CAHIERS DU SÉMINAIRE D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

PAOLA GARIO

Histoire de la résolution des singularités des surfaces algébriques (une discussion entre C. Segre et P. Del Pezzo)

Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques 1re série, tome 9 (1988), p. 123-137
<http://www.numdam.org/item?id=CSHM_1988__9__123_0>

HISTOIRE DE LA RÉSOLUTION DES SINGULARITÉS DES SURFACES ALGÉBRIQUES (UNE DISCUSSION ENTRE C. SEGRE ET P. DEL PEZZO)

PAOLA GARIO*

Département de Mathématiques
Université de Milan

Introduction

Pasquale Del Pezzo (Berlin 1859 - Naples 1933) est surtout connu pour ses études sur les surfaces de degré n dans $\mathbf{P}^n$ (on écrit simplement $\mathbf{P}^n$ en entendant par là $\mathbf{P}^n(\mathbb{C})$), dites aujourd'hui surfaces de Del Pezzo en hommage au mathématicien qui les a étudiées et classifiées[1]. Par contre, les études de Del Pezzo concernant la résolution des singularités des variétés algébriques sont moins connues.

Pour les courbes planes, on a énoncé et démontré deux théorèmes de résolution : l'un qui utilise les transformations quadratiques du plan et l'autre qui emploie les transformations birationnelles de la courbe.

Le premier théorème est dû à Max Noether : dans un mémoire fondamental de 1871 ([16]), il transforme une singularité quelconque d'une courbe plane en une singularité ordinaire au moyen d'une succession bien choisie de transformations quadratiques du plan. Le mémoire de Noether constitue un moment basilaire dans l'étude des courbes planes et, en général, des variétés algébriques : c'est à cette occasion qu'il introduit entre autres la notion de *points multiples infiniment voisins* d'une courbe plane.

Le second théorème affirme que toute courbe plane peut être transformée birationnellement en une courbe plane ayant seulement des points doubles ordinaires. Cet énoncé ne peut être attribué à un seul mathématicien : il est plutôt le résultat des efforts de plusieurs mathématiciens. On peut en trouver une première formulation explicite et une première démonstration dans l'appendice de Halphen à l'édition française du *Traité de géométrie analytique* de Salmon ([20]), publié en 1884. Mais la démonstration de Halphen n'est pas entièrement satisfaisante. Je rappelle simplement - ne voulant toutefois pas faire l'historique de ce théorème qui a connu de nombreuses démonstrations[2] - que les démonstrations de caractère plus strictement géométrique, et qui sont dues presque toutes à l'école

* Conférence donnée le 28 janvier 1987 au Séminaire d'Histoire des mathématiques.

italienne, ont leur origine dans un mémoire de Halphen publié en 1875 ([12]) et d'une façon encore plus précise dans un mémoire de Veronese publié en 1882 ([25]). De là vient l'idée de résoudre les singularités d'une courbe plane C en la transformant birationnellement en une courbe lisse C' d'un espace projectif de dimension convenable et en projetant ensuite C' sur un plan.

Les études sur les courbes planes constituent le point de départ de celles sur les surfaces algébriques. Pour les surfaces on a énoncé aussi deux théorèmes de résolution, l'un qui utilise les transformations birationnelles de l'espace (dites aussi transformations de Cremona), l'autre qui utilise les transformations birationnelles de la surface.

M. Noether a utilisé les transformations birationnelles de l'espace pour étudier des propriétés des surfaces[3], mais dans tous ces cas son but n'était pas la résolution des singularités.

