HENRI POINCARÉ

La correspondance d'Henri Poincaré avec des mathématiciens de A à H

Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques 1re série, tome 7 (1986), p. 59-219
<http://www.numdam.org/item?id=CSHM_1986__7__59_0>

LA CORRESPONDANCE D'HENRI POINCARÉ AVEC DES MATHÉMATICIENS DE A À H

La vaste correspondance d'Henri Poincaré, dont les photocopies se trouvent actuellement au bureau du Séminaire d'Histoire des Mathématiques à l'Institut Henri Poincaré à Paris, a été rassemblée autour du noyau constitué par les lettres qui appartiennent aujourd'hui à son petit-fils François Poincaré. Ces lettres ont été déjà utilisées, en partie, dans le livre que A. Bellivier a consacré, en 1956, à Henri Poincaré. Elles ont été ensuite retrouvées par A.I. Miller qui en a établi une liste, ainsi que des microfilms. Enfin, G. Masotto a repris contact avec F. Poincaré et il nous a permis de profiter du travail accompli par A.I. Miller.

Cette correspondance montre à l'évidence l'extraordinaire rayonnement scientifique du génie de Poincaré, ainsi que son activité exceptionnellement féconde dans de nombreuses sciences aussi bien théoriques qu'appliquées (elle est en particulier très révélatrice de l'intérêt d'Henri Poincaré pour les expériences de physique).

Nous commençons ici la publication des informations sur sa correspondance avec des mathématiciens, contenant de très nombreuses lettres inédites - avec leur traduction - ainsi que la traduction en français des lettres déjà publiées en allemand. Quant à sa correspondance avec des physiciens, G. Masotto a pris en charge sa coordination. Le but poursuivi est de préparer la voie à une future édition de l'ensemble de la correspondance d'Henri Poincaré.

Nous remercions M. François Poincaré pour la générosité avec laquelle il a mis à notre disposition la correspondance de son grand-père et pour sa collaboration qui nous a été extrêmement précieuse.

Nos remerciements vont également à M. Paul Germain, Secrétaire Perpétuel, pour l'aide de l'Académie des Sciences et pour son soutient à notre projet, et à M. Maurice Caveing, Directeur Scientifique Adjoint, pour le concours du Centre National de la Recherche Scientifique et son appui à notre dessein.

Nous sommes reconnaissants à MM. André Lichnerowicz, professeur au Collège de France, et Michel Métivier, professeur à l'Ecole Polytechnique, pour leur aide.

Nous remercions aussi tous ceux dont les noms sont cités dans les commentaires aux lettres, dont la collaboration a été essentielle pour réaliser la présente publication.

Enfin, nos remerciements vont à tous ceux qui nous ont secondé pour l'examen de la correspondance de Poincaré avec des non-mathématiciens, qui devrait être étudiée ultérieurement.

LETTRE DE VASILIY AFANASEVITCH A N I S I M O V

V.A. Anisimov (1860-1907) a fait ([1],t.IV,30 ; t.V,27) des études à Paris en 1888-1889 et était, en 1898, professeur de mathématiques à l'Université de Varsovie.

Sa lettre de 6 pages est du 15 novembre 1898. Il écrit (p.1) :

"Un ancien élève du professeur éminent de la Sorbonne prend la liberté de soumettre à son jugement pénétrant quelques considérations relatives à la théorie des équations différentielles à coefficients périodiques."

Il termine ainsi sa lettre (p.5-6) :

"L'auteur de l'ouvrage sur *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste* [[([2])]] mieux que tout autre pourra juger les limites des applications des résultats indiqués."

Anisimov a exposé la théorie développée dans cette lettre dans son article, en russe, *A propos de la forme des intégrales des équations différentielles à coefficients périodiques* (Mat. Sbornik, 20(1897-1899), 411-430). Il cite dans ce mémoire 4 lettres de Hilbert (celle du 13 janvier 1898 est le refus de Hilbert de publier une lettre d'Anisimov dans les *Mathematische Annalen*).

L'article d'Anisimov, en russe, *Sur la forme des intégrales des équations différentielles ordinaires à ceofficients périodiques* (Mat. Sbornik, 21(1900-1901), 62-67, contient une lettre de C. Hermite du 10 mars 1899, qui écrit (p.66) :

"Ne pourrait-on pas parvenir au but plus simplement, par un autre procédé que je viens vous soumettre."

Nous pensons que Poincaré n'a pas répondu à cette lettre.

Sur V.A. Anisimov voir aussi p.444-445 du livre de А.П. Юшкевич : "История математики в России до 1917 года",Москва(Наука), 1968.

CORRESPONDANCE AVEC PAUL APPELL[38]

I.

Dijon, 3 mars [[1881]][1]

Mon cher ami,

Les deux Notes que tu as publiées sur les fonctions fuchsiennes[2] m'ont d'autant plus intéressé qu'elles se rattachent d'une façon étroite aux résultats que j'ai indiqués dans une Note du 13 décembre 1880 et un mémoire du 10 janvier 1881[3].

J'ai donné, dans ces deux Notes, les conditions nécessaires et suffisantes pour que certaines équations différentielles linéaires à coefficients algébriques puissent être intégrées par des expressions de la forme

$$(1) \qquad z_1 = e^{\sum_i^p \lambda_i u^{(i)}(x,y)} \frac{\Theta[u^{(i)}(x,y) - g_i]}{\Theta[u^{(i)}(x,y)]} R(x,y)$$

et des intégrales de pareilles expressions.

Or voici les remarques que j'ai faites à la suite de tes Notes.

Soit une équation différentielle du second ordre rentrant dans les conditions que j'ai indiquées ; elle admet une intégrale z_1 de la forme (1), et si l'on y fait

$$z = z_1 \int z' \, dx ,$$

z' sera donné par une expression de même forme

$$(2) \qquad z' = e^{\sum \lambda'_i u^{(i)}(x,y)} \frac{\Theta[u^{(i)}(x,y) - g'_i]}{\Theta[u^{(i)}(x,y)]} R_1(x,y) .$$

Donc les deux intégrales de l'équation en question seront

$$z_1 , \quad z_2 = z_1 \int z' \, dx ,$$

ou plus généralement

$$Az_1 + Bz_2$$

$$A'z_1 + B'z_2 ,$$

A,B,A',B' constantes. Alors faisons

$$\frac{Az_1 + Bz_2}{A'z_1+B'z_2} = u$$

ou

$$\frac{A + B \int z' \, dx}{A'+B' \int z' \, dx} = u \,. \tag{3}$$

Cette équation (3) définit x comme fonction de u . *Supposons* que cette équation soit uniforme ; alors u sera une fonction *fuchsienne*.

Ainsi tu vois que, dans une infinité de cas, tes fonctions fuchsiennes se présentent comme fonctions inverses d'*intégrales portant non plus sur des fonctions algébriques* mais *sur des fonctions de la forme* (2), qui se réduisent à des fonctions algébriques pour des valeurs particulières des constantes λ_i' et g_i' .

Prenons, par exemple, l'équation différentielle que tu donnes comme exemple p.396 équation (1)[4]. Supposons aucun des entiers α , β , γ infini ; alors cette équation est intégrable par une méthode comme je le dis, sans le démontrer, dans ma Note du 10 janvier § 3[5]. La démonstration se trouve dans mon mémoire, présenté ce jour-là[6] ; elle consiste à montrer qu'on peut adjoindre à l'équation différentielle une équation algébrique $F(x,y) = 0$ de façon à rentrer dans les conditions supposées par la théorie générale. Par suite, pour cet exemple particulier, les fonctions fuchsiennes se présentent comme fonctions inverses d'intégrales telles que (2) ou (3).

Néanmoins, il y a certainement des cas où cette circonstance ne se présente pas ; ce sont par exemple dans ton équation les cas où $\alpha = \infty$; car alors il entre des logarithmes dans l'intégrale générale et dans mes recherches j'ai supposé essentiellement qu'il n'y a pas de logarithmes.

D'ailleurs, depuis deux mois déjà, j'étudie ce cas où il a des logarithmes, en me plaçant au point de vue de mes deux premières Notes, mais je rencontre de grandes difficultés.

Il est à remarquer que les remarques précédentes permettent de généraliser les fonctions abéliennes de la même façon que tes recherches généralisent les fonctions elliptiques ; il suffit dans les équations différentielles d'Abel de remplacer les intégrales abéliennes par des intégrales portant sur des fonctions telles que (1). Je dois même dire que j'ai déjà indiqué cette idée dans mon mémoire du 10 janvier[34].

J'espère que cette lettre t'intéressera et que tu me donneras ton opinion sur tout cela ; car je me propose de présenter prochainement une Note à ce sujet[7].

Je te serre la main cordialement, ton tout dévoué.

Appell

Bonjour à Boutroux.

II.

Dijon, jeudi [[10 mars]][33]

Mon cher ami,

Je te remercie de ta lettre, et j'espère comme toi que nous allons nous écrire un peu plus que par le passé - ce qui ne sera pas difficile. Je te félicite de ton courage - encore un heureux de plus ; bientôt je resterai le dernier des célibataires[8].

Tu m'as demandé de t'envoyer la démonstration de ce théorème que l'on peut *intervertir l'ordre des cycles*. Tu vas voir à quoi tu t'es exposé en faisant cette demande imprudente. Pour varier les plaisirs, je t'envoie une démonstration différente de celle que j'ai donnée dans mon mémoire - démonstration qui permet de considérer mes équations sous un autre point de vue.

Soit une équation

$$(1) \qquad \Psi(x,y) = \frac{d^n z}{dx^n} + \varphi_1(x,y)\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} + \ldots + \varphi_n(x,y)\, z = 0 ,$$

$$(2) \qquad F(x,y) = 0$$

courbe algébrique ; $\varphi_i(x,y)$ fonction rationnelle de x et y.

Conditions supposées remplies :

Les coefficients φ_i deviennent infinis en des points simples (ξ_k,η_k) de la courbe $F = 0$ ou en des points critiques.

Si certains des coefficients φ_i deviennent infinis en un point simple (ξ_k,η_k), ce point est un *pôle* ou un *point ordinaire* de l'intégrale z.

Si certains des coefficients φ_i deviennent infinis en un point critique (ξ,η), on suppose remplies les *conditions* indiquées, Note du 10 janvier 1881, N° 1.

Telles sont les seules conditions.

Soit alors p le genre de la courbe $F = 0$; considérons p points analytiques

$$(x_1,y_1),\ (x_2,y_2),\ \ldots,\ (x_p,y_p)$$

et les p équations

(3) $$\Psi(x_1,y_1)=0,\ \Psi(x_2,y_2)=0,\ \ldots,\ \Psi(x_p,y_p)=0$$

obtenues en mettant, dans l'équation (1), successivement (x_1,y_1), (x_2,y_2), $\ldots,(x_p,y_p)$ à la place de (x,y) ; imaginons de plus que, dans chacune de ces équations, la variable (x_i,y_i) parte de la même position initiale que (x,y) dans l'équation (1) avec les mêmes conditions initiales pour z et ses dérivées. Alors, si $f(x,y)$ est l'intégrale de l'équation (1),

(4) $$z = f(x_1,y_1),\ f(x_2,y_2),\ \ldots,\ f(x_p,y_p)$$

sera une intégrale du système (3).

Cela posé, considérons les équations abéliennes[9]

(5)
$$\begin{aligned}
&\int_{x_0,y_0}^{x_1,y_1} \frac{Q_1}{K_1'}\, dx_1 + \int_{x_1,y_1}^{x_2,y_2} \ldots + \ldots = u_1\\
&\int_{x_0,y_0}^{x_1,y_1} \frac{Q_2}{K_2'}\, dx_1 + \ldots \qquad\qquad = u_2\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,
\end{aligned}$$

les intégrales ayant la même limite inférieure. Alors toute *fonction symétrique rationnelle* des p points (x_i,y_i) est une fonction uniforme de $u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_p$. On verrait facilement que l'on peut, en prenant $u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_p$ pour variables indépendantes, transformer le système (3) en un système de p équations linéaires simultanées aux dérivées partielles dont les coefficients sont des fonctions abéliennes de $u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_p$. (Mais cela m'est inutile actuellement - je publierai prochainement en commun avec Picard une Note sur ces sortes d'équations[10].) Tout ce que je veux montrer, c'est que l'intégrale z, (4), est une fonction *uniforme* de u_1, $u_2,\ \ldots,\ u_p$.

En effet, supposons que les variables $(u_1,u_2,\ldots,u_p)$ partent de $(0,0,\ldots,0)$ et décrivent des chemins déterminés jusqu'en $(u_1,u_2,\ldots,u_p)$. Les points (x_1,y_1), $\ldots,\ (x_p,y_p)$ partent de (x_0,y_0) et décrivent des chemins déterminés jusqu'en $(x_1,y_1),\ \ldots,\ (x_p,y_p)$; les fonctions intégrales

$$f(x_1,y_1)\ ,\ \ldots\ ,\ f(x_p,y_p)$$

prennent donc des valeurs déterminées. Si l'on fait varier les chemins menant de $(0,0,\dots,0)$ à $(u_1,u_2,\dots,u_p)$, les chemins décrits par les points (x_i,y_i) depuis (x_0,y_0) à (x_i,y_i) varient également ; *mais ces différents chemins peuvent se ramener à l'un d'eux sans introduction d'aucun cycle* (car si deux lignes allant de x_0,y_0 à x_i,y_i différaient par un cycle, les valeurs correspondantes de u_1, u_2, $\dots$, u_p ne seraient pas les mêmes et différeraient par une période). Donc les valeurs que prennent les fonctions $f(x_i,y_i)$ pour tous ces chemins sont les mêmes, puisque ces chemins peuvent se ramener à un seul, sans franchir aucun cycle et en ne franchissant que des points tels que (ξ_k,η_k) qui sont supposés des pôles.

Ainsi déjà la fonction z prend la même valeur pour un système de valeurs u_1, u_2, $\dots$, u_p quel que soit le chemin suivi par la variable u_i pour aller de 0 à u_i.

Mais il faut examiner ce qui se passe quand $(u_1,u_2,\dots,u_p)$ atteignent des valeurs u_1', u_2', $\dots$, u_p' pour lesquelles k points (x_1,y_1), (x_2,y_2), $\dots$, (x_k,y_k) coïncident avec un point simple de $F = 0$. Alors dans le voisinage de u_1', u_2', $\dots$, u_p' ces k points (x_1,y_1), $\dots$, (x_k,y_k) se permutent entre eux ; mais cela ne change évidemment pas la fonction z.

Enfin supposons que u_1, u_2, $\dots$, u_p atteignent un système u_1'', u_2'', $\dots$, u_p'' tel que k points (x_1,y_1), $\dots$, (x_k,y_k) coïncident avec un point critique (ξ,η). Soit un système circulaire de r racines se permutant autour de ce point. Si l'on fait

$$x_1=\xi+x_1'^{r}\ ,\ x_2=\xi+x_2'^{r}\ ,\ \dots\ ,\ x_k=\xi+x_k'^{r}\ ,$$

y_1, y_2, $\dots$, y_k sont des fonctions uniformes de x_1', x_2', $\dots$, x_k', et *d'après les conditions supposées* sur l'équation (1), $f(x_1,y_1)$, $\dots$, $f(x_k,y_k)$ sont des fonctions uniformes de x_1', x_2', $\dots$, x_k'. D'autre part, dans le voisinage du système u_1'', u_2'', $\dots$, u_p'', les variables x_1', x_2', $\dots$, x_k' sont des fonctions uniformes de u_1, u_2, $\dots$, u_p ou bien se permutent entre elles (Briot, *Fonctions abéliennes*, p.95). La fonction z est donc une fonction uniforme de u_1, u_2, $\dots$, u_p dans ce voisinage.

Ainsi z est une fonction uniforme de u_1, u_2, $\dots$, u_p,

$$z = \mathcal{F}(u_1,u_2,\dots,u_p)\ .$$

Supposons que les points (x_2,y_2), $\dots$, (x_p,y_p) restent fixes et que (x_1,y_1)

décrive un chemin déterminé précédé d'un tour sur un cycle C_1 ,

$$u_1 , u_2 , \dots , u_p$$

croissent de

$$\omega_{11} , \omega_{21} , \dots , \omega_{p1} ;$$

si on fait précéder le même chemin déterminé d'un tour sur C_2 , $u_1 , u_2 , \dots , u_p$ croissent de

$$\omega_{12} , \omega_{22} , \dots , \omega_{p2} ;$$

si on décrit les deux cycles C_1 , C_2 dans un ordre quelconque la valeur finale de z est

$$z = \mathcal{F}(u_1+\omega_{11}+\omega_{12},\dots) ,$$

valeur évidemment indépendante de l'ordre de succession des cycles C_1 et C_2 .

La valeur finale de $f(x_1,y_1)$ quand on décrit les mêmes cycles est donc *indépendante de l'ordre de succession* de ces cycles.

Je te serai très obligé de me donner ton avis sur cette démonstration. Je pense faire de cela et de quelques autres remarques sur les équations de la forme (1) l'objet d'un complément à mon premier mémoire[35].

J'irai certainement à Paris à Pâques[11] - et je t'y verrai.

Je te serre la main cordialement, ton dévoué.

Appell

III.

Dijon, jeudi [[17 mars]]

Mon cher ami,

En relisant ta dernière lettre je me suis aperçu que je n'avais pas répondu à un petit renseignement que tu me demandais. Hermite t'a parlé d'une certaine décomposition de fonctions en éléments simples.

Il s'agit des fonctions de la forme

$$(1) \qquad e^{\lambda_1 u^{(1)}(x,y)+\dots} \frac{\Theta[u^{(1)}(x,y)-g_1]}{\Theta[u^{(1)}(x,y)]} R(x,y) ,$$

qui sont décomposables en éléments simples par une formule analogue à celle qu'Hermite a donnée pour les fonctions doublement périodiques de 2^e espèce à l'occasion de l'équation de Lamé.

Cette formule conduit, comme cas limite, à la formule de décomposition d'une fonction rationnelle donnée par Lindemann (*Crelle*, t.84, p.294), Lettre à Hermite[12].

Tu te figures aisément comment marche cette généralisation.

A bientôt, je te serre la main, ton dévoué.

Appell

Je compte être à Paris pendant la semaine sainte.

Au moyen de cette décomposition et de celle indiquée par Lindemann on peut étendre à certaines équations à coefficients algébriques les recherches de Fuchs dans le *Journal de Liouville*, t.4, p.125 et suiv.[13] en cherchant quelle doit être la forme d'une équation différentielle

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \varphi(x,y)\ z\ ,$$

où φ est rationnelle, pour que cette équation soit intégrable par des fonctions telles que (1).

IV.

Dijon, mardi [[22 mars]]

Mon cher ami,

Tu as du recevoir mon topo et ma lettre à Paris. La démonstration que je t'ai envoyée se rapporte au cas où les points critiques sont d'ordre deux ; le cas général peut se conclure de là, en supposant comme fait Riemann et d'après lui Clebsch et Gordan[14], que différents points critiques d'ordre deux viennent se confondre. Du reste on donne une démonstration directe dans ce cas. La même que pour l'autre.

Pour ce qui est de l'exemple que tu m'as envoyé et où tu relèves des contradictions, voici, je crois, la raison de cette contradiction apparente.

Comme la fonction algébrique y ne figure pas dans l'équation différentielle

(1) $$\frac{d^2z}{dx_1^2} + \ldots = 0$$

que tu considères, tu dis : *que, au point de vue de l'équation différentielle (1), la valeur initiale de* y *n'importe pas*. Et alors tu considères deux cycles commençant l'un par y_1 , l'autre par y_2 . Mais cela n'est pas permis - tu vois, par la démonstration même, que les deux cycles *consécutifs* doivent être parcourus *avec la même racine*, quand même y ne figure pas dans l'équation.

En enlevant cette restriction, tu *généralise* le théorème, et il n'est pas étonnant que tu arrives à des contradictions.

Je pense que tu seras de mon avis là-dessus.

Je te serre la main, ton tout dévoué.

Appell

J'espère toujours arriver à te convertir. Si tu veux je t'enverrai la démonstration pour le cas où il y a des systèmes circulaires quelconques.

V.

Dijon, vendredi [[25 mars]]

Mon cher ami,

Je m'aperçois que ma prétendue démonstration nouvelle - que je t'avais envoyée aussitôt que je l'avais imaginée - est inexacte. Car il est parfaitement possible que (x_1,y_1) décrive un cycle et (x_2,y_2) le même en sens contraire sans que $u_1, u_2, \dots, u_p$ varient. Mais

$$z = f(x_1,y_1), \dots, f(x_p,y_p)$$

varie évidemment.

Du reste ce raisonnement aurait démontré que toute fonctions symétrique de $f(x_1,y_1), \dots, f(x_p,y_p)$ est uniforme en $u_1, u_2, \dots, u_p$ - ce qui est absurde.

Peut-être pourra-t-on l'arranger en faisant varier $u_1, u_2, \dots, u_p$ de façon que $(x_2,y_2), \dots, (x_p,y_p)$ restent fixes, (x_1,y_1) variant seul.

Si tu le veux je t'enverrai la démonstration donnée dans mon mémoire - quoiqu'elle soit un peu longue. Peut-être aussi pourrons-nous attendre le moment où nous nous verrons à Paris à Pâques.

Tu me diras cela dans ta prochaine lettre.

Je te serre la main, ton tout dévoué.

Appell

VI.

Dijon, dimanche [[27 mars]]

Mon cher ami,

J'avais remarqué que cette démonstration qui emploie les fonctions abéliennes est inexacte et je te l'ai écrit vendredi soir dans une lettre que tu as sans doute reçue depuis.

Même si toutes les intégrales particulières étaient de la forme

$$(1) \qquad f(x,y) = \Sigma A\, e^{\lambda_1 u^{(1)}(x,y)+\dots} \frac{\Theta[\dots]}{\Theta[\dots]} R(x,y)$$

la fonction en question

$$f(x_1,y_1),\ \dots,\ f(x_p,y_p)$$

ne serait pas du tout uniforme en $u_1, u_2, \dots, u_p$. Cette fonction n'est uniforme que si l'on prend pour $f(x,y)$ une expression composée d'*un seul terme* tel que (1).

J'ai retrouvé un brouillon de la démonstration donnée dans mon **mémoire** et je te l'envoie. Tu me rendras service en l'examinant sérieusement. Je ne crois pas qu'il y ait objection à y faire.

Dans tous les cas je te demanderai de me garder le secret là-dessus[36].

J'ai appris par Picard que la section de géométrie nous présenterait *Picard, toi et moi* en 5ième ligne pour la place laissée vacante par Chasles[15]. Si tu apprends quelque chose là-dessus, ou sur la date de cette présentation, dis m'en un mot dans ta prochaine lettre.

J'ai aussi appris, par la même voie, que tes fonctions fuchsiennes t'avaient valu une mention[16] - mes félicitations.

Au revoir, je te serre cordialement la main, ton dévoué.

Appell

VII.

Dijon, 5 avril [[1881]]

Mon cher ami,

J'ai égaré ta dernière lettre et ne me rappelle plus si je dois t'écrire à Caen ou à Paris - je t'écris à Caen en supposant que tu y as la corvée des baccalauréats comme nous ici.

Ta Note sur les équations différentielles linéaires à intégrales algébriques[17] m'a fait penser qu'il y aurait une autre voie pour arriver à former les équations différentielles à coefficients rationnels en x dont les intégrales sont de la forme

$$e^{\Sigma \lambda_i u^{(i)}(x,y)} \frac{\Theta[u^{(i)}(x,y)-g_i]}{\Theta[u^{(i)}(x,y)]} R(x,y)^{18} .$$

Il faudrait pour cela former un groupe de substitutions tel que toute substitution composée avec les substitutions du groupe soit une substitution du groupe *multipliée par un facteur*.

On généraliserait ainsi la méthode que Jordan a suivie pour déterminer les équations à intégrales algébriques[19]. Seulement je ne me suis jamais encore occupé de ces théories des substitutions, et je vais d'abord me mettre à les étudier. Tu pourras me dire à Paris ce que tu penses de cette méthode. Je serai à Paris le jeudi saint - je descendrai à l'Hôtel Corneille, en face de l'Odéon.

A bientôt, je te serre la main, ton dévoué.

Appell

VIII.

Dijon, vendredi

Mon cher ami,

Cette fois-ci, je crois qur tu as raison et que le théorème est trop général. Les conditions énoncées ne sont pas suffisantes. Je vais me remettre à l'étude de ces équations à coefficients algébriques et voir si on ne peut pas au moins trouver des catégories pour lesquelles les cycles soient permutables. Peut-être pourra-t-on aussi trouver des théorèmes généraux, pour des classes d'équations, comme les équations qui conduisent aux intégrales ultraelliptiques.

Je te remercie bien de toute la peine que tu t'es donnée dans cette affaire. Nous pourrons encore en parler à Pâques.

Je te serre la main, ton dévoué.

Appell

IX.

Dijon, lundi

Mon cher ami,

Je pense que tu es maintenant rentré à Caen, et je t'écris pour t'annoncer que je vais faire comme toi et me marier le 4 juillet prochain. J'épouse Mademoiselle Bertrand dont le père Alexandre Bertrand[20] est conservateur du musée de Saint Germain en Laye. Je suis presque constamment à Paris, comme toi avant Pâques. Si tu veux m'écrire adresse ta lettre rue de *Constantinople 13*.

Je t'envoie en même temps un tirage à part de ma Note au sujet de la décomposition en éléments simples[21], dont nous avons parlé.

Le bonjour à mes camarades de Caen, Boutroux, Chervet, Riquier ; et ceux que j'oublie[22].

Je te serre la main, ton tout dévoué.

Appell

X.

Dijon, 12 juin [[1881]]

Mon cher ami,

Tu me demandes dans ta dernière lettre comment j'ai des tirages à part de mes Notes - il suffit pour cela d'écrire à M. Montreuil chez Gauthier-Villars et de demander un tirage à part de 100 exemplaires - *coût 12 fr.*

J'ai lu avec beaucoup d'intérêt ta Note qui a paru aujourd'hui[23]. Peut-être pourras-tu te servir dans ce genre de recherches de deux Notes que j'ai publiées t. 88 des *Comptes Rendus*, p.807 et 1022 : Formation d'une fonction $F(x)$ telle que

$F[\varphi(x)] = F(x)$; sur les fonctions telles que $F(\sin \frac{\pi}{2}x) = F(x)$[24].

Je pense qu'en appliquant ma méthode aux fonctions fuchsiennes on pourra représenter une fonction fuchsienne par une somme d'une infinité de fonctions rationnelles.

Mais je n'ai pas maintenant le temps de faire quoi que ce soit. Je repars pour Paris demain où je reste jusqu'au 4 juillet jour de mon mariage.

Je te serre la main cordialement, ton tout dévoué.

Appell
rue de Constantinople 13, Paris

XI.

Paris, vendredi [[juin 1882]][25]

Mon cher ami,

J'ai vu hier Madame de Kowalewski que tu connais certainement, car tu as eu à t'occuper de ses recherches à l'occasion de ta thèse[26]. Elle a manifesté le plus vif désir de te voir, et je lui ai dit que je te préviendrai.

Elle demeure rue de Vaugirard 11, Hôtel Malherbe.

Au revoir, je te serre la main cordialement, ton tout dévoué.

Appell

XII.

Nancy, le 30 juillet 1888[27]

Mon cher Ami,

Je te communique une lettre de G. Cantor que je viens de recevoir et qui t'intéresse. J'ai répondu hier à Cantor pour lui dire que ce qu'on lui avait dit était exact[28]. Je crois que les sentiments qu'il exprime sont sincères et qu'il fera réellement tout ce qu'il pourra ; j'ignore s'il peut grand-chose.

Ton ami dévoué,

Poincaré.

XIII.

Paris, le 25 janvier [[1891]][29]

Mon cher ami,

A propos de ce que tu m'a dit jeudi, tu as pu remarquer que la démonstration que j'emploie pour établir les relations entre les modules de périodicité de mes intégrales le long des coupures a, b, c (page 34) est celle qui sert à démontrer que, pour les intégrales abéliennes, les modules de périodicité le long des coupures c sont nuls. Quand les multiplicateurs m_k et n_k ne sont pas tous égaux à l'unité, les modules le long des coupures c ne sont nuls qu'exceptionnellement. Il y a à cela une raison *a posteriori* : c'est que si ces modules étaient toujours nuls,

la valeur des coefficients $P_{m,n}$ du terme général d'un développement en série (dont la théorie des fonctions permet d'affirmer l'existence) serait *nulle*. Le coefficient $P_{m,n}$ de la page 106 serait nul, car les relations 44 de la page 110 donneraient $A_1 = A_2 = 0$, si le module de périodicité C_2 était nul.

Il y a aussi une raison *a priori* tirée du principe de Dirichlet, du théorème d'existence comme dit Riemann. En imitant la méthode que suit Riemann pour démontrer *a priori* l'existence des intégrales abéliennes, on peut, *a priori*, imposer aux modules de périodicité le long des c la condition de n'être pas tous nuls.

Tout à toi, ton tout dévoué.

Appell

XIV.

Le Touquet, le 20 juin 1892[30]

Mon cher Ami,

Je viens de recevoir une convocation pour les élections décanales, auxquelles je n'avais pas songé et que je croyais ne devoir venir qu'au mois de janvier prochain.

Pourrais-tu me dire quelle est la situation si Darboux aura un concurrent, ou (ceci est plus délicat parce que tu ne peux pas le lui demander bien entendu) si même n'ayant pas de concurrent il ne serait pas fâché d'avoir une voix de plus.

Pourrais-tu m'écrire sans tarder à l'adresse suivante.

Poincaré,Châlet St Pierre, au Touquet par Etaples Pas-de-Calais

ou me télégraphier à l'adresse suivante

Poincaré, Châlet St Pierre Pointe du Touquet.

Dans le cas où tu télégraphierais, ne te laisse pas intimider par les employés du télégraphe qui te soutiendront d'abord que cette station n'existe pas (c'est un sémaphore).

Je compte donc sur ton obligeance pour me renseigner sur la situation. Il est probable que j'irai à Paris dans tous les cas pour donner un témoignage à Darboux, mais je ne serais pas fâché néanmoins d'être au courant pour savoir si l'urgence est plus ou moins grande.

Je te demande pardon du dérangement que je te cause et je te prie d'agréer mes remerciements et mes excuses.

Je te serre cordialement la main,

Poincaré.[31]

NOTES

1 Sur Paul Appell (1855-1930) voir K.O. May, *Appell, Paul*, vol. I, p.193-195 du *Dictionary of Scientific Biography*, New York (Scribner), 1970 [32].

Pour sa contribution à la recherche mathématique sa *Notice sur les travaux scientifiques*, Paris (Gauthier-Villars), 1889, est particulièrement précieuse. D'ailleurs, il nous semble surprenant qu'on n'ait pas envisagé jusqu'ici la publication de ses *Oeuvres mathématiques*.

Quant aux lettres de Poincaré à Appell, Mme A. Lange, fille de Paul Appell, nous a écrit le 7 avril 1973 que "son père avait détruit tous ses papiers avant sa mort".

Nous avons essayé de classer au mieux les lettres non datées de P. Appell, en tenant compte de leur contenu et de son passage à Dijon de 1879 à 1881 comme chargé du cours de mécanique rationnelle à la Faculté des Sciences, avant de venir enseigner à Paris.

2 H. Poincaré, *Sur les fonctions fuchsiennes* (Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 92 (1881), 333-335, 14 février 1881 ; 395-398, 21 février 1881) = *Oeuvres*, t.II, p.1-7, Paris (Gauthier-Villars), 1916.

3 P. Appell, *Sur une classe d'équations différentielles linéaires* (Comptes Rendus, 91 (1880), 972-974, 13 décembre 1880).

P. Appell, *Sur une classe d'équations différentielles linéaires dont les coefficients sont des fonctions algébriques de la variable indépendante* (Comptes Rendus, 92 (1881), 61-63, 10 janvier 1881).

Appell écrit p.972 de sa Note du 13 décembre 1880 que les recherches "de M. Fuchs sur certaines équations différentielles linéaires peuvent, à un certain point de vue, se généraliser". Il renvoie au mémoire de L. Fuchs *Sur les équations différentielles linéaires qui admettent des intégrales dont les différentielles logarithmiques sont des fonctions doublement périodiques*. Extrait d'une lettre à M. Hermite (Journal des Mathématiques pures et appliquées, (3), 4 (1878), 125-140) ; cette lettre est datée du 31 janvier 1878.

4

$$(1)\quad \frac{d^2y}{dx^2} = y\left[\frac{\frac{1}{\alpha^2} - 1}{4x^2} + \frac{\frac{1}{\beta^2} - 1}{4(x-1)^2} + \frac{1 + \frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta^2}}{4x(x-1)} \right].$$

5 P.62-63.

6 Après le titre de la note d'Appell, il est indiqué : "Mémoire de M. Appell, présenté par M. Bouquet. (Extrait par l'auteur). Le Mémoire que j'ai l'honneur de

présenter à l'Académie contient le développement des propositions qui ont été indiquées dans une Note du 13 décembre 1880." Il est possible que ce mémoire d'Appell soit encore conservé dans la pochette relative à cette séance de l'Académie du 10 janvier 1881[31].

7 P. Appell, *Sur une classe de fonctions dont les logarithmes sont des sommes d'intégrales abéliennes de première et de troisième espèce* (Comptes Rendus, 92(1881), 960-962, 18 avril 1881).

8 Appell va annoncer à Poincaré, dans une prochaine lettre, son mariage.

9 Voir p.91 du livre de C. Briot *Théorie des fonctions abéliennes*, Paris(Gauthier-Villars), 1879.

10 Picard E. et Appell P., *Sur certaines équations différentielles linéaires simultanées aux dérivées partielles* (Comptes Rendus, 92(1881), 692-695, 21 mars 1881) ; voir p.17 de la *Notice sur les travaux scientifiques* d'Appell.

11 Cette année 1881 le jour de Pâques tombait le 17 avril.

12 *Extrait d'une lettre, concernant l'application des intégrales abéliennes à la géométrie des courbes planes*, adressée à M. Hermite par M. Lindemann (Journal für die reine und angewandte Mathematik, 84(1878), 294-297).

13 Voir la note 3.

14 Clebsch A. und Gordan P., *Theorie der abelschen Functionen*, Leipzig(Teubner), 1866.

15 *Comptes Rendus*, t.92(1881), p.801, 28 mars 1881.

16 *Comptes Rendus*, t.92(1881), p.554, 14 mars 1881 : mention très honorable pour son mémoire en vue du Grand prix des Sciences mathématiques de l'année 1880.

17 H. Poincaré, *Sur les équations différentielles linéaires à intégrales algébriques* (Comptes Rendus, 92(1881), 698-701, 21 mars 1881).

18 Voir les Notes d'Appell citées dans la note 3 et p.15 de sa *Notice sur les travaux scientifiques*.

19 C. Jordan, *Sur la détermination des groupes d'ordre fini contenus dans le groupe linéaire* (Atti della R. Accademia delle Scienze fisiche et matematiche di Napoli, 8(1879), n° 11, 1-41) = *Oeuvres*, t.II, p.177-217, Paris(Gauthier-Villars), 1961.

20 Frère de Joseph Bertrand et beau-frère de Charles Hermite.

21 P. Appell, *Sur une classe de fonctions dont les logarithmes sont des sommes d'intégrales abéliennes de première et de troisième espèce* (Comptes Rendus, 92(1881), 960-962, 18 avril 1881).

22 Louis Boutroux, maître de conférences de chimie physique, Alfred Chervet, professeur de physique au lycée de Caen, et Charles Riquier, professeur de mathématiques à la Faculté des Sciences de Caen.

23 H. Poincaré, *Sur une propriété des fonctions uniformes* (Comptes Rendus, 92(1881), 1335-1336, 6 juin 1881).

24 P. Appell, *Formation d'une fonction* $F(x)$ *possédant la propriété* $F[\varphi(x)] = F(x)$ (Comptes Rendus, 88(1879), 807-810) ; *Sur les fonctions telles que* $F(\sin \frac{\pi}{2} x) = F(x)$ (Comptes Rendus, 88(1879), 1022-1024)[37].

25 Sophie Kovalevskaya était à Paris en juin 1882. (Voir la lettre d'Hermite à Mittag-Leffler du 19 juin 1882, p.160 des *Lettres de Charles Hermite à Gösta Mittag-Leffler (1874-1883)* (Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques, 5(1984), 49-285).

26 P. L de la thèse de Poincaré *Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partielles*, Oeuvres, t.I, p.XLIX-CXXIX, Paris(Gauthier-Villars), 1928.

27 Cette lettre est déposée aux *Smithsonian Institution Libraries*.

28 Cette lettre est très intéressante en ce qui concerne les rapports entre Poincaré et Cantor. En effet, c'est la première lettre connue de leur correspondance, et à notre connaissance il n'existe aucune trace de la réponse de Poincaré à Cantor.

La lettre de Cantor à Poincaré, envoyée à Appell, n'a pas été retrouvée. Mais nous pensons qu'il s'agissait de l'arrestation du frère d'Appell et de la proposition de Cantor d'intervenir à ce sujet à Berlin, intervention qui, si elle a eu lieu, n'a donnée aucun résultat.

Paul Appell écrit dans ses *Souvenirs d'un Alsacien*, Paris(Payot), 1923 (p.183) :

"Un matin de 1888, je rencontrai mon camarade Marchal, qui m'annonça l'arrestation de mon frère Charles à Strasbourg."

Appell écrit encore (p.184-192) :

"Il fut mis [[...]] en rapports avec le chef du bureau des renseignements au ministère de la guerre français [[...]] le fait qu'il y avait une sorte de conspiration, que Charles Appell en était le chef, se trouvait connu de beaucoup de patriotes [[...]] Finalement, Charles fut traduit devant la cour de Leipzig, pour crime de haute trahison envers l'empire allemand [[...]] Tout le temps de mon séjour à Leipzig, je fus accueilli, avec une sympathie affectueuse, par un grand mathématicien norvégien, le professeur Sophus Lie, que l'Université de Leipzig avait appelé à elle. Sophus Lie m'invita même à dîner, ce qui fut un acte de courage de sa part."

29 L'article dont il est question dans cette lettre (P. Appell, *Sur les intégrales de fonctions à multiplicateurs et leur application au développement des fonctions abéliennes en séries trigonométriques*, Acta Mathematica, t.13(1890), p.1-174) a été achevé d'imprimer le 26 novembre 1890.

30 Cette lettre est déposée aux *Smithsonian Institution Libraries*.

31 Il existe une lettre de P. Appell à Mme H. Poincaré du 27 avril 1907 à propos de la candidature de H. Poincaré au poste de Secrétaire perpétuel.

Jean Dieudonné nous écrit le 5 avril 1984 à propos de cette correspondance :

"Quant aux lettres d'Appell, il est bien dommage qu'on n'ait plus les réponses de Poincaré. Il devait effectivement y avoir à l'Académie le Mémoire annoncé dans la Note du 10 Janvier 1881, mais la même année Appell a demandé qu'on le lui renvoie et il reste dans le dossier de cette séance l'accusé de réception qu'il a envoyé au Secrétaire perpétuel. Il ne semble pas qu'il l'ait jamais publié ni qu'il soit revenu sur ce sujet par la suite ; peut-être a-t-il été découragé en se rendant compte de l'ampleur et de la généralité des résultats de Poincaré, alors que lui-même ne voyait les choses que par le petit bout de la lorgnette à ce qu'il me semble. Je regarderai encore ses Notes pour avoir une idée plus claire de ce qu'il fait ; il est évident que ces sujets étaient tout à fait à l'ordre du jour à cette époque. La lettre de 1891 se rapporte apparemment à une toute autre question."

Il nous écrit encore le 12 mai 1984 :

"En ce qui concerne Appell, il ne dit rien dans la Notice sur ses travaux du fameux Mémoire qu'il a retiré des archives de l'Académie et sans doute détruit ; peut-être la raison en est qu'il a trouvé des lacunes dans sa démonstration, comme semble l'indiquer la lettre VIII. Pour voir ce qui reste de valable de ses 2 Notes sur les équations différentielles à coefficients algébriques il faudrait consulter un spécialiste de ces questions."

