CAHIERS DU SÉMINAIRE D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

FLORENT BUREAU

# Sur la question du Prix Bordin 1933

*Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques 1re série*, tome 7 (1986), p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=CSHM_1986__7__1_0>

# SUR LA QUESTION DU PRIX BORDIN 1933

PAR FLORENT BUREAU

En décembre 1931, l'Académie des Sciences de Paris a proposé, pour le Prix Bordin 1933, un sujet de concours dont voici l'énoncé[1] :

"La Physique mathématique a, dès l'origine, fait usage de deux catégories de méthodes profondément différentes pour représenter les solutions. D'une part, celles-ci peuvent être exprimées par des intégrales définies portant sur les données du problème ; de l'autre, ces données étant représentées par des séries de forme appropriée, dont la plus connue est la série de Fourier, on peut se proposer de mettre la solution sous une forme analogue. Chaque élément de la donnée influe directement sur la solution sous sa première forme, tandis qu'ils n'interviennent que globalement dans les méthodes de la seconde sorte.

L'Académie propose de rechercher une liaison entre ces deux catégories de méthodes. On pourra, par exemple, étudier dans cet esprit les séries de Fourier - ou tout autre type de séries de forme analogue - qui ne sont différentes de zéro que dans une partie de leur intervalle de définition."

D'après H. Lebesgue[2], rapporteur de la Commission, l'Académie avait "suggéré que les progrès récemment faits dans la théorie des séries de Fourier, par exemple, permettraient peut-être d'aborder cette question difficile par certains à-côtés."

Deux mémoires ont été présentés ; seul le mémoire de S. Mandelbrojt, *Sur l'unicité des séries de Fourier*[3], a été retenu. Bien que ne répondant pas à la question posée, ce mémoire a obtenu le Prix Bordin 1933 parce que les raisonnements qu'il contenait "sont basés sur des prémisses dont les unes sont de la nature de celles qu'on ne saurait utiliser que dans la première des deux méthodes d'intégration qu'on proposait de rapprocher, tandis qu'on ne saurait utiliser les autres que dans la seconde méthode" (H. Lebesgue).

Dans sa *Notice sur ses travaux scientifiques*[4], S. Mandelbrojt écrit (p.45) "qu'il lui serait difficile de cacher qu'il n'a retenu qu'une phrase de la question posée", à savoir la dernière, et il ajoute : "Mon Mémoire portait surtout sur les séries de Fourier ; dans mes méthodes la quasi-analyticité et les fonctions analytiques ont joué un rôle très important."

Pour établir les résultats de son Mémoire, dont il dit (p.16) "qu'il est peut-être son travail le plus difficile", Mandelbrojt a dû vaincre de "très grosses difficultés techniques" (Lebesgue). Pour rendre son Mémoire plus accessible, Mandelbrojt a donné, dans un article préliminaire[5], un exposé plus intuitif de l'idée fondamentale qui l'avait guidé et a utilisé sa méthode "dans quelques cas fort simples qui, à la rigueur, pourraient être traités d'une manière élémentaire" (p.145).

Quoi qu'il en soit et malgré "le très léger rapprochement établi par son mémoire entre les deux procédés d'intégration envisagés" (Lebesgue), la question posée restait entière et sa solution demandait de nouvelles recherches.

Dans les premiers jours de novembre 1931, j'étais arrivé à Rome où je comptais entendre les leçons d'Enriques, de Severi et surtout celles de Volterra. Mais, Volterra et Levi-Civita venaient d'être privés de leur chaire pour avoir refusé d'adhérer au régime fasciste. Néanmoins, Volterra, extrêmement accueillant, m'a reçu à maintes reprises, s'intéressant à mon séjour dans cette belle ville de Rome et aux recherches sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre et du premier degré que je poursuivais à cette époque. Au début de 1932, Volterra m'a demandé si j'avais consulté certains travaux de Casorati et, comme j'étais fort intéressé par des références précises, nous sommes passés dans sa splendide et extrêmement riche bibliothèque. Les références de Casorati furent rapidement retrouvées grâce au Poggendorff et l'entretien se poursuivait quand, apercevant le dernier fascicule des *Comptes Rendus* (Paris) qui venait de lui parvenir, Volterra m'indiqua une "fort belle question" qui n'était autre que le sujet proposé pour le Prix Bordin 1933. Comme je lui demandais s'il y avait une certaine bibliographie, il me dit : "On ne doit pas s'occuper de la bibliographie, sinon on perd son originalité." Il est à peine besoin de dire que j'ai continué mes recherches sur les équations différentielles [15,16] et que je n'ai plus pensé à la question du Prix Bordin.