Quant au second théorème, il a été énoncé presque simultanément en 1888 par M. Noether et P. Del Pezzo. Dans un mémoire présenté à l'Académie des Sciences de Berlin le 2 février ([18]), M. Noether affirme la possibilité de désingulariser les surfaces algébriques par des transformations birationnelles,mais il n'indique aucun procédé. P. Del Pezzo, de son côté, énonce et propose une démonstration du second théorème dans le mémoire *Estensione di un teorema di Noether* ([3]), présenté au Circolo Matematico di Palermo le 8 juillet. L'année suivante, il écrit une note sous le titre *Sui sistemi di curve e di superficie* ([4]) pour expliquer certaines parties de sa démonstration. Huit années plus tard, en 1896, Corrado Segre (Saluzzo 1863 - Turin 1924) écrit le mémoire fondamental *Sulla scomposizione dei punti singolari delle superficie algebriche* ([21]). Dans cet article, C. Segre se propose d'analyser la structure des singularités des surfaces algébriques par le truchement de la notion de points multiples infiniment voisins, notion qu'il vient de définir, et il examine, en même temps, le problème de la résolution des singularités des surfaces par des transformations birationnelles. Il discute, dans cet esprit, les études de Del Pezzo de 1888 et 1889, en faisant des observations critiques qui provoquent une réaction immédiate de Del Pezzo et donnent lieu à une polémique très vive.

Dans le but d'éclairer ce débat entre les deux géomètres, j'examine d'abord la démonstration de Del Pezzo et ensuite le mémoire de Segre.

La démonstration de Del Pezzo

Del Pezzo énonce le théorème de résolution de la façon suivante : *Ad una superficie del nostro spazio* F *dotata di singolarità superiori arbitrarie, comunque vincolate fra loro rispetto ad* F *si può sempre riferire univocamente un'altra* F'' *dotata di sole singolarità ordinarie.* ([3],143).

Del Pezzo *riferisce univocamente* à une surface algébrique F de $\mathbf{P}^3$ dotée de singularités quelconques une surface F'' de $\mathbf{P}^3$, c'est-à-dire il associe à F une surface F'' birationnelle à F ayant seulement des singularités ordinaires.

L'expression *singularités ordinaires* est entendue dans l'acception actuelle, c'est-à-dire que F'' est une surface dont les points singuliers sont les points d'une courbe double C, ayant un nombre fini de points triples à tangentes distinctes, qui sont aussi des points triples de F'' ; aux points simples de C il y a deux plans tangents distincts aux deux "nappes" de la surface en ces points, sauf en un nombre fini de points-pince où les deux plans tangents se confondent.

La démonstration de Del Pezzo est constituée de deux parties. Il transforme d'abord birationnellemnt la surface F en une surface lisse F' d'un espace convenable $\mathbf{P}^r$. La surface F' est projetée ensuite sur un sous-espace générique $\mathbf{P}^3$ de $\mathbf{P}^r$ en utilisant un système d'espaces linéaires de dimension r-3 contenant un espace linéaire fixé de dimension r-4 .

Dans la seconde partie de sa démonstration, Del Pezzo affirme donc que la projection générique d'une surface lisse F' de $\mathbf{P}^r$ sur $\mathbf{P}^3$, à partir d'un $\mathbf{P}^{r-4}$ fixé est une surface F'' n'ayant que des singularités ordinaires. En effet, comme on le sait aujourd'hui, une projection générique $\pi : \mathbf{P}^r \to \mathbf{P}^5$ ne donne pas lieu à des singularités. Si on projette une surface lisse de $\mathbf{P}^5$ sur un espace $\mathbf{P}^4$, à partir d'une variété linéaire réduite à un seul point en position générique, on obtient dans $\mathbf{P}^4$ une surface n'ayant que des points singuliers isolés ; en projetant à partir d'une droite en position générique sur un espace $\mathbf{P}^3$ on obtient une surface n'ayant que des singularités ordinaires[4].

En effet, c'est la première partie de la démonstration de Del Pezzo qui est l'objet des critiques de Segre.

Pour définir l'application birationnelle de F dans F', Del Pezzo utilise un système linéaire Ψ coupé sur F par les surfaces Ψ_m, d'ordre m, ayant la caractéristique suivante : les surfaces du système passent par tous les points et toutes les courbes singuliers de F et elles ont en ces points et le long de ces courbes les "*mêmes*" singularités que F.