32 Florent Bureau nous indique qu'on peut encore consulter sur P. Appell :

a. Camille Marbo : *A travers deux siècles. Souvenirs et rencontres (1883-1967)*, Paris(Grasset), 1968. Ce sont les souvenirs de *Marguerite Borel*, fille aînée de Paul Appell et femme d'Emile Borel.

b. Ernest Lebon : *Paul Appell. Biographie, bibliographie analytique des écrits*, Paris(Gauthier-Villars), 1910.

c. P. Appell : *Notice sur les travaux scientifiques* (Acta Math., 45(1925), 161-285).

d. A. Buhl : *Paul Appell* (Enseignement mathématique, 30(1931), 5-21).

33 Les dates des lettres II à VI sont proposées par F. Bureau, le 3 mars 1881 étant un jeudi et le 5 avril 1881 un mardi.

Il nous écrit :

"Cela cadre bien avec les dates connues : mariage de Poincaré : 20 avril 1881. P. Appell a rencontré Amélie Bertrand à un dîner chez son oncle Joseph Bertrand, au début de 1881 ; le mariage a lieu le 4 juillet 1881."

34 F. Bureau note :

"Il y aurait un grand intérêt à connaître ce mémoire."

Voir à ce sujet la note 31.

35 F. Bureau précise :

"Cette équation (1) fait l'objet des pp.163-174 du mémoire couronné d'Appell, *Acta Math.*, t.13(1891), pp. 1-174."

36 F. Bureau signale dans sa lettre du 12 avril 1985 :

"P. Appell a beaucoup travaillé les équations différentielles linéaires pendant cette période.

Dans la notice des *Acta* (voir la note 32), pp. 216-217, P. Appell revient sur la permutabilité des cycles."

37 F. Bureau renvoie aussi aux mémoires suivants :

a. *Sur les équations différentielles linéaires dont les intégrales vérifient des relations de la forme* $F[\varphi(x)] = \psi(x)\ F(x)$ (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 93(1881), 7 novembre, 699-701) ; spécialement le § III, p.701.

b. *Sur des équations différentielles linéaires transformables en elles-mêmes par un changement de fonction et de variable* (Acta Math., 15(1891), 281-315).

38 F. Bureau trace ainsi un programme de recherche :

"Je vous signale une "curiosité" qui indique un programme qui exigera bien des années pour être développé.

Le volume 19, 1882, des *Math. Annalen* contient :

1. Appell : *Sur une classe de fonctions analogues aux fonctions eulériennes*, pp. 84-102, spécialement § 11, remarque, pp.99-100 : P. Appell s'occupe des fonctions de deux variables. Il y reviendra dans d'autres mémoires et en particulier dans *Sur les fonctions périodiques de deux variables* (Journal de Mathématiques pures et appliquées, (4), 7(1891), 157-219), mémoire important.

2. Poincaré : *Sur les fonctions uniformes qui se reproduisent par des substitutions linéaires*, pp.553-564, suivi d'une Note de Klein, p.564.

C'est un des tout premiers mémoires sur les fonctions fuchsiennes.

3. Picard : *Sur un théorème relatif aux surfaces pour lesquelles les coordonnées d'un point quelconque s'expriment par des fonctions abéliennes de deux paramètres*, pp.569-577.

Un des tout premiers travaux de Picard sur l'extension aux surfaces algébriques de la théorie des courbes algébriques.

4. Klein : *Ueber die conforme Abbildung von Flächen*, pp.159-160.

Dans la seconde moitié du XIX^{e} siècle, la "théorie des fonctions" a été pour une large part orientée par

i. la théorie des fonctions elliptiques et des fonctions abéliennes et la périodicité dans un sens général ;
ii. la théorie des équations différentielles linéaires.

Il y aurait probablement une intéressante étude à faire à ce point de vue, sur les environs de 1880 (France, Allemagne, Italie).

Dans la période ±1880 à ±1890, on retrouve le trio Poincaré,Picard, Appell.

On a publié les oeuvres complètes de Poincaré et de Picard. Il manque celles d'Appell. Il est peut-être un peu injuste d'avoir oublié Appell (et Darboux)."

LETTRES DE LÉON AUTONNE

L. Autonne (1859-1916) était de 1878 à 1880 élève de l'Ecole Polytechnique. Il a passé sa thèse de mathématiques le 28 juillet 1882 : *Recherches sur les intégrales algébriques des équations différentielles à coefficients rationnels*, Paris (Gauthier-Villars), 1882.

Il a présenté ses travaux dans sa *Notice sur les recherches mathématiques*, Paris (Gauthier-Villars), 1913.

Les 9 lettres d'Autonne à Poincaré s'échelonnent, d'après leur contexte entre 1881 et le 18 février 1884 : la plupart sont antérieures à sa thèse. Quant aux réponses de Poincaré, d'après les descendants de L. Autonne, elles ont été perdues. (Communication orale de février 1984.)

L. Autonne poursuit dans sa thèse les travaux de Jordan sur la théorie des équations différentielles. Ses lettres montrent qu'il est encouragé et aidé par Poincaré dans la préparation de sa thèse, mais on peut noter que le nom de Poincaré n'y figure pas.

LETTRE DE JOSEPH BERTRAND

7 Février [[1983]][1]

Mon cher Confrère,

Le grade de Sylvester dans la légion d'honneur n'est pas mentionné dans l'annuaire[2]. C'est une erreur de Pingard dont j'ai la responsabilité car l'épreuve m'a été envoyée[3]. On réparera la faute l'an prochain[4]. Il n'y a pas d'explications à chercher. Sylvester a quelquefois l'esprit inquiet jusqu'à douter de ses meilleurs amis. Je ferai, croyez le bien, en toute occasion tout ce que je pourrai pour qu'il sache combien il est estimé et aimé à l'Académie des Sciences de Paris. Peut-être, il y a un an ou deux, l'ai-je mécontenté, sans le vouloir, en lui renvoyant pour qu'il la refit une copie illisible qu'il avait envoyée pour le *Compte Rendu*. C'est chez lui une habitude, il ne prend pas la peine de recopier, rature, ajoute, envoie des *errata*... Je m'en tire comme je peux, et le prote se débrouille comme il peut. Cette fois, il s'agissait d'un problème de probabilités, on m'a renvoyé la copie, n'y pouvant rien comprendre ; j'ai donné l'ordre de l'expédier à Oxford, dont elle n'est pas revenue. J'ai vu cependant Sylvester depuis, je l'ai accueilli comme un vieil ami ; il était malade, et pour cette raison je l'ai vu rarement, mais il est impossible qu'il n'ait pas quitté Paris avec la conviction qu'en toute circonstance ma bonne volonté lui était entièrement acquise.

Votre bien affectionné confrère.

J. Bertrand

Les deux nombres de l'équation

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\pi}}} e^{-t^2}\, dt = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi-2}{2}} - e^{\frac{1}{\pi}}$$

diffèrent de 0,001 , l'un est égal à 0,5750 l'autre à 0,5740 . Cela est fort singulier, car j'avais été conduit à les supposer égaux pour des raisons plausibles, qui, n'étant pas acceptables, laissent toutes les différences également probables .

NOTES

1 Voir D.J. Struik, *Bertrand, Joseph Louis François*, p.87-89 du t.II de *Dictionary of Scientific Biography*, New York (Scribner), 1973.

2 Effectivement, dans *Institut de France, Annuaire pour 1893*, Paris (Imprimerie Nationale), le grade de la Légion d'Honneur de J.J. Sylvester, membre Correspondant de l'Académie des Sciences de Paris, n'est pas mentionné.

3 J. Pingard, chef du secrétariat de l'Institut de France. J. Bertrand était à cette époque Secrétaire perpétuel pour les Sciences mathématiques. Notons qu'il n'existe pas de lettres de Poincaré à J. Bertrand dans le dossier de J. Bertrand à l'Académie des Sciences de Paris.

4 En effet, ce grade figure dans l'*Annuaire pour 1894*.

LETTRE D'EMILE BOREL

Paris, le 27.12.1911

Cher Maître ,

Je viens de lire le livre que vous avez eu l'amabilité de me faire envoyer ; je n'ai pas besoin de vous dire combien les parties neuves m'ont intéressé, en particulier votre théorie du battage. J'ai essayé de la mettre à la portée de ceux qui ne sont pas familiers avec les nombres complexes, et il m'a semblé que j'obtenais ainsi une proposition un peu plus générale. Si elle est nouvelle, et si elle vous paraît intéressante, je vous demanderai de communiquer la note ci-jointe.

Votre bien dévoué.

Emile Borel

CORRESPONDANCE AVEC JOSEPH BOUSSINESQ

I.

[[1882]] [1]

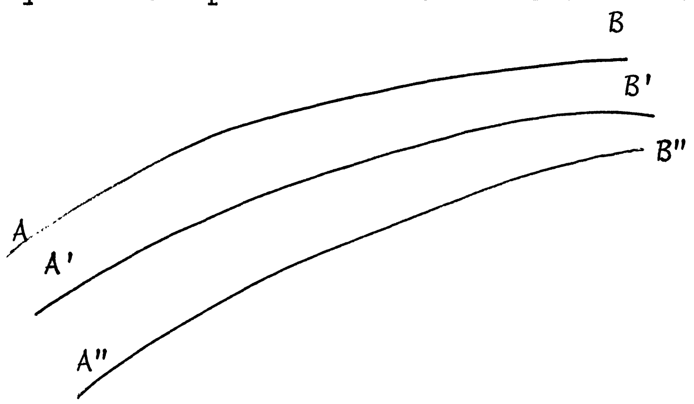
Monsieur et cher Collègue,

La lecture de votre note[2] m'a vivement intéressé, car vous avez contribué par le théorème que vous énoncez à éclaircir un des points les plus obscurs du calcul intégral. Est-ce dire que vous ayez dit le dernier mot et que cette question n'ait pas besoin d'être encore approfondie davantage et que votre théorème ne puisse être précisé ? Je ne le crois pas et sans doute vous ne le croyez pas non plus. Voici quelques points sur lesquels je vous demanderai la permission d'appeler votre attention. Prenons d'abord la définition des intégrales asymptotes ; nous allons voir surgir certaines difficultés. Vous prenez l'équation

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t)$$

dont l'intégrale générale est $\varphi(x,t) = C$.

Qu'est-ce qu'une intégrale asymptote ? Pour une valeur de t et pour les valeurs plus grandes, x diffère aussi peu que l'on veut pour une infinité d'intégrales pour des valeurs de C qui ne sont pas d'ailleurs infiniment voisines les unes des autres.



Ainsi, si AB est une intégrale asymptote, les autres intégrales $A'B'$, $A''B''$ se rapprochent asymptotiquement de AB quand t tend vers l'infini. Mais alors $A'B'$ et $A''B''$ se rapprochent asymptotiquement l'une de l'autre. $A'B'$ rentrerait donc dans la définition des intégrales asymptotes. A ce compte toutes les intégrales seraient asymptotes. Ainsi si on a les courbes

$$xy = \text{constante}.$$

Toutes les hyperboles qu'elles représentent sont asymptotes les unes aux autres. Les *véritables* intégrales asymptotes n'ont-elles donc pas une propriété qui les définisse ? Evidemment oui ; mais il faudrait la trouver. Ainsi, dans certains cas, les vraies intégrales asymptotes seront des courbes fermées ; dans d'autres ce seront celles qui iront passer par certains points singuliers, etc. Cette incertitude dans la définition sera difficile à lever. Nous savons bien l'un et l'autre ce que nous entendons par intégrales asymptotes, mais il nous serait difficile de le dire. Cette incertitude se reflète dans la règle que vous donnez et que vos recherches ultérieures vous amèneront sans doute à préciser davantage.

Mettons l'équation sous la forme générale

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} ,$$

intégrale générale $f(x,y) = C$, le facteur d'intégr. z est donné par l'équation

$$(1) \quad X\frac{dz}{dx} + Y\frac{dz}{dy} + z\left(\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy}\right) = 0 .$$

Mais cette équation a une infinité d'intégrales comprises dans la formule

$$(2) \quad z\,\Phi(f) ,$$

Φ étant une fonction arbitraire de $f(x,y)$.

Soit

$$\Phi = \frac{1}{f(x,y)-\alpha}$$

(α étant quelconque). En égalant (2) à l'infini, on trouvera $f(x,y) = \alpha$, c'est-à-dire une intégrale quelconque. Aussi quand on cherche les intégrales asymptotes (les véritables) n'est-il pas indifférent de choisir telle ou telle des intégrales de l'équation (1). Voici comment je faisais dans les exemples dont vous avez bien voulu parler dans votre note[3] :

Je suppose que X et Y soient entiers en x et y et que pour

$$x = y = 0$$

on ait

$$X = Y = 0 .$$

J'ai démontré que l'équation (1) admet une intégrale qui se développe suivant les puissances croissantes de x et de y quand ces variables sont assez petites et qu'*elle n'en admet qu'une*. C'est *cette* intégrale que j'égalais à l'infini pour obtenir les intégrales asymptotes ou plutôt *l'une d'entre elles*.

Laissez-moi vous dire de nouveau combien votre note m'a intéressé et combien ce problème dont vous avez commencé la solution paraît difficile et important.

Veuillez agréer, Monsieur et cher Collègue, l'assurance de ma haute estime et de mes sentiments dévoués.

Poincaré

II.

La deuxième lettre de Poincaré, n° 257, non datée, commence ainsi :

"Permettez-moi de vous remettre une thèse."

III.

La troisième lettre de Poincaré, n° 258, également non datée, affirme :

"Brillouin a parfaitement raison."

IV.

Dans sa lettre du 19 janvier 1892, Boussinesq écrit (p.1) :

"Voici l'application, à des mouvements sensiblement parallèles aux x propagés par ondes planes suivant les z positifs, de la théorie exposée vers la fin de mon volume intitulé *Application des potentiels etc.*[4] (pp.673 à 697) relativement aux ondes émanées d'une petite région centrale d'ébranlement, dans tout milieu élastique hétérotrope et homogène, sans dispersion."

NOTES

1 Bibliothèque de l'Institut de France, Ms 4229, *Collection Boussinesq II*, n° 256.

Sur ce mathématicien, voir L. Félix, *Boussinesq, Joseph Valentin*, p.355-356 du t.II de *Dictionary of Scientific Biography*, New York (Scribner), 1973.

Nous pensons qu'une étude sur l'oeuvre mathématique de Boussinesq s'impose.

2 J. Boussinesq, *Sur les intégrales asymptotes des équations différentielles* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 94 (1882), 208-210).

3 Boussinesq écrit, p.209 de sa Note :

"M. Poincaré a reconnu qu'il [[le procédé de Boussinesq]] fournit aussi celles [[solutions asymptotes]] d'autres équations différentielles, étudiées par ce jeune et déjà éminent analyste."

4 J. Boussinesq, *Application des potentiels de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques*, Paris (Gauthier-Villars), 1885.

LETTRE DE FRANCESCO B R I O S C H I

F. Brioschi écrit dans sa lettre du 24 mai 1887 :

"Je suis toujours disposé à travailler pour le Répertoire Bibliographique et à prendre la direction de ce travail pour les recueils italiens."

Sur ce mathématicien, voir J. Pogrebyssky, *Brioschi, Francesco*, p.469-470 du t.II du *Dictionary of Scientific Biography*.

CORRESPONDANCE AVEC LUITZEN EGBERTUS JAN BROUWER

I.

[[10 décembre 1911 : cachet de la poste]]

Mon cher Collègue[1],

Je vous remercie beaucoup de votre lettre ; je ne vois pas pourquoi vous doutez que la correspondance entre les deux variétés soit analytique ; les modules des surfaces de Riemann peuvent s'exprimer analytiquement en fonction des constantes des groupes fuchsiens ; il est vrai que l'on ne doit donner à certaines variables que des valeurs réelles, mais les fonctions de ces variables réelles n'en conservent pas moins le caractère analytique.

Ou bien la difficulté provient-elle à vos yeux de ce que l'une de ces variétés dépend non des constantes du groupe mais bien des invariants. Si je me rappelle bien, j'envisageais une variété dépendant des constantes des substitutions fondamentales du groupe ; à un groupe correspondra alors une infinité discrète de points de cette variété ; je subdivisais ensuite cette variété en variétés partielles, de telle façon, qu'à un groupe corresponde un seul point de chaque variété partielle (de la même façon que l'on décompose le plan en parallèlogrammes des périodes, ou bien le cercle fondamental en polygones fuchsiens). Le caractère analytique de la correspondance ne m'en semble pas altéré.

En ce qui concerne la variété des surfaces de Riemann on peut être embarassé si l'on considère ces surfaces de la façon de Riemann ; on pourrait se demander par exemple si l'ensemble de ces surfaces ne forme pas *deux* variétés séparées. La difficulté disparaît dès que l'on envisage ces surfaces *au point de vue de M. Klein* ; la continuité, l'absence de singularités, la possibilité de passer d'une surface à l'autre d'une manière continue deviennent alors des vérités presque intuitives.

Je vous demande pardon de la façon découpée et du désordre de ces explications ; je n'espère pas qu'elles vous satisfassent parce que je vous les ai très mal présentées ; mais je pense qu'elles vous amèneront à préciser les points qui vous embarassent de façon que je puisse ensuite vous donner entière satisfaction. Je suis heureux d'avoir cette occasion d'entrer en rapport avec un homme de votre valeur.

Votre bien dévoué collègue.

Poincaré[2]

II.

Amsterdam, 4. 1. 1912[3]
Overtoom 565

Cher Monsieur,

Mille remerciements de votre lettre et de votre promesse de revenir plus tard à la question. Quant au cours autographié de M. Klein, quoique l'idée de la surface quelconque considérée comme surface de Riemann y joue un rôle prépondérant, il n'est fait aucun usage de cette idée pour démontrer des propriétés de la variété des modules, de sorte que M. Burkhardt doit s'être trompé à ce sujet et que je serai très heureux si je pouvais un jour prendre connaissance de vos développements d'autrefois que vous n'avez pas publiés.

Salutations cordiales et respectueuses. Votre bien dévoué.

L.E.J. Brouwer

NOTES

1 Cette lettre a été publiée dans l'article de P.S. Aleksandrov : Пуанкаре и топология (Успехи мат. наук, 27(1972), вып. 1, 147-156) = *Poincaré and Topology* (Russian Math. Surveys, 27(1972), N° 1, 157-166).

La note, p.157, précise :

"This article is a free transcription of the speech given by the author, under the same title, at the celebration session (in the Hague [[La Haye]]) of the International Congress of Mathematicians in honour of the centenary of Poincaré's birth (Amsterdam 1954)."

Aleksandrov écrit (p.160-161) :

"The force of Poincaré's geometrical intuition sometimes led him to ignore the pedantic strictness of proofs. Here there is still another side ; finding himself under constant influx of a set of ideas in the most diverse fields of mathematics, Poincaré "did not have time to be rigorous", he was often satisfied when his intuition gave him the confidence that the proof of such and such a theorem could be carried through to complete logical rigour and then assigned the completion of the proof to others. Among the "others" were mathematicians of the highest rank. I shall quote a letter of Poincaré to Brouwer (which belongs to the last year of Poincaré's life and, as far as I know, has never been published before), which seems to me to be a good illustration of how the idea was put into practice."

Après avoir donné la lettre de Poincaré, Aleksandrov poursuit (p.162-163) :

"This letter is interesting not only as an illustration of some features of Poincaré's creative manner, it shows also that Poincaré had a high opinion of the mathematical, that is, topological works of Brouwer. This can concern only those works of Brouwer belonging to the two years 1909-1911. Poincaré not only knew these works well by the end of 1911 (when the letter was written), but he appreciated their depth. Moreover, Brouwer's topological papers were written with a very high degree of difficulty and were not in the least in the classical style. Consequently, Poincaré, even in the last year of his life, found sufficient energy and curiosity to master mathematical results and methods due to a completely different manner of mathematical creativity than his own - a feature that is characteristic only of very great scholars !"

L'article d'Aleksandrov est suivi d'une note de V.K. Zoritch : О письме Пуанкаре к Брауэру (156-158) = *On Poincaré's letter to Brouwer* (166-168).

2 Hans Freudenthal nous écrit à propos de cette lettre, le 21 mars 1984 :

"Malheureusement, je n'ai pas tenu compte de la publication d'Aleksandrov quand je m'occupais de l'édition des Oeuvres de Brouwer (voir II, ⟦ 568 ⟧ - ⟦ 590 ⟧) [[L.E.J. Brouwer, *Collected Works 2* , Hans Freudenthal Editor, Amsterdam(North-Holland), 1976]]. Je suis sûr que la communication orale à La Haye ne contenait pas cette partie. Je pense que tout est éclairci par mon édition. Le point essentiel est que Poincaré en 1884 se sert de la "variété" close des surfaces de Riemann intactes, ce que Brouwer appelle *Blödsinn* [[non-sens]] dans sa lettre à Koebe [[p.⟦ 585 ⟧]], tandis que Klein 1882 A [[*Neue Beiträge zur Riemann'schen Functionentheorie* (Math. Annalen, 21(1882), 41-218) = *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, t.III, p.630-710, Berlin(Springer), 1923]] le fait avec la variété ouverte des surfaces coupées, route suivie plus tard par Brouwer.

La difficulté remarquée par Brouwer (d'après Poincaré), et sûrement par beaucoup d'autres, est bien signalée dans la lettre de Poincaré."

3 H. Freudenthal note dans sa lettre déjà citée :

"La lettre de Brouwer du 4 janvier 1912 ne peut pas être la réponse à celle de Poincaré (non datée). Il doit y en avoir eu d'autres, en particulier une où Poincaré mentionne Burkhardt."

LETTRES DE GEORGES BRUNEL

I.

Leipzig, juin 1881[1]

Monsieur,

Pouvant vous entretenir de choses qui vous intéressent spécialement, je me permets de vous écrire. Ancien élève de l'Ecole Normale Supérieure, j'ai été envoyé en Allemagne à ma sortie de l'Ecole et je suis en ce moment auprès de Mr Klein où j'ai déjà à plusieurs reprises entendu parler de vous. Comme vous le voyez, suivant l'habitude allemande, j'ai commencé par me présenter ; si je me suis conformé à une habitude allemande, il ne faut pas croire pour cela que je me plaise beaucoup au milieu de ce peuple ; plus j'apprends à le connaître et plus je le déteste.

Vous vous demandez probablement à quoi j'en veux venir. C'est bien simple. Aujourd'hui soir nous avions Séminaire. Mr Klein est arrivé avec les *Comptes Rendus* qui contiennent vos Notes sur les fonctions fuchsiennes et aussi les travaux récents de Picard[2].Il s'est d'abord adressé à moi et m'a communiqué les deux lettres que vous lui avez écrites[3]. Après quoi, il s'est mis à nous analyser vos derniers travaux sur les dites fonctions en commençant à peu près en ces termes : "J'ai déjà eu à parler à plusieurs reprises avec quelques-uns d'entre vous des travaux des élèves de Mr Hermite ; je crois aujourd'hui, avec la tournure que prend la chose, devoir vous en entretenir un peu plus en détail : Il s'agit en particulier des travaux de Mr Poincaré, et des Notes qu'il publie maintenant presque régulièrement dans les *Comptes Rendus*. Prenant un *Compte Rendu* au hasard, je trouve une Note sur les propriétés des fonctions fuchsiennes." Le mot de fuchsiennes lui a déjà permis de faire quelques railleries plus ou moins fines, qui ont paru chatouiller agréablement les oreilles allemandes qui l'écoutaient ; Monsieur Klein m'avait déjà en particulier parlé de vos travaux mais, ce soir, il paraissait un peu plus animé que précédemment ; ayant lu maintenant les lettres que vous lui avez écrites, je crois devoir attribuer cette attitude à votre refus, bien motivé et bien compréhensible, de changer de dénomination[4]. Alors il a continué, et il s'est plaint de ce que les "jeunes Français" ne savaient pas ce qui s'était publié en Allemagne ; il a dit que l'on ne savait pas en France probablement que les *Mathematische Annalen* existaient (à cela je n'aurais pu répondre qu'une chose, c'est que, à Berlin même, on considère ce Journal comme d'existance toute problématique), que l'on n'y lisait pas le *Journal de Crelle* (où avez vous lu les travaux de Fuchs ?), etc., etc. J'étais bien ennuyé et je ne pouvais rien dire ; je ne suis ici qu'un hôte et je dois être poli, même quand on ne l'est pas précisément ! Il a alors dans vos travaux relevé une faute dont probablement il vous a déjà parlé[5] ($4p+2$ pour le nombre des modules au lieu de $3p-3$) et comme péroraison il nous a dit : "Je proteste contre le nom de fonctions *fuchsiennes*. C'est à Riemann que revient l'idée fondamentale, c'est à Schwarz que revient le mérite de l'application de cette idée de Riemann. Plus tard, j'ai travaillé moi-même dans cette direction et dans mes leçons au *Polytechnikum* de Münich j'ai présenté quelques résultats qui sont la base des travaux de Mr Poincaré. Quant à Mr Fuchs, qui a voulu une fois s'occuper de questions semblables, il n'est parvenu qu'à ceci : à nous montrer qu'il n'y comprenait absolument rien." Je dois conclure. Vos fonctions fuchsiennes n'appartiennent à personne autre que vous et vous pouvez leur donner le nom qu'il vous semble bon sans qu'aucun Allemand ait à y redire. Que dans leurs cours ils aient exposé quelques idées en rapport avec la question qui vous occupe maintenant, qu'il résulte d'un entretien, que Mr Klein a eu avec Mr Weierstrass à Pâques, que certaines idées que vous avez de votre côté existent dans une autre forme dans le cerveau du géomètre de Berlin, tout cela n'est que chose secondaire. Enfin, Klein vous adresse encore un reproche, aussi bien à vous qu'à Appell et à Picard, c'est d'exposer parfois, dans les *Comptes Rendus*, dans des Notes bien courtes des "méthodes" que l'on ne sait pas si "vous êtes capables d'employer" (ceci a été accompagné d'une critique bien aigre d'une Note de Picard). Je crois que Mr Klein avait oublié, quand il a dit cela, qu'il n'est pas possible de publier dans les *Comptes Rendus* tout ce que l'on voudrait et que l'on doit se contenter d'y présenter les idées et les méthodes sans tant appuyer sur les résultats. La place manque. Vous comprenez maintenant pourquoi j'aime tant les Allemands. Je dois dire cependant que relativement j'ai toujours trouvé que Mr Klein était le plus aimable et le plus obligeant. Enfin, quels qu'ils soient, il faut savoir profiter de ce qu'ils ont de bon ; c'est toujours là ce que je me suis dit et c'est même pour cela que je suis en Allemagne. A ce point de vue je pourrai peut-être aussi vous être utile, et c'est même pour me mettre entièrement à votre disposition que je me suis permis de vous écrire. Mr Klein m'a communiqué il y a huit jours les notes prises par un élève à son cours du *Polytechnikum* de Münich ; cela est déjà assez volumineux. Théorie des équations (semestre d'hiver). Fonctions modulaires et coup d'oeil général sur la théorie des fonctions elliptiques (semestre d'été). Ayant ce cours entre les mains, je me suis mis immédiatement au travail et quand je retournerai en France j'en aurai une traduction complète.

C'est au commencement de la théorie des fonctions modulaires que se trouve quelque chose ayant rapport à vos travaux. Mais, *je croyais trouver plus de ressemblance*. Dans un premier entretien que j'avais eu avec Mr Klein à propos de vos fonctions, il m'avait exposé ses idées en me disant que je les trouverai dans le cours qu'il avait à me communiquer. Dans un second entretien, j'avais entre les mains les leçons en question ; nous avons cherché ensemble les passages dont il s'agissait, nous n'en avons en réalité trouvé que des traces. "Je ne voulais pas surcharger mes élèves, mais j'avais déjà alors les idées dont il s'agit." Et cependant, aujourd'hui, il se plaint de rencontrer des idées dans les *Comptes Rendus*, probablement parce qu'il regrette de n'avoir pas publié les siennes.

Si je puis vous être de quelque utilité, s'il m'était possible de vous donner un renseignement, facile à trouver ici et que vous ne pourriez point vous procurer à Caen, disposez de moi. Je me mets tout entier à votre service. Français, notre devoir est de combattre les Allemands par tous les moyens possibles, mais loyalement. Par là j'entends que nous devons reconnaître franchement ce qu'ils ont fait, mais aussi nous devons ne pas tout leur attribuer. Si Mr Klein a déjà publié dans sa théorie des fonctions modulaires certains théorèmes particuliers de la théorie des fonctions fuchsiennes, je ne trouve que juste que vous lui rendiez justice, comme vous le lui dites. S'il n'a pas été plus loin, tant pis pour lui !

Camarade d'Appell et de Picard, je me suis permis de parler avec vous comme je le fais avec eux. Vous me pardonnerez, j'en suis sûr, la liberté que j'ai prise.

Tout à vous.

Brunel G.

P.S.

Je retourne à Paris le 12 août. Si à cette époque vous vous y trouvez il me serait bien agréable de vous y rencontrer. Je pourrai alors vous communiquer mes notes sur le cours en question. D'ailleurs, et je vous le répète, si vous avez besoin de quelque renseignement je me mets à votre disposition. Mr Klein sais que je dois vous écrire, mais pas une lettre pareille, je suppose.

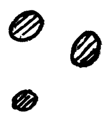
Au cas où vous voudriez bien m'écrire, voici mon adresse :

Brunel G.
bei Frau Dittmann
Liebigstrasse 4^{II}, Leipzig.

II.

Leipzig, 7 juillet 1881

Monsieur,

J'ai eu aujourd'hui même un entretien avec Monsieur Klein. Les fonctions kleinéennes[6] ne le contentent pas. Loin de là. Il est peut-être mécontent d'arriver en seconde ligne. Quoiqu'il en soit il est probable que vous recevrez de lui, si vous ne l'avez déjà reçue,une lettre dans laquelle il vous exprimera ses plaintes[7]. Que voulez-vous ? Il est, je ne sais pour quelle raison, furieux contre Monsieur Fuchs et il ne pourra plus dormir tant que les fonctions fuchsiennes existeront. Il s'est plaint de ce que vous l'ayez pour ainsi dire pris comme complice et voici à peu près ce qu'il m'a dit à ce sujet : "En lisant ce que Mr Poincaré vient de publier dans les *Comptes Rendus* on s'imaginera que je lui ai écrit : J'ai pris connaissance de vos belles recherches et je vous félicite d'avoir trouvé ce chemin tout nouveau, mais il me semble qu'il faut encore considérer une autre espèce de polygones, etc., etc. Mais ce n'est pas là du tout ce que je lui ai écrit. Je lui ai écrit que tout ce qu'il a fait est connu et publié depuis longtemps. D'ailleurs, je reproche à Monsieur Poincaré de publier trop vite. Je lui avais parlé dans une première lettre[8] du polygone  et à la fin de sa Note il considère des régions limitées par plusieurs circonférences[9]. Dans une lettre que je lui envoyais, malheureusement après sa publication[10], je lui parlais également de ce dernier cas. Et en marchant aussi vite il s'expose à de nouvelles réclamations. Mr Schottky a publié dans le 83e volume du *Journal de Borchardt* un Mémoire où il s'occupe précisément du cas[11]  . Peut-être que Monsieur Poincaré va encore appeler un certain ordre de fonctions fonctions schottkyennes. Il n'y a pas de raison pour s'arrêter." Je vous répète ce qu'il m'a dit, laissant de côté quelques exclamations comme : *Es ist zu verrückt !*[12], etc., et je trouve qu'il ne serait pas difficile de répondre à tout ce qu'il a dit.

Je ne puis pas encore aujourd'hui être aussi précis dans mes explications que je le désirerais, mais je compte mardi prochain avoir encore à votre sujet un entretien avec Klein ; j'aurai alors une vue d'ensemble sur les travaux qu'il a faits et qui se rapportent aux vôtres. Je vous écrirai immédiatement. Pour aujourd'hui je puis toujours vous affirmer que je n'ai encore vu aucune trace dans les mémoires de Klein ni dans son cours au *Polytechnikum* de fonctions analogues aux fonctions zétafuchsiennes et thêtafuchsiennes. C'est d'ailleurs là une question qu'il n'a pas du tout abordée dans les entretiens que j'ai eus avec lui à votre sujet. C'est dans le semestre 1877-1878 que ses recherches sur l'équation du 5e degré l'ont conduit à considérer ses *Fundamentalpolygonen*[13] ; il a continué en 1878-1879 et dans le semestre d'été 1879 a traité de fonctions modulaires (du 23 avril au 2 juillet). J'extrais du cours deux ou trois lignes qui montrent clairement l'idée fondamentale et qui répondent à votre question sur Riemann[14] : *Riemann sprach den Satz aus, dass zu jeder Riemann'schen Fläche Functionen existieren,welcher aber als nicht bewiesen gilt*[15]. Ceci écrit par l'élève qui a fait la rédaction, puis de la main de Klein : *Trotzdem mache ich hier von diesem Satze unbedenklich Gebrauch ; ich erachte als möglich einen Beweis der allgemeinen Behauptung in aller Strenge zu bringen*[16]. Klein s'est occupé donc successivement des équations du 5^{e}, 7^{e} et 11^{e} degré, mais *depuis cette époque il ne s'est pas que je sache occupé d'équations différentielles d'une façon spéciale*. Il est bon cependant que vous soyez informé que dans le prochain semestre il lira sur les équations différentielles et évidemment travaillera dans cette direction. Je me ferai d'ailleurs tenir au courant de ce qu'il traite dans son cours Mentionera-t-il l'emploi des fonctions zéta et thêtafuchsiennes, j'en doute. En tout cas, il semble bien peu disposé à accepter ce nom qui lui fait horreur.

Je crois bien de vous envoyer la table des matières du cours sur les fonctions modulaires[17]. Je la copie telle quelle.

Je vous écrirai mardi prochain, mercredi au plus tard.

Je vous serre la main.

Brunel G.

Liebigstrasse 4^{II}.

III.

Leipzig, 14 juillet 1881

Monsieur,

Je reçois à l'instant votre lettre et m'empresse d'y répondre. Monsieur Klein a été malade ces jours derniers, nous n'avons point eu de séminaire lundi, en sorte que je n'ai pas pu prendre jour avec lui pour nous entretenir de vous. Cependant je crois ne devoir pas attendre pour répondre à votre question sur les formes quadratiques binaires et ternaires et l'équation de Pell.

[[...]][18]

Peut-être que ce qui précède ne vous contentera pas ; la rédaction que j'ai eue entre les mains a été très mal faite. D'autre part, il n'est pas toujours facile sans entrer dans de longs détails de donner un aperçu de la méthode géométrico-algébrique de Klein. Si vous n'êtes pas satisfait ne vous gênez pas pour me le dire ; je vous renverrai alors la chose d'une façon plus explicite. Je suis en outre à votre disposition complète et prêt à vous rendre les services qu'il est en mon pouvoir de vous rendre.

Klein ne sait pas encore que je vous ai écrit. Je lui avais dit que j'avais l'intention de vous envoyer une lettre et c'est alors qu'il m'avait prié d'attendre un entretien complémentaire.

Je remarque en terminant que si Klein s'étonne de ce que vous ayez donné un nom aux nouvelles fonctions, "bien qu'il n'ait fait rien autre chose que de remarquer l'existence de ces groupes"[19], c'est encore pour protester contre le nom de fonctions fuchsiennes, Fuchs n'ayant même pas trouvé les groupes correspondants.

Dès que j'aurai vu Monsieur Klein, je vous écrirai de nouveau, à moins que je ne reçoive de vous auparavant une lettre.

Tout à vous.

Brunel G.
Liebigstrasse 4[II]

Monsieur Weierstrass n'a rien publié, que je sache, depuis quelque temps. Sa dernière note dans les *Monatsberichte* est du mois de février et relative à une lettre que Mr Tannery lui avait envoyée[20]. Il est beaucoup occupé par la publication des oeuvres de Steiner et de Jacobi[21].

Schwarz publie en ce moment à Göttingen : *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der ellptischen Functionen (nach Vorlesungen und Aufzeichnungen des H. Pr Weierstrass)*. La publication n'est pas encore terminée[22].

Pourquoi ne cherchez-vous pas des fonctions de plusieurs variables également à groupe discontinu. A ce sujet la *Theorie der Transformationsgruppen* de S. Lie[23] (*Math. Annalen*, XVI, 441) pourrait vous être utile. On n'a pas aussi facilement de représentation géométrique quand il s'agit de fonctions de deux variables, mais qu'est-ce que cela fait.

IV.

Leipzig, 31 juillet 1881

Cher Monsieur,

Je n'ai plus eu avec Monsieur Klein d'autre entretien à votre sujet. Je lui ai dit que je vous avais écrit à propos des formes quadratiques et de l'équation de

Pell. Il paraît convenablement revenu à la raison et avoir digéré le nom de fuchsiennes.

Je quitte Leipzig mercredi prochain, j'irai d'abord à Paris où je resterai quatre ou cinq jours, ensuite je vais chez moi. Si donc vous voulez m'écrire, voici mes adresses. Du 5 au 10 août : Ecole Normale Supérieure, 45 rue d'Ulm. A partir du 11 août : Rue de la Tannerie, 6, Abbeville, Somme.

J'espère que vous m'écrirez et me donnerez votre adresse pendant les vacances. Je ne suppose pas que vous restiez à Caen.

Vous avez peut-être reçu une thèse d'un jeune Allemand, Hurwitz[24]. Sur la théorie, indépendante, des fonctions modulaires ... c'est l'exposé des idées de Klein. Mr Hurwitz était élève de Klein à Münich ; c'est sous la direction de Klein qu'il a fait cette thèse, et Klein considérait ce travail comme très important, il y a mis plus d'une fois la main, a corrigé et au besoin modifié les épreuves. Vous avez dans cette thèse la plus grande partie de ce qui a été fait au *Polytechnikum* de Münich.

D'après ce que vous me disiez dans une de vos lettres, vous avez en ce moment à faire passer les examens du baccalauréat. Je suppose que cela ne vous prend cependant pas beaucoup de temps et ne s'oppose que bien peu à votre travail,et,en voyant ce que vous publiez dans les *Comptes Rendus*, je trouve ma supposition fondée[25].

Pendant les vacances je vous écrirai probablement plusieurs fois. J'ai l'intention de faire un résumé du cours du *Polytechnikum*.

Vous ai-je dit dans ma dernière lettre que la réduction des formes au moyen du triangle fondamental est due à Smith[26] ?

J'attends une lettre de vous, soit à Paris, soit à Abbeville.

Tout à vous.

Brunel G.[27]

NOTES

1 Sur Georges Brunel (1856-1900), voir :
- P. Barbarin, *Georges Brunel* (L'Enseignement mathématique, 3(1901), 237-239) ;
- P. Duhem, *Brunel (Georges)* (Association des anciens élèves de l'Ecole Normale Supérieure, 1901, 102-116) ;
- P. Duhem, *Notice sur la vie et les travaux de Georges Brunel* (Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux, (6), 2(1904), I-XCI) ;
- P. Tannery et G. Brunel, *Correspondance*, p.277-280 du tome XIII des *Mémoires scientifiques* de P. Tannery, Toulouse(Privat), 1934.

2 H. Poincaré a publié, entre le 14 février et le 30 mai 1881, six Notes aux *Comptes Rendus* sur les fonctions fuchsiennes (*Oeuvres*, t.II, p.1-18).

E. Picard, *Sur les expressions des coordonnées d'une courbe algébrique par des fonctions fuchsiennes d'un paramètre* (Comptes Rendus, 92(1881), 1332-1334, 6 juin 1881) = *Oeuvres*, t.I, p.73-76, Paris(C.N.R.S.), 1978.

3 Lettres des 15, p.100, et 22 juin 1881, p.103 de la *Correspondance* de Poincaré avec Klein (Acta Mathematica, 39(1923), 94-132).

4 Voir la lettre de Poincaré à Klein du 22 juin 1881, p.103 de leur *Correspondance*.

J. Dieudonné écrit, p.10, de son étude sur *La découverte des fonctions fuchsiennes*, p.3-23 des *Actualités mathématiques, Actes du 6e Congrès du Groupement des Mathématiciens d'Expression Latine*, Paris(Gauthier-Villars), 1982 :

"On conçoit sans peine l'étonnement un peu scandalisé de Klein lorsqu'il constate que, dans les premières Notes de Poincaré aux *Comptes Rendus* de 1881, seul Fuchs est cité, et que c'est sous le patronage de ce dernier qu'il place l'immense théorie qu'il vient d'édifier."