En octobre 1932, j'ai été chargé à l'Université de Liège d'un cours de mathématiques à la licence en sciences physiques. J'ai été ainsi amené à m'intéresser de nouveau très activement aux problèmes posés par les équations aux dérivées partielles de la Physique. Je revenais ainsi, et plus amplement, à des questions qui m'avaient occupé quelques années plus tôt lorsque j'avais décidé, contrairement à l'avis formel du Professeur qui était supposé superviser mon travail, de faire,de l'intégration des équations de la théorie de l'Elasticité, le sujet de ma dissertation de fin d'études.

L'étude de l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles, elliptiques ou totalement hyperboliques, m'a occupé pendant de nombreuses années. Ce n'est que plus tard que je suis revenu à la question du Prix Bordin.

Pour expliciter le problème posé, il me paraît plus simple de reprendre le premier paragraphe du Mémoire [1,c] :

"Pour représenter les solutions des problèmes aux limites relatifs à des équations aux dérivées partielles linéaires totalement hyperboliques, on peut recourir à deux catégories de méthodes nettement différentes. D'une part, on peut exprimer la solution par des intégrales définies ; d'autre part, on peut représenter la solution cherchée par une série de solutions particulières, simples, de l'équation donnée. Les premières méthodes utilisent un théorème de réciprocité, une solution élémentaire et une solution auxiliaire convenablement choisies de l'équation (ou seulement une fonction de Riemann pour une équation à deux variables indépendantes) ; les secondes méthodes, qui occupent une place importante dans le développement de la Physique mathématique, utilisent le plus souvent des séries de fonctions orthogonales dont la plus connue est la série de Fourier."

Le sujet du Prix Bordin était précisément de chercher à établir une liaison entre ces deux catégories de méthodes.

Pour limiter les difficultés, j'ai seulement considéré des équations du second ordre à deux variables indépendantes. D'une manière précise, il s'agit de trouver $u(x,t)$ , solution de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - L_x u = 0 \ , \quad x \in \, ]0,\ell[ \ , \quad t \geqslant 0 \ ,$$

avec les conditions initiales

$$u(x,0) = u_0(x) \ , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) \ ,$$

et les conditions aux limites

$$u(0,t) = u(\ell,t) = 0 \quad ;$$

$L_x u$ est une expression autoadjointe que l'on suppose ramenée à

$$L_x u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a(x)u \ .$$

Ce problème admet une solution *unique* susceptible de plusieurs expressions, entre lesquelles il s'agit d'établir une liaison.

Ces expressions sont obtenues

(i) à l'aide du système orthogonal $(v_k(x))$, complet dans $L^2(0,1)$ , des fonctions propres de $L_x$ , relativement aux conditions aux limites $u(0)=u(\ell)=0$ , les valeurs propres correspondantes étant $(\lambda_k)$ ; le noyau de Green de $L_x$ est

$$G(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} v_n(x) \ v_n(y) \quad ;$$

on pose

$$G_r(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^{r+1}} v_n(x)\ v_n(y)\ ,\quad r \geqslant 0 \text{ entier ;}$$

(ii) ou bien en utilisant la fonction de Green-Riemann ;

(iii) ou encore à l'aide de la fonction $H_n(x,y;t)$ , $n \geqslant 0$ entier quelconque ; cette fonction $H_n$ est construite en utilisant la méthode des singularités et s'écrit

$$H_n(x,y;t) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k(x)v_k(y)}{\lambda_k^n} \cdot \frac{\sin\sqrt{\lambda_k}\, t}{\sqrt{\lambda_k}} + (-1)^{n-1} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \frac{t^{2(n-r)-1}}{\Gamma(2n-2r)} G_r(x,y)\ ;$$

(iv) et enfin à l'aide de la fonction

$$K_s(x,y;t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k(x)v_k(y)}{\lambda_k^s} \cdot \frac{\sin\sqrt{\lambda_k}\, t}{\sqrt{\lambda_k}}\ ,\quad s = \sigma + i\tau\ ;$$

cette fonction est analytique en $s$ pour $\sigma > 0$ ; on pose

$$\frac{\partial}{\partial t} K_s(x,y;0) = \zeta_s(x,y)\ .$$

La formule de réciprocité donne alors l'*identité*

$$\int_0^\ell u(y,t)\ \zeta_s(x,y)\ dy = \int_0^\ell [u_1(y)K_s(x,y;t) + u_0(y)\frac{\partial}{\partial t} K_s(x,y;t)]\, dy\ ,$$

relation dépendant analytiquement de $s$ et vérifiée par la solution $u(x,t)$ du problème aux limites.