Del Pezzo ne précise pas dans son premier mémoire ce qu'il veut dire quand il affirme que deux surfaces ont en un point et le long d'une courbe la "*même*" singularité, c'est-à-dire quand deux surfaces sont équisingulières. Effectivement, l'année suivante, dans la note *Sui sistemi di curve e di superficie*, il revient sur cette question en proposant la définition suivante :

Riterremo, che due superficie hanno nel punto O *o lungo la curva* L *la medesima singolarità quando un piano qualunque* σ *le taglia secondo due curve, che hanno in* σ, *ovvero in tutti i punti* $L.\sigma$, *le medesime singolarità.* ([4],238).

Del Pezzo définit l'équisingularité de deux surfaces algébriques au moyen de l'analyse des sections planes et ramène donc la notion d'équisingularité des surfaces à une notion analogue à celle des courbes planes. A cette occasion, il n'explicite pas la définition d'équisingularité des courbes planes, parce qu'il y a peut être une définition très naturelle de cette notion si on connaît la description locale d'une courbe au moyen des *cycles* définis par Halphen[5]. Un point singulier d'une courbe plane est défini comme l'origine de plusieurs *cycles* ou bien d'un seul *cycle* d'ordre supérieur à l'unité, par contre un point non singulier est l'origine d'un seul *cycle* d'ordre égal à l'unité. On peut alors donner la défintion suivante : deux courbes planes ont en un point la même singularité si elles ont en ce point les mêmes cycles de Halphen. Cette définition se trouve, par exemple, dans un mémoire de Guccia ([10]), mathématicien qui fut étroitement lié à Del Pezzo.