5 Klein en parlera à Poincaré dans sa lettre du 2 juillet (p.109 de la *Correspondance*) et Poincaré y répondra le 5 juillet (p.110).

6 La définition des "fonctions kleinéennes" figure p.21 de la Note de Poincaré *Sur les fonctions fuchsiennes* (Comptes Rendus, 92(1881), 1484-1487, 27 juin 1881) = *Oeuvres*, t.II, p.19-22.

7 Voir la lettre de Klein du 9 juillet, p.111 de la *Correspondance*.

8 Plus précisément dans la deuxième lettre, du 19 juin, p.102 de la *Correspondance*.

9 P.21 de la Note de Poincaré du 27 juin.

10 La lettre de Klein du 2 juillet, p.107 de la *Correspondance*.

11 F. Schottky, *Ueber die conforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Flächen* (Journal für die reine und angewandte Mathematik, 83(1877), 300-351).

12 "C'est trop bête !"

13 Voir p.98, 100, 103-104 de la *Correspondance* de Poincaré avec Klein.

14 P.105 de la *Correspondance*.

15 "Riemann a énoncé le théorème que pour toute surface de Riemann il existe des fonctions, mais ce théorème ne peut pas être considéré comme démontré."

16 "Malgré cela, j'utilise ici sans hésiter ce théorème ; je crois qu'il est possible de donner une démonstration rigoureuse de la proposition générale."

17 Cette table des matières est jointe à la lettre.

18 Brunel donne ensuite un long extrait du cours de Klein sur cette question.

19 Brunel cite ici un passage de la lettre de Klein à Poincaré du 9 juillet 1881, p.111 de la *Correspondance*, lettre que Klein a certainement montrée à Brunel.

20 K. Weierstrass, *Zur Functionenlehre, Nachtrag* (Monatsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften vom 21. Februar 1881) = *Mathematische Werke*, t.II, p.231-233, Berlin(Mayer und Müller), 1895.

21 J. Steiner, *Gesammelte Werke*, t.I, 1881, t.II, 1882, Berlin(Reimer).

C.G.J. Jacobi, *Gesammelte Werke*, t.II, 1882, t.III, 1884, t.IV, 1886, t.V, 1890, t.VI, 1891, t.VII, 1891, Berlin(Reimer).

22 Ce livre a été publié en 1885 à Göttingen(Dieterich). Il a été traduit en français par H. Padé : *Formules et propositions pour l'emploi des fonctions elliptiques, d'après des leçons et des notes manuscrites de M. K. Weierstrass, rédigées par M. H.A. Schwarz*, Paris(Gauthier-Villars), 1894.

23 Première partie, p.441-528, t.16(1880).

24 A. Hurwitz, *Grundlagen einer independenten Theorie der elliptischen Modulfunktionen und Theorie der Multiplikator-Gleichungen erster Stufe* (Mathematische Annalen, 18(1881), 528-592) = *Mathematische Werke*, t.I, p.1-66, Basel(Birkhäuser), 1932.

25 Poincaré a publié en juillet 1881 deux Notes dans les *Comptes Rendus*.

26 H.J.S. Smith, *The Collected Mathematical Papers*, tomes I et II, Bronx(Chelsea), 1965.

27 Michel Mendès France nous a signalé l'existence d'un dossier sur G. Brunel aux Archives de l'Université de Bordeaux. De plus, il nous a indiqué qu'en 1902 un médaillon à l'effigie de Georges Brunel a été inauguré à Abbeville, où Brunel est

né et où sa soeur s'est mariée et est devenue Madame Ternisien. (Nous avons écrit à Abbeville, mais nous n'avons reçu aucune information sur G. Brunel).

Jean Dieudonné nous écrit dans sa lettre du 5 avril 1984 :

"Les lettres de Brunel sont amusantes et valent la peine d'être publiées pour faire revivre l'atmosphère où Klein régnait en "pontife" et ses prétentions ridicules à être considéré comme le "co-découvreur" des fonctions fuchsiennes ; Brunel s'était bien rendu compte qu'il n'y avait absolument rien dans les travaux de Klein publiés à cette époque, qui aille plus loin que la théorie des fonctions modulaires. Mais ce que ni Klein ni lui (ni bien entendu Fuchs) n'avaient compris, c'était le trait de génie de Poincaré de faire intervenir la géométrie non euclidienne."

LETTRES DE GEORG CANTOR

I[1].

Halle a/Saale d. 29ten Oct. 1895[2].

Lieber Herr College !

Besten Dank für Ihr Schreiben v. August und die Empfehlung meiner Arbeit an Herrn C. Jordan. Derselbe hat mir sehr liebenswürdig geschrieben, allein wir haben uns vollkommen darüber geeignet, daß es nicht gut geht, die französische Uebersetzung einer Abhandlung aus den *Math. Annalen* im Liouvilleschen *Journal* erscheinen zu laßen. Sie werden inzwischen N° 1 der Arbeit von mir erhalten haben[3].

Ich reise heute Abend auf einige Tage nach Berlin, wo wir den 31ten Oct. den 80sten Geburtstag von Weierstraß feiern werden[4].

Beifolgend erlaube ich mir, Ihnen mein Bild zu verehren, mit der Bitte, mir auch von Ihnen eine Photographie zu schicken.

Mit freundlichem Gruße Ihr ergebenster

G. Cantor

II.

Halle a. d. S. 15 Dec. 1895[5]

Lieber Herr College !

Meinen herzlichsten Dank für Ihre Photographie im Cabinetsformat, welche auch von meiner ganzen Familie, in Erinnerung an Ihren freundlichen Besuch im vorigen Sommer, mit Freuden aufgenommen worden ist.

Unser letztes Wort bei Ihrer Abfahrt auf dem Bahnhofe in Halle war : "Auf Wiedersehen in Zürich im Herbst 1897 zum *constituirenden* internationalen Mathematikercongreß."

In Anknüpfung hieran möchte ich die Frage an Sie richten, ob es Ihnen wohl recht wäre, wenn Sie und ich jetzt in einen Ideenaustausch *über die Ziele und Aufgaben und die zweckmässigste Art der Verwirklichung der "Internationalen Mathematikercongreße" eintreten* ?

Mit der Bitte, mich unbekannterweise an Madame Poincaré auf's Beste zu empfehlen, Ihr sehr ergebener

Georg Cantor.

III.

Halle a. d. Saale, 7ten Jan. 1896[6]

Lieber Herr College !

Ihren freundlichen Neujahrsgruß, der mir soeben zugeht, erwidere ich mit den herzlichsten Wünschen für Ihr und Ihrer Familie : Glück und Wohlbefinden !

Den Brief, in welchem Sie sich bereit erklären, mit mir die, auf die internationalen Matematikercongreß, bezüglichen Fragen zu discutiren, habe ich erhalten und freue mich auf diese gemeinsame Arbeit, welche, wie ich glaube, dem Gedeihen der mathematischen Wissenschaften und, in gewissem Sinne, sogar dem Wohle der Menschheit und der einzelnen Nationen zu Güte kommen wird.

Sobald ich die Zeit dazu finde, werde ich die Details meiner Idee aufschreiben, um Sie Ihnen zur Prüfung und Beurtheilung vorzulegen. Für heute nur dies, daß ich die *constituirende Versammlung* am Herbst des Jahres *1897* in *Brüssel* oder *Zürich*[7], den *ersten wirklichen* und *eigentlichen Congreß*, aber anno *1900* in *Paris*[8] abgehalten sehen möchte. Sie wissen ja, daß ich von Geburt *kein Deutscher*, sondern ein *St Petersburger* bin. Erst im Alter von 11 Jahren kam ich mit meinen Eltern nach Deutschland, von denen mein seliger Vater ein *Däne* war (aus Kopenhagen nach St Petersburg in seiner Kindheit gekommen), meine jetzt in Berlin lebende Mutter eine *St Petersburgerin* ist. Daher werde ich in dieser unsrer Angelegenheit durch keine nationalen Bedenken beschwert und aufgehalten !

Allein ich habe mich auch überzeugt, daß wir für diesen Plan die deutschen Collegen gewinnen werden, wenn wir nur dafür sorgen, daß bei Einleitung der darauf bezüglichen Unterhandlungen und bei den gemeinsamen Vorberathungen selbst keinerlei Fehler begangen werden.

Also in einigen Wochen schreibe ich Ihnen ausführlich !

Mit den besten Grüßen Ihr ganz ergebener

Georg Cantor.

IV.

Halle a. d. Saale 22ten Jan. 1896

Hochgeehrter Herr College !

Zu meinem größten Bedauern sehe ich mich, ohne die geringste Schuld meinerseits, verhindert, an den Kundgebungen für die *Acta mathem.*, von denen Sie die Gütte hatten mir Mittheilung zu machen, theilzunehmen[9], obgleich ich denselben das beste Gelingen wünsche, weil ich die großen Verdienste welche sich Herr Mittag-Leffler um unsere Wissenschaft durch diese Schöpfung erworben hat, durchaus anerkenne.

Die Beziehungen, welche ich während der ersten vier Jahre des Bestehens dieser Zeitschrift zu ihr gehabt habe[10], sind von Herrn M.-L. selbst im Jahre 1885, also bereits vor circa 11 Jahren gelöst worden.

Ich war nämlich schon damals im Besitz der Theorie der transfiniten Cardinalzahlen und der transfiniten Ordnungstÿpen, deren Publication, wie Sie wissen[11], in mathem. Zeitschriften erst vor einigen Monaten ihren Anfang genommen hat. Allein ich wollte diese Lehre schon damals (weil alles Wesentliche und Principielle davon fertig dastand), und zwar in den *Acta math.* publiciren, und bedaure es noch heute auf's lebhafteste, daß man mich hiervon abgehalten hat.

Ich sandte das Manuscript einer daraufbezüglichen Arbeit an Herrn M.-L. ein (ich besitze es noch ; es hat den Titel : "Principien einer Theorie der Ordnungstÿpen"[12]) ; Herr M.-L. acceptirte dasselbe und der Druck begann 1884. Ich war gerade mit der Correctur des ersten Druckbogens beschäftigt, welche ich zusammen mit dem damaligen Gehülfen der *Acta math.*, Herrn G. Eneström besorgte. Da erhalte ich einen Brief von Herrn M.-L. (datirt Stockholm 9 März 1885[13]), worin er es mir sehr nahe legt, die Arbeit zurückzuziehen, weil ich gewissermaßen mit derselben "um 100 Jahre zu früh" erschienen wäre ! (Nach seiner Meinung hätte ich also mit der Publication bis 1985 warten sollen ?!) Ich telegraphirte ihm sofort dit Bitte, mir das Manuscript umgehends zurückzuschicken, was auch geschah.

Es war mir bei dieser Gelegenheit plötzlich klar geworden, daß Herr M.-L. es im Interesse seiner *Acta math.* wünschen musste, keine ferneren Arbeiten von mir in seinem Journal zu drucken. Der eigenartige Zusammenhang ist einfach dieser. Schon meine früheren, seit 1870 publicirten Arbeiten hatten sich, wie ich stets sehr gut selbst es wusste, nicht des Beifalls der Berliner Machthaber : Weierstraß, Kummer, Kronecker und Borchardt zu erfreuen gehabt[14]. Würde nun gar Herr M.-L. die viel weitergehende und kühnere Theorie der transfiniten Ordnungstÿpen gebracht haben, so hätte er die Existenz seines noch jungen Unternehmens, welches vom Wohlwollen der Berliner Akademiker (*besonders von Weierstraß*) hauptsächlich abhing, *im höchsten Grade gefährdet.*

Nur so läßt sich die seltsame Schwenkung meines Freundes M.-L. erklären !

Ich habe ihm dieselbe daher auch keineswegs übelgenommen und meine liebevollen Gesinnungen zu seiner Person sind auch jetzt noch immer ganz dieselben, wie vor jener Katastrophe. Allein ich glaube und hoffe, daß Sie sowohl wie auch die Herren Hermite, Picard und Appell mir durchaus Recht geben werden, wenn ich mit meinem Namen für eine Zeitschrift nicht eintrete, für welche der Ausschluß meiner Arbeiten bis zu einem gewissen Grade zu einer Lebensfrage geworden war.

Wahrscheinlich hat sich auch heute, wo zwar Kummer, Kronecker und Borchardt durch den Tod ausgeschieden sind, dafür aber an ihre Stelle die mir keineswegs günstiger gesinnten Herren Fuchs, Schwarz und Frobenius getreten sind, die Situation in Bezug auf mich und meine Arbeiten ganz und gar nicht verbessert, so daß mein Eintreten für die *Acta math.* denselben vielleicht ebenso schaden würde, wie for 12 Jahren ihnen meine wissenschaftliche Mitarbeit thatsächlich geschadet hat. Es empfiehlt sich daher auch von dieser Seite im Interesse der *Acta math.* selbst meine absolute Reserve.

Mein freundschaftliches Verhältnis zu Gustav Mittag-Leffler und seiner liebenswürdigen Frau Gemahlin hat aber durch diese Sache, wie gesagt, keinerlei Aenderung erfahren.

Uebrigens sind Sie auch der Erste, dem ich davon erzähle ; ich hätte Alles fast vergessen und wurde erst durch Ihr letztes Schreiben wieder lebhaft daran erinnert. Um vor Ihnen Allen wegen meiner Absage durchaus gerechtfertigt dazustehen, habe ich diese Dinge so umständlich erzählen und erklären müssen.

Was nun die internationalen Mathematikercongreße betrifft, so bin ich bisjetzt keinerlei Opposition gegen die Idee begegnet, den ersten[15] solchen Congreß im Jahre 1900 in Paris abzuhalten. Diese Idee besteht seit etwa 6 Jahren. Wir bezitzen in Deutschland seit dem Herbst 1891 eine Organisation "Die deutsche Mathematikervereinigung", welcher ich, nachdem sie von mir in's Leben gerufen war, die beiden ersten Jahre als Präsident vorstand. Es gehören momentan dazu 273 Mitglieder. Jedes Jahr im September tritt sie im Anschluß an die algemeine Naturforscherversammlung an wechselnden Orten zusammen.

Im Bericht über die Jahresversammlung in *Wien*, 1894, findet sich folgendes[16] :

"Herr Lampe (Berlin) berichtete noch über einen von einer Gruppe französicher Mathematiker in Aussicht genommenen internationalen Mathematikercongreß. Die Vereinigung sprach im Principe ihre Sÿmpathie für diesen Plan aus und beauftragte ihren Vorstand gegebenen Falls Schritte für eine würdige Vertretung der deutschen Mathematiker zu thun."

Und in der letzter Jahresversammlung in *Lübeck*, 1895, finden wir[17] :

"In Bezug auf den geplanten internationalen Mathematikercongreß konnte die Versammlung nur die im Vorjahre zum Ausdruck gekommene Meinung dahin präcisiren, daß die Versammlung einem derartigen Unternehmen sympatisch gegenüberstehe, jedoch nicht die Initiative ergreifen wolle."

Ich schicke Ihnen unter Kreuzband den in diesen Tagen erst über diese beiden Versammlungen (1894 und 1895) erschienenen Bericht, wo Sie diese beiden Stellen wiederfinden werden.

Sie sehen also daß die Initiative von andrer Seite ergriffen werden muss, und ich meine, daß es keine **andere** sein kann und darf, als die *französische* ; wobei ich aber, wie Sie schon wissen, dafür bin, daß man von Paris aus schon jetzt, d.h. nächstens, an die verschiedenen mathematischen Organisationen in Deutschland, Großbritannien, Rußland, Italien, etc., etc. ein Circular richtet mit der Frage, ob sie geneigt wären, im Herbst des Jahres 1897 Delegirte zu einer *constituirenden Versammlung* zu entsenden, um daselbst eine angemessene *internationale Institution* und *Organisation* zu schaffen, die alle 3 oder 5 Jahre eine *internationale Mathematikerversammlung* arrangirt. *Erst bei dieser Gelegenheit* (1897) würde dann von selbst die Frage nach dem ersten Versammlungsorte officiell aufzuwerfen sein ; und dann unterliegt es für mich keinem Zweifel, daß dazu Paris im Jahre 1900 einstimmig gewählt werden wird.

Uebrigens lege ich Werth darauf,daß bereits im September dieses Jahres 1896 ausländische Mathematiker die Versammlung der "deutschen Mathematikervereinigung" in *Frankfurt a. Main* mitmachen, um Vorbesprechungen für die internationale Constituante von 1897 zu pflegen[18]. Ich bitte Sie darum,dies in Frankreich zu befürworten. Ich werde das Meinige thun, um russische, englische und italienische Collegen hierfür zu gewinnen.

Indem ich mir vorbehalte, Ihnen noch Genaueres und Ausführlicheres über die Sache zu schreiben, warte ich zunächst Ihre Rückäusserung über diese Vorschläge ab und bin, mit den lebhaftesten Grüßen von Haus zu Haus Ihr ergebenster Freund

Georg Cantor[19].

TRADUCTION DES LETTRES DE GEORG CANTOR[22]

I.

Halle sur Saale, le 29 octobre 1895

Cher Collègue,

Merci beaucoup pour votre lettre du mois d'août et la recommandation de mon travail à Monsieur C. Jordan. Ce dernier m'a écrit très aimablement, mais nous sommes tombés d'accord qu'il ne convient pas de faire paraître la traduction française d'un mémoire tiré des *Math. Annalen* dans le *Journal* de Liouville. Vous aurez reçu entretemps le n° 1 de mon travail.

Je pars ce soir pour quelques jours à Berlin, où nous célébrerons, le 31 octobre, le 80^e^ anniversaire de Weierstrass.

Ci-joint un portrait de moi dont je me permets de vous faire présent, avec la prière de m'envoyer également une photographie de vous.

Avec mes salutations amicales, votre très dévoué

G. Cantor.

II.

Halle sur Saale, le 15 décembre 1895

Cher Collègue,

Mes remerciements les plus cordiaux de votre photographie pour mon cabinet de travail ; toute ma famille l'a également reçue avec plaisir en souvenir de votre visite amicale de l'été dernier.

Le dernier mot que nous avons échangé, lors de votre départ, à la gare de Halle, était : "Au revoir à Zurich en automne 1897 pour le congrès international *constituant* des mathématiciens".

A ce propos, j'aimerais vous demander si vous seriez d'accord de commencer maintenant un échange d'idées avec moi *sur les objectifs et les tâches, ainsi que la manière la plus efficace d'organiser les "Congrès internationaux des mathématiciens"* ?

En vous priant de présenter mes hommages à Madame Poincaré, que je n'ai pas l'honneur de connaître, je suis votre très dévoué

G. Cantor.

III.

Halle sur Saale, le 7 janvier 1896[20]

Cher Monsieur et Collègue,

Vous souhaits amicaux de Nouvel An viennent de me parvenir ; j'y réponds en vous adressant mes voeux les plus cordiaux de bonheur et de santé pour vous et votre famille.

J'ai bien reçu votre lettre m'assurant de votre accord de discuter avec moi des questions relatives aux congrès internationaux des mathématiciens, et je me réjouis de ce travail en commun qui, comme je le crois, profitera au développement des sciences mathématiques et même, dans un certain sens, au bien de l'humanité et des nations.

Dès que je trouverai le temps de le faire, je vous exposerai par écrit le détail de mes idées, afin de vous les soumettre pour examen et appréciation. Pour aujourd'hui seulement ceci : je souhaiterais que l'*assemblée constituante* se tienne à l'automne de l'année *1897* à *Bruxelles* ou à *Zurich*, mais le *premier congrès véritable et proprement dit* à *Paris* au cours de l'année *1900*. Comme vous le savez bien, je ne suis *pas Allemand* de naissance, mais *Saint-Pétersbourgeois*. Ce n'est qu'à l'âge de 11 ans que je suis venu en Allemagne avec mes parents, dont mon défunt père qui était *Danois* (venu dans son enfance de Copenhague à Sait-Pétersbourg) ; ma mère, qui vit maintenant à Berlin, est *Saint-Pétersbourgeoise*. Aussi, dans cette cause qui nous est commune, je ne serais ni embarrassé ni arrêté par aucune des considérations nationales !

Cependant, j'ai la conviction que nous ne pourrons rallier les collègues allemands à ce dessein que si nous faisons en sorte qu'aucune faute ne soit commise au début des négociations et lors des délibérations communes.

Donc, dans quelques semaines, je vous écrirai plus en détail !

Avec mes meilleurs salutations, votre bien dévoué

Georg Cantor.

IV.

Halle sur Saale, le 22 janvier 1896

Très honoré Monsieur et Collègue,

A mon grand regret je me vois empêché, sans qu'il y ait la moindre faute de ma part,de participer aux manifestations en faveur des *Acta Mathematica*, dont vous avez eu la bonté de me faire part ; bien que je leurs souhaite le meilleur succès, car je reconnais absolument les grands services que Monsieur Mittag-Leffler a rendus à notre science par cette création.

Les relations, que j'avais entretenues avec ce périodique durant les quatre premières années de son existence, ont été rompues en 1885 par Monsieur Mittag-Leffler lui-même, donc déjà depuis environ onze ans.

En effet, j'étais déjà à cette époque en possession de la théorie des nombres cardinaux transfinis et des types d'ordre transfinis, dont la publication, comme vous le savez, a commencé dans les périodiques mathématiques il y a seulement quelques mois. Cependant je voulais déjà à cette époque publier cette théorie (car elle était prête et les principes essentiels étaient établis) et cela dans les *Acta Mathematica*, et je regrette encore aujourd'hui très vivement d'avoir été empêché de le faire.

J'avais envoyé le manuscrit d'un travail sur cette question à Monsieur Mittag-Leffler (je l'ai encore, il a pour titre : "Principes d'une théorie des types d'ordre") ; Monsieur Mittag-Lffler l'a accepté et l'impression a commencé en 1884. J'étais justement occupé avec la correction des premières épreuves en placard, avec Monsieur G. Eneström l'assistant d'alors des *Acta Mathematica*, lorsque je reçus une lettre de Monsieur Mittag-Leffler (datée du 9 mars 1885 de Stockholm) me conseillant très vivement de retirer mon travail, parce que je l'aurais fait paraître en quelque sorte "cent ans en avance" ! (J'aurais dû différer, selon lui, cette publication jusqu'en 1985 ?!) Je lui ai demandé aussitôt par télégramme de me retourner le mansucrit, ce qui fut fait.

A cette occasion, il m'est devenu soudainement clair que Monsieur Mittag-Leffler ne devait plus souhaiter imprimer, dans l'intérêt de ses *Acta Mathematica*, aucun autre de mes travaux dans son périodique. L'enchaînement singulier est simplement le suivant. Déjà mes travaux antérieurs, publiés depuis 1870, n'avaient pas, comme je l'ai toujours très bien su, suscité l'approbation enthousiaste des potentats de Berlin : Weierstrass, Kummer, Kronecker et Borchardt. Si Monsieur Mittag-Leffler avait quand même publié la théorie beaucoup plus avancée et plus audacieuse des types d'ordre transfinis, il aurait *fortement compromis* l'existence de son entreprise encore jeune, qui dépendait principalement de la bienveillance des académiciens berlinois (*notamment de Weierstrass*).

Seulement ainsi on peut expliquer le changement *d'opinion étrange de mon ami Mittag-Leffler.*

C'est pourquoi je ne lui en ai nullement tenu rigueur et mes pensées affectueuses pour sa personne sont restées encore maintenant les mêmes que celles avant cette catastrophe. Seulement je crois et j'espère que vous-même, ainsi que Messieurs Hermite, Picard et Appell, me donnerez raison d'avoir refusé de laisser utiliser mon nom pour un périodique pour lequel le refus de mes travaux était devenu en quelque sorte une question de survie.

Il est probable que même aujourd'hui, alors que Kummer, Kronecker et Borchardt sont décédés et remplacés par Messieurs Fuchs, Schwarz et Frobenius qui ne sont nullement plus bienveillants pour moi, la situation en ce qui concerne ma personne et mes travaux ne s'est aucunement améliorée, si bien que mon intervention pour les *Acta Mathematica* risquerait peut-être d'être aussi nuisible pour eux que le fut, il y a douze ans, ma collaboration scientifique. Pour cela aussi ma complète abstention est souhaitable dans l'intérêt même des *Acta Mathematica.*

Mes relations amicales avec Gösta Mittag-Leffler, et sa charmante épouse, comme je l'ai dit, **n'en sont** nullement altérées.

Vous êtes d'ailleurs le premier à qui j'en parle ; j'étais sur le point de tout oublier et c'est votre dernière lettre qui m'en a vivement rappelé le souvenir ! C'est pour justifier devant vous le bien-fondé de mon refus que je devais vous rapporter et expliquer cette affaire si minutieusement.

En ce qui concerne les congrès internationaux des mathématiciens, on ne m'a pas formulé, jusqu'à présent, la moindre objection à ce que le premier de ces congrès se tienne à Paris en 1900. Ce projet existe depuis environ six ans. Nous avons en Allemagne, depuis l'automne 1891, une société qui s'appelle "L'Union allemande des mathématiciens", dont, après l'avoir fondée, j'ai été président pendant les deux premières années. Elle compte actuellement 273 membres. Elle se réunit chaque année, dans des lieux différents, au mois de septembre, à l'issue du congrès général des scientifiques.

Dans le compte rendu du congrès annuel à Vienne, en 1894, se trouve le paragraphe suivant :

"Monsieur Lampe (Berlin) a encore présenté un rapport sur un congrès international des mathématiciens envisagé par un groupe de mathématiciens français. L'union a accueilli le principe de ce projet avec sympathie et a chargé son comité directeur de faire en sorte que, le cas échéant, les mathématiciens allemands y soient dignement représentés."

Et dans le rapport du dernier congrès annuel à *Lubeck*, en 1895, on peut lire :

"En ce qui concerne le projet du congrès international des mathématiciens, l'union a simplement précisé son opinion de l'année dernière, à savoir qu'un tel projet a toute sa sympathie, mais qu'elle s'abstient d'en prendre l'initiative."

Je vous adresse sous bande le rapport de ces deux congrès (1894 et 1895) qui vient seulement d'être publié ces jours-ci, où vous pourrez retrouver ces deux passages.

Comme vous voyez, l'initiative doit être prise par quelqu'un d'autre, et je pense que cela ne doit et ne peut se faire que du côté *français* ; cependant, comme vous le savez, je suis d'avis qu'on envoie de Paris très rapidement une circulaire à l'intention des différentes organisations mathématiques en Allemagne, Grande Bretagne, Russie, Italie, etc., etc. posant la question de savoir si ces pays sont d'accord pour déléguer en automne 1897 des représentants à une *assemblée constituante*, pour que celle-ci crée une *institution* et une *organisation internationales* qui mettra sur pied un *congrès international des mathématiciens* tous les trois ou cinq ans. *Ce n'est qu'à cette occasion* (1897) que se posera d'elle-même d'une manière officielle la question du premier lieu du congrès ; et pour moi il ne fait aucun doute que c'est Paris qui sera choisi à l'unanimité pour l'année 1900.

Je tiens d'ailleurs à ce que des mathématiciens étrangers participent dès septembre de cette année 1896 au congrès de l'union allemande des mathématiciens à *Francfort-sur-le-Main*, afin d'engager des pourparlers concernant la constituante internationale de 1897. Je vous prie d'intervenir dans ce sens en France. Moi, de mon côté, je ferai mon possible pour rallier des collègues russes, anglais et italiens à cette idée.

Avant que je ne vous écrive encore des détails complémentaires sur cette affaire, j'attends d'abord votre réponse à ces propositions, et suis, avec les salutations les plus vives de nous tous à tous les vôtres, votre ami dévoué

Georg Cantor[21].

NOTES

1 Voir la lettre XII de la *Correspondance avec Paul Appell*. Nous ne savons pas ce que sont devenues les lettres de Poincaré à Cantor.

2 Göttingen, Akademie der Wissenschaften, Nachlass Cantor 18, Nr. 217 (deponiert in der Niedersächsischen Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen). Nous remercions Dr Haenel, directeur de la *Handschriftenabteilung*, d'avoir bien voulu nous envoyer les photocopies des lettres de Cantor.

3 G. Cantor, *Beiträge zur Begrundung der transfiniten Mengenlehre* (Math. Annalen, 46(1895), 481-512).

4 K. Weierstrass est né le 31 octobre 1815. Il n'est pas sans intérêt de signaler la lettre que Cantor écrit à Felix Klein le 8 décembre 1895 (p.165 de P. Dugac, *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques*, Paris(Vrin), 1976) : Il affirme qu'il n'est pas d'accord avec Klein sur "la prépondérance qu'il attribue à Weierstrass dans l'"arithmétisation des mathématiques"". Car, d'après Cantor, on doit "distinguer chez Weierstrass ce qu'il a réellement fait du mythe dans lequel l'ont enveloppé ses élèves, pour ainsi dire comme dans un épais brouillard, pour le raffermissement et l'élévation de leur propre réputation". Nous pensons que ce jugement de Cantor mérite un examen sérieux.

5 Göttingen, Akademie der Wissenschaften, Nachlass Cantor 18, Nr. 251 (deponiert in der Niedersächsischen Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen).

6 Voir p.83-91 de P. Dugac : *Georg Cantor et Henri Poincaré* (Bolletino di Storia delle Scienze Mathematiche, 4(1984), 65-96).

7 Le premier congrès international des mathématiciens a eu lieu à Zurich du 9 au 11 août 1897. Ce qui est surprenant, c'est que le nom de Cantor n'apparaît nulle part comme participant actif à la préparation de ce congrès, contrairement au contenu de sa lettre à Poincaré. Dans la *Vorgeschichte des Kongress* (p.3-21 des *Verhandlungen des ersten internationalen Mathematiker-Kongresses*, Leipzig(Teubner), 1898), on retrouve le nom de Poincaré comme cosignataire de la lettre datée de janvier 1897 (p. 8). On trouve le nom de Cantor (p.52, 57-58) à propos d'un projet de création d'une commission dont le but était "de donner à l'institution du congrès international un caractère permanent".

8 Le deuxième congrès international des mathématiciens a eu effectivement lieu à Paris du 6 au 12 août 1900, sous la présidence de H. Poincaré, congrès auquel Cantor n'a pas participé.

9 Il s'agissait de soutenir les *Acta Mathematica* auprès du parlement suédois pour que celui-ci conserve la subvention du gouvernement à la revue de Mittag-Leffler.

10 Mittag-Leffler a fait paraître en français tous les mémoires de Cantor écrits avant 1884 dans les *Acta Mathematica*, tomes 2(1883) et 4(1884). Poincaré a participé à la traduction de ces mémoires de Cantor.

11 Voir la lettre I.

12 Publié p.83-101 de I. Grattan-Guinness : *An Unpublished Paper of Georg Cantor* (Acta Mathematica, 124(1970), 65-107). Une des causes de la soudaine décision de Mittag-Leffler d'arrêter la publication de ce mémoire de Cantor était probablement l'accueil plutôt mitigé par des mathématiciens français des traductions des mémoires de Cantor. Voir, en particulier, p.209 des *Lettres de Charles Hermite à Gösta Mittag-Leffler (1874-1883)* (Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques, 5(1984), 49-285).

13 Publiée p.101-102 de l'article cité dans la note 12.

14 Sur l'attitude de Weierstrass, voir p.117-118 de P. Dugac : *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques*, Paris(Vrin), 1976.

15 Comme nous l'avons déjà dit, c'est effectivement Paris qui fut choisi comme siège du deuxième congrès international des mathématiciens.

16 P.5 du tome 4(1894-1895) du *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Verinigung*.

17 P.9 du tome cité dans la note 16.

18 P.6-7 de la *Chronik der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, t.5(1901) du *Jahresbericht*.

19 Nous savons, d'après la lettre de Cantor à E. Lemoine du 17 mars 1896 (p.517 de H. Meschkowski : *Aus den Briefbüchern Georg Cantor* (Archive for History of Exact Sciences, 2(1962-1966), 503-519)) que Poincaré n'a pas répondu à cette lettre de Cantor.

20 Les transcriptions et les traductions des lettres III et IV sont dues à François Poincaré.

21 Il nous semble intéressant de citer les passages de la correspondance de Poincaré avec Mittag-Leffler à propos de Cantor, correspondance qui est déposée à l'Institut Mittag-Leffler à Djursholm.

Mittag-Leffler écrit dans sa lettre du 5 décembre 1882 :

"M. Cantor vient de faire des découvertes extrêmement remarquables qui vous intéressent spécialement. Vous les trouverez bientôt dans le journal [[*Acta Mathematica*]]."

Dans sa lettre du 2 mars 1883, Mittag-Leffler mentionne une lettre de Poincaré que nous ne possédons pas, mais dont un extrait important figure dans le texte d'un discours prononcé par Mittag-Leffler le 11 novembre 1912 à l'assemblée "des 17". Cet extrait figure dans la note 347, p.278-279 des *Lettres de Charles Hermite à Gösta Mittag-Leffler (1874-1883)* (Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques, 5(1984), 49-285). Toutefois la date du 16 mars 1883 indiquée par Mittag-Leffler sur son manuscrit dactylographié ne doit pas être exacte, puisqu'il écrit dans sa lettre :

"Veuillez agréer mes vifs remerciements pour votre bonne et aimable lettre et pour les conseils que vous me donnez quant aux travaux de Cantor. Je lui écrirai dans le genre indiqué en lui demandant de donner des exemples à ces théories générales. Permettez-moi aussi de vous bien remercier de votre obligeance de m'avoir aidé avec les traductions. J'ai honte d'abuser ainsi de votre temps qui est si précieux à la science. Mais je me console un peu de la pensée qu'il n'a pas été entièrement sans intérêt pour vous de prendre connaissance des recherches de Cantor."

22 Les lettres I et II ont été traduites par Jeanne Peiffer.

LETTRE DE JOHN CASEY

Sur J. Casey (1820-1891), professeur de mathématiques à l'Université catholique d'Irlande et vice-président de l'Académie d'Irlande, voir [1] , t.III, p.242-243 et t.IV, p.226.

Il écrit dans sa lettre de Dublin, du 8 mai 1884 :

"I send you by this post copies of five memoirs."

LETTRE DE FELICE CASORATI

Pavie, 19 février 1884[1]

Monsieur,

Je vous dois les plus vifs remerciements pour le Mémoire *Sur les groupes des équations linéaires*[2], que je reçois dans ce moment, et pour les autres que vous avez eu la bonté de m'envoyer précédemment.

Je vous prie de vouloir accueillir, comme petit témoignage d'une grande reconnaissance, les choses que j'adresse pour vous à M. Gauthier-Villars, ne possédant pas votre adresse.

Ce sont plusieurs Mémoires et Notes, et le premier volume d'une *Théorie des fonctions de variables complexes*[3], dont j'avais commencé la publication en 1867. Les progrès surprenants d'aujourd'hui augmentent fort beaucoup le désir que j'ai toujours eu de continuer cette publication, en étudiant aussi *l'histoire* de la variabilité complexe, qui dans le premier volume (pag. 1 à 143) ne parvient qu'à l'année 1865.

De même que le *Journal* de Crelle par les travaux d'Abel et Jacobi, de même le Journal de M. Mittag-Leffler[4] par vos travaux prendra rapidement une place très haute dans le monde mathématique.

Agréez les sentiments de l'admiration la plus vive et de la plus cordiale sympathie, avec lesquels je me déclare votre très dévoué.

Felice Casorati

Pour le cas où vous trouveriez le temps d'observer mon Mémoire *Il calcolo delle differenze finite interpretato ed accresciuto di nuovi teoremi a sussidio principalmente delle odierne ricerche basate sulla variabilità complessa*[5], je vous avertis qu'il y une table de matières à la fin.

NOTES

1 Sur F. Casorati (1835-1890), professeur de **mathématiques** à l'Université de Pavie, voir [1] , t.III, p.243 et t.IV, p.226.

Umberto Bottazzini nous écrit le 22 mai 1984 :

"Autant que je sache, il n'y a pas de lettres de Poincaré dans les archives de Casorati."

2 *Acta Mathematica*, t.4(1884), p.201-312.

3 *Teorica delle funzioni di variabili complesse*, Pavia(Fusi), 1868.

4 *Acta Mathematica*.

5 (Annali di Matematica pura ed applicata, (2), 10(1880), 10-45) = *Opere*, t.I, p.317-356, Roma(Edizioni Cremonese), 1951.

CORRESPONDANCE AVEC ARTHUR C A Y L E Y

I.

Dear Sir[1],

I have to thank you very much for the valuable series of memoirs which you have kindly sent me. I see that you have in one of them applied the theory of ideal numbers to the case of binary quadratic formes[2] : it had occurred to me that a very good illustration of the general theory could thus be obtained and I am very glad to find that the case has been worked out. I remain dear Sir, yours very sincerely,

A Cayley[8]

Cambridge 12 October 1883[3]

VII.

Cher Monsieur Poincaré,

J'ai à vous remercier beaucoup pour vos deux ouvrages : la *Thermodynamique*[4] et surtout *Les méthodes nouvelles*[5]; j'admire de loin et sans espérer vous y suivre les développements que vous donnez à vos recherches sur ces questions si difficiles de mécanique céleste. J'ai été très intéressé par votre article *Les géométries non euclidiennes*[6] dans la *Revue des Sciences*. Vous ne dites pas que les axiomes géométriques soient "des conventions" et rien de plus. Au contraire vous remarquez que "notre choix reste libre et ***n'est*** *limité que par la nécessité d'éviter toute contradiction*"[7]. Je souligne ces derniers mots au lieu de votre mot souligné *libre* : n'est-ce pas dans la limite qu'on trouve un caractère de la vérité ? Certainement la géométrie euclidienne ne serait nullement infirmée si l'on établit que l'espace de l'expérience était un espace de Lobatchewski - et je dirais que nonobstant cela elle serait *vraie*. Avec bien de souhaits pour la nouvelle année, je suis cher Monsieur Poincaré votre très dévoué.

A. Cayley

Cambridge le 12 Janvier 1892

Notes

1 Les quatre premières lettres de Cayley à Poincaré, écrites en anglais, ont été transcrites par Jeremy Gray, qui nous écrit le 10 octobre 1984 :

"I do not think any of the four are really worth publishing, they are given over to making and correcting a silly mistake made by Cayley in the course of understanding Poincaré's memoirs on Fuchsian groups.

The letter (in French) of 12 January 1892 is more intersting, for in it we see Cayley disagreeing with Poincaré's philosophical views about geometry and asserting his old position that really Euclidean geometry is true. Joan Richards has examined Cayley's views carefully, see her *The Reception of a mathematical theory : non-Euclidean geometry in England 1868-1883*, in B. Barnes, S. Shapin (eds) *Natural Order : Historical Studies of Scientific Culture*, Sage Publications, Beverley Hills, 1979, 143-166, and elsewhere."

2 P.119-120 du mémoire *Sur un mode nouveau de représentation géométrique des formes quadratiques définies ou indéfinies* (Journal de l'Ecole Polytechnique, 47e Cahier, 1880, 177-245) = *Oeuvres*, t.V, p.117-183, Paris(Gauthier-Villars), 1950.

3 Dans sa lettre du 3 mars 1884, A. Cayley écrit :

"I am beginning to study your beautiful theory." [9]

H. Poincaré lui répond le 4 mars 1884 (cette lettre nous a été communiquée par Jeremy Gray, grâce à l'obligeance de T.D. Hobbs, bibliothécaire de la *Trinity College Library Cambridge*) :

"Je suis extrêmement flatté, Monsieur, qu'un savant tel que vous veuille bien s'occuper de mes travaux."

A. Cayley précise dans sa lettre du 10 mars 1884 :

"I have worked it out for my own satisfaction, in order to fix my ideas, and to exhibit to myself more clearly the connexion of the analysis and the geometry." [10]

Il écrit dans sa lettre du 25 juin 1888 :

"I received some time ago the scheme for the *Répertoire bibliographique des Mathématiques*, but am only to admire the very careful and apparently complete way in which the classification has been made.

