Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques

Paul Dubreil

Emmy Noether

Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques 1re série, tome 7 (1986), p. 15-27
<http://www.numdam.org/item?id=CSHM_1986__7__15_0>

EMMY NOETHER

PAR PAUL DUBREIL*

La vie d'Emmy Noether (1882-1935) s'est déroulée presque uniquement dans trois villes universitaires : Erlangen, Göttingen et Bryn Mawr et les séjours successifs qu'elle y a faits correspondent à des aspects bien distincts de sa vie et de son oeuvre.

1. Erlangen.

C'est dans cette petite ville de Bavière, située à une vingtaine de kilomètres au nord de Nüremberg qu'Emmy Noether a vu le jour le 23 mars 1882. Elle était le premier enfant du mathématicien Max Noether, né à Mannheim en 1844, et d'Ida Kaufmann née à Cologne en 1852 et issue d'une riche famille de commerçants juifs. Ces origines expliquent assez bien le dynamisme et les dons mathématiques qu'Emmy Noether va manifester. Je ne passerai pas sous silence le fait que c'est précisément en 1882 que Max Noether partage avec le mathématicien français Georges Halphen le prix Steiner pour leurs mémoires sur "la classification des courbes gauches algébriques", sujet mis au concours par l'Académie de Berlin.

On trouvera dans le tome 85 des *Mathematische Annalen* (1922) une courte notice sur Max Noether, décédé en 1921 à Erlangen, et dans le tome 93(1925) de la même revue un article détaillé sur son oeuvre, rédigé par les Géomètres italiens Castelnuovo, Enriquès et Severi. Max Neother, en effet, est incontestablement le fondateur de cette géométrie algébrique qui, après ses travaux et ceux de son compatriote Brill, a connu en Italie un développement extraordinaire. Max Noether, cependant, observe dans les titres de ses mémoires une certaine retenue vis-à-vis de la Géométrie : plutôt que d'annoncer des résultats sur les courbes ou les surfaces, il préfère par exemple présenter un travail sur les fonctions algébriques : *Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer und neuerer Zeit* (avec Brill, 1894), (Développements anciens et récents de la théorie des fonctions algébriques).

Son premier enfant, Emmy, se signalait surtout par sa petite taille, sa forte myopie et son esprit ouvert. De sept à quinze ans, elle fut élève d'une école où

---

* Conférence donnée le 22 mai 1985 au Séminaire d'Histoire des mathématiques.

l'enseignement était surtout orienté vers l'allemand, le français et les mathématiques. Elle suivit aussi des cours d'enseignement religieux israélite et apprit le piano, sans beaucoup d'enthousiasme semble-t-il, alors que sa mère était une pianiste convaincue, partenaire, presque jusqu'à ses derniers jours, d'un excellent violiniste. La distraction préférée de la jeune Emmy était la danse, elle la pratiquait régulièrement dans les rencontres des familles d'universitaires.

Pendant les premières années qui suivent sa sortie de l'école, Emmy se spécialise dans l'étude du français et de l'anglais et elle passe brillamment, à 18 ans, un examen de l'Etat de Bavière pouvant lui donner accès à l'enseignement de ces deux langues dans les établissements féminins. Petit détail méritant d'être signalé : au cours des deux semestres que j'ai passés auprès d'elle, je ne l'ai pas entendu prononcer un seul mot de français ou d'anglais !

Au début du semestre d'hiver 1900-1901, Emmy s'inscrit à l'université d'Erlangen ; les registres administratifs mentionnent *seulement une* autre auditrice ... et 984 étudiants ! On sait, par un de ses *curriculum vitae*, qu'elle suivit des cours non seulement de langues, mais aussi d'histoire ; il est probable qu'à cette époque elle hésitait encore entre les langues vivantes et les mathématiques.

Elle passe en juillet 1903, à Nüremberg, un baccalauréat (*Reiferprüfung*, littéralement : examen de maturité), puis elle se rend à Göttingen pour un semestre et y suit les leçons de l'astronome Schwarzschild et des mathématiciens Hermann Minkowski, Otto Blumenthal, Felix Klein et David Hilbert. Elle revient cependant à Erlangen, au moment précis où l'accès des univrsités s'ouvre sans restrictions aux femmes, et elle s'y inscrit en octobre 1904, seulement pour les mathématiques. Elle est la seule femme dans le Département qui compte en tout 47 inscrits. Elle suit les cours de son père et ceux de Gordan, sous la direction duquel elle va préparer une thèse. Gordan était un ami de Felix Klein qui avait été professeur à Erlangen et avait mis en évidence, en 1872, dans sa leçon inaugurale, l'importance de la notion de Groupe en Géométrie, en formulant le fameux *Programme d'Erlangen.*