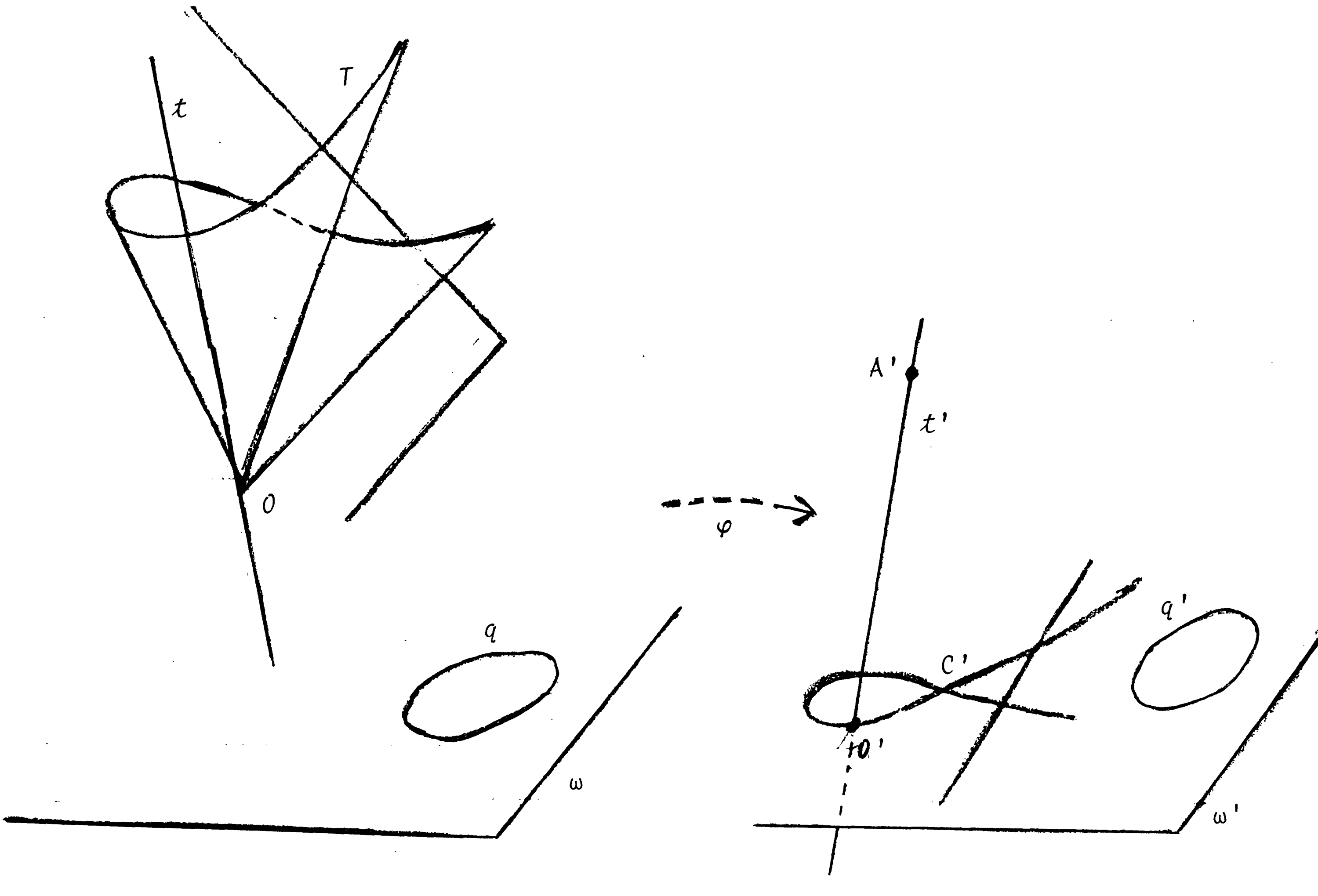
Le mémoire de Segre

Pour définir les points multiples infiniment voisins, Segre utilise les transformations quadratiques de $\mathbf{P}^3$, dites du premier type.

Je rappelle[6] qu'une transformation quadratique du premier type de l'espace est une transformation birationnelle $\varphi : \mathbf{P}^3 \dashrightarrow \mathbf{P}^3$, définie par un système linéaire de quadriques qui passent par un point O et une conique q, contenue dans un plan ω ($O \notin q$). La transformation

φ est définie sur tous les points de $\mathbf{P}^3$ sauf en O et sur les points de q ; de même, son inverse φ^{-1} n'est pas définie en un point A' et sur les points d'une conique q', contenue dans un plan ω' ($A' \notin q'$). A chaque direction t passant par O, on peut associer, par φ, un point $O' \in \omega'$ et un seul ; en particulier, si t n'appartient pas au cône $O(q)$ alors $O' \notin q'$.

Soit F une surface de $\mathbf{P}^3$ ayant en O un point singulier de multiplicité s et soit T le cône tangent à F en O. Segre considère une transformation quadratique φ du premier type ayant O comme point-base et telle que la conique-base q ne coupe pas le cône T. Alors, au cône T correspond dans le plan ω' une courbe C' qui constitue, conjointement avec la conique q', l'intersection de la surface F', transformée de F, avec le plan ω'. Les composantes irréductibles de C' correspondent exactement, avec leur multiplicité, aux composantes de T et on a en outre $\deg C' = \deg T = s$.



Pour chaque droite $t \in T$, Segre définit la "multiplicité s' de O sur F le long de t " comme la multiplicité de O' sur F' (où O' est le point qui correspond sur C' à la direction t) ; si $s' > 1$, on dit que F admet un point multiple O' d'ordre s' infiniment voisin de O (dans la direction de t).

Puisqu'on a toujours $s' \leqslant s$, si l'on fait varier la droite t sur T , on obtient un nombre fini de valeurs de s' , notées $s'_1, s'_2, \ldots, s'_k$. s' est constante sur chaque composante irréductible de C' , sauf en un nombre fini de points.

Si, à partir des points de la courbe C' , on répète la même opération, on trouvera un nombre fini de valeurs s'' , et ainsi de suite.

En conclusion, on obtient un nombre fini de suites de points

$$O \ , \ O'_i \ , \ O''_{ij} \ , \ \ldots \ ,$$

un nombre fini de suites de valeurs

$$s \ , \ s'_i \ , \ s''_{ij} \ , \ \ldots$$

(qui sont respectivement les multiplicités des points $O, O'_i, O''_{ij}, \ldots$), et on a toujours

$$s \geqslant s'_i \geqslant s''_{ij} \geqslant \ldots \ .$$

Cette décomposition (*scomposizione*) du point singulier O se termine si, à partir d'un $O^{(r)}$, toutes les valeurs $s^{(r)}$ sont égales à l'unité. A ce propos, Segre affirme que la décomposition du point singulier O est toujours finie, sauf dans le cas où O est situé sur une partie multiple de la surface. Il ne démontre pas cette propriété, parce qu'il considère qu'elle résulte d'une proposition démontrée par Kobb dans un mémoire de 1892 ([13]).