[[...]]

Would it be possible to give to each of the subheadings some kind of a historical and explanatory introduction ?" [11]

Sa lettre du 10 décembre 1890 contient les lignes suivantes :

"J'ai à vous remercier instamment tant pour l'ouvrage sur les théories de Maxwell [[*Electricité et Optique. I. Les théories de Maxwell et la théorie électromagnétique de la lumière*, Paris(Carré), 1890]] que pour le grand mémoire sur le problème des trois corps [[*Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique* (Acta Mathematica, 13(1890), 1-270)]]. Ce dernier me paraît un monde nouveau, et je crains qu'il faut me résigner, ne pas essayer d'y pénétrer."

4 Paris(Carré), 1892.

5 [2], t.I.

6 Publié aussi p.49-67 de *La science et l'hypothèse*, Paris(Flammarion), 1906.

7 Poincaré écrit (p.66) :

"Ce sont des *conventions* ; notre choix, parmi toutes les conventions possibles, est *guidé* par des faits expérimentaux ; mais il reste *libre* et n'est limité que par la nécessité d'éviter toute contradiction."

8 Voici la traduction de cette lettre de Cayley qui est due à Colette Casamatta :

"Cher Monsieur,

Je tiens à vous remercier pour la suite remarquable de mémoires que vous m'avez si aimablement envoyés. Dans l'un d'eux, j'ai vu que vous aviez appliqué la théorie des nombres idéaux au cas des formes quadratiques binaires : il m'était venu à l'esprit qu'une très bonne illustration de la théorie générale pouvait être obtenue ainsi, et je suis très heureux de constater que le cas a été résolu.

Je reste, cher Monsieur, très sincèrement votre.

A. Ceyley

Cambridge, le 12 octobre 1883"

9 "Je viens d'entreprendre l'étude de votre belle théorie."

10 "Je l'ai étudiée pour ma satisfaction personnelle, afin de fixer mes idées et d'avoir une vue plus claire de la relation existant entre l'analyse et la géométrie."

11 "Il y a quelques temps, j'ai reçu le plan du *Répertoire bibliographique des Mathématiques*, mais je puis seulement admirer la façon très soigneuse et, semble-t-il, complète dont a été effectuée la classification.

[[...]]

Serait-il possible de donner à chacun des sous-chapitres une sorte d'introduction à la fois historique et explicative ?"

Lettres de Alexandre Saweljevitsch C H E S S I N

Sur A.S. Chessin voir [1], t.IV, p.243-244, t.V, p.219 et t.VII b, 2e partie, p.800. Chessin (1865-1955) était à l'époque où il écrivait ces lettres professeur associé de mathématiques à Johns Hopkins University à Baltimore.

A.S. Chessin écrit à Poincaré dans sa lettre du 23 novembre 1898 :

"Je vous demande mille pardons pour la liberté que je prends de vous adresser et je vous serai bien reconnaissant si vous voulez décider une question sur laquelle j'ai une discussion avec un de mes collègues à l'Université de Harvard. Il s'agit d'une généralisation des théorèmes de Green et de Cauchy."

Victor J. Katz nous écrit dans sa lettre du 28 juin 1984 :

"As far as I have been able to determine, the circumstances surrounding the letters from Alexandre Chessin to Henri Poincaré are as follows :

Prof. Chessin published an article "On the Singularities of Single-Valued and Generally Analytic Functions" in the Annals of Mathematics (Vol. 11, p. 52-56, 1896). The thrust of the article was to prove the theorem : If at a point a the single-valued and generally analytic function $f(z)$ ceased to be analytic without becoming infinite, then the function $(z-a)\, f(z)$ would be analytic at this point. (Note : As Chessin states in his November 23, 1898 letter, a function has a property in general if it has it everywhere except on a set of content 0 .) Chessin proves the theorem as an immediate corollary of another result : A function $f(z)$ which is single-valued and generally analytic in a given domain becomes discontinuous at the points at which it ceases to be analytic.

Chessin proves this latter result by first proving a generalization of Cauchy's theorem :

II Let $f(z)$ be a single-valued function which is finite and continuous throughout a connected domain $(\mathcal{D})$ and generally analytic in the same ; let also z_0 and z be any two points within $(\mathcal{D})$; then the definite integral

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\, dz$$

will be independent of the path of integration, provided several paths lie entirely within $(\mathcal{D})$ and can be brought to coincide with one another by a continuous deformation without crossing any of the boundary lines of $(\mathcal{D})$.

This result in turn follows from a version of Green's theorem which Chessin claims is to be found in Axel Harnack's text, *An Introduction to the Study of the Elements* *of the Differential and Integral Calculus* (translated by George Cathcart, published in London, 1891), p. 315. Chessin quotes the theorem as follows :

I Let $X(x,y)$ and $Y(x,y)$ be two functions of the real variables x and y, which are finite and continuous throughout a connected domain (D), and which generally (i.e. with the exception of points and lines forming a discrete multiplicity) satisfy the equation $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$; let further (x_0,y_0) and (x,y) be any two points within (D) ; then the definite integral

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} (X\, dx + Y\, dy)$$

will be independent of the path of integration, provided the several paths lie entirely within (D) and can be brought to coincide with one another by a continuous deformation without crossing any of the boundary lines of (D).

Unfortunately, the theorem as stated does not appear in Harnack. On p. 315 we read the following result :

If P and Q be the partial derived functions of a unique function of two variables, the value of the integral :

$$\int (P \cos \varphi + Q \sin \varphi)\, ds = \int (P\, dx + Q\, dy)$$

is zero, when it is formed in a positive circuit for all the boundary curves of a domain within which the functions $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ are integrable and in general, with possibly a linear set of exceptions, satisfy the equation $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

We note the major difference between Harnack's theorem and Chessin's quote of it is in the hypothesis that $\frac{\partial P}{\partial y}$ and $\frac{\partial Q}{\partial x}$ are *integrable* in the domain. (Harnack's further hypothesis, that P and Q are partial derivatives of a given function, is unnecessary, since the other hypothesis already imply that, as Harnack himself shows a few pages later.)

Now in a lecture delivered before the Cambridge Colloquium in August, 1898, subsequently published in the Bulletin of the A.M.S. (Nov. 1898, (2) 5, p.82-87), Professor William F. Osgood of Harvard spoke about the attempt to prove Cauchy's integral theorem without the assumption that $f'(z)$ is continuous : "Without this condition, no proof of Cauchy's integral theorem has as yet been given." He outlines a proof using, first of all, the hypothesis that $f'(z)$ is in general continuous and is always bounded, and, secondly, using the hypothesis that $f'(z)$ exists everywhere and $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ [where $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$] are integrable in the domain.

Furthermore, he quotes Chessin's theorem II - which is, of course, Cauchy's theorem with no restrictions on $f'(z)$ - and says, correctly, that theorem I, ascribed to Harnack, is one "which Harnack neither states nor proves". Further, he says, "without introducing further restrictions there is at present no prospect of obtaining a proof of this theorem (if indeed it be true)".

Professor Osgood is thus the "colleague at Harvard University" who questioned the validity of Chessin's theorems I and II and thus prompted Chessin's letter to Poincaré of November 23, 1898. Now Chessin, in paragraphe 3 and 4 of this letter, purported to show that the conditions that Osgood and Harnack mentioned, namely, the integrability of the various derivatives, were already implied by the existence *in general* of the derivative. In paragraph 3, Chessin states that a function of one variable, continuous in (a,b), which in general possesses a derivative, has the property that $f'(x)$ is integrable in the entire interval. He then generalizes this to the functions of two variables in paragraph 4.

I do not know what answer Poincaré gave Chessin - in all probability, it was non-committal - but in his letters of December 21, 1898 and January 18, 1899, Chessin essentially admitted the truth of Osgood's criticism. He noted that his results from paragraphs 3 and 4 above, and hence his theorems I and II, were not true in general but did require some stronger hypothesis on f. In his January 18 letter, he listed some hypotheses that would suffice (in the one-dimensional case) :

1) $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ always remains finite (without necesarily tending toward a limit).

2) $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ remains finite except in isolated points.

3) $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ remains finite except in points forming a reducible set (according to Cantor's definition).

Chessin further noted that "it appears difficult to assign necessary conditions" for the truth of the theorem. (Of course, there are immediate generalizations of these conditions to the two-dimensional case and Green's theorem.) Apparently, Chessin then decided to write his results in the form of a note which he asked Poincaré to submit to *Comptes Rendus*. Poincaré did so and the note appeared in March, 1899 (Vol. 128, p.604-606).

Chessin's aim in the note was not to deal with Green's theorem as such but with Cauchy's theorem. His question was to determine the weakest conditions on $f'(z)$ such that $\int f(z)\, dz = 0$ along the boundary of a simply connected domain D. However, Chessin first discusses the weakest hypothesis for Green's theorem. Since his January letter, though, Chessin had further retreated. For in the note, he assumes in his hypothesis that not only should $\frac{\partial P}{\partial y}$ and $\frac{\partial Q}{\partial x}$ be finite except on a reducible set, but also they should be *integrable* in the domain (i.e. , he no longer claimed prove integrability from some finiteness condition). In effect, the only new point of his version of Green's theorem was that there need be absolutely no restriction on either existence or the nature of $\frac{\partial P}{\partial y}$ and $\frac{\partial Q}{\partial x}$ on points or lines forming a reducible set.

Finally, he gets his analogous result for Cauchy's theorem - namely, that $\int f(z)\,dz = 0$ as long as $f'(z)$ exists in D except possibly for a set of content 0 , that $f'(z)$ is bounded except on a reducible set, and that $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ are integrable everywhere they are finite. Again, the only significant new point is that one can ignore certain restrictions on reducible sets.

A footnote to this entire series of events is that in 1900, Edouard Goursat published a paper in the Transactions of the A.M.S. (vol. 1) in which he solved Professor Osgood's original problem. (In fact, he published the paper at Osgood's request.) Namely, he proved that Cauchy's theorem was true under the sole hypothesis that the derivative $f'(z)$ exists everywhere in the domain. Goursat had even published the main idea behind this proof in a paper in *Acta Mathematica* in 1886. [Of course, Chessin's results are a bit different - they do not require the existence of the derivative everywhere.]

On the other hand it is not possible to prove Green's theorem by analogous methods using only the hypothesis that the partial derivatives $\frac{\partial P}{\partial y}$ and $\frac{\partial Q}{\partial x}$ exist. One needs, to be able to use the analogy with Goursat's proof of Cauchy's theorem, the assumption that P and Q are differentiable (in the sense of functions of two variables). One could then construct a similar proof.

[[...]] Chessin's letters themselves are interesting only in showing the respect mathematicians had for Poincaré as the expert to whom to turn in settling a dispute. The results themselves are only mildly significant since it is doubtful that there are many useful examples of functions whose derivatives don't exist on a reducible set but which satisfy the remaining conditions. Nevertheless, the interest of Poincaré in replying several times to someone he didn't know to solve a problem I doubt he was much interested in indicates a warm aspect of his personality. So in this sense, they might well be worth publishing.

A biographical note - Professor Chessin was an associate professor at Johns Hopkins University in Baltimore from 1894-1899. He was a professor at Washington University in St. Louis from 1901-1908. What I cannot figure out is why all these letters during academic year 1898-99 were written from New York. Perhaps he was somewhat ill. This might also explain the two-year gap in employment and the fact that he retired to Yonkers in 1909 when he was only 43 years old."

LETTRE DE N. COCULESCU

Solomon Marcus nous écrit le 16 avril 1984 :

"Je vais essayer de trouver la réponse de Poincaré. Je suis en contact avec mes collègues de l'Observatoire astronomique de Bucarest, où j'espère trouver la documentation nécessaire, car Coculescu est le réalisateur de cet observatoire. La correspondance Coculescu-Poincaré me semble naturelle. Dans sa thèse soutenue en 1895 à Paris, Coculescu a résolu, entre autres, un problème posé par Poincaré, concernant la fonction perturbatrice qui est employée dans le problème des trois corps. Retourné en Roumanie, il a continué, probablement, après 1895, de maintenir un contact par correspondance avec son maître."

N. Coculescu a soutenu sa thèse *Sur les expressions approchées des termes d'ordre élevé dans le développement de la fonction perturbatrice* le 5 novembre 1895, devant le jury dont le président était F. Tisserand et les examinateurs P. Appell et H. Poincaré.

Il écrit (p.3) :

"C'est dans ses remarquables recherches sur la *non-existence des intégrales uniformes*, dans les problèmes de la dynamique (voir *Les nouvelles méthodes de la mécanique céleste*, t.I, chap. V, et aussi le célèbre mémoire du tome XIII des *Acta Mathematica*), que M. Poincaré fut amené à s'occuper de la question des expressions approchées des termes très éloignés dans le développement de la fonction perturbatrice."

Il cite (p.5) :

"Quoique dans un autre ordre d'idées [[...]] le mémoire de M. Hadamard : *Sur les fonctions données par leur développement de Taylor* (*Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, 1893), dans lequel l'éminent auteur se propose le problème, inverse de celui de M. Darboux, de "déterminer les points critiques situés sur le contour de convergence"."

CORRESPONDANCE AVEC LOUIS COUTURAT

I.

Caen, le 28 mai 1899[1]

Monsieur,

Je n'ai pas besoin de vous dire avec quel intérêt j'ai lu votre article sur l'ouvrage de M. Russell[2]. Je vous en remercie sincèrement pour l'auteur et pour moi ; car, tout en trouvant un peu exagérées les louanges que je lui ai décernées, vous faites de ce livre un éloge "moins banal" que tous les miens[3] en lui consacrant 28 pages de critique, et en le jugeant digne d'une discussion aussi approfondie. Cette opinion est aussi celle de M. Russell, qui m'écrit textuellement[4] : "Je me sens très flatté de l'attention d'un aussi grand homme, et je trouve dans beaucoup de ses remarques une luminosité (*sic*) remarquable." Il ajoute qu'il va tâcher de vous répondre[5] ; il regrette seulement que vous n'ayez pas lu, à ce qu'il semble, son article dans la *Revue de Métaphysique* de novembre[6], où, répondant à mes objections, il indiquait une expérience (grossière) capable de révéler le non-euclidianisme (sensible) de l'espace. Sans avoir pu trouver le défaut de cette expérience, je persiste à douter de sa valeur, et de la possiblité de vérifier expérimentalement le *postulatum* d'Euclide. J'aurais été heureux de connaître votre opinion sur l'expérience proposée, qui est au moins spécieuse.

Sur d'autres points, M. Russell vous donne déjà gain de cause ; il reconnaît notamment la force de vos objections sur la relativité de l'espace (§ 13 de votre article)[7]. C'est vous dire qu'il est d'une bonne foi absolue dans la discussion. D'ailleurs, il est jeune, et ses idées se modifient et progressent constamment ; aussi est-il très capable de profiter de vos critiques. Il médite un ouvrage sur la Philosophie des Mathématiques[8], qui promet d'être fort intéressant. Comme vous le voyez, il mérite bien l'attention que vous avez accordée à son premier travail, et, pour ma part, je serais très heureux si j'avais pu l'attirer sur lui, et lui procurer ainsi un critique aussi autorisé que vous.

Permettez-moi de profiter de cette occasion pour vous soumettre une difficulté que me signale M. Lachelas[9], et à laquelle je ne trouve pas de réponse.

Vous posez comme 5^{e} axiome (*Revue de Métaphysique et de Morale*, p.254) : "Un plan et une droite se rencontrent toujours." Or cela ne paraît pas être vrai dans l'espace de Lobatchevsky : car si l'on prend dans un plan deux droites qui ne se rencontrent pas, *même à l'infini*, et qu'on fasse passer un autre plan par l'une d'elles, il ne pourra pas rencontrer l'autre droite, *même à l'infini*, car il ne pourrait la rencontrer qu'en un point de la première droite, ce qui est contraire à l'hypothèse. Je ne vois pas ce qu'il y a à reprendre à ce raisonnement, puisque l'existence des droites en question caractérise l'espace de Lobatchevsky ; et je crois devoir en conclure que votre axiome ne s'applique pas à cet espace.

Veuillez excuser l'importunité de mes questions, et peut-être leur naïveté ; soyez sûr que le moindre éclaircissement sera reçu avec reconnaissance, et croyez, dans tous les cas, à mes sentiments respectueux et dévoués.

Louis Couturat

33, rue des Jacobins [10]

II.

Mon cher Collègue[11],

L'article de M. Russell, paru pendant que j'étais en Egypte, m'avait échappé. Son expérience, reposant sur des mesures de distance où l'on emploie pour instrument un corps solide, est en réalité une expérience sur les propriétés des corps solides. Elle est donc passible des mêmes objections que toutes ses expériences analogues.

La remarque de M. Lachelas est fort juste ; elle constitue une très grande difficulté quand on veut fonder la géométrie proj. sans supposer l'espace euclidien et sans construire d'abord la géométrie métrique.

Lobatcheffski ne s'en était pas préoccupé parce qu'il construisait d'abord la géométrie métrique. Mais elle s'est présentée à v. Staudt ; voici ce qu'il fait : pour lui une droite et un plan se coupent toujours en un point *réel ou imaginaire*. Il suppose de plus que les points réels ou imaginaires jouissent des mêmes propriétés au point de vue projectif. Cette solution n'est pas très satisfaisante ; si on veut y échapper il faut trouver un axiome équivalent.

Votre bien dévoué collègue.

Poincaré [12]

NOTES

1 Sur Louis Couturat voir *L'oeuvre de Louis Couturat (1868-1914)*, Paris(Presses de l'Ecole Normale Supérieure), 1983 ; en particulier l'article de J. Dieudonné, *Louis Couturat et les mathématiques de son époque*, p.97-111, qui analyse la controverse Poincaré-Couturat.

2 H. Poincaré, *Des fondements de la géométrie* (Revue de Métaphysique et de Morale, 7(1899), 251-279), compte rendu du livre de B. Russell *An Essay on the Foundations of Geometry*, réédité en 1956 par Dover, New York.

3 Le compte rendu de Couturat sur le livre de Russell a été publié dans la *Revue de Métaphysique et de Morale*, t.6(1898), p.354-380.

4 Voir *La correspondance inédite Couturat-Russell* de A.-F. Schmid, p.81-96 du livre cité dans la note 1.

5 B. Russell, *Sur les axiomes de la géométrie* (Revue de Métaphysique et de Morale, 7(1899), 684-707). Poincaré a répondu à Russell dans son article *Sur les principes de la géométrie*, t.8(1900), p.73-86,de la même revue.

6 B. Russell, *Les axiomes propres à Euclide sont-ils empiriques ?* (Revue de Métaphysique et de Morale, 6(1898), 759-776).

7 Poincaré avait déjà exposé en 1895 ses idées sur *L'espace et la géométrie* (Revue de Métaphysique et de Morale, 3(1895), 631-646) = *La science et l'hypothèse*, p.68-91, Paris(Flammarion), 1902.

8 B. Russell, *The Principles of Mathematics I*, London, 1903 ; *Introduction to Mathematical Philosophy*, London, 1919 = *Introduction à la philosophie des mathématiques*, Paris(Payot), 1952.

9 Voir l'article de H. Barreau *Couturat et la critique des conceptions du temps de ses contemporains : Lachelas, Bergson, Evellin*, p.41-53 du livre cité dans la note 1.

10 Jean Dieudonné nous écrit le 12 mai 1984 :

"La polémique Poincaré-Russell est bien instructive ; elle montre à l'évidence la *nullité* des propos du prétendu "mathématicien" Russell sur tout ce qui touche aux mathématiques ; il devait être complètement autodidacte en la matière, car ce qu'il dit montre qu'il ne connaissait apparemment *rien* de tous les travaux sur les fondements de la Géométrie, depuis Cayley jusqu'à l'école italienne en passant par Pasch et Klein (pour Hilbert, il est possible, vu la date de la lettre de Couturat, que son livre n'ait pas encore été publié à cette époque). Je trouve que Poincaré est bien bon de prendre le temps de discuter ce verbiage, et expliquer tout au long le

Programme d'Erlangen (sans le citer, sans doute pour ne pas effaroucher les lecteurs de la *Revue de Métaph. et Morale*) ; c'est d'ailleurs peine perdue car Russell n'y a rien compris, et continue d'employer les mots "vrai" et "faux" à tort et à travers à propos des mathématiques et de leur rapport au réel (mots que Poincaré avait eu grand soin d'éviter). Il est vraiment dommage que Couturat ait été impressionné à ce point par un tel personnage, mais malgré les louables efforts qu'il avait faits pour s'initier aux mathématiques, il est clair que ses connaissances étaient bien insuffisantes, comme le montre la question que Lachelas et lui posent à Poincaré à la fin de sa lettre, où ils confondent la géométrie projective et la géométrie lobatschevskienne !! Moralité : les philosophes feraient mieux de connaître les mathématiques avant de prétendre en parler !"

11 Cette lettre nous a été aimablement communiquée par Mme Françoise Frey, bibliothécaire de la Bibliothèque de La Chaux-de-Fonds, le 16 août 1984.

Elle porte la date du 1er juin 1899, écrite de la main de Couturat.

12 Anne-Françoise Schmid a bien voulu nous envoyer la note suivante le 12 mai 1985 :

"Cette lettre de Poincaré fait partie de la correspondance encore inédite entre Bertrand Russell et Louis Couturat, retrouvée en Suisse vers 1972. Couturat admirait beaucoup *An Essay on the Foundations of Geometry* (1897), mais il n'a jamais admis le caractère empirique des axiomes propres à Euclide. Il a demandé à Russell de s'en expliquer dans la *Revue de Métaphysique et de Morale* (1899), où Poincaré venait de faire paraître un article critique sur le livre de Russell, ce qui explique cette lettre.

L'expérience proposée par Russell (Revue de Métaphysique et de Morale, 1898, 760) consiste à faire accomplir un tour complet sur une ligne droite à une pièce de monnaie préalablement marquée d'un point sur la tranche. On peut alors déterminer le rapport de la circonférence du cercle à son diamètre, et en tirer la valeur de la constante spatiale.

Poincaré et Russell diffèrent *toto caelo* sur la question des rapports des géométries à l'"empirique". Leur idée même de l'empirique n'est pas du tout semblable. L'"empirisme" de Poincaré tient à la possibilité d'un rapport ultime au fait, ce qui explique sa conception des sciences comme classification et sa distinction philosophique entre l'esprit et l'expérience. Russell distingue l'*a priori* de l'empirique, mais ces deux notions sont en fait constamment intriquées, comme si l'*a priori* n'était posé que pour éviter des contradictions. L'esprit et l'expérience ne forment donc pas deux ordres réellement disticts pour lui.

Cette position philosophique fait comprendre pourquoi Russell fait reposer la géométrie métrique sur la géométrie projective : il construit cette relation en partant de "faits déterminés", en particulier de ce que les notions de grandeur spatiale et de distance n'interviennent pas dans la géométrie projective ; il le montre en se *référant* à la construction du quadrilatère de von Staudt. La géométrie métrique peut alors apparaître comme un cas particulier de la géométrie projective.

Poincaré fait remarquer que, par là, Russell donne une interprétation particulière du principe de relativité : au lieu de lui faire dire que "*certaines* choses ne doivent pas être distinctes les unes des autres", Russell lui fait dire que "*telles et telles* choses ne doivent pas être distinctes les unes des autres" (Revue de Métaphysique et de Morale, 1899, 260) - et ces "choses" ne sont pas "les mêmes" en géométrie projective et en géométrie métrique ; elles ne peuvent en effet être déterminées que par des groupes de transformation qui sont, eux aussi, à chaque fois déterminés, et inassimilables à une quelconque "forme d'extériorité". Même si, mathématiquement, le groupe métrique est contenu dans le groupe projectif, la relation qualitative que pose Russell entre ces géométries n'a pas de sens selon Poincaré, et son erreur tient à ce qu'il implique dans ses définitions des références à des cas précis.

On comprend alors pourquoi Poincaré et Russell soutiennent une théorie de la définition mathématique très différente. Poincaré utilise de préférence en géométrie des définitions par postulats, alors que Russell recherche des définitions nominales qui supposent, en dernier ressort, l'existence empirique de la notion définie. Il y a donc une relation régulière entre les modifications empiriques et les modifications géométriques, et par conséquent la possibilité d'une alternative empirique susceptible de déterminer dans quelles limites on peut affirmer que l'espace est approximativement euclidien. Russell pense que l'on ne peut faire de la géométrie en partant exclusivement de la théorie des groupes : cette méthode laisse échapper la signification intrinsèques des notions définies, qui est l'affaire de la philosophie. Tout cela n'a de sens ni philosophique ni mathématique pour Poincaré. Pour ce dernier d'ailleurs, la sensation n'a aucan caractère spatial (voir *Des Fondements de la géométrie*, Chiron, Paris, 1921, p.5), alors que pour Russell elle en a assez pour lui faire abandonner sur ce point les thèses kantiennes.

C'est pourquoi Poincaré dit que l'expérience de Russell ne porte pas sur l'espace mais sur les propriétés des corps solides.

Dans son article critique, Poincaré fait remarquer (Revue de Métaphysique et de Morale, 1899, 253) que Russell passe complètement sous silence l'axiome de von Staudt. Cette absence est peut-être due au fait que Russell fait des trois axiomes qu'il estime suffisants à la géométrie projective les propriétés d'une forme quelconque d'extériorité, c'est-à-dire en fin de compte la condition de possibilité de l'expérience."

LETTRES DE THOMAS C R A I G

Sur T. Craig (1855-1900) voir [1], t.III, p.308 et t.IV, p.279, ainsi que le *Bulletin of the American Mathematical Society*, t.6(1899-1900), p.410-411 et *The American Mathematical Monthly*, t.8(1901), p.183-187.

Il s'agit de 29 lettres qui s'échelonnent entre le 20 septembre 1883 et 12 mars 1892.

T. Craig écrit dans sa lettre du 29 octobre 1883 :

"C'est mon désir et but d'introduire l'étude de la théorie des fonctions dans cet Université [[Johns Hopkins University]] ; pendant les derniers cinq ou six ans j'ai eu les conférences sur la Riemann théorie - et en partie de la théorie plus moderne qui se trouve dans le *Cours* de M. Hermite. Mais encore je regrette à dire, les élèves ne semblent pas vouloir une connaissance du sujet."

LETTRE DE LUIGI CREMONA

Sur L. Cremona (1830-1903) voir S. Greitzer : *Cremona, Antonio Luigi Gaudenzio Giuseppe*, p.467-469 du t.III du *Dictionary of Scientific Biography*, New York (Scribner), 1971.

Il écrit dans sa lettre du 29 décembre 1886, à propos des tirés à part de Poincaré :

"Permettez à l'un de vos admirateurs les plus sincères de vous adresser une prière.

[[...]]

Je vous serai toujours infiniment reconnaissant des envois dont vous voudrez me gratifier, car j'aime beaucoup votre manière de traiter la nouvelle analyse et j'en tire un véritable profit pour mes propres études.

Agréez mes voeux sincères pour votre avenir, qui ne peut manquer d'être brillant et glorieux."

CORRESPONDANCE AVEC GASTON DARBOUX[1]

I.

[[novembre 1878]]

Monsieur,

J'ai repris ces jours-ci l'examen de votre thèse que j'espère pouvoir achever prochainement. Dès aujourd'hui je viens vous demander une explication sur un point qui m'échappe entièrement.

Dans votre seconde partie[2], vous étudiez d'abord l'équation

$$x_1 X_1 p_1 + x_2 X_2 p_2 + \dots + x_n X_n p_n = Z$$

et vous montrez qu'en désignant par Θ la dérivée

$$\frac{d^{\lambda_1+\dots+\lambda_n} z}{dx_1^{\lambda_1} dx_2^{\lambda_2} \dots dx_n^{\lambda_n}}$$

on a pour cette dérivée une certaine valeur donnée par l'équation

$$(a) \qquad \Theta\,(1 + \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \delta_i) + \Sigma B - B'' = 0 .$$

Cela posé, pour montrer que la série formée avec les coefficients Θ est convergente, vous avez recours à une équation auxiliaire

$$\delta_1' z' + X_2' p_2' + \dots + X_n' p_n' = Z' ,$$

où X_2', ..., Z' sont définies d'une manière que je crois inutile de rappeler.

Dans la méthode que vous suivez le théorème est supposé démontré pour toutes les équations qui ont moins de n variables indépendantes. Il est donc vrai pour la précédente, il y a une fonction z' et vous montrez que la dérivée Θ' de cette fonction, analogue à Θ , sera donnée par l'équation

$$(\alpha) \qquad \Theta'\,(\delta_1' + \sum_{i=1\ ?}^{i=n} \lambda_i \delta_i' + 1) + \Sigma B_1 - B_1'' = 0$$

et vous dites que l'on aura

$$\Theta < \Theta' .$$

Pour établir ce point fondamental vous vous appuyez sur ce que (ici je copie) " B_1 , B''_1 sont formés avec les dérivées partielles des X' , de z' et de Z' comme B et B'' avec celles de z , des X et de Z ".

Or il me semble que cela n'est pas exact, car, dans l'équation en z , il y a un terme $x_1 X_1 p_1$ dont l'analogue ne figure pas dans l'équation en z' et qui donnera dans B , B'' des termes qui n'auront pas leurs correspondants dans B_1, B''_1 .

Je désirerais beaucoup continuer l'étude de votre travail ; si vous pouvez me répondre rapidement, je vous demanderai quelques explications sur des points différents et je me hâterai de terminer.

Veuillez agréer, Monsieur, mes salutations cordiales.

G. Darboux

36 rue Gay-Lussac

II.

Paris, mercredi 4 décembre [[1878]]

Monsieur,

J'ai réuni toutes les remarques qu'il y a à faire sur les parties de votre travail que j'ai lues avec attention. Je persiste à croire que nous en ferons une bonne thèse ; mais il me paraît indispensable de fondre la rédaction et de corriger toutes les erreurs de calcul ou les changements de notation qui la rendent presque illisible. Je vous fais donc renvoyer votre travail, espérant que vous pourrez le rapporter dans quelques jours quand vous viendrez à Paris. Pour ce qui regarde l'historique, vous devez avoir à Nancy les *Comptes Rendus*. Vous y trouverez les Mémoires de Cauchy sur ce sujet[3]. M. Genocchi, à propos de mes travaux, a fait une note historique qu'il a mis dans les *Comptes Rendus*[4] et qui vous guidera ; il y a aussi les 2 volumes de Tables[5]. Si vous le désirez, je vous enverrai les numéros des volumes.

Vous avez encore à subir la petite contrariété d'être obligé d'attendre. Mais il me paraît très important pour vous que votre Mémoire fasse bonne figure. D'ailleurs celui que vous imprimez dans le *Journal de l'Ecole Polytechnique*[6] est déjà un titre que vous pourrez invoquer, en dehors de votre distinction personnelle, s'il venait à y avoir une vacance à l'Ecole Polytechnique.

Veuillez agréer, Monsieur, mes salutations cordiales.

G. Darboux[7]

III.

[[août 1889]]

Mon cher Confrère,

Je pars demain pour les bains de mer avec ma femme et ma fille et j'y dois rester trois semaines. Je crois qu'il y aurait inconvénient à ce que la section attendît mon retour pour se réunir. Je vous ai en effet déjà fait connaître mon opinion, je vote pour Picard[8]. Il va sans dire toutefois que dans le cas fort improbable où la section se partagerait en deux camps égaux, je me rallierais à la candidature d'Appell pour former une majorité.

J'écris dans ce sens à M. Bonnet, qui en l'absence de M. Hermite, va devenir le doyen de la section et qui je pense pourra la réunir chez lui.

Veuillez agréer, mon cher Confrère, l'assurance de ma sincère amitié.

Poincaré

IV.

Paris, le 27 juin 1892

Cher Confrère et Ami,

Depuis la mort de M. Bonnet[9], plusieurs de nos confrères ont pensé que vous aviez le plus de titres à lui succéder comme membre du Bureau des Longitudes, au titre de l'Académie des Sciences. M. Bertrand, M. Hermite, M. Tisserand[10] seront pour vous et beaucoup d'autres encore. Je crois donc que si la perspective de faire partie du Bureau vous agrée, vous feriez bien de faire connaître vos intentions à quelques-uns de vos amis, afin qu'ils puissent parler en connaissance de cause. Ne pourriez-vous pas écrire à Daubrée, à Cornu[11] ? En tout cas, si vous nous envoyez une réponse favorable, nous ferons tout le possible[12].

Merci bien des intentions que vous aviez manifestées à Appell. J'ai été réélu à l'unanimité[13]. Mes hommages à Mme Poincaré. Votre

G. Darboux

V.

[[fin juin 1892]]

Monsieur le Doyen et cher Ami,

Je vous remercie beaucoup de votre lettre et des intentions bienveillantes que vous me témoignez. Je suis tout disposé à poser ma candidature si vous croyez qu'elle ait des chances de succès.

Conformément à votre conseil, j'écris à MM. Daubrée et Cornu. Je vous dirai que M. Cornu m'avait déjà, il y a quelque temps et spontanément, entretenu de l'éventualité d'une vacance au Bureau des Longitudes et s'était montré favorable à ma candidature.

Je n'ai pas vu M. Mercadier avant mon départ et n'ai pu lui parler du projet de médaille à offrir à M. Bertrand.

Picard à qui j'en ai parlé paraît craindre que l'intention trop évidente ne soit plus blessante pour lui qu'une abstention complète[14]. C'est assez délicat à apprécier. Comme Appell semblait dans le même sentiment, je n'ai pas voulu prendre sur moi d'écrire à M. Mercadier, ce qui aurait été se décider à lancer l'affaire sans pouvoir reculer.

Je n'ai plus pensé ensuite à vous écrire, et vous prie de m'excuser.

Veuillez agréer, Monsieur le Doyen et cher Ami, avec mes remerciements, l'assurance de ma sympathie et de mon respectueux dévouement.

Poincaré

VI.

[[mai 1894]]

Mon cher Doyen,

J'ai reçu hier la rosette d'Officier de la Légion d'Honneur[15] et je ne veux pas attendre plus longtemps pour vous remercier de la part que vous avez prise à ma promotion.

Veuillez agréer l'assurance de ma sincère amitié.

Poincaré

VII.[16]

[[1899]]

Mon cher Doyen,

J'ai communiqué votre lettre à Madame Tisserand[17] ; et je viens d'écrire au maire de Nuits pour lui demander un renseignement précis. J'espère que nous ne tarderons pas à être fixés.

A Londres, on est arrivé à se mettre d'accord sur les classifications[18] ; mais la question financière est loin d'être résolue, les prévisions de dépenses n'ont peut-être pas été dressées avec assez de précision et il est convenu que d'ici à la prochaine conférence, qui aura lieu à Pâques, les Anglais feront une nouvelle évaluation.

On s'est mis d'accord pour renoncer au *Slips-catalogue*. Mais la question des *Subject-entries* est toujours pendante. Les Allemands avaient des instructions impératives, et d'autre part les Anglais n'ont pas voulu faire de concession, sinon *ad referendum*. On a rédigé une sorte de compromis qui doit être soumis d'une part au gouvernement allemand par les délégués allemands d'autre part à la Société Royale par les Anglais.

L'entente définitive reste problématique.

A vous bien sincèrement.

Poincaré[19]

VIII.

Paris, le 23 avril 1902

Cher Confrère et Ami,

Il est certain que, d'ici à un an, après avoir formé le nouveau Secrétaire, je serai amené à quitter le décanat[20]. Dans ces conditions je serais très heureux que l'on songeât à moi pour la place que la mort de ce pauvre Cornu laisse vacante au Bureau. Vous savez avec quel plaisir j'ai provoqué autrefois votre candidature. Je me suis retiré devant vos titres supérieurs, j'ai laissé passer de même Lippmann et Bassot[21]. Je suis prêt encore à rester tranquille si vous trouvez quelqu'un qui ait plus de titres ou qui puisse rendre plus de services au Bureau. Mais la circonstance que je vous signale au début de cette lettre vous explique pourquoi je songerais à me présenter. Comme Secrétaire Perpétuel[22] je dois m'occuper de tout ce qui fait l'objet du Bureau. C'est vous dire que je ne songerais pas à considérer ma nouvelle situation comme une sinécure et que, comme membre du Bureau, je serais suivant mon habitude constante tout à fait jaloux de prendre ma part du travail commun.

Comme aujourd'hui sans doute au Bureau vous causerez du remplacement de Cornu, je tiens essentiellement à ce que vous ne soyez pas averti par d'autres de mes intentions. Je serais venu vous voir si je n'étais retenu à la Sorbonne.

Cordialement à vous.

G. Darboux[23]

IX.

Paris, le 10 mai 1907

Mon cher Confrère,

L'Académie se trouve divisée en deux fractions presque égales ; j'accepterais la perspective d'un échec, mais je puis craindre une autre éventualité à mes yeux mille fois plus fâcheuse. Je ne voudrais pas être élu à une faible majorité[24], de sorte que l'on pût croire que mes confrères des sciences physiques se sont prononcés en majorité contre moi et que je leur suis imposé par les membres des autres sections.

Cela je ne peux m'y exposer et c'est cela pourtant qui m'apparaît comme l'issue probable du vote. Dans ces conditions je renonce à toute candidature. Il me reste à remercier mes amis de l'appui qu'ils m'ont donné et qu'ils m'ont conservé jusqu'au bout.

Votre bien dévoué Confrère.

Poincaré [27]

Janssen, Chatin, van Tieghem et Laveran ayant flanché[25], la partie devenait trop risquée ; deux bronchites suffisaient pour nous perdre[26].

NOTES

1 Sur G. Darboux, voir D.J. Struik : *Darboux, Jean-Gaston*, p.559-560 du t.III du *Dictionary of Scientific Biography*.

2 La *Deuxième partie*, p.XCIX-CXXIX de la thèse de H. Poincaré : *Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partielles*, Paris(Gauthier-Villars), 1879 = *Oeuvres*, t. I, p.XLIX-CXXIX.

Poincaré a passé sa thèse le 1er août 1879 devant le jury dont J.C. Bouquet était président; P. Ossian Bonnet et G. Darboux étaient examinateurs. La thèse est dédiée "A M. Ossian Bonnet, hommage respectueux".

3 Cauchy est cité p.XLIX de la thèse de Poincaré.

4 A. Genocchi, *Observations relatives à une communication précédente de M. Darboux sur l'existence de l'intégrale dans les équations aux dérivées partielles contenant un nombre quelconque de fonctions ou de variables indépendantes* (Comptes Rendus, 80(1875), 315-317).

5 *Table générale des Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences, tomes I^{er} à XXXI. 3 août 1835 à 30 décembre 1850*, Paris(Mallet-Bachelier), 1853 ; *tomes XXXII à LXI. 6 janvier 1851 à 30 décembre 1865*, Paris(Gauthier-Villars), 1870.

6 *Note sur les propriétés des fonctions définies par les équations différentielles* (Journal de l'Ecole Polytechnique, 28(1878), 45^{e} Cahier, 13-26) = *Oeuvres*, t.I, p.XXXVI-XLVIII.

7 Nous avons retrouvé parmi les papiers laissés par G. Darboux, à la Bibliothèque de l'Institut de France, Ms 2720, 8, en plus des lettres d'Henri Poincaré à Darboux que nous publions ici, le rapport de thèse de G. Darboux, du 6 juin 1879 :

"La thèse de M. Poincaré traite de l'intégration des équations aux dérivées partielles par la méthode des séries. Cauchy avait déjà étudié cette question et il avait donné une méthode qui tombe en défaut pour certaines valeurs exceptionnelles des variables. L'auteur a en vue surtout des cas d'exception. Sur ce sujet il a donné au commencement de la deuxième partie un théorème très intéressant qui, sans donner la solution complète de la question proposée, constitue un premier progrès réellement remarquable.

Quelques lemmes de l'Introduction m'ont paru aussi dignes d'intérêt. Le reste de la thèse est confus et prouve que l'auteur n'a pu encore parvenir à exprimer ses idées d'une manière claire et simple. Comme d'ailleurs la thèse a été renvoyée bien souvent à son auteur, les points fondamentaux signalés plus haut étant d'ailleurs établis d'une manière satisfaisante, je propose l'admission."