La thèse d'Emmy est terminée en juillet 1908. Elle est intitulée *Über die Bildung des Formensystems der ternären biquadratischen Form* (Construction du système de formes de la forme ternaire biquadratique). Cette thèse est publiée dans le tome 134(1908) du *Journal für reine und angewandte Mathematik* appelé aussi *Journal de Crelle*. Gordan n'en aurait dirigé aucune autre et il semble, à vrai dire, avoir exercé sur son unique élève une influence quelque peu tyrannique. Le travail se termine par une table de 300 invariants ! Il est impossible d'y découvrir le moindre signe annonçant l'oeuvre ultérieure d'Emmy Noether. D'ailleurs celle-ci, par la suite, ne parlait de sa thèse que pour déclarer ... qu'il valait mieux n'en pas parler !

Il faut cependant reconnaître qu'à cette époque la théorie des Invariants était fort à la mode, surtout en Allemagne, et que Gordan en était le grand spécialiste. On trouvera sur lui quelques détails, assez pittoresques, dans la notice de Hermann Weyl sur Emmy Noether (reproduite dans le livre de A. Dick ([1])).

Emmy obtient le grade de docteur en Décembre 1907, avec la mention *summa cum laude* ("avec les plus grands éloges", nous disons avec les félicitations du jury). Elle reste à Erlangen et se consacre aux mathématiques, sans aucune obligation vis-à-vis de l'Université. Elle vient en aide à son père, dont l'état de santé devient de plus en plus précaire. A quatorze ans, il avait été atteint de paralysie infantile et avait gardé une marche difficile.

En 1909, Emmy devient membre de la Société mathématique d'Allemagne et parle, à Salzbourg, de *La théorie des invariants des formes à n variables*. L'année suivante, Gordan prend sa retraite. Il est remplacé d'abord par Ehrard Schmidt, qui ne fait que passer, puis par Ernst Fischer. Celui-ci sympathise avec Emmy Noether. Il est son aîné seulement de sept ans. Autant qu'elle, il aime parler de mathématiques, et même en discuter longuement. Leur correspondance heureusement conservée "montre sans le moindre doute que, sous son influence, Emmy Noether se libère des algorithmes calculatoires de Gordan pour se tourner vers les modes de pensée de Hilbert" (A. Dick).

2. Göttingen.

Un grand changement dans la vie d'Emmy Noether se produit au printemps 1915 : Klein et Hilbert la font venir à Göttingen pour remplacer des *Privatdozenten* (maîtres de conférences) mobilisés. Elle arrive donc à Göttingen à la fin d'avril mais, quinze jours plus tard, le décès de sa mère l'oblige à retourner à Erlangen et à rester auprès de son vieux père pendant quelques semaines. Par la suite, elle fera de fréquents voyages entre les deux villes, en séjournant à Erlangen pendant les périodes de vacances.

C'est à ce moment qu'elle s'occupe d'un problème posé par Dedekind (1831-1916) : *déterminer les équations algébriques ayant pour groupe de Galois un groupe donné.* Cette question était étudiée, à ce moment, mais seulement pour les équations du troisième et du quatrième degré, par Fritz Seidelmann, professeur au *Lehrerinnenbildungsanstalt* (Ecole normale d'institutrices) d'Erlangen, sous le contrôle de Friedrich Hartogs, professeur à Munich ; il l'avait résolue dans des cas particuliers. Il vint demander à Max Noether si cela pourrait être le point de départ d'une thèse et, bien entendu, il fut aussitôt mis en rapport avec Emmy, qui devint ainsi directeur de recherches. Le résultat fut excellent : Seidelmann obtint en 1916 le grade de docteur avec la mention *summa cum laude* pour une thèse sur "les équations cubiques et biquadratiques" dédiée à Emmy Noether. Celle-ci, de son côté, avait abordé le cas général : elle fit parvenir en juillet 1916 aux *Mathematische Annalen* un travail intitulé *Gleichungen mit vorgeschriebener Gruppe* (Equations de groupe donné), qui se trouve dans le tome 78 (1917) avec, en complément, un extrait de la dissertation de Seidelmann.