Un point singulier est donc vu comme constitué d'un nombre fini de points multiples infiniments voisins.

Segre donne ensuite une application importante de sa théorie : il explique, du point de vue géométrique, la multiplicité d'intersection en un point d'une branche de courbe avec une surface, en obtenant une généralisation de la formule de Noether pour le calcul de la multiplicité d'intersection de deux courbes planes ([17]).

Soit F une surface ayant en O un point de multiplicité s et soit γ une branche de courbe d'ordre ν en O ; alors Segre donne la formule suivante

$$m_O(\gamma.F) = \nu s + m_{O'}(\gamma'.F') ,$$

où γ' et F' sont respectivement les transformées de γ et F , par une transformation quadratique convenable du premier type φ , ayant O comme point-base, O' étant le point correspondant, dans le plan ω' , à la droite t tangente principale à γ en O .

Si t n'appartient pas au cône tangent T à F en O , $O' \notin C'$, et donc $O' \notin F'$; d'où on a

$$m_O(\gamma.F) = \nu s .$$

Par contre, si $t \in T$, $O' \in F'$. Alors, si O' est un point de multiplicité s'_i de F' et si ν' est l'ordre de la branche γ' , les intersections de F et γ en O sont au moins

$$\nu s + \nu s'_i .$$

La formule de Segre met en évidence qu'on pourrait déterminer les caractères $s, s'_i, s''_{ij}, \ldots$ d'un point singulier O d'une surface en étudiant les multiplicités d'intersection en O de la surface avec des branches des courbes. Segre peut ainsi conclure que ces caractères de décomposition, qui ne dépendent pas des transformations quadratiques choisies pour les définir, sont des propriétés intrinsèques de la surface.

La polémique

Segre analyse dans son mémoire de 1896, d'un point de vue critique, la démonstration de Del Pezzo du théorème de résolution des singularités des surfaces, et ce mémoire provoque immédiatement la réplique de Del Pezzo.

Les écrits où les deux géomètres manifestent leur désaccord au cours des premiers mois de 1897 sont tous publiés, à l'exception du dernier de Del Pezzo, dans des revues scientifiques et, plus précisément, ceux de Del Pezzo sont publiés dans les *Atti dell'Academia Pontaniana* de Naples et ceux de Segre dans les *Atti dell'Academia delle Scienze di Torino* ([7], [8],[9],[22],[23]). Les articles en réponse à Del Pezzo ne sont pas inclus dans le recueil des *Opere* de Segre, les rédacteurs les ayant considérés comme exclusivement polémiques. Et en effet la lecture des écrits concernant cette polémique est déconcertante : Del Pezzo s'exprime d'un ton haineux et irrité, Segre est moins passionné mais aussi mordant. Il faut dire également qu'on ne peut pas bien comprendre l'impétuosité de cette dispute si on laisse de côté les rancunes personnelles, dont l'origine précède cette polémique. Toutefois, le contenu mathématique de cette discussion n'est pas sans intérêt.

Je vais entrer dans les détails.

L'observation fondamentale de Segre concerne la définition d'équisingularité de Del Pezzo, qui serait, selon son opinion, inefficace. Segre affirme d'abord que deux surfaces F et Ψ_m peuvent être équisingulières en O (selon la définition de Del Pezzo) sans avoir en O la même décomposition (selon la définition de Segre). C'est-à-dire que, du fait que les sections planes de F et Ψ_m ont en O la même singularité, on ne peut pas déduire que F et Ψ_m ont la même multiplicité en O et en tous les points multiples infiniment voisins de O. De là Segre conclut que - si l'on transforme birationnellement la surface F au moyen du système linéaire Ψ des surfaces Ψ_m qui passent par O et qui ont en O le "même" type de singularité de F (dans le sens de la définition de Del Pezzo), mais qui n'ont pas les mêmes points multiples infiniment voisins de O de la surface F ou bien n'ont pas la même décomposition que F (dans le sens de la définition de Segre) - on obtient une surface F' qui peut avoir encore des points singuliers. Ces points sont ceux qui correspondent aux points multiples infiniment voisins de O et qui sont multiples pour F, mais ne le sont pas, ou ne le sont pas avec la même multiplicité, pour les surfaces Ψ_m du système linéaire.