8 Les *Comptes Rendus* du 4 novembre 1889 indiquent (p.721, t.109) que la Section de Géométrie a proposé, pour la place vacante laissée par le décès de G. Halphen, en première ligne E. Picard, en deuxième ligne P. Appell et en troisième ligne (*ex aequo* et par ordre alphabétique) E. Goursat et G. Humbert. E. Picard a obtenu, le 11 novembre (p.731), 45 suffrages, P. Appell 3, et c'est Picard qui a été donc élu.

9 P. Ossian Bonnet est mort à Paris le 23 juin 1892.

10 F. Tisserand, membre de la Section d'astronomie de l'Académie des Sciences.

11 A. Daubrée, membre de la Section de minéralogie, et A. Cornu, membre de la Section de physique générale de l'Académie des Sciences.

12 H. Poincaré a été nommé membre du Bureau des Longitudes le 4 janvier 1893.

13 Il s'agit probablement de la réélection de Darboux comme doyen de la Faculté des Sciences de Paris.

14 On voulait probablement offrir à J. Bertrand une médaille pour ses 70 ans (il est né le 11 mars 1822) pour "réparer" l'oubli dans lequel était tombée,à cette époque, son oeuvre mathématique.

15 H. Poincaré a été promu Officier de la Légion d'Honneur le 16 mai 1894.

16 Avant cette lettre, il en existe une autre, de la même année, dans laquelle Poincaré, qui se trouve "à Lozère par Palaiseau (Seine et Oise)", écrit :

"Pour combiner mes projets et les faire cadrer avec les nécessités du voyage à Londres, j'aurais besoin de savoir le plus tôt possible quel jour vous comptez réunir le Conseil de la Faculté pour la chaire de Chimie Organique."

17 Voir *Discours prononcés à l'inauguration de la statue de Félix Tisserand à Nuits-Saint-Georges le dimanche 15 octobre 1899*, p.E.1-E.19 de l'*Annuaire pour l'an 1900, publié par le Bureau des Longitudes*, Paris(Gauthier-Villars).

Le *Discours de M. Poincaré Membre de l'Académie des Sciences, au nom du Bureau des Longitues* se trouve p.E.4-E.12.

18 Il s'agit d'une réunion de la Commission internationale de bibliographie créée à la suite du premier congrès international des mathématiciens de 1897.

19 Il existe une autre lettre de Poincaré à Darboux qui mentionne "la cérémonie de Nuits". Elle doit être de septembre 1899, car Poincaré écrit :

"J'ai bien tardé à vous écrire pour vous féliciter de votre croix de commandeur. Croyez que mes compliments pour être tardifs n'en sont pas moins sincères."

Or, Darboux a été promu Commandeur de la Légion d'Honneur le 10 août 1899.

On trouve ensuite, dans les papiers de Darboux,deux lettres qui doivent être de 1900 et qui traitent des papiers laissés par Halphen. Dans la première Poincaré écrit :

"Il y a quelque temps, M. Bertrand m'avait fait remettre deux paquets assez volumineux contenant les papiers laissés par Halphen ; j'avais distribué ces papiers à diverses personnes en les priant de les examiner."

Dans la seconde il note :

"Voici maintenant la liste des personnes qui ont reçu des papiers d'Halphen et qui devraient être convoquées."

A ce sujet, voir : H. Poincaré, *Rapport sur les papiers laissés par Halphen* (Comptes Rendus, 133(1901), 722-724 ; 4 novembre) = p.467-469 du t.IV des *Oeuvres* de Halphen.

Une autre lettre de Poincaré, écrite après 1900, présente à Darboux "M. Bourgouïn qui voudrait vous montrer une machine arithmétique de Pascal".

20 Darboux a été le doyen de la Faculté des Sciences de Paris du 12 novembre 1889 au 4 mars 1903. Il a été nommé membre du Bureau des Longitudes le 1er décembre 1902.

21 G. Lippmann, membre de la Section de physique générale, et L. Bassot, membre de la Section de géographie et navigation de l'Académie des Sciences.

22 De l'Académie des Sciences.

23 Nous mentionnons une lettre de Poincaré à Darboux, où il écrit au Secrétaire Perpetuel :

"Avant de vous rendre réponse au sujet de Budapest, je désirerais savoir à quelle époque doit avoir lieu la réunion et combien de temps elle doit durer."

Cette lettre concerne probablement le prix Bolyai reçu par Poincaré : voir G. Rados, *Rapport sur le prix Bolyai* (Bulletin des Sciences mathématiques, (2), 30(1906), 1e partie, 103-128 ; daté d'avril 1906).

Signalons également une lettre non datée de Poincaré, répondant à Darboux qui à dû accepter une invitation à dîner : "Je suis très heureux que vous soyez libre."

24 Ses amis pressaient H. Poincaré de se présenter au poste vacant de Secrétaire perpétuel des Sciences physiques de l'Académie des Sciences. Peut-être pensaient-ils que ce serait un moyen assez efficace pour faire attribuer à Poincaré un des prix Nobel pour la physique (mathématique). Un des promoteurs de cette idée était G. Mittag-Leffler qui se heurtait à de nombreuses difficultés, car il n'existe pas de prix Nobel pour les mathématiques.

25 P. Janssen, membre de la Section d'Astronomie, J. Chatin, membre de la Section d'anatomie et zoologie, P. van Tieghem, membre de la Section de botanique, et A. Laveran, membre de la Section de Médecine et de chirurgie.

26 Une carte postale de Florence, d'avril 1908 (cachet de la poste), représentant le jardin d'hiver de l'Hôtel Italie, informe Darboux :

"J'arriverai à Paris vendredi soir, je voyage à petites journées."

Deux autres lettres doivent probablement être datées de 1909, une des années pendant lesquelles Poincaré était Président du Bureau des Longitudes (1899, 1909 et 1910). Dans la première, Poincaré écrit :

"Hier au Bureau des Longitudes, on s'est occupé de nouveau des réclamations des calculateurs au sujet des 2100 heures. Les Membres du Bureau se sont en général montrés favorables à une solution qui leur donnerait une satisfaction partielle, la seule qui soit possible d'ailleurs."

Dans la seconde, Poincaré affirme :

"Il est évident que votre système pourrait fonctionner et présenterait certains avantages."

Dans une lettre non datée Poincaré note :

"Je reçois un contre-ordre de Ramsay."

La dernière lettre de Poincaré, que nous datons d'octobre 1911, concerne la présentation de deux livres de Poincaré, publiée dans le tome 153(1911), p.795 (30 octobre). Poincaré écrit :

"Puisque vous voulez bien vous charger de la présentation de mes deux livres, je vous envoie les deux notes que vous m'avez demandées."

27 La même lettre a été envoyée à Charlier, rédacteur **scientifique** au *Temps*, 5 boulevard des Italiens à Paris, mais suivi d'un autre *Post Scriptum* (lettre déposée aux *Smithsonian Institution Libraries*) :

"Voici le texte de ma lettre de désistement. Mon pointage était le suivant :

	Poincaré	de Lapparent
Sciences Mathématiques	19	12
Sciences Physiques	16	20
	35	32 .

Je compte tout, même les deux candidats, mais en comptant les absences probables il restait 34 à 29.

Cela était insuffisant pour parer aux accidents, défections possibles, bronchites, etc.

Dans tous les cas je n'aurais pu accepter qu'avec la majorité dans les Sciences Physiques.

Votre bien dévoué.

Poincaré"

LETTRES DE WALTHER D Y C K

Sur W. Dyck (1856-1934) voir J.E. Hofmann : *Dyck, Walther Franz Anton von*, p.268-269 du t.IV du *Dictionary of Scientific Biography*, New York (Scribner), 1971.

Dr Karl Dachs, directeur du département des manuscrits de la Bayerische Staatsbibliothek München, où sont déposés les papiers de W. Dyck, nous a écrit le 16 mai 1984 qu'il n'y existe aucune lettre de Poincaré.

Les quatre lettres de Dyck sont écrites entre le 12 janvier 1884 et le 20 novembre 1885.

Dyck écrit dans sa lettre du 12 janvier 1884 :

"In einem Seminare, daß Prof. Klein und ich gemeinsam abhalten, haben wir den *Cours* von *Mr* Hermite zu Grunde gelegt um die neueren functionentheoretischen Arbeiten - von Weierstraß und Mittag-Leffler beginnend und Ihre Functionen mit linearen Transformationen in sich einbegriffen - durchzusprechen. Ich selbst habe dabei die schönste Gelegenheit, alle die Dinge, die ich bei meinem Aufenthalte in Paris habe kennen lernen, nun wieder gründlich zu verarbeiten !" [1]

NOTE

1 Traduction de Jeanne Peiffer :

"Dans un séminaire que M. le Professeur Klein et moi-même nous animons ensemble, nous avons choisi comme base de discussion le *Cours* de M. Hermite pour analyser les travaux plus récents en théorie des fonctions - en commençant par ceux de Weierstrass et Mittag-Leffler et jusqu'à vos fonctions avec les transformations linéaires en soi y compris. Moi-même j'y ai la plus belle occasion de travailler à fond toutes les choses apprises lors de mon séjour à Paris !"

Correspondance avec Gustaf E N E S T R Ö M

Sur G. Eneström (1852-1923) voir [1], t.IV, p.382-383 et t.V, p.338-339.

La partie de la correspondance, déposée à la Kungliga Akademiens Bibliotek de Stockholm,nous a été aimablement communiquée par Jesper Lützen.

Les 17 lettres de cette correspondance s'échelonnent entre le 4 septembre 1883 et le 29 janvier 1890.

H. Poincaré écrit à Eneström le 19 novembre 1883 (Kungliga Akademiens Bibliothek) :

"Je préfère la traduction de *Mannigfaltigkeit* par multiplicité, car les deux mots ont même sens étymologique. Le mot ensemble convient bien aux *Mannigfaltigkeiten* envisagées par M. Cantor et qui sont discrètes ; il conviendrait moins à celles que je considère et qui sont discontinues. Que pense M. Mittag à ce sujet ?"

G. Eneström y répond le 23 novembre 1883 (Kungliga Akademiens Bibliothek) :

"M. Mittag-Leffler pense que vous pouvez avoir raison et que, par conséquent, il faut préférer le mot multiplicité."

G. Eneström écrit le 24 mai 1885 :

"J'espère que vous aurez maintenant reçu les 49 tirages à part de votre mémoire inséré aux *Acta Mathematica* 7:1. Je vous prie de vouloir bien en distribuer immédiatement aussi peu d'exemplaires que possible parce que le cahier 7:1 ne sera publié que vers le 1 août et parce qu'il nuit à la vente du journal si les tirages à part seront distribués avant ce temps.

M. Mittag-Leffler m'a remis les deux circulaires relativement à une bibliographie mathématique. [[...]] Ne vaudrait-il pas mieux modifier un peu votre plan et préparer [[...]]un dictionnaire biographico-bibliographique des mathématiciens contemporains à l'instar du dictionnaire de M. Poggendorff ?"

H. Poincaré y répond le 3 juin (Kungliga Akademiens Bibliothek) :

"Il ne serait d'aucun intérêt, à mon sens, de faire quelque chose d'analogue au Dictionnaire de Poggendorff ; le classement par noms d'auteurs ne peut être utile aux géomètres, mais seulement aux historiens des sciences ; le classement logique convient seul aux géomètres.

[[...]]

Conformément à vos intentions, je ne distribue **pour** le moment qu'une vingtaine d'exemplaires de la note sur un théorème de M. Fuchs. [[...]]

Si les auteurs sont généralement pressés d'avoir leurs tirages à part, c'est pas pour faire une ample distribution à tous leurs amis, mais pour envoyer aussitôt que possible un exemplaire à une dizaine de grands noms à qui ils désirent faire connaître leurs travaux."

LETTRE DE GEORGES F O N T E N É

Sur G. Fontené voir [1], t.IV, p.437, t.V, p.377-378 et t.VI, p.774.

La lettre de Fontené date probablement de 1893. Il écrit :

"Je profite de l'occasion qui m'est offerte pour vous communiquer une petite remarque relative aux habitants d'une surface sphérique : Les géomètres d'un pareil monde seraient bien convaincus que leur espace n'a que deux dimensions ; ils n'auraient aucune notion du creux de leur sphère ; or ils se tromperaient fortement. Nous sommes peut-être dans le même état que ces pauvres gens.

A propos d'*Hyperespace* [[G. Fontené, *L'hyperespace à (n-1) dimensions*, Paris (Guathier-Villars), 1892]], si je désire être lu de quelqu'un, c'est certainement de vous. Et rien ne me serait plus agréable que d'avoir votre opinion, quelle qu'elle puisse être, sur mon livre, quand vous l'aurez lu."

LETTRES DE GEORGES FOURET

Sur G. Fouret voir [1], t.III, p.465 et t.IV, p.444.

Il écrit dans sa lettre du 4 janvier 1882 à propos de ses résultats qui semblent en opposition avec ceux de Poincaré, à propos de la théorie des foyers et des noeuds d'une courbe :

"Cette conclusion est d'ailleurs celle à laquelle est arrivé Mr Darboux, dans un *Mémoire sur les équations différentielles*, page 125 du tome II (2^e série) du *Bulletin des Sciences mathématiques* (année 1878)."

Il reconnaît dans sa lettre du 7 janvier :

"Je me suis trompé, la question étant beaucoup plus complexe que je ne le supposais.

J'avoue que je croyais d'autant plus être dans le vrai que je me trouvais d'accord avec le mémoire de Mr Darboux que je vous citais l'autre jour.

[[...]]

Comme vous le voyez, tout en regrettant mon erreur, il me reste au moins la consolation d'avoir fait fausse route en bonne compagnie."

LETTRE D'IVAR FREDHOLM

Sur I. Fredholm (1866-1927) voir M. Bernkopf : *Fredholm, (Erik) Ivar*, p.150-152 du t.V du *Dictionary of Scientific Bigraphy*, New York(Scribner), 1972.

Fredholm écrit dans sa lettre du 22 décembre 1899 :

"Ma note sur les équations différentielles à coefficients constants que vous avez fait imprimer dans les *Comptes Rendus* [[*Sur une classe d'équations aux dérivées partielles* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 129(1899), 32-34 ; 3 juillet) ; cette note a été présentée par H. Poincaré]] me montre que vous avez trouvé que ma communication n'était pas sans intérêt.

Peut-être il en sera de même des résultats que je me permets d'exposer dans ce qui suit.

Il s'agit de démontrer l'existence des solutions d'un problème analogue à celui de Dirichlet, mais un peu plus général."

Le résultat exposé dans cette lettre a fait objet du mémoire *Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet* (Öfversigt K. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 1900, 39-46) = *Oeuvres complètes*, Malmö(Litos Reprotryck), 1955, p.61-68. Fredholm écrit (p.61) :

"Dans ses recherches (*Acta Mathematica*, t.20) profondes sur la convergence de la méthode connue de Neumann dans la théorie du potentiel M. Poincaré a considéré le problème de Dirichlet comme cas particulier d'un autre problème, qu'il appelle le problème de Neumann."

Il écrit à la fin de sa lettre :

"J'ai cherché à étendre ces résultats pour le cas de trois variables indépendantes, mais ces recherches sont moins faciles car la fonction jouant le rôle de $f(x,y)$ devient infinie dans le champ d'intégration. Cependant j'espère que les difficultés ne soient pas insurmontables."

Florent Bureau nous a envoyé le 27 février 1985 le commentaire suivant sur cette lettre (en précisant : "Il y aurait beaucoup à dire sur les origines du Calcul fonctionnel, le rôle des principaux acteurs et leurs connections. C'est vraiment une oeuvre collective.") :

"I. Fredholm a communiqué les résultats de ses recherches sur les équations intégrales à limites fixes dans deux lettres, l'une du 8 août 1899 à Mittag-Leffler, traduite par N. Zeilon et publiée dans *Acta Math.* t.54, 1930, et Fredholm, *Oeuvres*, p.VIII, et l'autre, du 21 décembre 1899, à H. Poincaré.

(i). Dans la lettre à Mittag-Leffler, I. Fredholm considère l'équation intégrale

$$(1) \qquad u(x) + \lambda \int_0^1 f(x,y)\, u(y)\, dy = v(x) \ ,$$

où $f(x,y)$ est une fonction continue des variables réelles x,y définie dans $(x,y) \in [0,1]\times[0,1]$; λ est un paramètre arbitraire et $v(x)$ une fonction donnée.

Fredholm indique que l'on est conduit à l'équation (1) pour tous les problèmes de physique mathématique qui sont analogues au problème de Dirichlet et est sobre de détails sur la solution de (1). Il indique qu'il n'a pas encore réussi à traiter complètement le cas où $f(x,y)$ est infini.

(ii). La lettre à H. Poincaré est beaucoup plus explicite. La solution de l'équation (1) est indiquée sous la forme

$$u(x) = \frac{D_1(\lambda)}{D(\lambda)} ,$$

où $D(\lambda)$ et $D_1(\lambda)$ sont des fonctions entières de λ dont Fredholm donne l'expression. En outre, le cas où λ_0 est un zéro de $D(\lambda)$ est aussi résolu. Le cas où $f(x,y)$ est infini n'est pas encore résolu.

Fredholm considère ensuite un système de deux équations différentielles linéaires à deux variables indépendantes, tiré de la théorie de l'équilibre d'un corps élastique et,en utilisant l'analogue d'un potentiel de double couche, ramène le problème à celui d'un système de deux équations analogues à (1) ; la solution de ce système est indiquée.

Le 10 janvier 1900, Mittag-Leffler a communiqué,à l'Académie des Sciences de Stockholm, une note de Fredholm : *Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet*, qui indique les résultats résumés dans la lettre à H. Poincaré et fait une application au problème de Dirichlet.

En 1902, deux notes de Fredholm seront communiquées à l'Académie des Sciences de Paris par Poincaré et donnent un résumé des résultats du mémoire des *Acta Math.* t.27, 1903.

La méthode utilisée par Fredholm pour résoudre l'équation (1) est une méthode synthétique. Fredholm se borne à vérifier que les expressions de $D(\lambda)$ et $D_1(\lambda)$, indiquées *a priori*, fournissent bien la solution de l'équation (1) ; mais il ne donne aucune indication explicite sur le procédé qui l'a conduit à ces expressions.

Cependant, il semble bien que c'est en utilisant la méthode de Volterra, du passage du fini à l'infini, que Fredholm a été amené à écrire les expressions de $\mathcal{D}(\lambda)$ et $\mathcal{D}_1(\lambda)$.

Les mémoires de Volterra étaient connus à Stockholm et à Uppsala, comme en témoignent les publications de E. Holmgren et les indications données par Fredholm lui-même dans son mémoire des *Acta* (1903) et dans sa communication au Congrès des mathématiciens scandinaves (Stockholm, 1909).

Il semble bien que l'influence des mémoires de Volterra sur l'origine et le développement des travaux de Fredholm concernant l'Analyse fonctionnelle a été très importante et même essentielle.

\+
\+ +

A la page 6 de sa lettre, Fredholm obtient un système d'équations fonctionnelles en (u, v) et ramène ce système "aisément" à une équation fonctionnelle à une seule fonction inconnue. Le procédé qu'il utilise est celui utilisé par Volterra dans le cas d'un système de deux équations à limites variables (cf. *Sopra alcune questioni di inversione di integrali definiti*, Annali di Mat., 2e s., v. 25, 1897, pp.139-178 ; spéc. 7 ; *Opere matem.*, t.II, p.300)."

CORRESPONDANCE AVEC LAZARUS FUCHS

I.

Heidelberg, le 5 juin 1880 [1]

Cher Collègue [7],

Je me rends compte, d'après votre estimée lettre[2], que vous êtes en mesure de comprendre parfaitement un mémoire en allemand, aussi je me permets, dans la réponse à votre lettre, d'utiliser la langue allemande, espérant ainsi m'exprimer plus clairement.

Avant tout je vous prie d'accepter, cher Monsieur, tous mes remerciements non seulement pour l'intérêt que vous avez eu la bonté de montrer pour mon récent travail, mais aussi pour avoir attiré mon attention, par votre lettre, sur le fait que le théorème I, p.161 de mon mémoire[3], n'a pas été énoncé avec assez de précision.

En fait, si vous le comparez avec le résumé, publié avant la parution de mon travail dans le *Journal de Borchardt*, de mes résultats donné dans les *Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, février 1880, p.170-176[4], vous verrez, en particulier p.173, que j'ai énoncé là le même théorème sous la forme suivante : en tenant compte des hypothèses faites sur les racines des équations fondamentales définissant les différents points singuliers, z sera définie comme fonction *uniforme* de ζ par l'équation

$$(H) \qquad \zeta = \frac{f(z)}{\varphi(z)} \ .$$

Permettez-moi de préciser, en quelques mots, le sens du théorème.

Le point suivant ressort du développement de mon travail dans le *Journal de Borchardt*, p.158-160 : Si l'on calcule pour chaque valeur de z les valeurs correspondantes de ζ, lorsque z parcourt tous les contours [[*Umläufe*]] possibles - peu importe que ce soit un nombre fini ou infini de fois - on obtient ainsi ζ comme fonction de z, *tant que les contours ne sont pas tels que* $f(z)$ *et* $\varphi(z)$ *deviennent identiques, c'est-à-dire infinis pour toute valeur de* z.

Les valeurs de ζ pour lesquelles $f(z)$ et $\varphi(z)$ ne sont pas identiquement infinis forment dans le plan des ζ une surface simplement connexe [[*einfach zusammenhangende Fläche*]], que je désigne par S. Cette surface recouvre [[*bedeckt*]] seulement *simplement* le plan des ζ et sur sa frontière [[*Begrenzung*]] se trouvent les valeurs de ζ pour lesquelles $f(z)$ et $\varphi(z)$ deviennent *identiquement* infinis. *A l'intérieur de la surface* S , z *est partout une fonction méromorphe de* ζ . C'est le sens du théorème I, p.161, et je n'ai besoin de rien d'autre pour les applications que j'en fais.

J'espère que ces indications suffiront à vous apporter des éclaircissements sur le sens que j'ai donné au théorème I, p.161, d'autant plus que je me rends compte, d'après votre lettre, que vous avez déjà abordé le fondement de cette question analytique avec beaucoup de perspicacité.

Agréez, cher Monsieur, l'assurance de ma considération distinguée.

L. Fuchs [8]

II.

Heidelberg, le 16 juin 1880

Cher Collègue,

Recevez mes remerciements les plus sincères pour votre aimable lettre du 12 juin[5], dans laquelle vous avez eu la bonté de manifester un si profond intérêt pour mon travail.

J'aurais beaucoup de plasir à discuter la question que vous avez soulevée, mais j'ai peur, ce faisant, d'abuser de votre patience. Je viens, en effet, de terminer un travail que j'avais commencé avant la publication de mes résultats dans les *Nachrichten Göttingen* en février de cette année, mais abandonné depuis, car j'avais d'autres préoccupations. Ce travail[6] contient, entre autres, le tableau de toutes les équations différentielles du second ordre qui, outre les propriétés indiquées dans mon mémoire, possèdent
les propriétés demandées p.161 de mon mémoire, à savoir que l'équation

$$\frac{f(z_1)}{\varphi(z_1)} = \frac{f(z_2)}{\varphi(z_2)}$$

sera satisfaite seulement pour $z_2 = z_1$; évidemment aussi longtemps que

$$\frac{f(z)}{\varphi(z)}$$

a donc une valeur déterminée, c'est-à-dire tant que $f(z)$ et $\varphi(z)$ ne deviennent pas identiquement infinis. Ce travail contient, en outre, les intégrales de toutes les équations différentielles du tableau et, pour chacune d'elles, l'*expression analytique* de z en fonction de ζ .

Vous voyez donc, cher Monsieur, que ce travail rend superflue toute autre discussion. J'espère publier ces résultats au cours des prochaines semaines, et j'aurai l'honneur de vous faire parvenir un tiré à part.

C'est avec beaucoup de plaisir que j'ai lu dans votre lettre que vous avez trouvé, en relation avec des fonctions que j'ai définies, des résultats importants, que vous comptez publier. Je suis très honoré que vous proposiez de donner mon nom à ces fonctions, et vous en remercie bien vivement.

Il va de soi que je suis d'accord avec votre souhait de communiquer ma lettre à Monsieur Hermite.

L'intérêt que prend ce grand mathématicien à mes travaux m'est une très grande satisfaction.

Recevez, cher Monsieur, l'assurance de ma considération distinguée.

L. Fuchs [9]

NOTES

1 Ces lettres, en allemand, ont été publiées dans le tome 38(1914) des *Acta Mathematica*, p.185-187 : *Briefe von L. Fuchs an H. Poincaré*. La traduction est de François Poincaré.

2 Fuchs répond à la lettre de Poincaré du 30 mai 1880, publiée dans le tome 38(1914) des *Acta Mathematica*, où figurent, p.175-184, les *Lettres d'Henri Poincaré à L. Fuchs*.

3 L. Fuchs, *Ueber eine Klasse von Functionen mehrerer Variabeln, welche durch Umkehrung der Integrale von Lösungen der linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten entstehen* (Journal für die reine und angewandte Mathematik, 89(1880), 151-169).

4 L'article cité porte le même titre que le mémoire de la note 3.

5 P.177-178 des *Lettres* citées dans la note 2.

6 *Ueber die Functionen, welche durch Umkehrung der Integrale von Lösungen der linearen Differentialgleichungen entstehen* (Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1880, 445-453, 3 juillet).

7 Fuchs répond à la lettre de Poincaré du 29 mai 1880 : voir p.175-177 des *Lettres d'Henri Poincaré à L. Fuchs* (Acta Mathematica, 38(1914), 175-184).

8 Poincaré répond à cette lettre le 12 juin (p.177-178 de l'article cité dans la note 7).

9 Poincaré écrit encore 3 lettres à Fuchs le 19 juin , le 30 juillet 1880 et le 20 mars 1881 (p.178-184 de l'article cité dans la note 7).

Jean Dieudonné nous écrit le 5 avril 1984 :

"On ne peut guère comprendre les critiques de Poincaré qu'en liaison avec son Mémoire envoyé à l'Académie pour le Grand prix, et surtout les 3 *Suppléments* à ce travail ; comme je l'ai écrit à ce propos [[*La découverte des fonctions fuchsiennes*, p.3-23 des *Actualités mathématiques, Actes du VI^{e} congrès du regroupement des mathématiciens d'expression latine*, Paris(Gauthier-Villars), 1982]], il semble évident que Fuchs n'a jamais compris les objections de Poincaré."

D'après A. Bellivier, p.207 de son livre *Henri Poincaré ou la vocation souveraine*, Paris(Gallimard), 1956 :

"Poincaré annonça à Fuchs son mariage célébré à Paris le 20 avril 1881 : le savant répondit en français par une longue et aimable lettre le 14 mai 1881."

Lorsque F. Klein mis en cause la dénomination de "fuchsiennes" donnée par Poincaré aux fonctions qu'il venait de découvrir, Fuchs écrivit une lettre à Poincaré le 4 mars 1882 qui figure p.275-276 du *Livre du centenaire de la naissance de Henri Poincaré 1854-1956*, t.XI des *Oeuvres* de Poincaré, Paris (Gauthier-Villars), 1956.

A. Bellivier précise (p.208 de son livre) que Poincaré "adressa à Fuchs sa propre mise au point en maintenant ses dénominations (30 mars 1882). La dernière lettre à Poincaré est du 9 juillet 1882."

Il est intéressant de consulter l'article de J.J. Gray : *Fuchs and the theory*[10] *of differential equations* (Bulletin of the American Mathematical Society, new series, 10(1984), 1-26), ainsi que le compte rendu de ce mémoire de J. Mawhin (*Zentralblatt für Mathematik*, 536(1984), 8 : 01013). Voir également p.763-764 du mémoire de F. Bureau : *Systèmes différentiels à points critiques fixes II. Points singuliers des intégrales* (Académie Royale de Belgique, Bulletin de la Classe des Sciences, (5), 66(1980 - 10),762-775).

10 Voir *Erratum*, dans la même revue, t.12(1985), p.182.

LETTRES DE KARL FRIEDRICH GEISER

Sur K.F. Geiser (1843-1934) voir J.J. Burckhardt : *Geiser, Karl Friedrich*, p.339-340 du t.V du *Dictionary of Scientific Biography*.

Il écrit dans sa lettre du 11 novembre 1885 :

"La chaire de calcul différentiel et intégral en langue française à notre école polytechnique suisse sera vacante à Pâques 1886 et il faut dès maintenant dresser une liste des candidats à présenter au conseil de l'école. On m'a invité de m'adresser à des notabilités scientifiques à Paris pour demander des renseignements sur des personnes qu'on pourrait prendre en considération pour cette liste. C'est pour cette raison que je viens vous prier de me nommer quelques candidats que vous croyez capables à pourvoir aux besoins de la chaire mentionnée."

Lettre de James Whitbread Lee GLAISHER

Sur J.W.L. Glaisher (1848-1928) voir P.S. Jones : *Glaisher, James Whitbread Lee*, p.413-414 du t.V du *Dictionary of Scientific Biography*.

Il écrit dans sa lettre du 13 janvier 1892 :

"I never did any mathematical work connected with the numbers of $4n+1$ and $4n+3$ primes : all I did was to make certain enumerations of these numbers."

Lettre d'Edouard GOURSAT[1]

Toulouse, 27 Mars 1882

Monsieur,

Je reçois à l'instant un exemplaire de votre travail sur les fonctions à espaces lacunaires[2]. Comme je ne suis pas encore très au courant de tout ce qui se publie en Mathématiques, surtout de ce qui se publie à l'étranger, il m'arrive quelquefois de faire des *découvertes* comme celle-là. Je vous prie de croire que, lorsque j'ai adressé ma note à Mr Hermite, je n'avais aucune connaissance de votre méthode ; je regrette que Mr Hermite ne m'ait pas prévenu immédiatement, au lieu de communiquer à l'Académie des Sciences[3] une démonstration qui me paraît, quant au fond, identique à la vôtre[4].

En terminant cette lettre, permettez-moi de vous dire que, tout en regrettant de m'être laissé devancer dans cette voie, je ne puis m'empêcher d'être fier de m'être rencontré avec vous.

Veuillez agréer, Monsieur et cher Collègue, l'assurance de mes sentiments distingués.

E. Goursat

P.S. Je ne connaissais votre travail que d'après ce qu'en dit Mr Hermite dans une note ajoutée au Mémoire publié dans le *Journal de Borchardt* (tome 91)[5] ; mais j'ignorais si vos résultats avaient été publiés ailleurs et par quelle méthode vous les aviez obtenus. D'ailleurs je n'ai eu connaissance de cette note que lorsque j'avais déjà trouvé le principe de la démonstration.

NOTES

1 Sur E. Goursat, voir H.S. Tropp, *Goursat, Edouard Jean-Baptiste*, p.481-483 du tome V du *Dictionary of Scientific Biography*, New York(Scribner), 1972.

2 H. Poincaré, *Sur les fonctions à espaces lacunaires* (Acta Societatis scientiarum Fennicae, 12(1883), 343-350) = *Oeuvres*, t.IV, p.28-35, Paris(Gauthier-Villars), 1950.

3 E. Goursat, *Sur les fonctions uniformes présentant des lacunes* (Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 94(1882), 715-718 ; 13 mars 1882).

4 E. Goursat écrit dans sa *Notice sur les travaux scientifiques*, Paris(Hermann), 1918, p.4-5 :

"La notion des fonctions analytiques à espaces lacunaires, c'est-à-dire qui ne peuvent être prolongées par le procédé habituel de cheminement en dehors de certaines régions du plan, est aujourd'hui familière à tous les mathématiciens. Il y a quarante ans, on ne connaissait, en fait de fonction possèdant cette propriété singulière, que les fonctions modulaires et les fonctions plus générales que M. Schwarz avait déduites de la série hypergéométrique ; ces diverses fonctions admettent pour espace lacunaire la région du plan extérieure à un cercle. Un de mes premiers Travaux avait précisément pour objet de former des fonctions analytiques, ne pouvant être prolongées en dehors d'une région du plan limitée par une courbe de *forme arbitraire*. Après avoir publié la démonstration dans une Note présentée à l'Académie des Sciences, j'ai eu le regret de constater que le même théorème venait d'être publié, quelques mois auparavant, par M. Poincaré, dans un Recueil qui m'était alors complètement inconnu, les *Acta Societatis Fennicae* (Helsingfors).

Je suis revenu depuis sur le même sujet, soit pour préciser certains points de la démonstration et répondre à des objections qui avaient été faites, soit pour examiner en détail des cas particuliers."

Il s'agit des articles de Goursat : *Sur les fonctions à espaces lacunaires* (Bulletin de Sciences Mathématiques, (2), 11(1887), 1^e^ partie, 109-114) et *Sur une fonction à espace lacunaire* (même revue, 17(1893), 1^e^ partie, 247-248).

Voir également H. Poincaré, *Sur les fonctions à espaces lacunaires* (Comptes Rendus, 96(1883), 1134-1136 ; 16 avril 1883) = *Oeuvres*, t.IV, p.25-26 , ainsi que le commentaire de G. Valiron, dans le même tome, p.620.

5 P.75 de l'article de C. Hermite *Sur quelques points de la théorie des fonctions*, p.48-75 du tome IV de ses *Oeuvres*, Paris(Gauthier-Villars), 1917 = (Journal für die reine und angewandte Mathematik, 91(1881), 54-78).

LETTRE DE JÓRGEN PEDERSEN GRAM

Sur J.P. Gram (1850-1916) voir [1], p.541 du t.III , p.526 du t.IV et p.443-444 du t.V.

C'est Börge Jessen qui a déchiffré la signature illisible de Gram sur sa lettre à Poincaré du 28 mars 1892 concernant les "fiches appartenant au Répertoire bibliographique" dont Poincaré avait la responsabilité.

Jesper Lützen nous écrit dans sa lettre du 2 octobre 1984 que Gram "est bien connu pour la méthode de Gram-Schmidt pour trouver une base orthogonale dans un espace vectoriel".

CORRESPONDANCE AVEC GIOVANNI BATTISTA GUCCIA

Sur G.B. Guccia voir P. Speziali : *Guccia, Giovanni Battista*, p.568-569 du t.V du *Dictionary of Scientific Biography*, New York (Scribner), 1972, ainsi que le livre de A. Brigaglia e G. Masotto : *Il circolo matematico di Palermo*, Bari (Ed. Dedalo), 1982.

Cette correspondance de 33 lettres concerne essentiellement l'envoi des articles de Poincaré pour les *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*. Les photocopies des lettres de Poincaré, déposées aux Archives du Circolo matematico di Palermo, nous ont été communiquées par M. Guido Masotto.

Une lettre particulièrement intéressante de Poincaré à Guccia du 9 décembre 1911 est publiée p.296 du *Livre du centenaire de la naissance de Henri Poincaré 1854-1954*, t.XI des *Oeuvres* de Poincaré, Paris (Gauthier-Villars), 1956.

G.B. Guccia écrit dans sa lettre du 12 décembre 1911 :

"Je vous confirme sur dépêche : *Conseille publier*. Quoique inachevé, votre travail [[*Sur un théorème de géométrie* (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 33 (1912), 375-407) = *Oeuvres*, t.VI, p.499-538, Paris (Gauthier-Villars), 1953. Ce "théorème de géométrie" a été démontré en 1913 par G.D. Birkhoff : *Proof on Poincaré's geometric theorem* (Transactions of the American Mathematical Society, 14 (1913), 14-22)]] ouvrira certainement des voies nouvelles aux autres chercheurs, et la Science en profitera."

CORRESPONDANCE AVEC HUGO G Y L D E N

Sur H. Gyldén (1841-1896) voir [1], t.III, p.569-570 et t.IV, p.559-560.

La lettre de Gyldén est du 2 mai 1892, dans laquelle il assure Poincaré de sa "plus haute estime" pour ses découvertes.

La lettre de Poincaré, qui nous a été communiquée par Jesper Lützen et qui est déposée à la Kungliga Akademiens Bibliothek de Stockholm, concerne un "projet d'adresse à M. Mittag-Leffler".

LETTRES DE GEORGES HALPHEN[1]

I.

Paris, 23 février 1881
51 rue Sainte Anne

Mon cher Camarade,

Vous êtes venu me voir et ne m'avez pas trouvé. C'est là un événement qui a peu de chance de se renouveler ; je sors, en effet, bien peu. Aussi ne vous assignerai-je aucun rendez-vous pour la semaine prochaine. Je vous laisse le soin, si vous le voulez, de me prévenir de votre visite, afin d'être tout à fait sûr de ne point perdre vos pas.

C'est une bonne fortune pour moi que vous ayez un renseignement à me demander. Il me sera permis d'effacer, je l'espère, le désagréable souvenir qu'a nécessairement dû vous laisser votre ancien *colleur*[2].

Il ne faut pas m'en trop vouloir si je vous ai ravi le prix[3]. J'ai sur vous l'avantage de l'âge ; mais bientôt je n'en aurai que le désavantage. C'est à moi de vous envier.

A bientôt. Votre dévoué

Halphen

II.

Paris, 24 mars 1881
51 rue Sainte Anne

Cher Monsieur,

Merci cent fois pour votre excellente lettre. J'avais déjà compris le fond de vos recherches d'après vos communications et d'après quelques éclaircissements dus à M. Hermite. Mais je n'avais encore aucune idée de la construction des groupes fuchsiens. Votre lettre m'en donne beaucoup plus qu'une idée[4]. C'est un admirable problème, et vous pouvez être fier d'avoir su le poser et le résoudre. J'attends avec impatience la suite que vous m'annoncez.

De mon côté, je cherche à définir vos fonctions par quelque autre voie[5]. Mais je n'ai encore qu'une lueur d'espoir, rien d'assez précis pour qu'il me soit permis de vous en parler. D'ailleurs, je tiens à vous envoyer cette lettre aujourd'hui pour que vous ne me taxier pas d'impolitesse. Soyez sûr, en tous cas, qu'il me tarde de pouvoir vous montrer mon savoir faire, et que si je ne vous dis rien, ce sera par ignorance.

Votre bien dévoué

Halphen

III.

Paris, 2 février 1886
8 rue Gounod

Mon cher Ami,

Si vous avez songé un instant à notre conversation d'hier, vous vous êtes sans doute aperçu que mon fameux lemme est tout à fait *faux*. Si vous n'y avez pas songé, je ne veux pas que vous restiez sous l'impression de mon erreur.

J'ai cédé à un entraînement bien peu explicable. La disparition des points à apparence singulière est impossible, en général. Elle a lieu cependant pour les équations qui ont fait l'objet de ma communication récente[6], celles dont les intégrales ont la forme

$$\Sigma\, e^{ax}\, f(x)\ .$$

On peut le démontrer directement, et trouver par là un moyen d'établir la propriété de ces équations. Au contraire, pour les équations s'intégrant sous la forme

$$\Sigma\, e^{ax^2+bx}\, f(x)\ ,$$

cette disparition est généralement impossible. Dans le cas du 2^d ordre, on peut réduire à *un*, mais non à *zéro*, le nombre de points doubles apparents.

Moralité : si l'âge apporte avec lui ses défauts propres, il ne fait pas non plus partir ceux de la jeunesse. Hélas !

Votre dévoué

Halphen[7]

NOTES

1 Sur G. Halphen, voir M. Bernkopf, *Halphen, Georges-Henri*, p.75-76 du vol.VI du *Dictionary of Scientific Biography*, ainsi que H. Poincaré, *Notice sur Halphen* (Journal de l'Ecole Polytechnique, 60e Cahier, 1890, 137-161) = p.125-140 de *Savants et Ecrivains*, Paris(Flammarion), 1910 = p.XVII-XLIII du t.I des *Oeuvres* de G. Halphen, Paris(Gauthier-Villars), 1916.

2 G. Halphen était depuis 1873 répétiteur à l'Ecole Polytechnique.

3 Grand prix des Sciences mathématiques pour l'année 1880. Voir à ce sujet les *Comptes Rendus* du 14 mars 1881, p.551-554 du t.92. Le sujet du concours était : Perfectionner en quelque point important la théorie des équations différentielles à une seule variable indépendante. La commission (Bertrand, Bonnet, Bouquet, Hermite et Puiseux) a attribué à H. Poincaré une mention très honorable. Une deuxième mention très honorable a été attribuée à un auteur du mémoire inscrit sous le n° 3 et qui ne s'est pas fait connaître (nous avons appris en février 1981 qu'il s'agissait d'un mémoire de Casorati et qui, à notre connaissance, n'a jamais été étudié).