Cependant, à Göttingen, pendant les années de guerre, Emmy Noether n'abandonne pas la *théorie des Invariants* dont s'occupent Hilbert et Klein. Mais, sous leur influence, elle s'oriente vers des questions plus profondes. Hilbert et Klein, en effet, s'intéressent vivemnt à la relativité générale et, à la demande d'Einstein, ils étudient les *invariants différentiels*. Emmy participe à cette recherche et publie en 1918, aux *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, deux articles intitulés : *Invarianten beliebiger Differentialausdrücke* (Invariants d'expressions différentielles quelconques) et *Invariante Variationsprobleme* (Problèmes de variation invariants). Elle y met sur pied les méthodes générales qui permettent d'obtenir *tous* les invariants différentiels ; dans le premier travail, elle introduit le *Reduktionssystem*, ensemble d'invariants différentiels dont tous les autres sont des invariants algébriques ; dans le deuxième, elle utilise les méthodes du calcul des variations abstrait pour former des invariants différentiels. Tout cela est certainement du très bon travail.

Mais pendant ces mêmes années se forment en elle des idées, des façons de penser, on pourrait même presque dire des goûts intellectuels, qui vont l'amener à ses productions les plus originales.

Dans son travail sur les *Corps et les systèmes de fonctions rationnelles*, publié aux *Mathematische Annalen* (t.76, 1915), "elle combine", dit van der Waerden, "les méthodes de Hilbert permettant d'établir des propriétés de finitude, avec celles de Steinitz". Celui-ci avait publié en 1910 son *Algebraische Theorie der Körper* (Journal für reine und angewandte Mathematik, t.137), travail très remarquable qu'Emmy Noether citait souvent et dont elle recommandait avec insistance la lecture. Avec une grande clarté, Steinitz étudie systématiquement les propriétés générales des corps qui forment l'ossature de la théorie de Galois. De plus, il établit, pour tout corps, l'existence d'une extension algébrique algébriquement fermée (ou close). Son raisonnement utilise "l'induction transfinie" sous la forme de l'époque ; il sera simplifié (et même profondément transformé) en 1935 par Zorn (Bull. Amer. Math. Soc., t.41), qui énonce à ce propos le théorème qui porte son nom.

Un peu plus tard, vers la fin de la guerre, Emmy Noether s'occupe de la *Théorie des fonctions algébriques d'une variable* à laquelle Dedekind et Weber avaient consacré en 1882 un mémoire important (*Journal für reine und angew. Mathematik*, t.92, p.181-290). Le travail d'Emmy Noether est intitulé : *Die arithmetische Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen in ihrer Beziehung zu den übrigen Theorien und zu der Zahlkörpertheorie* (La théorie *arithmétique* des fonctions algébriques d'une variable en liaison avec les autres théories et avec la théorie des *corps de nombres*). Ce titre insiste doublement sur l'aspect arithmétique de ce travail publié en 1919 (*Jahresbericht der D.M.V.*, t.28). Constamment par la suite, Emmy Noether fera preuve d'une profonde connaissance de l'oeuvre de Dedekind et manifestera pour lui une admiration chaleureuse. Elle publiera plus tard (1937), en collaboration avec Cavaillès, la correspondance Cantor-Dedekind (Paris, Hermann).

L'après-guerre immédiat va marquer, suivant l'expression d'Hermann Weyl, le "*tournant décisif*" dans la production d'Emmy Noether. Elle rédige avec Schmeidler un travail intitulé *Über Moduln in nicht kommutativen Bereichen aus Differential- und Differenzen-Ausdrücken* (Modules dans des domaines non commutatifs, formés d'expressions différentielles ou aux différences). Il s'agit d'opérateurs différentiels à *composition non commutative*, comme on en considère en Mécanique quantique. C'est dans ce travail qu'apparaissent pour la première fois les notions d'idéal à droite ou à gauche. Mais une chose encore plus importante est qu'au lieu de travailler tout au long sur les opérateurs considérés E. Noether et W. Schmeidler commencent par dégager *les lois fondamentales de leur addition et de leur multiplication*, puis ils prennent ces lois comme axiomes et développent systématiquement leurs conséquences logiques. Nous assistons donc ici à la fois à une étape importante du développement de l'Algèbre non commutative et à la naissance d'une Algèbre "abstraite", à caractère fortement axiomatique.

Il est bon d'ajouter que Schmeidler fut un mathématicien de valeur. Dès 1917, il s'était intéressé aux "systèmes hypercomplexes" (algèbres associatives de type fini), donc à l'algèbre non commutative. Par la suite, il s'est occupé de groupes abéliens, de Géométrie algébrique, de fonctions algébriques de plusieurs variables, etc. (*Cf.* W. Krull, *Idealtheorie*, p.147).