Les remarques de Segre montrent que la définition d'équisingularité ne correspond pas au but que Del Pezzo s'était proposé et donc que le système linéaire utilisé par Del Pezzo ne permet pas d'obtenir, en général, une surface lisse. La théorie de Segre prouve ainsi son efficacité comme instrument d'analyse de la structure des singularités des surfaces algébriques. Après Del Pezzo, plusieurs auteurs ont eu besoin de comparer les singularités des surfaces algébriques ; toutefois, ils évitent de donner des définitions générales et prennent plutôt une attitude pragmatique. La tentative de Del Pezzo leur a appris certainement qu'il faut être très prudent sur ce sujet[7]. En effet, il faut attendre les travaux de Zariski ([28],[29],[30]) de 1963 et 1965 pour avoir les premiers résultats satisfaisants concernant la théorie de l'équisingularité.

Del Pezzo répond aux critiques qui ont été formulées à son endroit en essayant de mettre au clair les erreurs et les lacunes du mémoire de Segre dans le but de démontrer que toute la théorie de Segre est incomplète et fausse. En particulier, il examine la question de la décomposition du point singulier en un nombre *fini* de points multiples et il fait deux sortes de critiques. Il affirme, avant tout, que les résultats de Kobb de 1892 ne permettent pas d'obtenir une démonstration du fait que cette décomposition se termine. Deuxièmement, il écrit que la condition énoncée par Segre pour que le processus de décomposition soit fini n'est pas suffisante. Toutefois, bien que ces critiques soient correctes, elles n'infirment pas la théorie de Segre. En effet, Beppo Levi ([14]), dans un mémoire présenté aux *Annali di Matematica Pura e Applicata* le 2 juin 1897, résoud de manière définitive toute la question en énonçant une condition suffisante afin que la décomposition de Segre se termine.

Del Pezzo affirme en outre que la formule de Segre pour déterminer la multiplicité d'intersection en un point d'une surface et d'une branche de courbe n'est pas correcte. Pour justifier sa critique il présente deux exemples dans lesquels la formule de Segre donnerait, selon son opinion, un résultat faux. Le premier concerne la multiplicité d'intersection en un point d'un cône quadrique et d'une branche linéaire de courbe. Le second concerne la multiplicité d'intersection en O d'une surface F qui a en O un point double uniplanaire (le cône tangent à F en O est constitué de deux plans qui coïncident) avec une branche de courbe d'ordre 3. Sur ce point le débat devient passionné. Mais l'observation de Del Pezzo n'est pas consistante : en effet, dans tous les cas qu'il considère la formule de Segre permet d'obtenir la solution correcte, comme l'a bien illustré et justifié Segre lui-même au cours de la discussion.

En conclusion, si l'on fait abstraction de la lacune mise en évidence par Del Pezzo et entièrement résolue par Levi, la théorie de Segre est correcte. Huit ans après la publication du mémoire de Del Pezzo, on a donc pris acte que le théorème de résolution des singularités des surfaces algébriques devait être encore démontré. Pourtant, Del Pezzo a le mérite d'avoir mis en relief et d'avoir essayé de résoudre des problèmes fondamentaux de la géométrie algébrique, comme celui de la résolution des singularités et celui de la définition d'équisingularité des surfaces algébriques. Sa contribution à l'étude des surfaces est encore plus significative si l'on considère qu'à l'époque elle était très peu développée.