4 Nous avons pris contact avec un des arrière-petit-fils de G. Halphen, mais nous n'avons pas pu encore savoir si la correspondance de G. Halphen a été conservée.

5 G. Halphen écrit dans sa Note *Sur un système d'équations différentielles* (Comptes Rendus, 92(1881), 1101-1103 ; 9 mai) = *Oeuvres*, t.2, p.475-477, Paris(Gauthier-Villars), 1918, p.477 :

"L'étude actuelle se rattache directement à celle des groupes discontinus de substitutions linéaires, si heureusement imaginée par M. Poincaré."

6 *Sur une nouvelle classe d'équations différentielles linéaires intégrables* (Comptes Rendus, 101(1885), 1238-1240 ; 14 décembre) = *Oeuvres*, t.IV, p.272-275. G. Halphen mentionne, p.272, "la théorie des intégrales *irrégulières*" de Poincaré.

7 Il existe une lettre de Mme Halphen, du 22 février [[1891]] où elle écrit :

"Je vous remercie en mon nom et au nom de mes enfants d'avoir consenti à écrire une notice nécrologique sur notre cher mort ; j'ignorais l'existence de cette notice."

Il s'agit probablement de l'article de Poincaré signalé dans la note 1.

Florent Bureau nous a envoyé le 8 décembre 1984 les commentaires suivants :

"*Lettres de G. Halphen*

I 23 février 1881

Halphen né en 1844 est l'aîne de dix ans de Poincaré.

II 24 mars 1881

Pour comprendre cette lettre, il faut se référer aux communications suivantes parues dans les *Comptes Rendus de l'Acad. Paris* et être attentif aux dates.

Poincaré : *Sur les fonctions fuchsiennes* (Comptes Rendus, t.92, 333-335, 14 février 1881 ; 395-398, 21 février 1881). Il s'agit de résumés de Mémoires présentés par Poincaré à l'Académie, et examinés par une commission composée de Bertrand, Hermite, Puiseux, ce qui explique les éclaircissements donnés à Halphen par Hermite.

Les Notes de Halphen sont

(43) *Sur des fonctions qui proviennent de l'équation de Gauss* (Comptes Rendus, 92, 856-859, 4 avril 1881) ;

(44) *Sur un système d'équations différentielles* (Comptes Rendus, 92, 1101-1103, 9 mai 1881) ;

(45) *Sur certains systèmes d'équations différentielles* (Comptes Rendus, 92, 1404-1406, 13 juin 1881).

Ces trois Notes ont été présentées par C. Hermite.

La Note (45) d'Halphen est suivie par une Note de Poincaré : *Sur une nouvelle application et quelques propriétés importantes des fonctions fuchsiennes* (Comptes Rendus, 92, 859-861, 4 avril 1881).

Cf. ensuite les Notes suivantes de Poincaré : *Sur les fonctions fuchsiennes* (Comptes Rendus, 92, 957, 18 avril 1881 ; 1198-1200, 23 mai 1881 ; 1274-1276, 30 mai 1881).

Dans sa *Notice sur ses travaux scientifiques* (1885), p.36 du t.I de ses *Oeuvres*, Halphen écrit (p.37) :

"Mais j'attache plus de prix à deux communications adressées la même année à l'Académie : dans la première (n° 43), j'ai défini, par l'équation de Gauss, des fonctions *hypergéométriques* qui trouvent leur place parmi les fonctions si brillamment imaginées par M. Poincaré ; dans la seconde (n° 45), ces fonctions m'ont permis d'intégrer un système d'équations différentielles non linéaires, analogue à celui d'où dépend la connaissance du mouvement d'un solide dans un fluide. Un cas particulier fournit la solution d'un problème géométrique, posé par M. Darboux, dans un Mémoire sur les coordonnées curvilignes (*Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, 2^{e} s., t.VII, p.149). J'ai traité, à part, ce cas particulier (n° 44) par une analyse spéciale, propre aux fonctions elliptiques *modulaires*."

Dans la Note 43, Halphen se réfère à son Mémoire couronné.

Dans la Note 44, il étudie un système d'équations différentielles non linéaires d'ordre 3 ; il en déduit la solution en utilisant la théorie des fonctions modulaires et indique la relation avec les groupes discontinus de substitutions linéaires.

Halphen a continué l'étude du système précédent. Mais la Note projetée est restée incomplète et inédite (*Oeuvres*, t.IV, pp. 570-574). Halphen y insiste cependant sur ce que le domaine d'existence des intégrales est un cercle dont le rayon dépend des données initiales définissant l'intégrale considérée ; la circonférence limitant ce cercle est une coupure *essentielle*. D'où la conclusion de Halphen : "Il y a donc une circonstance nouvelle qui me paraît mériter l'attention." Halphen envisageait de donner d'autres exemples analogues.

Peut-être, convient-il d'ajouter que le système différentiel considéré par Halphen a été utilisé par J. Chazy (Thèse et *Acta Math.* 1910) pour montrer que les intégrales des équations différentielles non linéaires d'ordre trois (*loc.* p. 4)

$$\dddot{y} = 2y\ddot{y} - 3\dot{y}^2 \quad ; \quad \dddot{y} = 2y\ddot{y} - 3\dot{y}^2 + \frac{4}{36-k^2}(6\dot{y} - y^2)^2 \quad , \quad k > 6 \text{ entier} ,$$

sont effectivement à points critiques fixes.

J'ai considéré un système différentiel d'ordre 3 un peu plus général (avec cinq constantes au lieu de quatre) que celui de Halphen (*Annali di Mat.*, 1972, 4^e s., vol. 94, pp. 345-360) ; il s'intègre encore par les fonctions modulaires.

III 2 février 1886.

La communication *récente* est du 14 décembre 1885 et fait suite à deux communications de Poincaré :

Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires (Comptes Rendus, t.101, 939-941, 9 *novembre* ; 990-991, 16 *novembre* 1885), présentées par C. Hermite (ces Notes sont dans *Oeuvres*, t.IV, pp. 611-613, 614-615), et un Mémoire de Henri Poincaré :

Sur les équations linéaires aux différences ordinaires et aux différences finies (Amer. J. of Math., 1885, t.7, pp. 1-56 ; *Oeuvres*, t.I, pp. 226-289).

La question que s'est posée Halphen, inspirée sans doute par les publications de Henri Poincaré, donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une équation différentielle linéaire ait une intégrale générale de la forme $\Sigma\, e^{ax} f(x)$, où $f(x)$ est une fonctions rationelle. Pour démontrer ce théorème, Halphen considère une équation vérifiant les conditions indiquées, comme une dégénérescence d'une autre équation linéaire à coefficients doublement périodiques et à intégrale uniforme (*cf.* **les recherches** de E. Picard sur ce sujet).

Ce théorème de Halphen peut être démontré par une autre méthode plus directe, où les fonctions elliptiques n'interviennent pas. (*cf.* Jordan, *Analyse*, III, pp. 224 et suiv. ; Picard, *Analyse*, III, p. 431 et suiv.) La lettre de Halphen se rapporte à une tentative de généraliser le théorème précédent au cas d'un point irrégulier de rang *deux* situé à l'infini.

Une étude inédite de Halphen qui paraît en relation directe avec la lettre III a été publiée dans l'*Appendice* du t. IV des *Oeuvres* (*cf.* : *Sur une nouvelle classe d'équations linéaires intégrables*, pp. 599-619). Cette étude se termine par :

"Pour généraliser le théorème II, on pourrait chercher les conditions caractéristiques des équations qui s'intègrent sous la forme

$$y = \Sigma\, e^{ax^m + \ldots + \ell x}\, f(x)\ .$$

Ces équations présentent d'abord les caractères suivants : 1. si le degré etc., 2. l'intégrale générale est uniforme. Mais un examen sommaire fait reconnaître que, sauf le cas examiné ici, où $m = 1$, ces conditions sont insuffisantes. Il y a en outre d'autres conditions *qui ne sont pas connues*."

Dans son Mémoire des *Acta Math.*, t. 8 (*Oeuvres*, t. I), Poincaré a étudié le cas où toutes les séries normales sont du second ordre p.318(et d'ordre plus grand que 2, p. 323) et a ramené ce problème à celui où les séries normales sont du premier ordre (qui est le plus fréquemment rencontré dans l'étude des fonctions spéciales de la Physique mathématique)."

LETTRES DE CHARLES HERMITE[1]

I.

Paris, 22 novembre 1879

Monsieur,

J'ai vu en lisant les *Comptes Rendus* que vous aviez présenté à l'Académie des Sciences un travail pour l'examen duquel j'ai été nommé commissaire[2], mais qui ne m'a pas encore été remis. Le sujet que vous avez traité m'intéresse vivement, et ce me sera un véritable plaisir de lire la nouvelle note que vous m'annoncez et de la présenter de votre part à l'Académie.

Dans l'attente de votre bonne visite je vous prie Monsieur de recevoir l'assurance de mes sentiments bien dévoués.

Ch. Hermite

Votre note ne m'est pas encore parvenue.

II.

Monsieur,

Je m'empresse de vous accuser réception de votre mémoire *Sur les formes cubiques ternaires* que je présenterai pour remplir vos intentions à la prochaine séance de l'Académie[3]. J'aurais sur ce travail quelques remarques à vous communiquer si vous voulez bien venir me trouver mercredi à 1 h ; en attendant et après lui avoir donné un premier coup d'oeil, voici quelques points sur lesquels j'appelle votre attention. Votre classification en 7 familles[4], qui me semble excellente, n'est peut-être pas nouvelle, et il y aurait à rechercher,parmi tant de travaux publiés depuis une dizaine d'années ou même antérieurement sur les courbes du 3ème ordre, si vos résultats n'auraient pas été déjà obtenus. Les valeurs des invariants S et T ont été données depuis lontemps par Mr Salmon, pour une forme cubique en général, et par Mr Cayley dans ses mémoires *upon Quantics* pour le cas des formes réduites[5], de sorte que vous auriez pu immédiatement employer ces résultats. Mais votre recherche des substitutions qui reproduisent une forme donnée, et la distinction des cas où ces substitutions sont entièrement déterminées ou bien dépendent d'un ou de deux paramètres variables, me semblent entièrement nouvelles, et j'y attache une grande importance. Vous avez parfaitement vu qu'il n'y a de question arithmétique, dans la recherche de l'équivalence des formes cubiques, qu'autant qu'il existe une infinité de substitutions algébriques qui les changent en elles-mêmes. Mais alors on quitte le champ des formes cubiques et la question que vous aurez eu le mérite de poser, question entièrement neuve et que je juge très belle et très féconde, est celle de la réduction simultanée, c'est-à-dire par la même substitution linéaire, et à coefficients entiers, du système d'une forme quadratique ternaire et d'une fonction linéaire. C'est là Monsieur un domaine qui vous appartient à vous seul, et qu'il faut vous réserver. Mr Jordan vous a prévenu pour les formes cubiques[6], et vous n'aurez ajouté à ce qu'il a fait que la limitation des coefficients de la transformation qui joue le rôle de la réduite. Mais là où vous avez été prévenu, la part me paraît beaucoup moindre pour l'arithmétique proprement dite, tandis qu'elle me semble extrêmement belle dans le cas où vous obtenez une chaîne périodique de réduites. Mais il ne faut point vous contenter d'avoir ainsi ouvert la voie, il faut, en réalité et en fait, donner les moyens de calculer ces réduites, et faire des applications numériques. Bien des choses peuvent se révéler ainsi dont ni vous ni personne n'a l'idée, tant les propriétés des nombres sont cachées et en dehors de toute prévision[7]. C'est à leur égard que l'observation joue un rôle absolument nécessaire : il faut donc des éléments d'observation, et ces éléments vous serez le premier à les avoir obtenus et donnés. Les formes algébriques quaternaires dont vous vous êtes aussi occupé, ayant des covariants et contrevariants linéaires, peuvent être transformées, en conséquence, de manière que les coefficients soient tous des invariants. Il en résulte qu'au point de vue arithmétique il n'y a encore que les cas singuliers qui puissent offrir de l'intérêt. Dans un article du *Journal de Borchardt*, publié je crois en 1860, j'ai montré que deux formes quadratiques ternaires simultanées admettent des contrevariants linéaires au moyen desquels on déduit ces formes des transformations dont les coefficients sont des invariants[8]. Mais je n'ai point examiné le cas où l'une des formes est le carré d'une fonction linéaire, cas certainement singulier et exceptionnel, qui pourrait être l'objet d'un préliminaire algébrique à la recherche que je crois devoir vous recommander avc instance.

Votre travail sera certainement accueilli avec empressement soit par Mr Resal[9], soit par le *Journal de l'Ecole Polytechnique*, et je me fais un plaisir de vous déclarer que vous vous y êtes montré algébriste extrêmement habile.

Veuillez Monsieur agréer la nouvelle assurance de mes sentiments les plus distingués.

Ch. Hermite

Paris, 4 juin 1880

III.

Monsieur,

Votre lettre m'a extrêmement intéressé en me faisant comprendre le beau travail de Mr Fuchs[10], et en me donnant l'idée de ce que vous y avez vous-même ajouté. La solution que vous obtenez d'une équation linéaire du second ordre, laquelle a seulement deux points singuliers à distance finie[11], est un résultat d'une grande importance et dont je vous félicite sincèrement. Je me ferai un plaisir d'étudier la nouvelle transcendante qui vous donne cette solution, lorsque vous aurez publié vos résultats, mais j'espère que l'analyse ne vous détournera point entièrement de l'arithmétique, et que vous poursuivrez, pour la conduire à son terme, la question si curieuse de la réduction simultanée d'une fonction linéaire f et d'une forme quadratique φ. Si je ne me trompe, vous mettez φ, ce qui est toujours possible, sous la forme :

$$\varphi = \alpha f^2 + gh ,$$

où g et h sont également linéaires, α étant une constante convenablement déterminée, et vous appliquez à φ la série des substitutions propres à réduire la forme définie :

$$f^2 + \lambda g^2 + \frac{1}{\lambda} h^2 ,$$

dans laquelle λ est un paramètre positif arbitraire. Je vous renouvelle l'expression de l'intérêt que j'attache à cette question, et l'assurance que la solution vous fera grand honneur. Elle touche certainement à la recherche difficile et ardue des transformations semblables de toute forme indéfinie en elle-même, car vous aurez ces transformations pour la forme φ, et de là semble résulter qu'on peut les concevoir comme attachées chacune à une fonction linéaire, qu'elle reproduisent, cette fonction linéaire étant d'ailleurs quelconque sous la condition que g et h soient réelles.

Je puis vous assurer que Mr Kronecker prendra le plus vif intérêt à vos recherches, et je me permets de vous engager à lui donner communication des résultats auxquels vous serez amené. Il m'a parlé avec grande estime du mémoire de Mr Selling[12] que je recommande à votre étude attentive, pensant qu'il vous sera utile.

Permettez-moi Monsieur de garder, le temps nécessaire pour les traduire, les deux lettres de Mr Fuchs[13], que je vous rendrai aussitôt qu'il me sera possible, et veuillez recevoir l'expression de toute mon estime pour votre talent et de mes sentiments bien dévoués.

Ch. Hermite

Paris, 23 juin 1880

IV.

Monsieur,

Les considérations tirées de la géométrie imaginaire de Lobatchewski me sont trop peu familières pour qu'il me soit possible de juger du rôle que vous leur faites jouer dans la question si difficile de la recherche des transformations en elle-même d'une forme ternaire[14], et il ne m'est point permis de vous donner un avis sur la voie que vous avez suivie, parce qu'elle est en dehors de mes études. Mais ce que vous me dites avoir déjà obtenu sur la réduction simultanée d'une forme linéaire et d'une forme quadratique me semble extrêmement intéressant, et je ne doute point que vous n'arriviez ainsi à éclairer la question des transformations semblables des formes ternaires indéfinies. Dans mes premières tentatives[15] j'avais été amené à introduire,comme élément de cette recherche, les entiers qui rendent positive la forme adjointe g , puis, en désignanr par G une telle valeur positive de g , les entiers t et u , tels qu'on ait :

$$t^2 - Gu^2 = \mp 1 ,$$

mais ce n'est là qu'une ébauche bien imparfaite, dont je n'ai été aucunement satisfait. En remarquant que toute substitution S , au déterminant 1 , donne la transformation en elles-mêmes d'une infinité de formes ternaires, renfermant un paramètre arbitraire, j'avais pensé aussi à rechercher les conditions pour que deux substitutions S et T , à coefficients entiers au déterminant 1 , changent une même forme ternaire en elle-même, mais l'analyse me donne trop de travail pour que je puisse songer maintenant à l'arithmétique. Vous savez Monsieur combien les dernières semaines de l'année scolaire sont entièrement prises par les examens de la Faculté, aussi ne m'a-t-il pas été possible de traduire de l'allemand les deux lettres de Mr Fuchs, dont vous avez bien voulu me donner communication. Permettez-moi de vous prier de m'en donner la substance vous-même, puisque vous avez l'avantage de lire l'allemand, la question m'intéressant beaucoup.

Mr Bazin s'est occupé dans le *Journal* de Mr Liouville de la multiplication des formes quadratiques à quatre indéterminées[16], mais il résulte de ses recherches, que je vous engage à lire, qu'on ne parvient à la composition que dans des cas particuliers, précisément ceux que j'ai indiqués dans le *Journal de Crelle* et que j'ai rencontrés en traitant algébriquement de la transformation des formes ternaires en elles-mêmes[17]. Des formules que j'ai seulement énoncées alors ont été depuis démontrées avec beaucoup d'élégance par Mr Tannery[18], dans un article du *Bulletin des Sciences mathématiques* de Mr Darboux, il y a je crois deux ou trois ans.

Me trouvant au moment de mon départ de Paris, pardonnez-moi Monsieur de vous écrire succinctement et bien à la hâte et veuillez recevoir la nouvelle expression de ma haute estime et de mes sentiments bien dévoués.

Ch. Hermite

Paris, 20 juillet 1880

V.

Monsieur,

Je vous suis bien reconnaissant de la peine que vous avez prise de me donner la traduction de l'important article des *Nachrichten* de Mr Fuchs[19], et je m'empresse de vous en remercier sincèrement. Il m'est vraiment impossible de saisir le point de vue auquel vous vous êtes placé pour rapprocher l'une de l'autre des théories aussi énormément distantes que les transformations des formes ternaires et les équations à deux points singuliers[20]. La notion du plan que vous nommez pseudogéométrique me fait défaut, et je n'ai pas davantage la définition de la nouvelle transcendante à laquelle j'ai vu avec plaisir que vous avez attaché le nom de Mr Fuchs. Je dois ajouter, Monsieur, qu'alors même que j'aurais ces notions indispensables pour saisir vos idées, mon travail actuel me prenant ce que j'ai de temps et de forces, il me serait impossible de faire les efforts nécessaires pour pénétrer dans des considérations aussi difficiles et aussi abstraites.

Votre résultat sur les transformations semblables d'un système composé d'une forme ternaire et d'une fonction linéaire est excellent, mais je vous avoue que j'aurais préféré qu'au prix d'une difficulté plus grande vous eussiez été amené à un nouvel algorithme de calcul, au lieu de ramener la solution à la transformation en elles-mêmes des simples formes binaires. Il faut donc persévérer dans la recherche qui concerne les seules formes ternaires, et, puisque vous aimez l'algèbre, permettez-moi de vous engager à voir si l'analyse des recherches arithmétiques de Gauss, pour déduire de deux transformations d'une forme F en une autre f, la solution de

$$T^2 - DU^2 = 1 ,$$

ne pourrait point s'étendre aux formes à 3 indéterminées. Cette analyse est vraiment merveilleuse, je l'ai étudiée avec admiration et il ne serait pas impossible qu'elle soit susceptible d'extension.

Recevez, Monsieur, avec mes voeux pour le succès de vos recherches, la nouvelle assurance de mes sentiments d'estime et d'amitié.

Ch. Hermite

Lamothe de Meursac (Charente Inférieure), 2 août 1880

VI.

Paris, 22 novembre 1880[21]

Monsieur,

Je m'empresse de vous informer que votre mémoire a été présenté à l'Académie dans la séance d'aujourd'hui[22], et que l'extrait que vous y avez joint sera publié dans le *Compte Rendu* de cette séance. Je n'ai pu que parcourir votre travail, pendant le peu de jours qu'il est resté dans mes mains, mais il m'a paru excellent et ce m'est un véritable regret que mes occupations et mes devoirs ne me permettent point de disposer d'un mois de temps pour bien l'étudier en approfondissant le sujet comme il serait nécessaire. Votre remarque sur la dépendance des solutions des deux équations :

$$a^2 - b^2\Omega = 1 \ , \quad c^2 - d^2\Omega = 4 \ ,$$

est extrêmement curieuse ; ne pouvant vous garantir qu'elle soit bien certainement nouvelle, je vous engagerai à consulter, dans le *Journal de Crelle*, les mémoires arithmétiques de Dirichlet[23], sur la détermination du nombre des classes de formes de déterminant positif, où l'équation de Pell joue un grand rôle. Je ne pense pas que d'autres puissent vous avoir prévenu sur ce point.

Recevez Monsieur l'assurance de mes sentiments d'estime et d'amitié.

Ch. Hermite

VII.

Monsieur,

Mes premières études sur la fonction $\varphi(\omega)$ ont été publiées dans les *Comptes Rendus*[24] en 1858, puis séparément par Mr Gauthier-Villars sous ce titre : *Sur la théorie des équations modulaires et la résolution de l'équation du cinquième degré.*

Mais permettez-moi de vous engager à prendre surtout connaissance des travaux de Mr Kronecker qui m'a infiniment dépassé dans ce genre de recherches et à qui l'on doit les découvertes les plus remarquables et les plus profondes. Les notions de classes et de genres dans la théorie des formes quadratiques ont été entièrement rattachées à l'analyse par l'éminent géomètre, et je puis vous résumer ses travaux, en vous répétant ce que je lui ai entendu dire à lui-même et dans ces termes : la théorie des formes qudratiques que Gauss a donnée dans les *Recherches arithmétiques* n'est qu'une anticipation de la théorie des fonctions elliptiques.

Quelques-uns des beaux résultats découverts par Mr Kronecker, et publiés dans les *Monatsbericht*, ont été à ma demande traduits en français et ont paru,vers 1859 ou 1860,dans les *Annales de l'Ecole Normale Supérieure*[25]. Mais il faut lire dans ce même recueil des *Monatsbericht* de l'Académie des Sciences de Berlin, et sans en rien omettre, tout ce qui est sorti de la plume du grand géomètre[26]. Permettez-moi de vous indiquer, comme se rapportant à mes anciennes recherches, diverses notes de Mr Königsberger, dans le *Journal* de Mr Borchardt[27], qu'il vous sera facile d'y trouver, et enfin dans les *Mathematische Annalen* de très nombreux et excellents mémoires de Mr Klein[28], et récemment de Mr Gierster[29].

Vous entrez Monsieur dans une voie féconde que j'ai regret d'avoir quittée, après y avoir fait seulement quelques pas. Au début je m'étais rencontré si complètement avec Mr Kronecker, qu'en venant me voir pour la première fois en 1867 l'éminent géomètre m'en a exprimé sa profonde surprise ; les mêmes résultats s'étant présentés à nous, presqu'au même moment, et sans que jamais nous eussions eu aucuns rapports. Mais depuis longtemps Mr Kronecker, Mr Klein et d'autres m'ont grandement dépassé, et occupé d'autres questions je ne suis même plus bien au courant de leurs travaux.

Vers 1859, le P. Joubert a aussi donné dans les *Comptes Rendus* plusieurs articles[30] sur l'application des fonctions elliptiques à la théorie des nombres, que vous lirez certainement avec grand intérêt.

Recevez Monsieur la nouvelle assurance de tous mes sentiments d'estime et d'amitié.

Ch. Hermite

Paris, 27 novembre 1880

VIII.

Paris, 11 février 1881

Monsieur,

Votre mémoire sur les fonctions fuchsiennes[31] me paraît du plus haut intérêt et vous fera certainement grand honneur. Permettez-moi avant que je puisse vous parler du fond, et quand je n'ai pu encore y jeter qu'un coup d'oeil, de vous engager à écrire vos résultats avec les expressions ordinaires de l'analyse, en évitant autant qu'il est possible de recourir aux expressions symboliques, qui jettent comme un voile sur vos découvertes. Un léger effort suffit souvent pour obtenir une perfection plus grande de la forme, ce qui en analyse à une incontestable importance, et je ne puis m'empêcher de penser que votre mémoire serait plus aisément compris s'il n'exigeait pas les études préliminaires que vous imposez au lecteur. Mais le regret que je vous exprime ne diminue en rien le mérite de vos découvertes, et c'est en vous témoignant de ma plus haute estime que je vous renouvelle l'assurance de mes sentiments affectueux et tout dévoués.

Ch. Hermite

IX.

Monsieur,

Quelques-uns de mes confrères de la Section de Géométrie ayant accepté ma demande de vous mettre sur la liste des candidats que nous aurons à présenter à l'Académie pour remplir la place vacante par la mort de Mr Chasles[32], je viens vous prier de vouloir bien me rédiger une note concernant vos travaux et qui en donnerait une analyse suffisante pour servir de base à la rédaction du rapport à l'appui de notre présentation. Permettez-moi, pour d'autres encore que pour moi, de vous prier de mettre dans cette note, l'expression en série, avec les signes analytiques usuels et sans notations symboliques, les diverses fonctions que vous appelez fuchsiennes, et qui, parmi beaucoup d'autres choses, semblent particulièrement intéressantes et importantes.

En vous annonçant Monsieur l'intention de plusieurs de mes confrères dont je vous fais part, je dois expréssément réserver la résolution officielle de la Section de Géométrie, qui n'a pas encore été réunie pour prendre la décision.

Veuillez agréer Monsieur la nouvelle assurance de ma haute estime et de mes sentiments dévoués.

Ch. Hermite

Paris, 18 février 1881

X.

Monsieur,

Je présenterai avec le plus grand plaisir à la prochaine séance de l'Académie, c'est-à-dire dans 15 jours, à cause de la séance publique du lundi prochain, votre nouvelle note sur les équations différentielles linéaires à intégrales algébriques[33]. N'ayant point connaissance du travail de Mr Jordan[34], j'ai quelque peine à vous comprendre, comme vous-même avez peine à saisir les idées de Mr Appell. Mais je vous crois de confiance, et je vois avec grand intérêt que, les considérations qui vous ont si bien servi pour arriver aux fonctions fuchsiennes, vous les employez encore avec grand succès dans une recherche toute différente. Ce qui m'échappe, n'étant point suffisamment au fait de la question, c'est par exemple comment Mr Jordan peut former une équation rationnelle et entière en x et y, $F(x,y) = 0$, dont les racines $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont les intégrales d'une équation linéaire d'ordre n, dont les coefficients sont des polynômes entiers en x, lorsqu'on sait que ces intégrales sont algébriques. Mais je vous le répète, ce n'est ni vous ni Mr Jordan que je mets en cause, je n'accuse que moi seul, et mon ignorance du travail inséré dans les *Mémoires de l'Académie de Naples*.

Les fonctions lacunaires dont vous me donnez *explicitement* l'expression sont on ne peut plus intéressantes, et seront mises prochainement sous les yeux de Mr Weierstrass. Ce que vous venez de m'écrire sera publié dans ma lettre à Mr Mittag-Leffler, *Sur quelques points de la théorie des fonctions*, qui paraîtra à Helsingfors, dans les *Actes de la Société des Sciences* et dans le *Journal de Crelle*[35]. Mais permettez-moi de vous demander encore un mot d'éclaircissement, sur ce que vous appelez polygone convexe *circonscrit*, à n points donnés. Dois-je comprendre "un polygone convexe dont les points donnés sont en totalité ou en partie les sommets, avec la convention que les points qui ne sont pas sommets se trouvent à l'intérieur du polygone".

Recevez Monsieur l'assurance de ma plus haute estime et de mes sentiments bien dévoués.

Ch. Hermite

Paris, 8 mars 1881

XI.

Monsieur,

Je vous remercie beaucoup de votre lettre et des développements que vous avez pris la peine de me donner sur le travail important que Mr Jordan a consacré à la recherche des intégrales algébriques des équations linéaires. Les recherches sur la représentation des nombres par les formes que vous avez considérées m'intéressent extrêmement, mais je suis plus frappé encore de votre découverte analytique dans la théorie des fonctions abéliennes, et je vous en félicite bien sincèrement et bien vivement. Si belles et importantes que soient les recherches de Göpel et de Rosenhaim[36], en restant dans le champ des fonctions de deux variables, il est cependant bien certain qu'elles n'ont pas eu à beaucoup près pour l'analyse les mêmes conséquences que les transcendantes elliptiques. Ainsi on n'a point de développement en série simple de sinus et de cosinus des multiples des deux arguments des fonctions abéliennes, et les identités, si fécondes pour l'arithmétique de la théorie des fonctions elliptiques, manquent absolument,parce que le point de départ fait défaut, dans la théorie des fonctions abéliennes. Votre découverte, que vous partagez, je crois, avec Mr Appell[37], me semble destinée à faire produire à cette théorie les fruits qu'elle n'a aucunement donnés jusqu'ici, en l'enlevant au domaine stérile ou trop inaccessible des fonctions de deux variables, pour le faire entrer dans la voie plus féconde des fonctions d'une seule variable. Ainsi Monsieur et quelque soit mon affection pour la théorie des nombres, mon coeur arithmétique comme me l'écrit Mr Kronecker, je vous exprimerai le voeux que vous donniez à l'Analyse une préférence qui, j'en ai l'espoir, profitera à l'Arithmétique.

Permettez-moi de saisir cette occasion pour vous demander votre intérêt et votre bienveillance pour votre jeune collègue Mr Humbert[38] élève ingénieur des Mines que j'ai connu au collège Stanislas et qui mérite par son talent et son zèle d'être encouragé et dirigé dans ses études. Je l'ai vu rempli d'admiration et d'enthousiasme pour les travaux dont vous avez donné une idée succincte sur les fonctions fuchsiennes, et s'il vous convenait, lorsque vous aurez l'occasion de le voir, de lui indiquer,dans le champ si vaste que vous avez ouvert, quelque question à traiter, vous auriez un disciple reconnaissant et qui bientôt, je le crois, pourrait vous faire honneur.

Recevez Monsieur, avec l'expression de ma plus haute estime, l'assurance de mes sentiments bien dévoués.

Ch. Hermite

Paris, 10 mars 1881

Je viens de joindre les résultats que vous m'avez communiqués sur les fonctions d'une variable ayant des espaces lacunaire à mon travail dont je vous ai parlé et qui paraîtra dans le recueil des *Actes de la Société des Sciences* d'Helsingfors et à Berlin.

XII.

Monsieur,

Je m'empresse de vous accuser réception des deux notes que vous m'avez adressées et que je présenterai à l'Académie dans sa prochaine séance[39]. Les nouvelles questions que vous abordez sont du plus haut intérêt, et les résultats que vous obtenez me semblent d'une incontestable importance, mais si vos notes suffisent pour vous faire prendre date, elles ne suffisent pas, au moins à moi, pour me permettre de suivre, sans solution de continuité[40], la série de vos idées. Ce sera avec le plus grand [[intérêt[41]]] que je ferai l'étude des fonctions fuchsiennes, quand vous publierez le mémoire qui contient leur définition explicite, et je n'ai pas besoin de vous dire combien m'intéresse ce que vous m'annoncez avoir obtenu sur des transcendantes analogues à la fonction modulaire. En vous renouvelant la prière de présenter sans recourir à l'emploi de la géométrie non euclidienne, après les avoir exposés par la méthode qui vous les a fait découvrir, vos résultats sur la classification des fonctions $\frac{az+b}{cz+d}$, afin de posséder les éléments de la formation des fonctions fuchsiennes, je vous prie Monsieur de recevoir la nouvelle assurance de ma plus haute estime pour vos travaux, et de mes sentiments bien dévoués.

Ch. Hermite

Si ce n'était point vous détourner de recherches plus importantes, je crois qu'une note où vous développeriez la conclusion tirée de l'équation

$$u_1 F_1 \frac{dz}{du_1} + u_2 F_2 \frac{dz}{du_2} + \dots = z$$

pour l'existence d'un espace lacunaire, conclusion que j'ai indiquée en reproduisant votre lettre, serait accueillie avec le plus grand intérêt par la Société des Sciences d'Helsingfors[42].

Paris, 2 avril 1881

XIII.

Paris, 23 mai 1881

Monsieur,

Chaque travail que vous présentez à l'Académie m'amène à vous adresser de nouvelles félicitations ; votre dernière communication[43] m'intéresse au plus haut point par le nombre et l'importance des résultats qu'elle contient, aussi je me propose d'étudier avec tout le soin qu'il mérite le mémoire dont vous m'annoncez la rédaction et qui donnera la théorie complète de vos nouvelles transcendantes.

J'ai à vous transmettre les vifs remerciements de Mr Mittag-Leffler pour votre communication qu'il imprime en ce moment sur les espaces lacunaires des fonctions, et je saisis cette occasion pour vous renouveler l'expression de ma haute estime et de mes sentiments bien dévoués.

Ch. Hermite

XIV.

Monsieur,

Le mémoire que vous m'avez fait l'honneur de m'adresser a été présenté à l'Académie dans sa dernière séance, et l'extrait paraîtra dans le prochain numéro des *Comptes Rendus*[44]. C'est une circonstance heureuse et dont je vous félicite que vous vous soyez en un point important rencontré avec Mr Klein. Vos efforts à tous deux contribueront à faire pénétrer les nouvelles transcendantes dont vous avez obtenu la conception dans le domaine de l'Analyse, et dès à présent les résultats auxquels vous êtes parvenu sont assez importants pour appeler l'attention de tous les géomètres sur leur étude. Mr Mittag-Leffler qui m'a écrit dernièrement en m'exprimant son admiration pour vos découvertes m'a informé qu'il aurait peut-être bientôt l'occasion de connaître l'opinion de Mr Weierstrass sur vos travaux, et ce me sera un plaisir d'apprendre et de vous faire connaître le sentiments du grand géomètre[45]. Permettez-moi Monsieur de vous adresser avec cette lettre un exemplaire des articles publiés dans les *Monatsbericht* en août 1880[46], et dont nous nous sommes entretenus. Je ne crois pas en ce qui concerne le théorème de Mr Mittag-Leffler que Mr Weierstrass ait épuisé la question, et je ne doute point que, venant après lui, vous ne trouviez mieux si vous cherchiez de ce côté. Vous savez qu'en désignant par $x = a_n$ les pôles d'une fonction $F(x)$, que je suppose simples pour fixer les idées, et par R_n les résidus correspondants, Mr Mittag-Leffler pose :

$$\mathfrak{f}_n(x) = R_n\left[\frac{1}{x-a_n} + \frac{1}{a_n} + \frac{x}{a_n^2} + \ldots + \frac{x^{\nu-1}}{a_n^{\nu}}\right] ,$$

et,en disposant convenablement de ν , obtient une fonction uniforme représentée dans tout le plan par la série :

$$\mathfrak{f}(x) = \mathfrak{f}_1(x) + \mathfrak{f}_2(x) + \ldots + \mathfrak{f}_n(x) + \ldots$$

qui lui donne

$$F(x) = \mathfrak{f}(x) + g(x) ,$$

$g(x)$ étant une fonction holomorphe. Je généralise un peu son théorème comme il suit. Soit $G(x)$ une fonction holomorphe, et : $x=x_1$, $x=x_2$, ... les racines de $G(x)=0$, en nombre fini ou infini. J'envisage la fonction $\frac{F(x)}{G(x)}$, et les deux fonctions de Mr Mittag-Leffler, la première $\varphi(x)$ se rapportant aux pôles $x=x_1, x_2, etc.$ et la seconde $\psi(x)$ aux pôles $x=a_n$. J'obtiens ainsi l'équation :

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \varphi(x) + \psi(x) + g(x) ,$$

ou bien :

$$F(x) = G(x)\varphi(x) + G(x)\psi(x) + G(x)g(x) ,$$

et plus simplement :

$$F(x) = G(x)\psi(x) + \mathfrak{G}(x) ,$$

puisque les deux termes $G(x)\varphi(x)$ et $G(x)g(x)$ sont des fonctions holomorphes. Cela étant, il me semble possible de disposer de $G(x)$ de manière à simplifier l'expression de $\psi(x)$. En effet, les résidus R_n sont remplacés par les quantités $\frac{R_n}{G(a_n)} = \mathfrak{R}_n$, et la fonction $\psi(x)$ sera simplement $\psi(x) = \Sigma \frac{R_n}{x-a_n}$, si la série : $\Sigma \operatorname{Mod} \frac{R_n}{a_n}$ est convergente. Soit en particulier $G(x) = x^{\nu}$, on tombe sur la condition de la convergence de la suite $\Sigma \operatorname{Mod} \frac{R_n}{\nu+1}$, que j'ai mentionnée dans ma lettre à Mr Mittag-Leffler[47]. Mais jusqu'ici je n'ai pas été au-delà, tout ce que j'entrevois dans cette direction fuyant lorsque je tente de m'en approcher.

En vous exprimant Monsieur le désir que ce sujet appelle votre attention, je vous renouvelle l'expression de ma plus haute estime et de mes sentiments bien dévoués.

Ch. Hermite

Paris, 30 juin 1881

Veuillez à l'occasion faire savoir à Mr Klein que ses belles et profondes recherches,qui ont tant dépassé les miennes sur l'équation du cinquième degré, les équations modulaires, etc. m'inspirent autant d'estime que de sympathie pour son talent.

XV.

Paris, 8 juillet 1881

Monsieur,

C'est seulement lundi prochain que je présenterai à l'Académie votre note sur les groupes kleinéens[48]. Je n'ai pu assister à la dernière séance pour une circonstance dont je prends la liberté de vous faire part, pensant qu'elle vous intéresse. J'étais ce jour témoin du mariage de Mr Appell avec ma nièce Mademoiselle Amélie Bertrand, la fille ainée de Mr Alexandre Bertrand[49], Directeur du Musée de Saint Germain. Ce que vous me dites du mauvais vouloir de Mr Klein, dont vous auriez été informé tant envers vous qu'envers Mr Fuchs et Mr Picard, me préoccupe beaucoup[50]. Aussi et sans rien laisser soupçonner de ce que vous m'avez appris, j'ai demandé à Mr Darboux, qui le connaît personnellement, s'il aurait appris qu'il eût à l'égard des Français la malveillance de beaucoup de ses compatriotes. La réponse de Mr Darboux, je dois vous le dire, me semble,sinon détruire les renseignements qui vous sont parvenus, au moins les mettre sérieusement en doute : un élève de l'Ecole Normale Mr Brunel[51] a été envoyé en mission en Allemagne, pour y suivre les cours de mathématiques, et en ce moment il se trouve à Leipzig, après avoir assisté à ceux de Mr Weierstrass à Berlin. Si j'ai bien compris Mr Darboux, on aurait appris par la voie de Mr Brunel que Mr Klein se serait empressé d'exposer les récents travaux mathématiques,publiés dans les *Comptes Rendus*, à ses élèves du séminaire, et en aurait fait l'éloge[52]. Il me semble en conséquence que vous ne devez point renoncer aux relations scientifiques dont Mr Klein a pris l'initiative, et que son beau talent ainsi que la singulière connexion de vos recherches doivent vous rendre si intéressantes. Il m'est arrivé à moi-même d'avoir été traité avec désobligeance par Mr Stern, dans un article du *Journal* de Mr Borchardt, et puis ayant vu Mr Stern à Göttingen[53] et m'étant entretenu avec lui, j'ai trouvé dans un autre article des intentions toutes différentes, de sorte que maintenant nous nous écrivons amicalement.

En vous promettant Monsieur de ne vous rien laisser ignorer de ce que je pourrai apprendre afin de vous éclairer sur le degré de confiance à accorder à l'éminent géomètre, je vous renouvelle l'expression de mes sentiments affectueux et bien dévoués.