Emmy Noether approche maintenant de la quarantaine. C'est à ce moment, en 1921, que son génie mathématique va se révéler pleinement, avec son mémoire : *Idealtheorie in Ringbereichen* (Théorie des Idéaux dans les Anneaux, *Math. Ann.*, 83). Elle y atteint une généralité, une simplicité, une efficacité exceptionnelles et elle ouvre la voie à une foule de travaux ultérieurs. Arrêtons-nous, si vous le voulez bien, sur cette apparition du génie, apparition explosive - mais tardive aussi pour un mathématicien de cette classe !

Bien entendu, Emmy Noether a eu des précurseurs. Le plus immédiat est E. Lasker, avec son long travail *Zur Theorie der Moduln und Ideale* (Math. Ann., 60, p.20-116, 1905), sur lequel Emmy avait fait un exposé en juin 1917 dans le cadre de la Société Mathématique allemande. Avec son impeccable correction, elle n'a jamais manqué de citer Lasker très explicitement. Mais ce mathématicien,qui, soit dit en passant, fut aussi, pendant des années champion mondial d'échecs, s'inspire lui-même des travaux de Dedekind sur l'arithmétique des entiers algébriques (Suppléments X et XI aux Leçons de Dirichlet) et d'autre part d'un résultat fondamental de Max Noether (*Über einen Satz aus der Theorie der algebraischen Funktionen*, Math. Ann., 6, p.351-359) : c'est là un rapprochement très remarquable entre la Théorie des Nombres et celle des courbes algébriques.

En théorie des nombres, les difficultés rencontrées au début du XIX^{e} siècle pour étendre aux entiers d'un corps algébrique tel que $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ le théorème de décomposition unique d'un entier (rationnel) en facteurs premiers ont amené Kummer à introduire les "nombres idéaux". Dedekind, par la suite, a conçu les idéaux comme ensembles de nombres (idéaux entiers, indéaux fractionnaires), et il a obtenu, dans un corps algébrique fini, la décomposition unique d'un idéal entier en produit fini d'idéaux premiers (1894).

En Géométrie, Max Noether cherche à quelle condition, étant donné deux courbes algébriques planes $f(X,Y) = 0$, $\varphi(X,Y) = 0$, un polynôme $F(X,Y)$ est de la forme :

$$(1) \qquad F = Af + B\varphi \ ,$$

où A et B sont des polynômes. Si tous les points d'intersection des deux courbes données sont simples et distincts, il est non seulement nécessaire mais suffisant que la courbe $F = 0$ passe par chacun des points d'intersection M_i des deux courbes données (dans le plan projectif complexe). Dans le cas général, Max Noether montre l'équivalence de la *propriété globale* (1) et de la conjonction de *conditions locales* relatives à chacun des points d'intersection M_i : à savoir qu'il existe des polynômes A_i , B_i tel que la différence $F - A_i f - B_i\varphi$ soit au moins d'un certain ordre ρ_i au point M_i ; ρ_i, choisi le plus petit possible, est ce qu'on appelle la *multiplicité de Noether*, et ces conditions locales sont appelées *conditions de Neother*.

Or, dans l'anneau $\mathbb{C}[X,Y]$ des polynômes en X et Y , à coefficients complexes, l'ensemble des polynômes $Af + B\varphi$ (f , φ donnés ; A , B arbitraires) est un *idéal* I . Celui des polynômes nuls en un point M est un *idéal premier* P (si un produit $FG \in P$ et $F \notin P$, $G \in P$), celui des polynômes vérifiant en M une condition de Noether (avec une multiplicité donnée) est un *idéal primaire* Q (si $FG \in Q$ et $F \notin Q$, une puissance de G appartient à Q) et le théorème de Noether, sous sa forme générale, signifie que l'idéal I est *intersection finie d'idéaux primaires* associés aux différents points d'intersection M_i des deux courbes données.

Passant au cas de polynômes à un nombre quelconque, n , d'indéterminées, Lasker établit un théorème auquel Krull donne très justement son nom (mais que lui-même appelle modestement "théorème de Noether-Dedekind") :

Dans l'anneau des polynômes à n *déterminées et à coefficients complexes, tout idéal est intersection finie d'idéaux primaires.* En 1916, Macaulay reprend la question en apportant des compléments originaux (*Cambridge tracts in Mathematics*, n° 19).