En effectuant le prolongement analytique pour $s$ et en calculant la valeur pour $s=0$ des deux membres de la relation précédente, on établit une liaison entre les deux formes envisagées de la solution $u(x,t)$ .

J'ai obtenu ces résultats dans le courant de l'année 1951 et je les ai exposés au IV^e Congrès de l'*Unione Matematica Italiana* à Taormina.

Au début de 1952, j'ai envoyé à J. Hadamard une Note destinée aux *Comptes Rendus* et présentée le 11 février ([1,b]). A cette Note, J. Hadamard a ajouté la remarque suivante[6] : "Le problème que traite M. Florent Bureau, l'un des plus attachants de la Physique mathématique et qui est en rapport avec les questions mathématiques que pose la Mécanique ondulatoire, avait déjà attiré (1933) l'attention de l'Académie qui l'avait proposé au concours du Prix Bordin. Elle avait, à cette occasion, été saisie d'un beau Mémoire de M. Mandelbrojt. M. Bureau apporte une contribution essentielle à la connaissance de ce sujet."

Le 11 février 1951, j'ai reçu de J. Hadamard une lettre, postée la veille, dans laquelle il écrit : "Inutile de vous dire que votre Note excite chez moi un très vif intérêt. Lorsque j'ai, autrefois, proposé ce sujet pour le concours du prix Bordin à l'Académie, il y avait longtemps que je voyais là un curieux mystère, et je serai très heureux de voir le détail de votre solution."

Le 21 février 1951, j'ai envoyé à J. Hadamard une lettre explicative, de laquelle je retiendrai le passage suivant :

"J'avais remarqué depuis longtemps sur l'équation des cordes vibrantes étudiée par Lagrange (la corde est remplacée par un nombre fini de points matériels), que l'on peut formellement obtenir soit la formule d'Euler, soit celle de Bernoulli, suivant la manière de faire la sommation[7]. J'ai alors cherché à passer du développement en série de Fourier pour le problème mixte (cas des cordes vibrantes non amorties ou amorties) à la formule donnant la solution du problème de Cauchy (pour un domaine convenable).

Pour aller plus loin, j'ai considéré après bien des tâtonnements et des travaux d'approche, résumés dans les trois dernières lignes de ma Note, la fonction $K_s(x,y;t)$ dépendant de la variable complexe $s$ et analytique si $\mathcal{R}s$ est assez grand. En appliquant la formule de réciprocité, on obtient la formule (4) de ma Note. Mais, il faut faire le prolongement analytique."

On trouve

$$u(x,t) = \underset{s=0}{\text{prol.anal.}} \int_0^\ell [u_1(y)K_s(x,y;t) + u_0(y)\frac{\partial}{\partial t}K_s(x,y;t)]\, dy \,.$$

D'autre part, on a

$$\int_0^\ell u_1(y)\, K_s(x,y;t)\, dy = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k\, v_k(x)\, \sin\sqrt{\lambda_k}\, t}{\lambda_k^{s+1/2}}$$

si $\mathcal{R}s > -\frac{1}{2}$ ; pour $s=0$ , le second membre est

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k\, v_k(x)\, \frac{\sin\sqrt{\lambda_k}\, t}{\sqrt{\lambda_k}}.$$

On a une expression analogue pour la partie de l'intégrale dépendant de $u_0(x)$ .

On voit que l'on peut, à partir de l'ensemble des valeurs propres $(\lambda_k)$ et des fonctions propres $(v_k(x))$ , obtenir la solution de problème mixte sous la forme d'une intégrale.

La méthode utilisée s'applique évidemment à des équations plus générales et à d'autres problèmes aux limites.