Je rappelle, pour terminer, qu'après la démonstration de Del Pezzo de 1888 plusieurs géomètres ont essayé de démontrer la résolution des singularités des surfaces algébriques. Del Pezzo lui-même ([5]), dans un écrit publié en 1892 sous le titre *Intorno ai punti singolari delle superficie algebriche*, se propose de résoudre les singularités des surfaces au moyen de transformations birationnelles de l'espace. Levi présente en 1897 ([15]) une démonstration qui utilise les transformations birationnelles de la surface et les transformations birationnelles de l'espace. Cette démonstration a été considérée comme satisfaisante pendant longtemps. En effet, Severi ([24]) en 1914, Chisini ([2]) en 1921 et Albanese ([1]) en 1924, bien qu'ils proposent d'autres démonstrations, affirment tous que celle de Levi est entièrement satisfaisante. Les démonstrations de Levi, Severi, Chisini et Albanese sont examinées d'un point de vue critique par Zariski ([27]) dans le premier chapitre de son livre *Algebraic surfaces* qui se termine par une petite apostille dans laquelle il affirme avoir vu et analysé la démonstration de Walker ([26]) qui lui paraît à l'abri de toute critique[8].

NOTES

1 Voir l'article de P. Del Pezzo *Sulle superficie dell' n-mo ordine nello spazio a n dimensioni* (Rend. Circ. Mat. Palermo, 1(1887)).

Un exposé sur ce sujet se trouve dans le livre de F. Conforto *Le superficie razionali,* Bologne(Zanichelli), 1939.

2 On peut trouver plus d'informations sur l'histoire de la résolution des singularités des courbes planes dans l'article de G.A. Bliss, *The reduction of singularities of plane curves by birational transormation* (Bull. Am. Math. Soc, 29(1923)).

3 Voir l'article [16] déjà cité et l'article [19].

4 Voir à ce sujet : Griffiths-Harris, *Principles of algebraic geometry,* New York (John Wiley and Sons), 1978.

5 On peut trouver la définition de cycle de Halphen dans l'article [11] ainsi que dans l'appendice au traité [20].

6 Pour la définition de la transformation quadratique voir, par exemple, le livre de L. Campedelli, *Lezioni di geometria,* 5ème éd., Padova(Cedam), 1970.

7 Je rappelle simplement que Segre compare les singularités des surfaces algébriques en utilisant l'*indice di complicazione,* qu'il définit au moyen de sa théorie de décomposition des singularités, et que Levi introduit la notion de *singolarità simili.*

8 Voici une liste de traités classiques de géométrie algébrique :

Baker, *Principles of geometry,* Cambridge, 1922-1923 ;
Bertini, *Geometria proiettiva degli iperspazi,* 2ème éd., Messina, 1923 ;
F. Conforto : voir la référence bibliographique de la note 1 ;

Enriques-Chisini, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, Bologna(Zanichelli), 1918 (nouvelle édition en 1985) ;
Semple-Roth, *Introduction to algebraic geometry*, Oxford(Clarendon Press), 1949 ;
F. Severi, *Trattato di geometria algebrica*, Bologna, 1926.

Pour un exposé moderne de caractère général voir la référence bibliographique de la note 4, ainsi que : I.R. Shafarevich, *Basic algebraic geometry*, Springer-Verlag, 1974.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G.Albanese, Trasformazione birazionale di una superficie algebrica in un'altra priva di punti multipli, Rend. Circ. Mat. Palermo, 48 (1924), 321-332.

[2] O.Chisini, La risoluzione delle singolarità di una superficie mediante trasformazioni birazionali dello spazio, Mem.Acc.Sc. Bologna, 8(1921), 1-42.

[3] P.Del Pezzo, Estensione di un teorema di Noether, Rend. Circ. Mat. Palermo, 2 (1888), 139-144.

[4] P. Del Pezzo, Sui sistemi di curve e di superficie, Rend. Circ. Mat. Palermo, 3 (1889), 236-240.

[5] P. Del Pezzo, Intorno ai punti singolari delle superficie algebriche, Rend. Circ. Mat. Palermo, 4 (1892), 139-154.