Parmi les "précurseurs", nous trouvons aussi un des plus grands mathématiciens de l'époque, David Hilbert. C'est de lui qu'Emmy Noether tient le sens et le goût de l'axiomatique ; d'autre part, il a publié en 1890, âgé de 28 ans, un mémoire fondamental d'Algèbre pure, point de départ de la théorie des idéaux homogènes, appelés par lui modules. Ce travail intitulé *Über die Theorie der algebraischen Formen* (Math. Ann., 36, p.473-534) contient, avec la théorie des Syzygies, le *Nullstellensatz* (théorème des zéros, voir par exemple van der Waerden, *Moderne Algebra*, 5^e éd., vol. 2, § 130) et le *Basissatz* (théorème de la base finie, *ibid.* § 115) affirmant que tout idéal engendré par des formes (en $X_0, X_1, \ldots, X_n$, à coefficients complexes) est déjà engendré par un nombre fini d'entre elles.

On imagine assez facilement l'envie qu'a dû avoir Emmy Noether d'arranger à sa façon le contenu de ces gros mémoires. Résumons brièvement sa méthode, dans laquelle apparaissent clarement non seulement les tendances, mais les exigences de son esprit.

Elle souhaite, pour commencer, obtenir dans des anneaux (à définir convenablement) une représentation de tout idéal comme intersection finie d'idéaux *primaires*, mais il y a des idéaux pour lesquels cette représentation ne peut être que triviale : ce sont les idéaux *irréductibles* (pour l'intersection) c'est-à-dire ceux qui ne sont pas intersection de deux idéaux les contenant strictement (c'est le cas pour tout idéal maximal) : il faudra donc que, dans l'anneau en question, tout idéal irréductible soit primaire.

Si maintenant un idéal I n'est pas irréductible ou, mieux, *s'il n'est pas intersection finie d'idéaux irréductibles*, on aura au moins une égalité de la forme :

$$I = I_1 \cap I'_1$$

avec $I \subset I_1$, $I \subset I'_1$ strictement et un au moins des idéaux I_1 ,I'_1 - disons I_1 - ne sera pas non plus intersection finie d'idéaux irréductibles :

$$I_1 = I_2 \cap I'_2$$

$I_1 \subset I_2$, $I_1 \subset I'_2$ strictement où I_2 par exemple n'est pas intersection finie d'idéaux irréductibles. On forme ainsi de proche en proche une chaîne strictement croissante illimitée d'idéaux :

$$I \subset I_1 \subset I_2 \subset \ldots .$$

Or, il existe des anneaux (à commencer par l'anneau Z des entiers rationnels) dans lesquels n'existe *aucune* chaîne de ce type : cette propriété d'un anneaux, qui se trouve déjà chez Dedekind, mais "occasionnellement" (dit Krull), sous le nom de *Teilerkettensatz*, mais est appelée maintenant *condition de chaîne ascendante, entraîne donc que tout idéal de l'anneau est intersection finie d'idéaux irréductibles.*

Cette condition de chaîne ascendante est d'ailleurs équivalente à l'existence d'un *système de générateurs fini pour tout idéal de l'anneau* et à la *condition maximale* (dans tout ensemble $\mathcal{E}$ d'idéaux il existe au moins un idéal maximal M), ce qui souligne déjà son intérêt.

Si maintenant cette condition entraînait aussi que tout idéal irréductible est primaire, tout idéal de l'anneau serait bien (comme chez Lasker) intersection finie d'idéaux primaires. C'est là précisément le théorème-clef d'Emmy Noether :

Dans un anneau commutatif A vérifiant la condition de chaîne ascendante, tout idéal irréductible est primaire.

Permettez-moi de rappeler la démonstration qui est à la fois très remarquable en elle-même et très noethérienne de style.

On va démontrer que, *si un idéal I n'est pas primaire, il est irréductible.* Par hypothèse, il existe au moins un couple (a,b) d'élements de A vérifiant $ab \in I$, $a \notin I$, et $b^n \notin I$ quel que soit l'entier n .

Considérons l'idéal (cet ensemble en est visiblement un) :

$$I_h = I : b^h = \{ t , t \in A \; ; \; tb^h \in I \} .$$

Avec I , ces idéaux forment une chaîne croissante :

$$I \subset I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots$$

la première inclusion étant stricte puisque $a \in I_1$ et $a \notin I$. D'après la condition de chaîne ascendante, il existe un entier k tel que $I_k = I_{k+1}$.