Lagrange considère un système de $n$ points matériels de même masse, équidistants, disposés en ligne droite, les liaisons entre les points contigus étant élastiques ; en faisant tendre $n$ vers l'infini, dans des conditions convenables, on obtient l'équation des cordes vibrantes.

Cette méthode a été utilisée par G.M. Pagani (1796-1855)[8] pour intégrer des équations plus générales.

Des considérations analogues ont conduit à la méthode du passage "du fini à l'infini" ou du "discontinu au continu". Elles sont à l'origine des travaux de Volterra sur les équations intégrales et le calcul fonctionnel et des études de I. Fredholm et de D. Hilbert sur les équations intégrales (cf. déterminants infinis[9]). On retrouve une idée analogue dans les procédés d'intégration graphique des équations différentielles et des équations aux dérivées partielles (J. Massau[10]).

Pendant mon séjour à Rome, j'ai demandé à Volterra comment lui était venue l'idée du "passage du fini à l'infini". Il m'a répondu que, étant encore étudiant à l'Ecole Normale de Pise, il avait étudié le procédé utilisé par Riemann pour construire une intégrale définie et que ce procédé lui avait suggéré ce passage du fini à l'infini. (Voir à ce sujet : V. Volterra : *Sui principî del Calcolo integrale*, Giornale di Matematiche, vol. XIX, 1881, pp.333-372 = *Opere matematiche*, vol. I, pp.16-48, Roma(Accademia naz. dei Lincei).)

Enfin, ajoutons que le schéma de Lagrange (déjà utilisé par Newton pour rendre compte de la vitesse de propagation du son dans l'air) a été repris par Fermi en supposant *quadratique* la force de liaison entre les masses contigues.Les résultats obtenus expérimentalement sont restés longtemps inexpliqués et ont finalement conduit Zabusky et Kruskal à montrer que ce modèle est lié à l'équation de Korteweg-de Vries dont certaines solutions, les solitons, se propagent sans se déformer ni interférer entre elles. Ce nouveau champ de recherches concernant les phénomènes physiques non linéaires - et les équations différentielles ou aux dérivées partielles non linéaires - est en pleine expansion[16].

*Addendum* (25 février 1985) :

Cet article était rédigé lorsque j'ai retrouvé la note suivante (22 mai 1948) qui n'est peut-être pas sans intérêt en ce qu'elle montre que la question du Prix Bordin relève étroitement de deux tendances de l'Analyse fonctionnelle entre lesquelles une liaison est établie.

"La comparaison entre les solutions du type d'Euler et celles du type de Bernoulli est en quelque sorte la confrontation de deux points de vue du Calcul fonctionnel : le point de vue des *fonctionnelles* (Volterra, Hadamard),considérant une courbe comme dépendant d'une infinité *continue* de valeurs,et celui *arithmétique* (Hilbert),considérant une fonction comme définie par l'infinité *dénombrable* des coefficients de son développement en série (de Fourier, de Legendre, etc.)."

## BIBLIOGRAPHIE

1. BUREAU F.J.[15],

a. *Problème de Cauchy et problème aux limites pour les équations aux dérivées partielles totalement hyperboliques*, Atti del IV Congresso dell'UMI, Taormina, 25-31 ott. 1951.

b. *Le problème de Cauchy et les séries de fonctions fondamentales* (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 234(1952), 791-792)[11].
*Remarque sur la Note précédente* par M. Jacques Hadamard (*ibid.*, 793).

c. *Les séries de fonctions fondamentales et les problèmes aux limites pour les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques*(Acta Mathematica, 89(1953), 1-43)[12].

2. MANDELBROJT S.,

a. *Sur l'unicité des séries de Fourier* (Prix Bordin, 1933) (Journal de l'Ecole Polytechnique, (2), cahier 32, 1934, 227-277).

b. *Sur un problème concernant les séries de Fourier* (Bull. Soc. Math. France, 62(1934), 143-150).

c. *Sur les séries de Fourier et les classes quasi-analytiques de fonctions*, Collection Borel, 1936.

3. LEBESGUE H.,

*Rapport sur le Prix Bordin 1933* (Comptes Rendus, 197(1933), 1523-1524).

4. LAGRANGE J.L.,

*Mécanique analytique*, 4[e] éd. publiée par G. Darboux, 1888, tome 1, p.373 et suiv.