Ch. Hermite

XVI.

Monsieur,

Permettez-moi une remarque au sujet de la généralisation que vous m'avez communiquée de la formule de Mr Mittag-Leffler. En vous exprimant d'abord tout l'intérêt que j'ai eu à étudier votre formule, je vous demanderai s'il est bien dans la nature des choses qu'elle comprenne un si grand nombre de quantités arbitraires. Je ne sais si vous partagez mon sentiment que l'analyse est en grande partie une science d'observation, ayant pour objet des réalités qui sont en dehors de nous, tout autant que les choses du monde physique. Au moins vous admettrez qu'en s'avançant à l'aveugle dans une recherche difficile on tente de tirer des exemples, des cas particuliers, des observations possibles quelque indication de la voie à suivre. J'ai donc cherché, dans la question qui nous occupe, des fonctions uniformes, et un peu à l'aventure, dans l'espoir de jeter quelque lumière sur le théorème de Mr Mittag-Leffler, en l'appliquant à ces fonctions.

La première que j'ai considérée est celle-ci : $\frac{\Gamma(x)\Gamma(a)}{\Gamma(x+a)}$ et ayant eu à écrire à Mr Mittag-Leffler pour le féliciter de sa nomination de professeur à la nouvelle Université de Stockholm, je lui ai communiqué le résultat auquel elle conduit[54]. En voici une seconde : $\frac{\Gamma(x)\Gamma(a-x)}{\Gamma(a)}$, qu'il faut traiter d'une autre manière, mais qui conduit à la même conclusion. Et d'abord aux pôles $x = -n$, $x = a+n$, correspondent deux résidus égaux entre eux, et de signes contraires :

$$R_n = \frac{(-1)^n}{1.2\ldots n}\,\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = \frac{(-1)^n a(a+1)\ldots(a+n-1)}{1.2\ldots n} ,$$

puis : $-R_n$.

Sous la condition de la convergence de la série des fractions simples, on a donc :

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(a-x)}{\Gamma(a)} = \Sigma\left[\frac{R_n}{x+n} - \frac{R_n}{x-a-n}\right] + G(x) ,$$

et il faut par conséquent chercher dans quel cas la suite

$$\Sigma\left[\mathrm{Mod}\,\frac{R_n}{n} + \mathrm{Mod}\,\frac{R_n}{n+a}\right]$$

est *absolument* convergente.

Supposons pour plus de simplicité que a soit réel, admettons d'abord qu'il soit positif, et soit :

$$u_n = \frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)}{1.2\ldots n} \cdot \frac{1}{n} .$$

La règle de Gauss donne, d'après la formule :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n(n+a)}{(n+1)^2} ,$$

la condition $a < 1$. Et de même, si l'on fait ensuite :

$$u_n = \frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)}{1.2\ldots n} \cdot \frac{1}{n+a} .$$

C'est donc dans le cas de a positif, lorsque cette constante est moindre que l'unité, qu'on a

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(a-x)}{\Gamma(a)} = \Sigma \left[\frac{R_n}{x+n} - \frac{R_n}{x-a-n}\right] + G(x) .$$

Cherchons ensuite, en supposant $a > 1$, si l'on peut trouver un entier ν , propre à rendre convergentes les séries :

$$\Sigma \operatorname{Mod} \frac{R_n}{n^{\nu+1}} , \quad \Sigma \operatorname{Mod} \frac{R_n}{(n+a)^{\nu+1}} ,$$

ou simplement :

$$\Sigma \frac{R_n}{n^{\nu+1}} , \quad \Sigma \frac{R_n}{(n+a)^{\nu+1}} .$$

Pour la première, on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^{\nu+1}(n+a)}{(n+1)^{\nu+2}} ,$$

d'où $\nu > a-1$; pour la seconde :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+a)^{\nu+2}}{(n+1)(n+a+1)^{\nu+1}} ,$$

puis de même : $\nu > a-1$.

Nous rencontrons donc, et je crois que c'est pour la première fois, cette circonstance où il est nécessaire de retrancher les fractions simples, un polynôme entier de degré quelconque $\nu-1$, suivant la grandeur de la constante a , pour composer la fonction de Mr Mittag-Leffler. C'est ici qu'intervient utilement l'observation, comme vous allez voir.

Soit $a = \nu+\alpha$, de sorte que la nouvelle constante α soit positive et moindre que l'unité. Si vous posez pour abréger :

$$G(x) = (1 - \frac{x}{\alpha})(1 - \frac{x}{\alpha+1})\dots(1 - \frac{x}{\alpha+\nu-1}) ,$$

il viendra :

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(a-x)}{\Gamma(a)} = G(x)\ \frac{\Gamma(x)\Gamma(\alpha-x)}{\Gamma(\alpha)} ,$$

et le cas général de a quelconque est ramené au cas particulier de $\alpha < 1$. Mais il reste encore à obtenir la fonction holomorphe qui figure dans la formule :

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(\alpha-x)}{\Gamma(\alpha)} = \Sigma\left[\frac{R_n}{x+n} - \frac{R_n}{x-\alpha-n}\right] + \mathfrak{G}(x) .$$

J'emploie pour cela la formule :

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(\alpha-x)}{\Gamma(\alpha)} = \int_0^1 \frac{z^{x-1} + z^{\alpha-x-1}}{(1+z)^\alpha}\, dz ,$$

et j'observe qu'en supposant α positif et < 1 on peut, depuis $z=0$ jusque et y compris $z=1$, employer la formule du binôme :

$$(1+z)^{-\alpha} = \Sigma\, \frac{(-1)^n\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}{1.2\dots n}\, z^n = \Sigma\, R_n z^n .$$

Cela étant, l'intégration donne :

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(\alpha-x)}{\Gamma(\alpha)} = \Sigma\left[\frac{R_n}{x+n} - \frac{R_n}{x-\alpha-n}\right] ;$$

et cette expression a lieu quel que soit x , bien que dans l'intégrale il soit nécessaire de supposer x et $\alpha-x$ positifs. J'ajoute qu'on peut opérer de même lorsque α est compris entre 1 et $-\infty$ (Abel, *Oeuvres complètes*, p.87)[55] ; ainsi dans tous ces cas, la fonction holomorphe disparaît, et l'expression $\frac{\Gamma(x)\Gamma(\alpha-x)}{\Gamma(\alpha)}$ s'obtient sans avoir rien à retrancher des fonctions simples.

Enfin dans le cas que j'ai surtout en vue, où l'on a $a = \nu+\alpha$, nous trouvons :

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(a-x)}{\Gamma(a)} = G(x)\ \Sigma\left[\frac{R_n}{x+n} - \frac{R_n}{x-\alpha-n}\right] .$$

Soit :

$$G_n(x) = \frac{G(x) - G(-n)}{x+n} ,$$

$$G_n^1(x) = \frac{G(x) - G(\alpha+n)}{x-\alpha-n} \quad .$$

Vous voyez qu'on peut écrire :

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(a-x)}{\Gamma(a)} = \Sigma\,[\frac{R_n}{x+n} - G_n(x)] + \Sigma\,[\frac{-R_n}{x-\alpha-n} - G_n^1(x)] \quad .$$

C'est en ce moment qu'apparaît la modification apportée à la formule de Mr Mittag-Leffler, les polynômes $G_n(x)$, $G_n^1(x)$ n'étant point ceux que donne sa méthode. Vous voyez en même temps que l'effet de cette modification est de faire disparaître la fonction holomorphe additive, en donnant ainsi à l'expression, sous forme d'une somme de fractions rationnelles, la forme *la plus simple*.

En résumé *l'expérience* me porte à penser que la formule de Mr Mittag-Leffler peut d'une manière très restreinte, mais utile, être généralisée comme vous l'indiquait ma précédente lettre en opérant sur la fonction $\frac{F(x)}{G(x)}$ au lieu de considérer la fonction proposée $F(x)$.

Excusez-moi Monsieur de vous écrire si précipitamment, et recevez la nouvelle assurance de mes sentiments affectueux et bien dévoués.

Ch. Hermite

Paris, 11 juillet 1881

XVII.

Monsieur,

J'ai appris par une voie qui me donne toute confiance que Mr Klein n'a point les sympathies des deux plus grands géomètres de Berlin, Mr Kronecker et Mr Weierstrass, qui n'aiment point son caractère et jugent avec quelque sévérité ses travaux[56]. Cependant et en ce qui concerne des appréciations malveillantes qu'il aurait faites dans ses leçons des travaux de Mr Picard, il n'y a ce me semble point lieu de les mettre à sa charge et de lui en faire un tout. Picard m'apprend en effet qu'il a chargé un de ses élèves, Mr Hurwitz, docteur en philosophie de l'Université de Leipzig, de faire une leçon, dans un *colloquium*, sur quelques-unes de ses notes, et qu'à cette occasion Mr Hurwitz a fait la remarque que la démonstration donnée,pour établir que toute relation algébrique entre deux fonctions uniformes, à discontinuités polaires, doit être du genre zéro ou un[57], présente un point faible, dans le cas où la courbe n'est point du genre hyperelliptique. Cette lacune a été comblée d'une manière ingénieuse par Mr Hurwitz, qui a donné à Picard communication de sa méthode, et ce procédé courtois exclut comme vous voyez toutes les suppositions de malveillance et d'hostilité.

Mr Mittag-Leffler m'écrit que votre communication à la Société des Sciences de Finlande est imprimée en ce moment ; malheureusement une faute assez grave s'est glissée à la fin, mais on tâchera de l'indiquer dans un *errata*.

D'Analyse, Monsieur, je ne vous parle point, les examens de la faculté qui ont été extrêmement chargés, parce que cette année nous n'avons point de maîtres de conférences pour les mathématiques, mais seulement des répétiteurs de l'Ecole des Hautes Etudes, et que de plus Mr Puiseux est malade, m'ont pris tout mon temps. Je me borne à vous demander si vous avez pris connaissance du travail étendu que Mr Thomé vient de publier,dans les deux derniers cahiers du *Journal de Crelle*, sur les équations linéaires[58], et dans ce cas d'avoir la bonté de m'en dire votre opinion, afin que je sache si je puis l'indiquer comme pouvant servir de sujet de thèse pour le doctorat.

Veuillez agréer Monsieur mes sentiments affectueux et bien dévoués.

Ch. Hermite

Paris, 26 juillet 1881

XVIII.

Paris, 18 avril 1882

Monsieur,

J'ai appris avec le plus grand plaisir par Mr Mittag que vous avez bien voulu promettre votre collaboration au prochain Journal des géomètres scandinaves[59], et je viens vous prier lorsque vous aurez occasion de voir Mr Appell d'insister auprès de lui, comme je vais le faire de mon côté, pour qu'il n'agisse pas autrement que son cousin Emile Picard, qui enverra des articles à ce journal. A ma requête je joins mes remerciements bien sincères pour l'exemple que vous m'avez donné d'une fonction possédant des points singuliers d'espèce quelconque. Mais j'attache surtout beaucoup de prix à l'exemple de fonctions du second genre, que vous avez su obtenir au moyen des fonctions fuchsiennes, et que vous trouverez j'espère occasion de publier[60].

Veuillez agréer Monsieur la nouvelle assurance de ma plus haute estime et de mes sentiments tout dévoués.

Ch. Hermite

XIX.

Monsieur,

La remarque dont je vous ai parlé au sujet des minima successifs de la fonction linéaire $ma + nb + pc$, où m, n et p sont des nombres entiers, ou bien encore des minima simultanés, successifs, des quantités $m - \alpha p$, $n - \beta p$, se démontre fort simplement comme vous allez voir. Et d'abord je définis les minima considérés, en envisageant les minima des formes quadratiques :

$$(ax+by+pz)^2 + \lambda y^2 + \mu z^2$$

$$\lambda(x-\alpha z)^2 + \mu(y-\beta z)^2 + z^2$$

pour toutes les valeurs possibles, positives, des indéterminées λ et μ. C'est ainsi que je parviens à concevoir bien clairement ce que sont des *minima consécutifs*, de la manière suivante. A un système déterminé de valeurs de λ et μ correspond un système $x=m$, $y=n$, $z=p$, donnant le minimum de mes formes quadratiques, qui restera le même, lorsque λ et μ varieront entre certaines limites. Considérez λ et μ comme des coordonnées, il est clair qu'à un minimum correspond, ainsi, une certaine aire, et que sur la limite de cette aire deux minima différents correspondent à deux systèmes de valeurs infiniment voisines des paramètres. J'ajoute qu'en certains points de la limite *trois minima différents* répondront à des valeurs telles que : λ, μ ; $\lambda+\delta\lambda$, $\mu+\delta\mu$; $\lambda+\delta'\lambda, \mu+\delta'\mu$, les quantités $\delta\lambda$, $\delta'\lambda$, etc. étant infiniment petites. Désignons les valeurs entières des indéterminées dans ces trois cas par : m,n,p ; m',n',p' ; m'',n'',p'', j'établis comme il suit que le déterminant :

$$\left\{ \begin{matrix} m\ ,n\ ,p \\ m',n',p' \\ m'',n'',p'' \end{matrix} \right\} = D ,$$

ne peut être que zéro ou l'unité, en valeur absolue. Qu'on fasse en effet la substitution :

$$x = mX + m'Y + m''Z$$
$$y = nX + n'Y + n''Z$$
$$z = pX + p'Y + p''Z ,$$

dans l'une ou l'autre de nos formes quadratiques ; en désignant la transformée obtenue par (A,A',A'',B,B',B'') et par Δ l'invariant de la forme considérée, on aura :

$$AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2 = \Delta D^2 ,$$

et par conséquent :

$$AA'A'' > \Delta D^2 .$$

Mais on suppose que A, A' et A'' sont des minima relatifs à des valeurs infiniment voisines des paramètres, on peut donc poser :

$$A < \sqrt[3]{2\Delta} \quad , \quad A' < \sqrt[3]{2\Delta} \quad , \quad A'' < \sqrt[3]{2\Delta} \quad ,$$

d'où :

$$AA'A'' < 2\Delta \; .$$

Or cette condition rapprochée de la précédente donne :

$$\mathcal{D}^2 < 2 \; .$$

Par conséquent $\mathcal{D}$, lorsqu'il n'est pas nul, est en valeur absolue égal à l'unité.

Faut-il exclure la supposition de $\mathcal{D} = 0$? Je vous avoue que je ne le pense point, mais j'ai éprouvé tant de difficultés sur la question, que j'ai renoncé à poursuivre mes recherches.

En vous exprimant l'espoir que vous serez plus heureux, je vous renouvelle , Monsieur, l'assurance de mes sentiments bien dévoués.

Ch. Hermite

Paris, 1er décembre 1884

XX.

Monsieur,

La section de Géométrie doit présenter à l'Académie une liste de candidats pour la place actuellement vacante par le décès de Mr Serret, et je viens vous prier de vouloir bien me donner, sur les travaux que vous avez publiés depuis la précédente élection, une notice manuscrite qui me permettra de compléter le rapport que j'ai déjà fait[60 bis].

Permettez-moi en même temps de vous prier de vouloir bien faire imprimer dans le prochain numéro du *Bulletin de la Société Mathématique de France* le mémoire ci-joint de Mr Selivanoff, conformément à l'intention de l'auteur[60 ter].

Veuillez agréer Monsieur la nouvelle assurance de mes sentiments bien dévoués.

Ch. Hermite

Paris, 21 avril 1885

XXI.

Monsieur,

Permettez-moi de m'acquitter de la mission qui m'est imposée en vous demandant votre bienveillance en faveur d'un candidat au baccalauréat Mr Payn (Raoul), qui est dans une situation digne d'intérêt ayant eu le malheur de perdre coup sur coup sa mère et son père, ancien élève de l'Ecole Polytechnique.

Veuillez Monsieur excuser ma sollicitation et recevoir la nouvelle assurance de mes sentiments dévoués.

Ch. Hermite

Paris, 3 décembre 1885

XXII.

Paris, 9 décembre

Monsieur,

Je ne puis assez vous remercier de la peine que vous avez prise pour dénouer des difficultés qui résistent à tous mes efforts. Votre analyse pour trouver le nombre des solutions de $ac-b^2 < N$ sous les conditions $c > a > b > 0$ est excellente, et il me semble qu'elle ouvre précisément la voie qu'a suivi Mr Lipschitz, aussi je viens vous demander instamment de prendre connaissance de l'article important que l'éminent géomètre a publié sur la question dans les *Monatsbericht* de 1862 (je crois ne pas me tromper, en tout cas la table des matières,par noms d'auteurs, vous donnerait l'indication exacte)[61]. Mes souvenirs me laissent l'impression que, si remarquable qu'elle soit, elle manque de rigueur, et qu'on ne se rend pas suffisamment compte de l'ordre de grandeur des quantités négligées. Mais Mr Lipschitz arrive à l'élément arithmétique $\Sigma \frac{1}{n^3}$, qui vous a jusqu'ici ainsi qu'à moi complètement échappé, et c'est là un point capital. Je crois Monsieur que les efforts que j'ai provoqués de votre part sur ce beau et profond sujet ne seront pas perdus, et que certainement vous irez plus loin que Mr Lipschitz, le seul qui jusqu'ici ait réussi à démontrer le résultat énoncé par Gauss, au moins en ce qui concerne γ . J'ai appris autrefois de Dirichlet que ses tentatives pour y parvenir avaient échoué ; vous voyez donc que la question est digne de votre intérêt, et l'analyse que vous m'avez communiquée, dans votre dernière lettre, me donne la complète certitude que vous réussirez là où j'ai échoué. Permettez-moi, n'ayant pas encore reçu d'épreuves de l'imprimerie[62], de vous dire comment j'ai attaqué la question. Je représente toutes les formes réduites non ambiguës par

$$(2s+r, s, 2s+r+t) \ , \quad r, s, t = 1, 2, 3, \dots .$$

Cela étant et $F(n)$ désignant le nombre des solutions de

$$(2s+r)(2s+r+t) - s^2 = N \ ,$$

il est clair qu'on peut écrire :

$$\Sigma F(n) q^n = \Sigma q^{(2s+r)(2s+r+t)-s^2} \ .$$

Sommant le second membre par rapport au nombre variable t , j'en conclus :

$$\Sigma\, F(n)\,q^n = \Sigma\, \frac{q^{(2s+r)^2-s^2+(2s+r)}}{1-q^{2s+r}}$$

et faisant $2s+r = g$

$$\Sigma\, F(n)\,q^n = \Sigma\, \frac{q^{g^2+g-s^2}}{1-q^g} \quad ,$$

et vous voyez que g part de la valeur 3 , et que pour $g = 3,4,5$ on a :

$$s = 1,2,3 \qquad E(\tfrac{g-1}{2}) \; .$$

Je n'ai plus maintenant qu'à employer cette relation fort simple :

$$\frac{q^b}{(1-q)\,(1-q^a)} = \Sigma\, E(\frac{n+b-a}{a})\; q^n$$

pour déduire de cette équation :[63]

XXIII.

Paris, 10 décembre 1885

Monsieur,

Tous les géomètres partageront le sentiment d'admiration avec lequel j'ai lu la belle analyse que vous venez de me communiquer[64], et qui vous fera extrêmement honneur. Permettez-moi de vous demander pour les *Comptes Rendus* un article dans lequel vous l'exposerez au moins en ce qu'elle a de plus essentiel, puis un mémoire complètement développé, comme le demande l'importance et la difficulté de la question[65].

Dans le cas où vous n'auriez en particulier aucun recueil en vue, j'appellerai votre attention sur le *Journal de Crelle* ; Mr Kronecker, j'en suis sûr, sera heureux de donner votre travail dans le tome 100 du *Journal* qu'il nomme le Tome Jubilaire, et vous accueillera avec la vive sympathie qui est due à votre beau talent. A sa demande je lui ai envoyé un article arithmético-elliptique, je crois que Picard en prépare un de son côté, nous serions trois, si vous le voulez bien, à représenter les mathématiques françaises dans une circonstance à laquelle les éditeurs et collaborateurs du *Journal* attachent une grande importance[66].

En vous prévenant que j'ai conservé vos lettres avec le plus grand soin, pour le cas où elles vous seraient nécessaires, je vous renouvelle Monsieur, avec la satisfaction d'avoir été pour quelque chose dans un nouveau et bien beau résultat de vos efforts, l'expression de mes sentiments les meilleurs et les plus dévoués.

Ch. Hermite

XXIV.

Monsieur,

Ma perplexité est portée au comble, et j'attends de pouvoir vous envoyer une épreuve de mon article, afin de mettre sous vos yeux mon analyse. Veuillez donc je vous prie prendre un peu patience, je passerai à l'imprimerie aujourd'hui pour demander qu'on ne me fasse pas attendre[67]. Ma déduction est fort simple, mais j'empresse de vous déclarer que je serai heureux de reconnaître et de confesser mon erreur, et de sortir ainsi de mon angoisse analytique. Je n'ai rien à objecter à votre raisonnement, j'y avais été amené sous une forme un peu différente, et ma déception a été grande en tombant sur ce malheureux coefficient $\frac{2\pi}{9}$. Avant d'arriver aux résultats exposés dans ma note, j'avais obtenu entre autres celui-ci, dans les *Acta* : 5 : 4, page 327[68] :

Soit $F(n)$ le nombre des classes de déterminant $-n$, dont un au moins des coefficients extrêmes est impair, c'est-à-dire les formes proprement positives etc., la somme suivante :

$$F(2) + F(6) + F(10) + \ldots + F(4n+2)$$

a pour valeur :

$$\Sigma\ (-1)^{\frac{a-1}{2}} + 2\ \Sigma\ (-1)^{\frac{a-1}{2}}\ E\left(\frac{4n+2-a^2-a'^2}{4a}\right).$$

On attribue aux entiers a et a' toutes les valeurs impaires et positives satisfaisant à la condition :

$$4n + 2 - a^2 - a'^2 > 0 .$$

Cela étant, il est clair que le nombre de ces systèmes de valeurs est de l'ordre $4n+2$, puisque l'aire du cercle $4n+2 = x^2+y^2$ est $\pi(4n+2)$.

J'en conclus qu'en négligeant les quantités de *l'ordre* n on a :

$$F(2)+F(6)+\ldots+F(4n+2) = \Sigma\ (-1)^{\frac{a-1}{2}} + 2\ \Sigma\ (-1)^{\frac{a-1}{2}}\ \left(\frac{4n+2-a^2-a'^2}{4a}\right),$$

formule qui ouvre la voie à la recherche de la valeur asymptotique de la somme considérée. Mais il m'avait semblé préférable de poursuivre cette recherche en partant d'une expression donnant la somme

$$H(1)+ H(2) + \ldots + H(n) .$$

C'est cette expression que je vous enverrai le plutôt possible ; je vous remercie vivement Monsieur de votre assistance et je saisis cette occasion pour vous renouveler l'assurance de mes sentiments bien sincèrement dévoués.

Ch. Hermite

Paris, lundi

XXV.

Monsieur,

Dans le désir que votre travail au sujet de la formule asymptotique de Gauss ne soit pas perdu , permettez-moi d'appeler votre attention sur le mémoire que

Dirichlet a publié en 1856 dans les *Mémoires* de Berlin sur les valeurs moyennes dans la théorie des nombres[69]. En considérant au début de ses recherches la fonction qui représente le nombre des diviseurs de n , Dirichlet parvient à une transformation remarquable de la somme $\Sigma\, E(\frac{n}{s})$, $s = 1,2,\ldots,n$, par laquelle il obtient une fonction *continue*, qui la représente aux quantités près de l'ordre $\sqrt{n}$. S'il était possible d'obtenir un résultat semblable,pour la quantité à laquelle j'ai été amené, c'est-à-dire pour la somme double

$$\Sigma\, E\left(\frac{N+x^2-y^2}{y}\right) ,$$

de sorte qu'on ait une expression où n'entre plus le signe E , et qui soit exacte au terme de l'ordre $N^{1-\alpha}$, où α est positif, on obtiendrait la constante δ . Il m'est impossible maintenant de suivre cette idée, mon temps étant pris par autre chose ; et puis je ne sais, comme bien vous pensez, s'il est trop permis de s'y confier. Vous le donnant pour ce qu'elle vaut,je vous dis avec Virgile, si vous réussissez, *magnus mihi eris Apollo*[70].

En vous renouvelant Monsieur l'assurance de ma plus haute estime et de mes sentiments dévoués.

Ch. Hermite

Paris, 19 décembre 1885

XXVI.

Monsieur,

Je me sens bien humilié de n'avoir point vu que l'énoncé même de la proposition de Gauss ne permettait point de trouver son nombre γ par le procédé qui introduisait *la totalité* des classes de même déterminant, au lieu seulement des formes proprement primitives, qu'il considère. Mais c'est pour moi une fatalité que le paradoxe écarté un moment reparaisse ensuite sous une autre forme.

Comment, en effet, peut-il se faire que je trouve $\frac{2\pi}{9} N^{\frac{3}{2}}$, qui est plus petit que $\gamma N^{\frac{3}{2}}$, lorsque la quantité que j'envisage est au contraire plus grande !

Puisque je porte malheur, ne vous détournez plus de vos recherches pour me venir en aide, mais permettez-moi de vous renouveler ma prière de lire l'article de Lipschitz, il est impossible que vous n'y ajoutiez point quelque chose, et la question est si belle et si difficile, qu'une recherche de vous sera accueillie avec le plus vif intérêt. Quel étonnant génie que Gauss, comment a-t-il pu réussir à atteindre jusqu'à la constante $\delta = \frac{2}{\pi^2}$, ne pourriez-vous pas tenter de démontrer son résultat ?

Avec mille remerciements, Monsieur, et l'assurance de mes sentiments les plus dévoués.

Ch. Hermite

XXVII.

Monsieur,

Permettez-moi de vous demander si vous voudriez bien dans l'intérêt des *Acta*, et aussi dans l'intérêt de Madame Kowalevski, donner du beau et important travail, que vous avez publié sur l'équilibre d'une masse fluide en rotation[71], une analyse qui paraîtrait dans le journal *Le Temps*. L'un des rédacteurs de la partie scientifique de ce journal m'a demandé de lui fournir, chaque fois que je présenterais un nouveau numéro à l'Académie, l'indication des articles qui y sont contenus, et en même temps m'a exprimé l'intention d'avoir,pour les plus importants de ces articles, une analyse qu'il mettrait avec grand plaisir dans son compte rendu.

En vous renouvelant Monsieur l'expression de mes sentiments bien sincèrement dévoués.

Ch. Hermite

Paris, 31 mars [[1886]]

Autant que j'en puisse juger pour l'étendue, je crois que votre article pourrait très bien prendre 2 pages in-8°.

XXVIII.

Monsieur,

Permettez-moi de vous donner communication d'une réclamation de priorité, au sujet de vos recherches sur l'équilibre d'une masse fluide etc., et de vous prier, si vous jugez devoir y répondre, de me donner vos observations demain avant midi, afin qu'elles soient présentées à la séance de l'Académie en même temps que les recherches de Mr Matthiessen[72].

J'ai envoyé à Mr Ferdinand Delaunay votre article[73], qui m'a paru excellent et dont je vous fais mon sincère compliment.

En vous renouvelant Monsieur l'assurance de mes sentiments bien dévoués.

Ch. Hermite

Paris, dimanche [[11 avril 1886]]

XXIX.

Mon cher Confrère,

Permettez-moi de vous informer que je viens de recevoir de Mr Mittag l'annonce que le prix du Roi Oscar vous a été solennellement décerné le 21 courant ; la notification officielle vous en sera faite prochainement, par Mr le Ministre de Suède[74].

Veuillez agréer mon cher Confrère mes vives félicitations et l'assurance de mes sentiments bien dévoués.

Ch. Hermite

Paris, 26 janvier 1889

XXX.

Paris, 14 avril 1891

Mon cher Confrère et Ami,

Permettez-moi de vous demander si vous avez pris connaissance dans le *Journal* de Mr Jordan, et dans les *Comptes Rendus*, d'articles de Mr Caspary sur l'application des fonctions elliptiques au problème de la rotation, puis d'autres sur les fonctions sphériques dans le *Bulletin de la Société Mathématique*[75], qui me semblent montrer un véritable talent mathématique.

Dans le cas où vous partageriez mon sentiment, je vous serais extrêmement reconnaissant de vouloir bien m'autoriser à employer votre nom, afin de venir en aide à l'auteur, qui a suivi mes leçons, que je connais personnellement et qui se trouve dans une situation extrêmement pénible. Mr Caspary est juif, et la passion antisémitique qui fait maintenant fureur en Allemagne lui ferme tout accès à l'enseignement supérieur, et le contraint à gagner sa vie en corrigeant des épreuves à la librairie Reimer[76].

Mais je suis bien et dûment informé qu'un témoignage favorable des géomètres français serait accueilli avec empressement par l'un des hauts fonctionnaires de l'Instruction publique à Berlin, qui est mathématicien distingué, et tout disposé en s'appuyant sur ce témoignage à lever les obstacles injustes, dépolorables qui entravent la carrière d'un homme de mérite incontestable.

En réservant expressément votre opinion sur la valeur analytique de Mr Caspary, j'invoque mon cher Confrère votre grande autorité et votre générosité dans le but de secourir une douloureuse infortune, et je vous prie de croire à mes sentiments de bien sincère et cordiale affection.

Ch. Hermite

XXXI.

Paris, 22 juillet 1892

Mon cher Confrère et Ami,

Permettez-moi de vous exprimer ma profonde reconnaissance de vous être joint à Mr Darboux et à Mr Jordan, pour m'obtenir à l'occasion de mon 70ème anniversaire une récompense infiniment précieuse de ma vie de travail, qui dépasse tout ce que je pouvais attendre et ne m'a pas causé moins de surprise que de satisfaction. Vous connaissez mon admiration pour vos découvertes que j'ai en commun avec tous les géomètres, vous connaissez aussi mon sentiment pour vous depuis bien des années, veuillez croire que cette circonstance[77] ajoute encore à un bien sincère et affectueux attachement que je vous garderai à jamais.

En vous offrant, mon cher Confrère et Ami, l'assurance de mon plus entier dévouement.

Ch. Hermite

XXXI.

Paris, samedi [[1895]]

Mon cher Confrère et Ami,

Je suis chargé par Mr Mittag-Leffler de vous exprimer sa profonde reconnaissance pour avoir bien donné l'appui de votre nom à la démarche qui a été faite dans l'intérêt des *Acta* auprès du parlement suédois. Le télégramme que j'ai envoyé et les noms de ceux qui l'ont signé ont été lus à la diète, le résultat malheureusement n'est pas entièrement satisfaisant. La chambre des députés a voté pour le Journal, le Sénat a voté contre, le vote commun qui sera définitif décidera du sort d'une entreprise aussi utile à la science qu'honorable pour la Suède. Mr Mittag-Leffler contribue personnellement chaque année pour 3.000 F à la publication de son recueil, la subvention que veut lui retirer la commission du budget lui est indispensable, et une diminution de cette subvention serait une charge qu'il supporterait difficilement.

Le roi Oscar a pris à la question le plus vif intérêt ; malgré les préoccupations extrêmement graves de la crise actuelle qui met la couronne en péril il a lui-même fait connaître à Mr Mittag-Leffler la résolution de la commission, les votes des deux chambres à la diète, en l'informant qu'il avait télégraphié au Ministre de l'Instruction publique de faire les plus grands efforts pour sauver les *Acta*. Ne pourrions-nous pas ici seconder l'intention du roi par une démarche que je viens soumettre à votre appréciation, en vous demandant votre concours si vous partagez mon sentiment. Elle consisterait à faire parvenir par la voie dipolomatique, au Ministre de Suède et de Norvège Mr Due, le voeu des géomètres français pour la continuation des *Acta*, leur reconnaissance pour les services signalés que leur rend cette publication, son incontestable importance et le grand éclat qu'elle jette sur la science de la Suède. Quelques mots de vous au Ministre de L'Instruction publique le convaincraient qu'il y va d'un intérêt très sérieux, vous pourriez obtenir sa sympathie pour une cause à laquelle nous tenons beaucoup, et son appui pour faire parvenir le témoignage de nos sentiments au gouvernement suédois. Ce serait une occasion pour joindre les noms de Hadamard, Goursat, Painlevé et d'autres à ceux des signataires de la précédente dépêche, lui donner plus de poids auprès des membres de la diète qui certainement ne verraient point sans satisfaction l'intérêt des mathématiciens français pour une oeuvre scientifique fondée à Stockholm.

Je ne puis non plus oublier le roi, protecteur éclairé de toutes les sciences et ami de l'analyse ; notre concours doit lui être acquis dans cette circonstance, je désirerais vivement que vous en jugiez comme moi, mon cher Confrère et Ami, c'est dans cette espérance que je vous prie de croire toujours à mes sentiments de l'affection la plus sincère et la plus dévouée.

Ch. Hermite

XXXII.

Mon cher Confrère et Ami,

J'ai on ne peut plus regretté d'avoir perdu votre visite de ce matin, et je viens vous exprimer tous mes remerciements de la bonté que vous avez eue de venir pour causer des affaires de Mr Mittag-Leffler, et encore de votre démarche auprès du Ministre de l'Instruction publique. Cette démarche s'ajoute à celle de Darboux. Je m'y suis joint de mon côté, aussi j'espère une décision favorable qui rendra un immense service à Mr Mittag-Leffler.

Une autre question se présente maintenant extrêmement difficile et délicate, dont je vous aurais parlé si je n'avais été prévenu par Mr Daubrée[78]. Je m'en étais déjà ouvert à Darboux le sachant très bien disposé pour le rédacteur des *Acta*, mais il trouve la chose fort grave[79]. Un mauvais effet serait à craindre en Allemagne où se trouvent d'éminents géomètres parmi lesquels nous n'aurions que l'embarras du choix, MM. Fuchs, Lipschitz, Schwarz, Klein[80].Tous ils sont placés au plus haut rang dans la science, plusieurs ont fait de grandes découvertes en analyse. Vous pourriez aussi suggérer Mr Cremona[81] en Italie. Les incontestables services rendus par Mr Mittag-Leffler pourront sans doute entrer plus tard en ligne de compte, mais le moment est-il venu de le préférer lui, encore si jeune, à tant d'autres ?

Je ne crois pas commettre d'indiscretion en vous faisant savoir que Darboux ne le pense pas, en vous disant aussi qu'il est loin d'être assuré qu'une nomination de Correspondant serait le salut assuré des *Acta*. Picard à coup sûr, bien que je ne lui aie pas posé la question, mais dont l'opinion à l'égard de Mittag-Leffler m'est bien connue, sera de l'avis de Darboux. En cet état de choses, la nomination d'officier de la Légion d'Honneur me semble la meilleure des solutions, pour lui venir en aide, sans sacrifier des intérêts dont nous avons aussi la garde et sans porter à la justice une atteinte qui serait réelle et qu'on pourrait nous reprocher.

Sous toutes réserves de votre jugement dans l'affaire et en vous priant mon cher Confrère et Ami de me croire votre bien sincèrement et affectueusement dévoué.

Ch. Hermite

Mercredi [[1895]]

NOTES

1 J.-M. Dunoyer de Segonzac nous a écrit, le 8 décembre 1970, qu'après la mort de son grand-père Emile Picard "plusieurs valises contenant la correspondance de Ch. Hermite ont été entreposées dans un garde-meuble à Paris, lequel a totalement brûlé quelques mois plus tard".

Sur C. Hermite, lire H. Freudenthal : *Hermite, Charles*, p.306 du vol.VI du *Dictionary of Scientific Biography*, ainsi que l'admirable article de M. Noether : *Charles Hermite* (Math. Annalen, 55(1902), 337-385).

2 H. Poincaré, *Sur quelques propriétés des formes quadratiques* (Comptes Rendus, 89(1879), 344-346 ; 11 août) = *Oeuvres*, t.V, p.189-191. Il s'agissait d'une "Note de M. Poincaré", et les commissaires désignés étaient Bertrand, Hermite et Puiseux.

Poincaré présentera le 24 novembre une "Note de M. H. Poincaré (extrait par l'auteur)" : *Sur les formes quadratiques* (Comptes Rendus, 89(1879), 897-899) = *Oeuvres*, t.V, p.192-194, où il précise (p.897) :

"Cette Note est destinée à faire suite à un travail analogue présenté à l'Académie le 11 août 1879."

3 H. Poincaré, *Sur les formes cubiques ternaires* (Comptes Rendus, 90(1880), 1336-1339 ; 7 juin) = *Oeuvres*, t.V, p.25-27.

Cette Note, "extrait par l'auteur", a été présentée par Hermite.

4 H. Poincaré écrit, p.26, de sa Note :

"Je classe ensuite les formes cubiques ternaires en sept familles."

Il donnera des précisions historiques dans l'*Introduction* à son mémoire *Sur les formes cubiques ternaires et quaternaires* (Journal de l'Ecole Polytechnique, 50^{e} Cahier, 1881, 190-253) = *Oeuvres*, t.V, p.28-72.

5 Les invariants S et T sont définis p.33 et 30 du t.V des *Oeuvres*.

G. Salmon, *Théorèmes sur les courbes de troisième degré* (Journal reine und angew. Math., 42(1851), 274-276).

A. Cayley, *An Introductory Memoir upon Quantics* (Phil. Trans., 145(1855), 127-140) ; *A Second Memoir upon Quantics* (146(1856), 101-126) ; *A Third Memoir upon Quantics* (146(1856), 627-647) ; *A Fourth Memoir upon Quantics* (148(1858), 415-427) ; *A Fifth Memoir upon Quantics* (148(1858), 429-460) ; *A Sixth Memoir upon Quantics* (149(1859), 61-90) = *The Collected Mathematical Papers*, t.II, p.221-234, 250-275, 310-335, 513-526, 527-557, 561-592, Cambridge(The University Press), 1889.

6 C. Jordan, *Sur l'équivalence des formes algébriques* (Comptes Rendus, 88(1879), 906-908 ; 5 mai) = *Oeuvres*, t.III, p.411-413, Paris(Gauthier-Villars), 1962. Voir, p.XV-XVI, le commentaire de J. Dieudonné.

7 A. Châtelet écrit dans ses notes, p.72 du t.V des *Oeuvres* de Poincaré, publié en 1950, à propos de ce mémoire (p.28-72) :

"Il ne semble pas que cette étude algébrique des formes ait fait l'objet d'études nouvelles importantes."

8 C. Hermite, *Sur le résultat de trois formes quadratiques ternaires* (Journal reine und angew. Math., 57(1860), 371-375) = *Oeuvres*, t.II, p.100-106.

9 H. Resal était à cette époque le rédacteur du *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, fondé en 1836 et publié jusqu'en 1874 par J. Liouville.

10 L. Fuchs, *Ueber eine Klasse von Functionen mehrerer Variabeln, welche durch Umkehrung der Integrale von Lösungen der linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten entstehen* (Journal reine und angew. Math., 89(1880), 151-169)= *Werke*, t.II, p.191-212. Le mémoire est daté du 14 février 1880.

L. Fuchs, *Sur une classe de fonctions de plusieurs variables tirées de l'inversion des intégrales de solutions des équations différentielles linéaires dont les coefficients sont des fonctions rationnelles* (Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite) (Comptes Rendus, 90(1880), 678-680 ; 22 mars ; 735-736 ; 29 mars).

11 P.340 de l'*Extrait d'un mémoire inédit* (Acta Math., 39(1923), 58-93) = *Oeuvres*, t.I, p.336-373. Voir aussi, à propos de ce mémoire de Poincaré, p.7 de l'article essentiel de J. Dieudonné : *La découverte des fonctions fuchsiennes*, p.3-23 des *Actualités mathématiques*, Actes du 6e Congrès du Groupement des Mathématiciens d'Expression Latine, Paris(Gauthier-Villars), 1982.

A propos de ce mémoire inédit de Poincaré, son éditeur N.E. Nörlund écrit à Mme H. Poincaré le 7 mars 1914 :

"Comme vous vous le rappelez sans doute j'ai eu l'honneur de recevoir par l'intermédiaire de Mr Mittag-Leffler un certain nombre de manuscrits pour en faire usage par la publication des *Oeuvres* d'Henri Poincaré. Ces Mémoires et Notes traitent presque exclusivement la théorie des fonctions fuchsiennes. Mais il doit exister encore un manuscrit d'un Mémoire, traitant le même sujet, et ayant pour titre : *Mémoire pour le concours du grand prix des Sciences mathématiques, 1880. Perfectionner en quelque point important la théorie des équations différentielles linéaires à une seule variable indépendante*. Ce mémoire n'a pas été publié sous sa forme primitive, mais le manuscrit en question serait d'un très grand intérêt pour moi et cela pour la raison suivante.