Considérons alors l'idéal $I' = I + Ab^k$. Il contient strictement I car $b^{k+1} \in I'$ et $b^{k+1} \notin I$. L'intersection $I_1 \cap I'$ contient I ; mais inversement, si $x \in I_1 \cap I'$, nous avons :

$$x = m + rb^k$$

où $m \in I$ ($r \in A$) ; le produit

$$bx = bm + rb^{k+1}$$

appartient à I (puisque $x \in I_1 = I : b$), d'où $rb^{k+1} \in I$ c'est-à-dire $r \in I_{k+1} = I_k$ donc $rb^k \in I$ et $x \in I$. Nous avons donc l'égalité

$$I_1 \cap I' = I$$

avec les deux inclusions strictes $I \subset I_1$ et $I \subset I'$, I est bien réductible.

Ayant montré ainsi que, dans un anneau vérifiant la condition de chaîne ascendante, tout idéal est intersection finie d'idéaux primaires, Emmy Noether définit les représentations *canoniques* dans lesquelles, après regroupement, ne figure qu'un idéal primaire Q ayant un radical premier P et où, bien entendu, aucun terme n'est superflu. Une telle représentation canonique n'est pas forcément unique mais elle a des propriétés d'unicité qu'Emmy Noether met en évidence.

Par la brèche ainsi ouverte, un flot de mathématiciens va s'engouffrer ! Et pour commencer Emmy elle-même qui, dans un deuxième mémoire : *Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern* (Construction abstraite de la Théorie des Idéaux ..., *Math. Annalen*, t.96, p.26-61, 1927), donne les conditions permettant d'affirmer que tout idéal d'un anneau commutatif et intègre A admet une décomposition unique en produit de puissances d'idéaux premiers. Ce sont :

1. la condition de chaîne ascendante pour les idéaux ;
2. tout idéal premier est maximal ;
3. A est intégralement clos dans son corps des quotients Σ (c'est-à-dire : tout élément t de Σ qui vérifie une équation de la forme $t^m + a_1 t^{m-1} + \ldots + a_m = 0$, $a_i \in A$, appartient à A).

Le mathématicien japonais Sono avait déjà obtenu de tels résultats en 1918 et

1919 (*cf.* Krull, *Idealtheorie*, p.15), sous une autre forme.

En 1923, Krull publie *Ein neuer Beweis für die Hauptsätze der allgemeinen Idealtheorie* (Nouvelle démonstration des théorèmes fondamentaux de la théorie générale des Idéaux, *Math. Ann.*, t.90, p.55-64, 1923). Il y apporte des simplifications intéressantes, notamment dans les théorèmes d'unicité qu'il traite en utilisant systématiquement les "quotients" (ou résiduels) d'idéaux.

Peu après la mort d'Emmy Noether (1935), les anneaux dont les idéaux vérifient la condition de chaîne ascendante ont pris le nom d'*anneaux noethériens*. Ceux qui vérifient la condition (duale) de chaîne descendante, considérée par Emmy Noether mais utilisée plus systématiquement par Emil Artin, notamment dans ses travaux sur les algèbres associatives, sont appelés *artiniens*. Ces deux adjectifs : noethérien, artinien font partie, à l'heure actuelle, du langage courant des algébristes.

Le *Nullstellensatz* de Hilbert, l'orientation du travail de Lasker et surtout le souvenir de Max Noether devaient infailliblement amener Emmy à s'intéresser aux applications géométriques de sa théorie des idéaux. Elle s'en occupe en effet. Mais un jeune et brillant mathématicien néerlandais, B.L. van der Waerden, qui avait travaillé avec elle et avec Artin, s'était engagé dans la même voie. Généreusement, elle lui laissa tout publier sans même envisager un mémoire commun. Le tome 96 (1926) des *Mathematische Annalen* contient ce travail, *Zur Nullstellentheorie der Polynomideale*, dont la lecture fut pour moi une véritable illumination ... me conduisant à une étude de la multiplicité de Noether plus poussée que ce qui avait été fait par Noether lui-même, Kapferer et Voss par les méthodes classiques.

Ce mémoire de van der Waerden fut suivi de plusieurs autres, certains consacrés à la difficile question des multiplicités d'intersection qui devait faire encore de grands progrès grâce à André Weil. Tout cela appartient à ce qu'on appelle maintenant la Géométrie algébrique abstraite. Pour en faciliter l'étude, O. Zariski et P. Samuel ont publié en 1958 un important ouvrage, en deux volumes, intitulé *Commutative Algebra*.