## Correspondance avec Jacques Hadamard

I.

Paris, le [[ 10 février 1952 ]]

Mon cher Ami,

Inutile de vous dire que votre Note excite chez moi un très vif intérêt. Lorsque j'ai, autrefois, proposé ce sujet pour le concours du prix Bordin à l'Académie, il y avait longtemps que je voyais là un curieux mystère, et je serai très heureux de voir le détail de votre solution.

Je vous fais envoyer l'épreuve à corriger. A défaut de démonstrations que vous êtes obligé de réserver à plus tard et pour lesquelles je vous ai fait confiance, je vous signale les premières lignes de votre page 2, où le système "supposé incompatible" appellerait peut-être un mot d'explication.

Croyez à mes sentiments bien cordiaux.

J. Hadamard

II.

Liège, le 21 février 1952

Monsieur le Professeur,

Je vous remercie très vivement pour le grand honneur que vous m'avez fait une nouvelle fois en accompagnant ma dernière Note d'une Remarque. Permettez-moi de vous exprimer encore ma profonde gratitude pour les nombreux encouragements que vous m'avez prodigués depuis longtemps.

J'ai accepté de faire des conférences en Italie, et un petit cours à Rome en mars prochain, sur la théorie des équations aux dérivées partielles. C'est ce qui fait que, pressé par le temps, je n'ai pu recopier, pour vous l'envoyer, le Mémoire développant ma dernière Note des *Comptes Rendus*. Voici des indications sur la méthode que j'ai suivie.

J'avais remarqué depuis longtemps sur l'équation des cordes vibrantes étudiée par Lagrange (la corde est remplacée par un nombre fini de points matériels), que l'on peut formellement obtenir soit la formule d'Euler, soit celle de Bernoulli, suivant la manière de faire la sommation. J'ai alors cherché à passer du développement en série de Fourier pour le problème mixte (cas des cordes vibrantes non amorties ou amorties) à la formule donnant la solution du problème de Cauchy (pour un domaine convenable).

Pour aller plus loin, j'ai considéré après bien des tâtonnements et des travaux d'approche, résumés dans les trois dernières lignes de ma Note, la fonction $K_s(x,y;t)$ dépendant de la variable complexe $s$ et analytique si $\Re s$ est assez grand. En appliquant la formule de réciprocité, on obtient la formule (4) de ma Note. Mais, il faut faire le prolongement analytique.

1. On étudie $\Gamma(s)\ \zeta_s(x,y)$ . Si $x \neq y$ , $\zeta_s(x,y)$ est une fonction entière de $s$ ; si $x = y$ , $\zeta_s(x,y)$ est encore analytique en $s$ , avec un pôle simple en $s = \frac{1}{2}$ ; en outre, $\zeta_s(x,y)$ possède les zéros de $\frac{1}{\Gamma(s)}$ ( $s = 0,-1,-2,\dots$ ) .

Pour étudier le prolongement de $\int_0^{\ell} u(y,t)\ \zeta_s(x,y)\ dy$ on décompose l'intervalle $(0,\ell)$ en $(0,x-\varepsilon)$ , $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$ , $(x+\varepsilon,\ell)$ . Pour $s=0$ ,

$$\int_0^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^{\ell}$$

est nulle. On montre alors que, si $T$ est un nombre fixe,

$$\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \int_0^T = \frac{T^s}{s}\ u(x,t) + E(s) ,$$

où $E(s)$ est régulière pour $\Re s > -\frac{1}{2}$ . On a alors

$$(\star) \qquad \int_0^{\ell} u(y,t)\ \zeta_s(x,y)\ dy = \frac{T^s}{s\Gamma(s)}\ u(x,t) + \frac{\mathcal{E}(s)}{\Gamma(s)} ,$$

$\mathcal{E}(s)$ étant analytique pour $\Re s > -\frac{1}{2}$ . Donc pour $s=0$ on a $u(x,t)$ .