[6] P. Del Pezzo, Intorno ai punti singolari delle curve algebriche, Rend. Acc. Sc. Napoli (2), 8 (1893), 15-21.

[7] P. Del Pezzo, Osservazioni su una memoria del Prof. Corrado Segre e risposta ad alcuni suoi appunti, Atti Acc. Pontaniana, 27 (1897), 1-13.

[8] P. Del Pezzo, Replica ad una nota del Prof. Corrado Segre in risposta ad alcune mie osservazioni, Atti Acc. Pontaniana, 27 (1897), 1-7.

[9] P. Del Pezzo , Contra Segrem ,6 Luglio 1897,(in Misc. Amodeo IX-64, Biblioteca Nazionale-Napoli)

[10] G.B.Guccia, Sur une question concernante les points singuliers des courbes algébriques, Comptes Rendus Ac.Sc., 103(1886),594-597.

[11] G.H. Halphen, Sur les points singuliers des courbes algebriques planes, Comptes Rendus,78 (1874).

[12] G.H. Halphen, Sur certaines perspectives gauches,Comptes Rendus Ac. SC., 80(1875).

[13] G. Kobb, Sur la Théorie des fonctions algebriques de deux variables, Journ. de Math. pures et appl., (4), 8 (1892), 385-412.

[14] B. Levi, Sulla riduzione delle singolarità puntuali delle superficie algebriche dello spazio ordinario per trasformazioni quadratiche, Ann. di Mat. pura e Appl.,(2), 26(1897), 219-253.

[15] B. Levi, Risoluzione delle singolarità puntuali delle superficie algebriche, Atti Acc. Sc.Torino, 33 (1897),66-86.

[16] M.Noether, Ueber die algebraischen Functionen einer und zweier Variabeln, Gotting. Nach., (1871), 267-278.

[17] M.Noether, Ueber die singulären Werthsysteme einer algebraischen Functionen und die singulären Punkte einer algebraischen Curve, Math. Ann., 9 (1876), 166-182.

[18] M.Noether, Anzahl der Moduln einer Classe algebraischer Flächen, Sitzungsberichte d.K. Preuss. Ak. d. W. zu Berlin, 26 (1888), 123-127.

[19] M.Noether, Ueber die rationalen Flächen vierter Ordnung, Math.Ann.,33(1889),546-571.

[20] G.Salmon, Traité de Géométrie analytique(Courbes planes), Gauthier Villars, Paris 1884.

[21] C.Segre, Sulla scomposizione dei punti singolari delle superficie algebriche, Ann. di Mat. pura e appl., (2),25 (1897), 1-54 (= Opere di Corrado Segre, Edizioni Cremonese, (I), Roma 1957, 327-379)

[22] C.Segre, Intorno ad una mia Memoria "Sulla scomposizione dei punti singolari delle superficie algebriche", Atti Acc. Sci. Torino, 32 (1896-97), 781-789.

[23] C.Segre, Su un problema relativo alle intersezioni di curve e superficie, Atti Acc.Sci.Torino, 33 (1897), 19-23.

[24] F.Severi, Trasformazione birazionale di una superficie algebrica qualunque in una priva di punti multipli, Rend.Acc. Naz. Lincei, (5),23 (1914), 527-539

[25] G.Veronese, Behandlung der projectivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Princip des Projicirens und Schneidens, Math. Ann., 19 (1882), 161-234.

[26] R.Walker, Reduction of the singularities of an algebraic surface, Ann. of Math., 36 (1935), 336-365.

[27] O. Zariski, Algebraic Surfaces, Springer-Verlag Berlin 1935.

[28] O. Zariski, Equisingular points on algebraic varieties, Seminari dell'Istituto Nazionale di Alta Matematica, 1962-63, Ed. Cremonese, Roma, 1964, 164-177.

[29] O. Zariski, Studies in equisingularity I. Equivalent singularities of plane algebroid curves, Amer. Journ. Math., 87 (1965), 507-536.

[30] O. Zariski, Studies in equisingularity II. Equisingularity in co-dimension 1 (and characteristic zero), Amer. Journ. Math., 87 (1965), 972-1006.