Chevalley et Herbrand, au moment où ils s'intéressaient à l'étude des corps de nombres de degré infini, ont eu des liens personnels avec Emmy Noether : ils eurent vite fait de conquérir son estime.

Une question particulièrement difficile était l'extension aux anneaux commutatifs de la théorie noethérienne des idéaux. Krull s'en était occupé sans obtenir de résultats vraiment décisifs. Lesieur et Croisot ont construit une théorie parfaitement satisfaisante, d'autant plus "noethérienne" qu'elle repose sur des notions absolument nouvelles : en non-commutatif, la généralisation brutale de la notion d'idéal primaire marche mal ; les notions plus cachées d'idéal secondaire et surtout d'*idéal tertiaire* se révèlent efficaces (Mémorial des Sciences mathématiques, 1963).

Revenons aux anneaux commutatifs : je ne voudrais pas passer sous silence un joli résultat obtenu en France par un mathématicien vénézuélien, Vincente Ortiz. En jouant sur les exposants, il obtient, dans un anneau noethérien, une décomposition unique "hypercanonique", pour tout idéal, en intersection d'idéaux primaires (C.R. Acad. Sc. Paris, t.248, p.3385, 1959).

Il est manifeste que, par nos élèves et de génération en génération, l'influence d'Emmy Noether s'est largement étendue dans notre pays - comme dans le vaste monde.

Mais il ne paraît pas exagéré de dire que son plus grand mérite est d'avoir été à la fois la mère et la reine de la grande école algébriste allemande. La mère dans le temps, car elle était l'aînée d'Artin, de Krull, de van der Waerden, elle dirigea les thèses de Deuring, Fitting, Grell, Levitzki, Schilling, Witt, d'autres encore ; la mère aussi par la bienveillance avec laquelle elle accueillait et la sollicitude avec laquelle elle guidait ceux qui travaillaient avec elle ; la reine par le prestige qu'elle avait acquis par ses travaux, l'originalité de son oeuvre, l'étendue et la solidité de sa culture mathématique. A partir de 1930 et dans de nombreuses éditions constamment mises à jour, le merveilleux livre de van der Waerden, *Moderne Algebra*, a largement développé et diffusé ce qui avait été initialement le contenu des leçons d'Artin et d'Emmy Noether.

J'ai eu la chance de voir à l'oeuvre l'école allemande au moment de l'extraordinaire développement de la théorie des "Systèmes hypercomplexes" (nous dirions maintenant des algèbres associatives) et de la Représentation (linéaire). Après avoir suivi à Hambourg, l'hiver 1929-30, le séminaire de Hecke dans lequel était exposée la représentation des Groupes dans le style Frobenius-Speiser-Schur, c'est-à-dire essentiellement en termes de matrices, j'ai suivi au printemps suivant à Francfort le cours d'Emmy Noether et lu son mémoire de la *Math. Zeitschrift* (t.30, p.641-692, 1929). L'accent y est mis sur les groupes, les modules, les morphismes ; le calcul fait place aux idées : contraste extraordinaire !

★
★ ★

La carrière universitaire d'Emmy Noether connut, à ses débuts, de réelles difficultés. Je préfère rappeler qu'elle partagea avec Artin, en 1932, le prix Alfred Ackermann-Teubner, pour l'ensemble de ses travaux et que, le 7 septembre de la même année, elle fit au Congrès international de Zürich une grande conférence intitulée : "Systèmes hypercomplexes, dans leurs relations avec l'Algèbre commutative et la Théorie des Nombres".

Mais peu après, en avril 1933, elle reçut du ministère prussien des "Sciences, Arts et Education populaire" une lettre officielle lui retirant le droit d'enseigner à l'Université de Göttingen. Son collègue Courant et le physicien Max Born étaient traités de la même façon. Neugebauer, fondateur du *Zentralblatt* et spécialiste d'Histoire des Mathématiques, Landau et le logicien Bernays étaient priés de suspendre aussi bien leurs cours que toute activité administrative.

Les interventions résolues de Hasse au Ministère, en faveur d'Emmy Noether, restèrent sans résultat, mais celles de Hermann Weyl aux Etats-Unis permirent de lui trouver un point de chute, sous la forme d'une invitation, pour une année, comme professeur étranger, au Collège féminin de Bryn Mawr. Elle y arrive en octobre 1933.

