a dialogue between Leibniz and Newton (1675-1677), Arch. Hist. Exact Sci. 2 (1963) 113-137.

31. VOLTERRA, V., Sui principii del calcolo integrale, Giorn. di Mat. 19 (1881) 333-372.

32. WEIERSTRASS, K., Definition analytischer funktionen einer Veränderlichen vermittelst algebraischer Differentialgleichungen, ms 1842, Werke I, 75-84.