2. Pour effectuer le prolongement du second membre de (4), j'ai utilisé les approximations connues de $v_k(x)$ et $\lambda_k$ et aussi la relation

$$v_k(x)\ \frac{\sin\sqrt{\lambda_k}\ t}{\sqrt{\lambda_k}} = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} R(x,t;y,0)\ v_k(y)\ dy ,$$

$R(x,t;y,0)$ étant la fonction de Riemann. Alors, il vient

$$K_s(x,y;t) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} R(x,t;z,0)\ \zeta_s(z,y)\ dz ,$$

et, en procédant comme pour l'intégrale $(\star)$, on arrive à

$$K_{s=0}(x,y;t) = \frac{1}{2} R(x,t;y,0) .$$

En réalité, on peut aller plus loin et remplacer la fonction de Riemann par celle que vous avez introduite en 1903, *Bull. Soc. Math. de France*, sur un problème mixte[13].

Si on écrit, ce qui est possible si $\Re s$ est assez grand,

$$(\star\star) \qquad \int_0^\ell u_1(y)\, K_s(x,y;t)\, dy = \Sigma \frac{v_k(x)\, \sin\sqrt{\lambda_k}\, t}{\lambda_k^{s+1/2}} \int_0^\ell u_1(y)\, v_k(y)\, dy ,$$

et si on remarque que $\left|\int_0^\ell u_1(y)\, v_k(y)\, dy\right| < \frac{A}{k}$ sous des conditions générales, on

on voit que la série de Dirichlet du second membre a une abscisse de convergence absolue qui n'est pas à droite de $\Re s = -\frac{1}{2}$ . Donc, pour $s=0$ , la fonction $(\star\star)$ s'écrit $\Sigma\, a_k\, v_k(x) \dfrac{\sin\sqrt{\lambda_k}\, t}{\sqrt{\lambda_k}}$ , $a_k$ étant le coefficient de Fourier.

En utilisant, dans le cas qui a fait l'objet de ma Note des *Comptes Rendus*, les formules d'approximation de $\lambda_k$ , on peut montrer que

$$\Sigma\, \lambda_k^{-s} = \pi^{2s}\, \zeta(2s) + \frac{F(s)}{\Gamma(s)} ,$$

$\zeta(s)$ étant la fonction dzéta de Riemann et $F(s)$ une fonction analytique pour $\Re s > -\frac{1}{2}$ .

Les recherches précédentes montrent la voie à suivre pour les problèmes plus compliqués ; avant tout, il faut compléter les formules d'approximation obtenues pour les valeurs propres et les fonctions propres, dans le cas des équations à plusieurs variables indépendantes.

Je vous remercie beaucoup pour m'avoir signalé la nécessité d'un mot d'explication au sujet du système "supposé incompatible". Il fallait écrire : ... les valeurs propres du système

$$L_x(v) + \lambda v = 0 , \quad v(0) = v(\ell) = 0 ;$$

pour $\lambda=0$ , ce système est supposé incompatible, ce qui veut dire que, pour $\lambda=0$ , le système n'admet aucune solution, non identiquement nulle, continue ainsi que sa dérivée première dans tout intervalle.

Je pense depuis longtemps que le problème des rapports entre la méthode de Bernoulli et celle d'Euler est en liaison étroite avec les problèmes mathématiques que pose la Mécanique ondulatoire. C'est pour moi un précieux encouragement à poursuivre cette étude, de constater que vous avez la même opinion.

Depuis de nombreuses années, je demande à tous les théoriciens de la Physique, que j'ai l'occasion de rencontrer, ce qu'il faut entendre par "quantifier" un problème. Il est impossible d'avoir une réponse satisfaisante quand ce n'est pas : "c'est très difficile à expliquer". Car enfin, pour les équations de Dirac elles-mêmes, on doit poser un problème de Cauchy ce qui fait qu'on est en plein dans le déterminisme, pour un électron supposé isolé. Mais, il y a une singularité à l'origine (noyau) et c'est pour cette raison que l'on peut parler de nombres propres et de valeurs propres pour ces équations (la singularité agit comme une espèce de mur sur lequel il y a "réflexion").

S'il y a beaucoup de systèmes semblables en présence, on a un problème de statistique pour un système d'équations aux dérivées partielles et il est très compliqué.

Il est assez curieux de constater - mais vous l'avez certainement remarqué - que ni Hilbert (*Problèmes futurs des Mathématiques*, Congrès de Paris 1900), ni Poincaré (*Avenir des Mathématiques*, Congrès de Rome 1908) ne signalent l'étude des équations aux dérivées partielles du type hyperbolique comme un problème important. Et pourtant !