M. Fricke, un élève de M. Klein, vient de publier un ouvrage qui donne un exposé de l'ensemble des recherches sur les fonctions fuchsiennes (*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, Band II B_{2-3}, p.177-470). L'auteur de cet ouvrage s'est laissé entraîner beaucoup trop loin par son admiration de M. Klein et par son patriotisme. Ni les travaux d'Henri Poincaré ni les travaux d'Hermite n'occupent la place qu'ils ont droit de réclamer. Au contraire dans cet ouvrage et dans bien d'autres encore on a essayé de démontrer que c'est surtout à l'école de Göttingen qu'on doit le magnifique édifice qu'est aujourd'hui la théorie des fonctions fuchsiennes et pourtant cette théorie est un des plus beaux titres de gloire d'Henri Poincaré.

Je pourrais citer des exemples nombreux. Je vais me permettre d'en indiquer un seul. En parlant du théorème qui est peut-être le plus important de tous ceux qu'on doit à Poincaré M. Fricke s'exprime en ces termes : Il parle d'abord de certaines recherches de M. Klein. Puis vient :

Von hieraus ist später Poincaré (nach mündlicher Mitteilung an Klein) *durch einen Analogieschluss zu den allgemeinsten Gruppen ... übergegangen ... gelangte Poincaré auf diesem Wege zu den als Hauptkreisgruppen* (groupes fuchsiens) *zu bezeichnenden Gruppen.*

C'est bien tard qu'on a donné publicité à cette *mündliche Mitteilung*.

Mais heureusement dans un travail philosophique Henri Poincaré a dit nettement qu'elle est l'origine de ses recherches sur les fonctions fuchsiennes.

Je voudrais essayer d'établir nettement la question de la priorité sur ce point et sur bien d'autres points encore.

Il se peut que, dans ce but, le Mémoire non publié, dont j'ai parlé plus haut, soit de la plus haute importance."

Une seconde lettre de Nörlund à Mme H. Poincaré, du 14 mars 1914, concerne les conditions pratiques de l'envoi de ce manuscrit inédit.

12 E. Selling, *Ueber die binären und ternären quadratischen Formen* (Journal reine und angew. Math., 77(1874), 143-229) = *Des formes quadratiques binaires et ternaires* (Journal de Mathématiques pures et appliquées, (3), 3(1877), 21-60, 153-206).

13 Les deux lettres de L. Fuchs à H. Poincaré des 5 et 16 juin 1880, publiées dans le t.38(1914) des *Acta Mathematica*, p.185-187, et dont nous possédons une traduction due à François Poincaré.

14 Voir p.8-9 de l'*Analyse de ses travaux sur l'algèbre et l'arithmétique faite par H. Poincaré*, p.1-12 du t.V des *Oeuvres*, ainsi que son mémoire : *Sur les applications de la géométrie non euclidienne à la théorie des formes quadratiques*, Association

française pour l'avancement des Sciences, 10^e Session, p.132-138, Alger, 16 avril 1881 = *Oeuvres*, t.V, p.267-274.

15 Ces travaux d'Hermite sont cités dans le mémoire de Poincaré, indiqué dans la note 14, et, en particulier, dans les notes de A. Châtelet, éditeur du tome V des *Oeuvres* de Poincaré.

16 H. Bazin, *Sur la composition des formes quadratiques à quatre variables* (Journal de Math. pures et appl., 19(1854), 215-252).

17 *Sur la théorie des formes quadratiques ternaires indéfinies* (Journal reine und angew. Math., 47(1854), 307-312).

18 J. Tannery, *Sur les substitutions linéaires par lesquelles une forme quadratique ternaire se reproduit elle-même* (Bulletin Sci. math., 11(1876), 221-233).

19 *Ueber eine Classe von Funktionen mehrerer Variabeln, welche durch Umkehrung der Integrale von Lösungen der linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten entstehen* (Göttingen Nachrichten, 1880, 170-176) = (Journal reine und angew. Math., 89(1880), 151-169) = *Werke*, t.II, p.191-212 = *Sur une classe de fonctions de plusieurs variables, provenant de l'inversion des intégrales des solutions des équations différentielles linéaires à coefficients rationnels* (Bulletin Sci. math., (2), 4(1880), 1^e partie, 278-300).

20 On est ici en présence, il nous semble, de ce que la philosophie parisienne des années 1960 appelait une "coupure épistémologique". Mais notons seulement que C. Hermite, qui avait introduit les méthodes algébriques en analyse et les méthodes analytique en théorie des nombres - nous renvoyons à l'étude si profonde de M. Noether citée dans la note 1 - était tout à fait étranger à la géniale intuition de Poincaré associant la géométrie non euclidienne à la théorie des fonctions fuchsiennes.

Quant à l'histoire elle-même, elle nous semble être la suivante : H. Poincaré a dû exposer à Hermite le contenu du premier supplément au mémoire soumis à l'Académie des Sciences de Paris pour le Grand Prix des Sciences mathématiques de 1880, supplément découvert récemment par Jeremy Gray (*The three supplements to Poincaré's prize essay of 1880 on fuchsien functions and differential equations*, Archives internationales d'Histoire des Sciences, 32(1982), 221-235). Ce premier supplément a été déposé à l'Académie le 28 juin 1880. Poincaré y écrit (p.225) :

"Il existe des liens étroits entre les considérations qui précèdent et la géométrie non euclidienne de Lobatchewski."

Et il ajoute :

"*La fonction fuchsienne est à la géométrie de Lobatchewski ce que la fonction* *doublement périodique est à celle d'Euclide."*

21 Hermite écrit 21 novembre, mais la séance de l'Académie a eu lieu le lundi 22 novembre.

22 *Sur la réduction simultanée d'une forme quadratique et d'une forme linéaire* (Comptes Rendus, 91(1880), 844-846) = *Oeuvres*, t.V, p.337-339.

23 Dans son mémoire *Réduction d'une forme quadratique et d'une forme linéaire* (Journal de l'Ecole Polytechnique, 56^{e} Cahier, 1886, 79-142) = *Oeuvres*, t.V, p.340-393, Poincaré précise (p.374) qu'il s'agit d'une remarque déjà faite par Eisenstein.

24 *Sur la résolution de l'équation du cinquième degré* (Comptes Rendus, 46(1858), 508-515) = *Oeuvres*, t.II, p.5-12.

25 L. Kronecker, *Ueber seine algebraischen Arbeiten* (Monatsbericht Akad. Wissenschaften Berlin, 1861, 609-617) = *Note de M. Kronecker sur ses travaux algébriques* (Annales sci. Ecole Normale Sup., 3(1866), 279-286) ; *Ueber eine neue Eigenschaft der quadratischen Formen von negativer Determinante* (1862, 302-311) = (287-294) ; *Ueber die complexe Multiplication der elliptische Functionen* (1862, 363-372) = (295-302) ; *Ueber die Auflösung der Pell'schen Gleichung mittelst elliptischer Functionen* (1863, 44-50) = (303-308).

26 L. Kronecker, *Werke*, t.I-V, New York(Chelsea), 1968.

27 Voir p.109 du t.VIII et p.440 du t.X du *Catalogue of Scientific Papers compiled by the Royal Society of London.*

28 F. Klein, *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, t.I-III.

Il est intéressant de noter que C. Hermite, dans cette lettre du 27 novembre 1880, attire l'attention de Poincaré sur les travaux de Klein, avant que Poincaré ne commence à publier ses Notes sur les fonctions fuchsiennes.

29 J. Gierster, *Ueber Relationen zwischen Classenzahlen binärer quadratischer Formen von negativer Determinante* (Math. Annalen, 17(1880), 71-84).

30 Père Joubert, *Sur la théorie des fonctions elliptiques et son application à la théorie des nombres* (Comptes Rendus, 50(1860), 774-779, 832-837, 907-912, 1040-1045, 1095-1100, 1145-1150).

31 *Sur les fonctions fuchsiennes* (Comptes Rendus, 92(1881), 333-335 ; 14 février ; 395-398 ; 21 février) = *Oeuvres*, t.II, p.1-7. Les "commissaires" désignés pour examiner ce mémoire étaient Bertrand, Hermite et Puiseux.

32 H. Poincaré a été placé "en cinquième ligne, *ex aequo* et par ordre alphabétique", avec P. Appell et E. Picard (Comptes Rendus, t.92(1881), p.801).

33 *Sur les équations différentielles linéaires à intégrales algébriques* (Comptes Rendus, 92(1881), 698-701 ; 21 mars) = *Oeuvres*, t.III, p.95-97.

34 Cité p.95 et 97 de la Note de Poincaré : C. Jordan, *Sur la détermination des groupes d'ordre fini contenus dans le groupe linéaire* (Atti R. Accad. Sci. fis. mat. Napoli, 8(1879), n° 11) = *Oeuvres*, t.II, p.177-217. Voir le commentaire de J. Dieudonné, p.XXIV-XXIX du t.I des *Oeuvres* de Jordan.

35 *Extrait d'une lettre de M. Ch. Hermite à M. Mittag-Leffler sur quelques points de la théorie des fonctions* (Journal reine und angew. Math., 91(1881), 53-78) = *Oeuvres*, t.IV, p.48-75. L'exemple de Poincaré se trouve p.75, et l'article est daté de décembre 1880.

36 Voir W. Burau, *Göpel, Adolph* et *Rosenhain, Johann Georg*, p.471-472 du vol.V et p.548 du vol.XI du *Dictionary of Scientific Biography*.

37 Il serait intéressant de préciser ce "partage" et les *Lettres de Paul Appell* à Henri Poincaré apportent quelques éléments de réponse.

38 Voir P. Costabel, *Humbert, Marie-Georges*, p.547-548 du vol.VI du *Dictionary of Scientific Biography*. P. Costabel écrit p.547 :

"A brilliant representative of the French school of mathematics at the end of the nineteenth century, Humbert distinguished himself primarily through his work in fields pioneered by Poincaré and Hermite."

39 *Sur une nouvelle application et quelques propriétés importantes des fonctions fuchsiennes* (Comptes Rendus, 92(1881), 859-861 ; 4 avril) ; *Sur l'intégration des équations linéaires par le moyen des fonctions abéliennes* (913-915 ; 11 avril).

40 Une "solution de continuité" est un point de discontinuité.

41 Hermite a omis ici d'écrire un mot.

42 P.35 du mémoire de Poincaré : *Sur les fonctions à espaces lacunaires* (Acta Societatis scientiarum Fennicae, 12(1883), 343-350) = *Oeuvres*, t.IV, p.28-35.

43 *Sur les fonctions fuchsiennes* (Comptes Rendus, 92(1881), 1198-1200 ; 23 mai) = *Oeuvres*, t.II, p.12-15.

44 *Sur les fonctions fuchsiennes* (Comptes Rendus, 92(1881), 1484-1487 ; 27 juin) = *Oeuvres*, t.II, p.19-22. Le mémoire, dont l'extrait a été publié, est présenté par Hermite et son examen soumis aux commissaires Hermite, Puiseux et Jordan.

45 G. Mittag-Leffler écrit à Hermite, dans sa lettre du 20 août 1881, que "M. Weierstrass regarde M. Poincaré comme étant un homme de talent" (voir, p.156-157, des *Eléments d'analyse de Karl Weierstrass*, Archive for History of Exact Sciences, t.10(1973),

p.41-176).

46 K. Weierstrass, *Über einen functionentheoretischen Satz des Herrn G. Mittag-Leffler* (Monatsbericht K. Akd. Wissenschaften, vom 5. August 1880) = *Math. Werke*, t.II, p.189-199 ; *Zur Functionenlehre* (vom 12. August 1880) = p.201-223.

47 Voir la note 35.

48 *Sur les groupes kleinéens* (Comptes Rendus, 93(1881), 44-46 ; 11 juillet) = *Oeuvres*, t.II, p.23-25.

49 Beau-frère d'Hermite, qui a épousé la soeur d'Alexandre et Joseph Bertrand.

50 Voir la *Correspondance avec Felix Klein*.

51 Voir les *Lettres de Georges Brunel* à Poincaré.

52 Nous n'avons pas retrouvé ces lettres de Brunel à Darboux.

53 En 1877, à l'occasion du centenaire de la naissance de Gauss.

54 Voir la lettre d'Hermite à Mittag-Leffler du 29 juin 1881, p.122-123 des *Lettres de Charles Hermite à Gösta Mittag-Leffler (1874-1883)* (Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques, 5(1884), 49-285) , en particulier la note 145.

55 Abel N.H., *Untersuchungen über die Reihe* $1 + \frac{m}{1} x + \frac{m(m-1)}{1.2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} x^3 + \ldots$ (Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1(1826), 311-339) = *Recherches sur la série* $1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} x^3 + \ldots$, p.66-92 du t.I, éd. 1839 des *Oeuvres complètes*, p.219-250 du t.I, éd. 1881 des *Oeuvres complètes*.

56 G. Mittag-Leffler écrit à C. Hermite le 7 juillet 1881 (p.156 des *Eléments d'analyse de Karl Weierstrass*, Archive for History of Exact Sciences, 10(1973), 41-176) :

"Vous me demandez quels sont les rapports entre M. Klein et les grands Berlinois. Je vous dois la vérité et je vous la dirai, quoique je suis moi-même très bien avec M. Klein. M. Weierstrass trouve que M. Klein est un homme qui ne manque pas de talent, mais qu'il est très superficiel et même quelquefois assez charlatan. M. Kronecker trouve qu'il est tout simplement un charlatan sans des mérites réels. Je crois que c'est aussi l'opinion de M. Kummer."

57 E. Picard, *Sur une propriété des fonctions uniformes d'une variable, liées par une relation algébrique* (Comptes Rendus, 91(1880), 724-726 ; 2 novembre) = *Oeuvres*, t.I, p.65-67, Paris(C.N.R.S.), 1978.

La correspondance de Hurwitz est déposée à la *Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek* à Göttingen.

58 L.W. Thomé, *Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen* (Journal reine und angew. Math., 91(1881), 79-198, 341-346).

59 G. Mittag-Leffler venait de fonder *Acta Mathematica*.

60 G. Mittag-Leffler utilisait dans sa Note *Sur la théorie des fonctions uniformes d'une variable* (Comptes Rendus, 94(1882), 938-941 ; 3 avril) la classification de Cantor pour étudier les ensembles de singularités des fonctions analytiques.

C'est dans sa note du 24 avril 1882 qu'on rencontre pour la première fois les notions cantoriennes dans un travail de Poincaré : *Sur les fonctions fuchsiennes* (Comptes Rendus, 94(1882), 1166-1167) = *Oeuvres*, t.II, p.44-46. Poincaré y donne le premier exemple d'une fonction analytique dont les singularités forment un ensemble cantorien du deuxième genre. Il développera ces considérations dans son mémoire *Sur les fonctions fuchsiennes* (Acta Math., 1(1882),193-294) = *Oeuvres*, t.II, p.169-257. Toutefois, Poincaré va s'appercevoir que cet ensemble des singularités est un ensemble parfait non dense, comme il le signale dans l'analyse de ses travaux (p.3 de l'*Analyse de ses travaux sur la théorie générale des fonctions d'une variable* (Acta Math., 38(1921), 65-70) = *Oeuvres*, t.IV, p.1-8).

60 bis Voir les *Comptes Rendus*, t.100(1885), p.1173, du 4 mai 1885.

60 ter Tome 13(1884-1885),p.119-131.Poincaré était le secrétaire de la Société Mathématique de France.

61 Il s'agit probablement de l'article de R. Lipschitz : *Ueber die asymptotische Gesetze von gewissen Gattungen zahlentheoretischer Functionen* (Monatsbericht Akad. Wissen. Berlin, 1865, 174-185).

62 C. Hermite, *Remarques sur les formes quadratiques de déterminant négatif* (Bull. Sci. math., (2), 10(1886), 23-30) = *Oeuvres*, t.IV, p.215-222.

63 La fin de cette lettre manque ; on peut suivre le raisonnement d'Hermite en se reportant au mémoire cité dans la note 62.

64 Voir la lettre du 19 décembre 1885. Nous ne voyons pas bien de quel travail de Poincaré il s'agit exactement. Il se peut que les lettres d'Hermite à Lipschitz, découvertes récemment par W. Scharlau,contiennent des informations sur cette recherche de Poincaré.

65 Poincaré présentera le 4 janvier 1886 sa note *Sur la transformation des fonctions fuchsiennes et la réduction des intégrales abéliennes* (Comptes Rendus, 102(1886), 40-44) = *Oeuvres*, t.IV, p.314-317. Cette note sera développée dans son mémoire *Sur la réduction des intégrales abéliennes et les fonctions fuchsiennes* (Rendiconti Circolo Mat. Palermo, 27(1909), 281-336) = *Oeuvres*, t.III, p.362-428.

66 Poincaré n'a pas participé à ce tome jubilaire 100(1887).

67 Il s'agit de l'impression du mémoire cité dans la note 62.

68 *Sur quelques conséquences arithmétiques des formules de la théorie des fonctions*

elliptiques (Acta Math., 5(1884), 297-330) = *Oeuvres*, t.IV, p.138-168.

69 *Ueber die Bestimmung der mittleren Werthe in der Zahlentheorie* (Abhandlungen der K. Preussischen Akademie, 1849, 69-83) = *Werke*, t.II, p.49-66.

70 Apollon, tu seras plus grand que moi.

71 *Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation* (Acta Math., 7(1885), 259-380) = *Oeuvres*, t.VII, p.40-140.

Poincaré écrit p.43 :

"Dans cette étude, je me suis rencontré avec Mme Kowalevski qui avait déjà employé les mêmes procédés d'analyse dans un Mémoire sur l'anneau de Saturne, qui avait été communiqué en 1874 à l'Université de Göttingen et qui n'a été imprimé qu'en 1885 dans les *Astronomische Nachrichten*."

72 L. Matthiessen, *Sur l'équilibre d'une masse fluide en rotation (Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite)* (Comptes Rendus, 102(1886), 857-858 ; 12 avril).

H. Poincaré, *Sur l'équilibre d'une masse fluide en rotation* (Comptes Rendus, 102(1886), 970-972 ; 27 avril) = *Oeuvres*, t.VII, p.141-142).

73 Il s'agit probablement du rédacteur scientifique du journal *Le Temps*.

74 Poincaré a obtenu ce prix pour son mémoire : *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique* (Acta Math., 13(1890), 1-270) = *Oeuvres*, t.VII, p.262-479.

75 F. Caspary, *Sur les relations qui lient les éléments d'un système orthogonal aux fonctions thêta et sigma d'un seul argument et aux fonctions elliptiques et sur une théorie élémentaire de ces transcendantes, déduite des dites relations* (Journal Math. pures et appl., (4), 6(1890), 367-404) ; *Sur une application des fonctions thêta d'un seul argument aux problèmes de la rotation* (Comptes Rendus, 107(1888), 901-903, 937-938) ; *Sur les fonctions sphériques* (Bulletin Soc. Math. France, 19(1890-1891), 11-18).

76 Georg Reimer, éditeur, en particulier des oeuvres de Dirichlet.

77 Voir le beau discours de Poincaré : *Hermite*, p.97-101 des *Savants et Ecrivains*, et l'émouvante réponse d'Hermite : *Discours prononcé à son jubilé*, p.582-585 du t.IV de ses *Oeuvres*.

78 A. Daubrée, membre de la Section de minéralogie de l'Académie des Sciences de Paris depuis 1861.

79 G. Mittag-Leffler avait écrit à Hermite le 13 avril 1895 (Archives de l'Institut Mittag-Leffler) :

"Il y a une place libre depuis M. Weierstrass [[qui a été élu Membre Associé]] parmi les Correspondants de la Séction de Géométrie à l'Institut. Si je suis nommé à cette place tout changerait ici immédiatement, la guerre qu'on me fait pour les *Acta*."

80 Fuchs et Schwarz ont été élus Correspondants de l'Académie des Sciences de Paris cette même année 1895, Klein en 1897, Lipschitz et Mittag-Leffler en 1900.

81 Cremona a été élu Correspondant en 1898.

LETTRES DE KARL HEUN

Sur K. Heun (1859-1929) voir [1], t.IV, p.632-633 ; t.V, p.533 et t.VI, p.1106.

Heun écrit dans sa lettre du 30 septembre 1886 :

"Wenn ich mir die Freiheit nehme Ihnen einige Betrachtungen vorzulegen, so habe ich nur als einzige Entschuldigung anzuführen, daß mich Herr Klein in Göttingen ermuthigt hat diese Zeilen an Sie zu richten. Schon seit längerer Zeit bin ich mit dem eingehenden Studium Ihrer grundlegenden Arbeiten in den *Acta Math.* beschäftigt. Namentlich hat Ihre Reduction der *points en apparence singuliers* mein Interesse erregt. Sie führen diese Aufgabe innerhalb der Familie durch und ich wurde hierdurch veranlasst die Möglichkeit solcher Reductionen innerhalb derselben Gattung (*genre*) zu untersuchen. M. Goursat hat dieselbe Frage, wie Ihnen bekannt ist, in den *Annales de l'Ecole Normale* vor etwa zwei Jahren in Angriff genommen aber nicht vollständig durchgeführt. Was mich veranlasste hierin weiter zugehen, war die von Ihnen geschaffene *théorie des fonctions zétafuchsiennes*, wo die Transformationen zunächst nicht aus der Gattung heraustreten. Ich werde meine Resultate nur in Kürze herleiten um Ihre Aufmerksamkeit nicht für zu viele Formeln in Anspruch zu nehmen." [1]

NOTE

1 Traduction de Jeanne Peiffer :

"Si je prends la liberté de vous soumettre quelques considérations, je n'ai qu'une seule excuse à vous présenter, c'est que Monsieur Klein à Göttingen m'a encouragé de vous adresser ces lignes. Depuis quelque temps déjà, je suis occupé à étudier soigneusement vos travaux fondamentaux parus dans les *Acta Mathematica*. Notamment votre réduction des *points en apparence singuliers* a éveillé mon intérêt. Vous résolvez ce problème à l'intérieur de la famille, ce qui m'a poussé à examiner la possibilité de telles réductions à l'intérieur du même genre. M. Goursat, comme vous le savez, s'est attaqué à ce problème dans les *Annales de l'Ecole Normale*, il y a à peu près deux ans, mais ne l'a pas complètement résolu. Ce qui m'a poussé à y aller plus loin, c'est la *théorie des fonctions zétafuchsiennes* que vous avez créée et dans laquelle les transformations opèrent initialement à l'intérieur d'un même genre. Je vais très brièvement indiquer mes résultats afin de ne pas accaparer votre attention par trop de formules."

CORRESPONDANCE AVEC DAVID HILBERT

I.

[[1900]]

Mon cher Collègue[1],

Nous serons très heureux d'entendre votre communication[2]. Nous vous accordons volontiers trois quarts d'heure ; seulement ne le racontez pas, tout le monde ferait la même demande. Pour ce qui vient de vous plus on en aura, plus on sera content.

Votre bien dévoué.

Poincaré

II

[[fin octobre 1908]]

Mon cher Collègue,

Je suis très flatté de votre proposition et je suis très disposé à l'accepter[3]. Seulement il y a un obstacle. Je ne sais si je serai libre à l'époque que vous fixez. L'Académie Française n'a encore choisi ni le jour de ma réception[4], ni celui des élections. Mais tout fait prévoir que ce sera à la fin de février ou au commencement de mars.

Pourriez-vous me dire entre quelles limites on pourrait faire varier la date de mon voyage à Göttingen ; si au besoin on pourrait le remettre au semestre d'été, et à quel moment il convient que je vous donne une réponse définitive.

Veuillez agréer, mon cher Collègue, l'assurance de mes sentiments affectueux et de mon admiration pour votre talent. Seriez-vous assez bon pour me rappeler au souvenir de M. Klein.

Votre bien dévoué Collègue.

Poincaré

III.

Göttingen d. 6. 11. 08.

Sehr geehrter Herr Kollege[5].

Ihre Zusage hat uns alle hoch erfreut und auch in der mathematischen Geselschaft, in der ich gestern Ihren Brief mitteilte, wurde allgemein Freude ausgedrückt.

Was nun die Zeit Ihrer Herkommens betrifft, so möchten wir als das Optimum bezeichnen, wenn Sie Ihre Vorträge innerhalb der Zeitraumes 27 Febr. bis 10 März verlegen könnten ; allenfalls liesse sich dieser Spielraum noch um einige Tage am Anfange und Ende erweitern. Sollte Ihnen diese Zeit nicht möglich sein, so müsten wir die letzte Aprilwoche (Anfang des Sommersemesters) in Aussicht nehmen.

Vorbereitungen unsererseits bedarf es ja nicht ; aber, da wir die Zeit, sowie die Gegenstände Ihrer Vorträge gern zeitig genug in den *Jahresberichten der Deutschen Mathematikervereinigung*[6] bekannt machen und auch unseren auswärtigen Freunden und Kollegen mitteilen möchten, so bitte ich Sie um Mitteilung Ihrer Entschlüsse, sobald Ihnen dies möglich ist.

Mit den besten Grüssen Hochachtungsvoll und ergebenst

Hilbert[7].

IV.

Göttingen den 19 Nov. 08.

Sehr geehrter Herr Professor.

Wir rechnen nun darauf, dass Sie Ihre Vorträge in die Woche vom 22 - 28sten April nächsten Jahres verlegen, da diese Tage für uns wegen des Beginnes der Sommersemester die beste Zeit sind. Ich sehe mit grossem Interesse der Mitteilung Ihrer Programmes entgegen.

Mit ergebensten Grüssen Ihr

Hilbert[8].

V.

Mon cher Collègue,

Voici les titres des sujets que je me propose de traiter.:

Sur quelques applications de la méthode de Fredholm.

Sur la réduction des intégrales abéliennes.

Je suppose que je reste libre de modifier ce programme s'il y a lieu.

Je serai très heureux d'avoir l'occasion de vous voir.

Veuillez transmettre mes compliments à M. Klein[9] et croire à ma sincère amitié et à mon entier dévouement.

Poincaré

VI.

Göttingen den 25.2.09.

Hochgeehrter Herr Kollege.

Wie ich Ihnen schon mitzuteilen mir erlaubte, beabsichtigen wir zu der Göttinger "Poincaré-Woche" 22-28 April, auch einige Nicht-Göttinger Mathematiker heranzuziehen. Würde es Ihnen vielleicht möglich sein, auch ein Thema aus der mathematischen Physik oder der Astronomie und ein solcher Logisch-philosophischer Färbung zu behandeln ? Wir könnten in diesem Falle auch die betreffenden Göttinger Fachkollegen zu Ihren Vorträgen einladen.

Auch beabsichtigen wir an einem oder anderen Abend jener Woche eine Sitzung der hierigen mathematischen Gesellschaft abzuhalten, wo wir dann unsererseits nach unseren Kräften etwas zum Besten geben könnten.

Endlich ist für den 30sten April, dem Geburtstage von Gauss, in dem benachbarten Drausfeld auf dem "hohen Hagen" (der einen Ecke des Gauss'schen[10] Dreieckes, für welcher er die Winkelsumme π beobachtet hat) die Einweihung einer Gaussturmes projektirt. Ihre Anwesenheit dabei wäre dringend wünschenswert.

Leider sind wir - ganz besonders aber ich - durch den vor kurzem erfolgten Tod Minkowski's[11] in tiefe Trauer versetzt. Ich habe an ihm meinen liebsten und treuesten Jugendfreund, der mir tausendmal mehr wie ein Bruder war, ganz plötzlich und jäh verloren (durch Blinddarmentzündung). Es war ein Schlag aus dem heitersten Himmel.

Mit den besten Grüssen hochachtungsvoll

Hilbert[12].

VII.

Mon cher Collègue,

Mon programme sur les applications de l'équation de Fredholm comprend des applications à la Physique Mathématique et à l'Astronomie, en particulier à l'étude des marées et à celle des ondes hertziennes. Je pourrais aussi, si vous le désirez, prendre comme sujet relatif aux ensembles, une note qui va prochainement paraître dans les *Acta Mathematica*[13].

Je pourrai assister à l'inauguration de la tour de Gauss.

Je suppose que je puis faire mes conférences en français[14] ; s'il en était autrement, je pourrais m'en tirer, mais je vous prierais de m'en avertir un certain temps d'avance.

Votre bien dévoué Collègue.

Poincaré

VIII.

Mon cher Collègue,

Merci de votre lettre[15]. Nous pourrions alors prendre pour titres des diverses communications[16] :

Sur la réduction des intégrales abéliennes.

Sur quelques applications analytiques de la méthode de Fredholm.

La théorie des marées et l'équation de Fredholm.

Les ondes hertziennes et l'équation de Fredholm.

Sur la notion de nombre cardinal transfini.

Maintenant il y a un point sur lequel je désire attirer votre attention. Je suis encore sous le coup de l'accident qui m'a frappé l'année dernière à Rome et je suis impérieusement obligé à certaines précautions. Je ne puis boire ni vin, ni bière, mais seulement de l'eau. Je ne puis assister à un banquet, ni à un repas prolongé.

Cette circonstance m'avait fait hésiter à accepter votre invitation, mais j'ai pensé que vous sauriez arranger les choses en conséquence.

Je pense qu'il y aura moyen de voir nos collègues dans d'autres circonstances que dans des banquets et j'espère,dans ces conditions, avoir le plaisir de faire leur connaissance. Je serai enchanté en particulier d'avoir l'occasion de vous voir.

Votre bien dévoué Collègue.

Poincaré

IX.

Göttingen d. 6.5.1912

Hochgeehrter Herr Kollege.

Sie haben letzthin eine wichtige Arbeit *Théorie des quanta* im *Journal de Physique*[17] veröffentlicht. Ich würde mich glücklich schätzen, einen Separatabzug davon zu besitzen.

Mit den besten Grüssen Ihr ergebenster

Hilbert[18].

X.

Mon cher Collègue,

Je suis désolé ; on ne m'a pas envoyé de tirages à part de l'article en question ; on m'a envoyé seulement quatre exemplaires du *Journal* et j'en ai malheureusement déjà disposé.

Veuillez croire à tous mes regrets.

Votre bien dévoué.

Poincaré

Notes

1 Les lettres de Poincaré à Hilbert nous ont été aimablement communiquées par Dr Haenel, Directeur du département des manuscrits de la Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen, où elles figurent sous la cote : Cod. Ms. Hilbert 312.

2 Nous pensons qu'il s'agit du 2e congrès international des mathématiciens qui s'est tenu à Paris du 6 au 12 août 1900, sous la présidence d'honneur de Poincaré. Hilbert y avait fait sa fameuse conférence : *Sur les problèmes futurs des mathématiques*, p.58-114 du *Compte Rendu du deuxième congrès international des mathématiciens*, Paris(Gauthier-Villars), 1902.

3 De faire des conférences à Göttingen.

4 H. Poincaré a été reçu à l'Académie Française le 28 janvier 1909.

5 Les transcriptions et les traductions des lettres de D. Hilbert sont de François Poincaré.

6 2. Abteilung, t.18(1909), p.37 et 39. On informe les mathématiciens page 37 que H. Poincaré va "auch über den Begriff der transfiniten Kardinalzahlen vorzutragen".

7 "Göttingen, le 6 novembre 1908

Monsieur et cher Collègue,

Nous nous réjouissons de votre acceptation, ainsi que les membres de la Société mathématique auxquels j'ai communiqué hier votre lettre, et qui, tous, ont exprimé leur joie.

En ce qui concerne l'époque de votre venue ici, l'optimum serait que vous puissiez faire vos conférences entre le 27 février et le 10 mars ; en tout état de cause ce délai peut être prolongé de quelques jours, soit au début, soit à la fin. Si cette époque ne devait pas vous convenir, il nous faudrait envisager la première semaine d'avril (début du semestre d'été).

De notre part, il n'y a pas de préparation spéciale, mais comme nous souhaitons annoncer l'époque et les sujets de vos conférences assez à l'avance dans les *Jahresberichten der Deutschen Mathematikervereinigung* et les communiquer également à nos amis et collègues qui n'habitent pas Göttingen, je vous prie de me communiquer votre décision aussitôt qu'il vous sera possible.

Avec mes meilleures salutations, agréez mes sentiments distingués et dévoués.

Hilbert"

8 "Göttingen, le 19 novembre 1908

Monsieur le Professeur,

Nous comptons maintenant que vous ferez vos conférences dans la semaine du 22 au 28 avril de l'année prohaine, car cette époque est la meilleure en raison du début du semestre d'été. J'attends avec beaucoup d'intérêt la communication de votre programme.

Avec mes salutations dévouées votre

Hilbert."

9 Notons que Hilbert ne mentionne pas le nom de F. Klein dans ses lettres.

10 Suit un mot illisible.

11 Hermann Minkowski est mort le 12 janvier 1909.

12 "Göttingen, le 25 février 1909

Monsieur et cher Collègue,

Comme je me suis permis de vous le faire savoir, nous avons l'intention d'attirer à Göttingen, pour la "semaine Poincaré" du 22 au 28 avril, aussi quelques mathématiciens qui ne sont pas de Göttingen. Vous serait-il possible de traiter aussi un sujet relevant de la physique mathématique ou de l'astronomie et un autre ayant une coloration logico-philosophique ? Dans ce cas nous pourrions inviter également à vos conférences les collègues de l'Université spécialistes de ces questions.

Nous projetons également, un soir ou l'autre de cette semaine, d'organiser une séance de la Société mathématique d'ici, au cours de laquelle nous pourrions, de notre côté, dans la mesure de nos moyens, vous offrir un bon repas.

Enfin, il est prévu d'inaugurer le 30 avril, l'anniversaire de Gauss, dans le village voisin de Drausfeld, sur la "colline de Hagen" (qui forme un de sommet du triangle de Gauss, pour lequel il a observé que la somme des angles est égale à π), une tour de Gauss. Votre présence serait hautement souhaitable.

Nous sommes tous - et moi tout spécialement - profondément endeuillés par la mort récente de Minkowski. J'ai perdu en lui, subitement et pour toujours (par suite d'appendicite), le plus cher et le plus fidèle de mes amis d'enfance, qui était pour moi beaucoup plus qu'un frère. Ce fut un coup de foudre tombé d'un ciel pur.

Avec mes meilleures salutations dévouées.

Hilbert"

13 *Réflexions sur deux notes de M. A.S. Schoenflies et de M. E. Zermelo* (Acta Math., 32(1909), 195-200) = *Oeuvres*, t.XI, p.114-119, Paris(Gauthier-Villars), 1956.

14 Poincaré a fait ses conférences en allemand.

15 Nous n'avons pas retrouvé cette lettre.

16 Les conférences de Poincaré ont été publiées sous le titre : *Sechs Vorträge über ausgewälte Gegenstände aus der reinen Mathematik und mathematischen Physik*, Leipzig (Teubner), 1910 = *Oeuvres*, t.XI, p.120-124.

Un compte rendu intéressant de ce livre est celui de G.D. Birkhoff : *Poincaré's Göttingen lectures* (Bulletin Amer. Math. Society, 17(1911), 190-194) = *Collected Mathematical Papers*, v.III, New York(Amer. Math. Society), 1950.

17 *Sur la théorie des quanta* (Journal de Physique, (5), 2(1912), 5-34).

18 "Göttingen, le 6 mai 1912

Monsieur et cher Collègue,

Vous avez, récemment, publié un travail important : *Théorie des quanta*, dans le *Journal de Physique*. Je serais très heureux d'en posséder un tiré à part.

Avec mes meilleurs salutation, votre très dévoué.

Hilbert"

Lettre de George William H I L L

Sur G.W. Hill (1838-1914) voir [5], t.VI, p.398-400.

Il écrit dans sa lettre du 20 janvier 1892 :

"Relativement à votre critique [[dans [2], t.I]] de mon affirmation de la lune de lunaison maximum (pp.104-109), vous avez raison.

[[...]]

Les brillantes additions que vous avez contribuées à la mécanique céleste causent en moi un vif regret d'avoir négligé pour un temps aussi long les recherches de cette sorte."

Lettre de Georges H U M B E R T

[[1907]]

Mon cher Ami[1],

Il a été question hier, chez Tannery, de ta candidature éventuelle au Secrétariat perpétuel[2]. Je n'ai pas besoin de te dire qu'à mon avis ta nomination serait un honneur pour l'Académie et que ma voix est tienne dès à présent.

Cordialement à toi.

G. Humbert

Notes

1 Sur G. Humbert (1859-1921), voir [5], t.VI, p.547-548.

2 Voir la note 24 de la *Correspondance avec Gaston Darboux*.

LETTRES À ADOLF HURWITZ

I.

[[Paris, le 4 août 1897]] [1]

Mon cher Collègue,

Le deuil cruel qui vient de me frapper ne me permettra pas d'assister comme j'en avais l'intention aux séances du Congrès International des Mathématiciens à Zurich[5].

Heureusement, j'avais terminé la rédaction de ma conférence au moment où le malheur m'a frappé ; j'ai donc l'honneur de vous l'adresser sous plis recommandé en vous priant de vouloir bien charger quelqu'un de la lire à ma place[2]. Je vous prie de vouloir bien transmettre à vos collègues et aux membres du Congrès mes excuses et l'expression de mes regrets.

C'est pour moi très pénible que les circonstances ne me permettent pas de prendre part à ce Congrès auquel depuis plusieurs années je me promettais d'assister.

Votre bien dévoué Collègue.

Poincaré

II.

Mon cher Collègue,

Je ne saurais vous dire combien je suis touché de votre lettre et des sentiments que vous **exprimez**. Mais en réfléchissant, je sens que je n'aurais pas encore le courage de me mêler à une réunion nombreuse, même sérieuse. Je regrette beaucoup de manquer cette occasion de faire votre connaissance, mais j'espère vous voir à Paris dans trois ans[3].

Veuillez faire mes excuses à M. Geiser[4] et à tous nos amis.

Veuillez agréer l'assurance de mes regrets et de mes sentiments les plus sincèrement dévoués.

Poincaré

NOTES

1 Ces lettres nous ont été aimablement communiquées par Dr Haenel Directeur du Département des manuscrits de la Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen, où elles figurent sous la cote Math.-Arch. 78, Nos 270-271.

La date de la lettre semble être de la main de Hurwitz.

Sur A. Hurwitz (1859-1919), voir [5], t.VI, p.570-573.

2 La conférence de H. Poincaré : *Sur les rapports de l'analyse pure et de la physique mathématique*, p.81-90 des *Verhandlungen des ersten internationalen Mathematiker-Kongresses in Zürich vom 9. bis 11. August 1897*, Leipzig(Teubner), 1898, a été lue par Jérôme Franel, professeur à l'Ecole Polytechnique de Zürich.

3 Au cours du 2^e^ Congrès international des Mathématiciens.

4 Professeur à l'Ecole Polytechnique de Zurich et président du Comité d'organisation du Congrès.

5 La mère de Poincaré est morte le 15 juillet 1897.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.C.POGGENDORFF's *biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exacten Wissenschaften*, t.3, Leipzig(Barth), 1898, t.4, Leipzig(Barth), 1904, t.5, Leipzig(Chemie), 1926, t.6, Berlin(Chemie), t.7 b, 2e partie, Berlin(Akademie-Verlag), 1968.

[2] POINCARE H., *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, t.I, 1892, t.II, 1893, t.III, 1899, Paris(Gauthier-Villars).

[3] POINCARE H., *Oeuvres*, t.I-XI, Paris(Gauthier-Villars), 1916-1956.

[4] LEBON E., *Henri Poincaré*, 2e édition, Paris(Gauthier-Villars), 1912.

[5] *Dictionary of Scientific Biography*, t.I-XV, New York (Charles Scribner's Sons), 1970-1978.

[6] BELLIVIER A., *Henri Poincaré*, Paris(Gallimard), 1956.

[7] *The Mathematical Heritage of Henri Poincaré*, Providence(American Mathematical Society), 1983.