3. Bryn Mawr et Princeton.

Malgré l'accueil extrêmement aimable qu'elle trouve à Bryn Mawr dont la directrice, Mrs Wheeler, avait étudié à Göttingen en 1906-1907, Emmy Noether est certainement frappée par le contraste de ce Collège avec l'Université de Göttingen. Cependant, elle peut organiser avec trois jeunes filles et un assistant un Séminaire dans lequel furent étudiés, avec d'ailleurs beaucoup d'enthousiasme, le tome I de *Moderne Algebra* de van der Waerden et les premiers chapitres de la "Théorie des Nombres algébriques" de Hecke.

Princeton n'était pas loin. A partir de février 1934, Emmy Noether est invitée à y donner un cours par semaine, pas à l'Université, purement "masculine", mais à l'Institut Flexner devenu maintenant le fameux "Institut d'Etudes avancées". Elle retrouve alors un établissement d'une importance et d'un niveau comparables à ceux de Göttingen. Elle a comme auditeus l'algébriste A.A. Albert et l'arithméticien H.S. Vandiver, et des jeunes chercheurs pleins d'ardeur. Cependant, elle confie dans une lettre à Hasse : "Je dois faire attention : ils sont habitués essentiellement aux calculs explicites ... et j'en ai déjà fait fuir quelques-uns !"

Emmy Noether profite des vacances d'été 1934 pour revenir en Allemagne, sachant bien que, maintenant, elle ne peut pas espérer un retour définitif. Elle revoie son frère Fritz, mathématicien et mécanicien, professeur à Breslau : il est, lui, sur le point d'émigrer en Sibérie, à Tomsk. Elle revoie aussi Artin, à Hambourg, et va, de là, à Göttingen, où elle liquide son appartement. Puis elle revient à Bryn Mawr où son invitation a été prolongée pour un an. Elle y retrouve Olga

Taussky, viennoise d'origine (ancienne élève de Furtwängler), qu'elle avait connue et appréciée à Göttingen et qui devient à Bryn Mawr sa meilleure et sa plus chère élève. Avec son mari John Todd, également mathématicien, Olga Taussky est maintenant professeur à Pasadena.

A Princeton se trouve maintenant Richard Brauer, excellent algébriste mais plus dans la ligne de Schur (dont il a été l'élève) que dans celle d'Emmy Noether. Des contacts plus étroits s'établissent et Emmy se lie d'amitié avec lui et avec la sympathique et chaleureuse Mrs Brauer.

Le 14 avril 1935, Emmy Noether meurt à l'hôpital de Bryn Mawr, après avoir été opérée d'une tumeur quelques jours plus tôt. "Nous pensions", dit Hermann Weyl, "que son rétablissement était en bonne voie, quand des complications inattendues se sont produites et l'ont emportée en quelques heures." Et il termine par ces mots : "Le souvenir que gardent ses élèves de son oeuvre scientifique et de sa personnalité ne s'effacera pas de sitôt. Elle fut un grand mathématicien, le plus grand que son sexe ait jamais produit, je le crois fermement. Mais elle fut aussi une femme de grande classe."

★

★ ★

Ayant apprécié, tout au long de ma vie scientifique (y compris en Théorie des Demi-groupes ... qui n'existait pas à l'époque !), l'énorme bénéfice que j'ai retiré de mes contacts de jeunesse avec les algébristes allemands, surtout avec le trio Emmy Noether, Artin, Krull, je suis très reconnaissant à P. Dugac de m'avoir proposé de rendre aujourd'hui cet hommage à la mémoire d'Emmy Noether et j'adresse mes plus chaleureux remerciements à tous ceux qui sont venus s'y associer.

Bibliographie

[1] Auguste DICK, *Emmy NOETHER (1882-1935)*, Birkhäuser Verlag, Bâle, 1970 (en allemand, mais il existe aussi une édition en anglais).

[2] M.L. DUBREIL-JACOTIN, *Figures de Mathématiciennes*, Les Grands Courants de la Pensée mathématique, présentés par J. LE LIONNAIS, Cahiers du Sud, 1948, p.266-269.

[3] P. DUBREIL, *NOETHER (Emmy)*, Encylopaedia Universalis.

[4] B.L. van der WAERDEN, *Nachruf auf Emmy NOETHER*, Math. Ann., 111(1935), p.469-476 (en allemand, reproduit dans [1]).

[5] H. WEYL, *Emmy NOETHER*, Scripta Mathematica, III, 3, 1935, p.201-220 (en anglais, reproduit dans [1]).