Je m'excuse d'avoir été aussi long. Mais la bienveillance que vous me marquez m'a incité à confier à ce papier quelques réflexions que peut-être vous approuverez.

Croyez, Monsieur le Professeur, à ma très respectueuse affection.

Fl. Bureau[14]

## NOTES DE LA RÉDACTION

1 P.1293 du t.193(1931) des *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*.

2 P.1523-1524 du t.197(1933) des *Comptes Rendus*.

3 *Journal de l'Ecole Polytechnique*, 2$^{e}$ série, 32$^{e}$ cahier, 1934, p.227-277.

Voir également le chapitre VIII : *Nouvelles classes quasi-analytiques de séries de Fourier*, p.124-133 du livre de S. Mandelbrojt : *Séries de Fourier et classes quasi-analytiques de fonctions*, Paris(Gauthier-Villars), 1935.

4 Clermont-Ferrand(Imprimeries Paul Vallier), 1937.

5 *Sur un problème concernant les séries de Fourier* (Bulletin de la Sociéte mathématique de France, 62(1934), 143-150).

6 Cette *Remarque* n'est pas mentionnée dans les *Oeuvres* de Jacques Hadamard (t.IV, p.2295), éditées par M. Fréchet, P. Lévy, S. Mandelbrojt et L. Schwartz, Paris (Gauthier-Villars), 1968.

7 Sur l'histoire de l'équation des cordes vibrantes on peut lire avec très grand profit le livre de C.A. Truesdell : *The rational mechanics of flexible or elastic bodies*, vol. 11/2 des *Opera omnia*, II$^{e}$ série, de L. Euler.

8 Sur Gaspard Michel Pagani, professeur à l'Université de Louvain et membre de l'Académie des Sciences de Bruxelles, voir le *Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exacten Wissenschaften* de Poggendorff, t.II, p.343 et t.III, p.998, ainsi que la liste de ses 49 mémoires p.734-735 du vol.IV du *Catalogue of scientific papers (1800-1863)*, publié par la Royal Society of London.

9 Sur ces questions on peut consulter J. Dieudonné : *History of functional analysis*, Amsterdam(North-Holland), 1981, en particulier p.75-79.

10 Sur J. Massau, professeur à l'Université de Gand, voir F. Bureau : *Notice sur Junius Massau*, Extrait de l'*Annuaire de l'Académie royale de Belgique*, cent trente-troisième année, Bruxelles(Palais des Académies), 1967. Cette notice a été reproduite dans le *Florilège des sciences en Belgique pendant le XIX siècle et le début du XXe* ; Académie royale de Belgique, Classe des sciences, 1968.

11 Voir les analyses de M.L. et P. Dubreil (*Bull. Sci. math.*, 1954, 2$^{e}$ partie, p.40-41), P. Lelong (*Zentralblatt Math.*, 46(1953), p.102) et F. John (*Math. Reviews*, 1952, p.750).

12 Voir les analyses de F. John (*Math. Reviews*, 1953, p.1091), G. Bouligand (*Bull. Sci. Math.*, 1954, 2$^{e}$ partie, p.3) et J.L. Lions (*Zentralblatt Math.*, 52(1955), 98-98).

13 *Sur un problème mixte aux dérivées partielles*, p.1115-1131 du t.III des *Oeuvres*.

14 F. Bureau nous écrit le 1er février 1985 :

"A la suite de ma lettre, Hadamard m'a envoyé une carte manuscrite dans laquelle il me répétait que ce problème lui avait toujours paru "un très curieux mystère" et que "vous avez montré comment le résoudre". (Je cite de mémoire).

Malheureusement, cette carte a été détruite avec d'autres, lorsque j'étais aux Etats-Unis en 1968. Faut-il dire mon désappointement lorsque j'ai constaté cette disparition ! Comme je n'ai plus le document, je n'en ai pas fait état."

15 On doit ajouter à la *Bibliographie* :

BUREAU F.J., *Recherches sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre et du premier degré* (Mémoires de la Société royale des sciences de Liège, (3), 18(1932), 1-53).

16 F. Bureau nous écrit le 12 avril 1985 :

"Ce travail[15] m'a servi de Thèse d'Agrégation de l'Enseignement supérieur. Il a été signalé par H. Dulac dans son Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 61 : *Points singuliers des équations différentielles*, Paris(Gauthier-Villars), 1934, p.52, lors de la correction des épreuves."