Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques

S. Mandelbrojt

Pourquoi je fais des mathématiques

Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques 1re série, tome 6 (1985), p. 47-54
<http://www.numdam.org/item?id=CSHM_1985__6__47_0>

Extrait du Tome 57, quatrième cahier, 1952, pages 442 à 429

POURQUOI JE FAIS DES MATHEMATIQUES

S. MANDELBROJT

Lorsqu'on écrit un Mémoire mathématique ou lorsqu'on expose oralement des résultats personnels, on dit rarement : « *j*'ai démontré un tel théorème » ou « *je* vais exposer *mon* principe ». On est modeste — il y a une certaine éthique, d'ailleurs fausse et hypocrite. On croit qu'il est plus décent de dire : « *nous* avons démontré », « *nous* allons exposer... ». Je fais exactement comme les autres, et souvent, après avoir parlé d'un Mémoire écrit en commun avec un autre auteur, j'ai toutes les peines du monde pour citer un travail, fait tout seul, à trouver une forme avec un « *nous* » qui indique qu'il s'agit tout de même de moi et non pas de moi et d'un collaborateur. Si donc j'ai choisi comme titre de cette causerie : « Pourquoi *je* fais des mathématiques », c'est que je ne désire engager la responsabilité d'aucun de mes collègues. Je vais, peut-être, affirmer des choses qui sont en désaccord complet avec ce que pensent mes camarades. En un mot, je ne prétends pas, et ne désire d'ailleurs nullement, dire pourquoi nous, mathématiciens, aimons notre science ; je ne prétends même pas le savoir. Mes affirmations sont strictement personnelles. Il est, d'autre part, probable que je dirai des banalités — peut-être pas rien que des banalités — qui ne font que traduire des sentiments communs, non seulement à ceux qui s'occupent des mathématiques, mais encore communs à tous ceux qui aiment une discipline quelconque de l'esprit, communs, en un mot, à tous ceux qui cherchent, ou aiment à chercher, sinon *la vérité*, du moins *des vérités*.

Dans ma jeunesse, j'appartenais à la catégorie des gens qui n'avaient aucune ambition d'ordre matériel. Je le dis sans fierté ou modestie — il est important que je le constate pour mieux expliquer ce que je vais dire plus loin. Je vivais dans un milieu où l'on aimait et respectait la pensée pour elle-même, dans un milieu où l'on considérait comme sacrilège un rapprochement quelconque entre le fait d'être scientifique et un aboutissement éventuel à une situation matérielle quelconque. Le comportement, à ce point de vue, n'était pas différent de celui qu'on constate chez tant de peintres et de poètes, non académiques. L'amour de la science et un certain talent étaient considérés comme une bénédiction du ciel suffisante pour que la question de la nourriture terrestre paraisse négligeable. Hélas, ou heureusement (du moins, heureusement pour ma famille), ma mentalité a dû subir pas mal de changements. Ces changements sont probablement dus à la prospérité relative qui est venue, je veux le croire, toute seule. Je n'ai donc pas choisi la voie de la Science pour des raisons matérielles. La Science ne représentait pas pour moi une des carrières possible. D'ailleurs, encore maintenant, le mot « carrière » me choque, surtout lorsqu'il suit le mot « Science ». Je le dis, *tout en sachant* que cette affirmation peut paraître hypocrite, tout au moins à quelques jeunes, futurs scientifiques, venant de la part d'un « professeur arrivé ». Je viens donc d'écarter les raisons « sordidement matérielles » de notre amour de la Science (là, je crois *devoir* dire « notre »).

Lorsqu'on envisage les mathématiques uniquement comme partie du monde de la vérité, on est nécessairement porté, dans sa jeunesse, vers une pensée philosophique. Les mathématiques qu'on fait subir à nos adolescents sont si souvent dépourvues de toute inspiration, que c'est en faisant venir des éléments de l'extérieur du monde purement mathématique que le jeune candidat-mathématicien cherche à satisfaire sa nostalgie métaphysique. Lorsqu'on veut comprendre le monde extérieur et qu'on aime les mathématiques, tout en en connaissant peu, on est tout naturellement amené à chercher, soit à interpréter le monde abstrait par les mathématiques, soit, au contraire, à donner un sens métaphysique aux phénomènes mathématiques. Que les philosophes ici présents veuillent bien m'excuser : ces velléités philosophiques de ma jeunesse ont subi des transformations tellement profondes, qu'il a fallu l'invitation de M. Wahl de faire une conférence dans son Collège qui est philosophique, pour que j'ose même *prononcer* cet adjectif — j'ai peur de prononcer un mot dont le sens profond peut m'échapper.

Mais il faut que je le dise : mon désir, très fort, de faire les mathématiques prend son origine dans la volonté de comprendre le monde extérieur. Et j'avoue, que c'est encore la nostalgie de la connaissance de ce monde extérieur qui constitue, je crois pouvoir l'affirmer, le motif essentiel, ou peut-être même le motif unique, de mes préoccupations mathématiques. Mais voilà, le mot « monde extérieur » n'a plus du tout pour moi ce sens *grandiose* que lui attribuent les philosophes, ou que dans ma naïveté je croyais lui donner lorsque j'étais jeune. Je vois maintenant un fait important du monde extérieur dans une belle inégalité, dans la manière dont sont distribués les nombres premiers, dans le caractère d'un point singulier d'une série de Dirichlet, ou dans la distribution des valeurs prise par une fonction entière. Ces faits, me semble-t-il, font partie du monde extérieur, et du monde extérieur dans le sens le plus élevé. Je n'arrive pas, où je n'arrive plus, sans que pour cela je me sente dégénéré, à concevoir une différence en importance entre une affirmation mathématique quelconque qui intéresse les mathématiciens, du moins les mathématiciens dits « purs », et une affirmation de la grande métaphysique. Il faut, bien entendu, que je précise, autant que cela se peut, le genre d'affirmations mathématiques qui « intéressent les mathématiciens purs », et je tâcherai de le faire de mon mieux. Mais, dès maintenant, permettez-moi de vous dire que lorsqu'on aura démontré que l'ensemble des nombres premiers jumeaux, comme 3-5, 11-13, 17-19, est infini, je me sentirai aussi satisfait, aussi heureux, que lorsque je finirai par avoir une conception plus claire de l'expension de l'Univers.

En quoi consiste l'intérêt d'un fait mathématique ? Le mot « intérêt », ou le mot « intéressant » — je préfère d'ailleurs « intéressant », car j'ai une vague impression qu'il traduit mieux le désintéressement du savant — est choisi un peu au hasard. Il a l'avantage d'être assez neutre et je puis lui attacher plus librement des attributs à ma guise. Je pourrais éventuellement dire ou penser (sans le dire) avec peu de gêne que je trouve un phénomène intéressant parce que... je le trouve intéressant ; il me serait plus difficile d'agir aussi cavalièrement avec le mot « important », auquel on attache trop de sens matériel. Pour que je puisse utiliser ce mot « intéressant » avec plus de liberté, il faudrait que vous abandonniez toute interprétation préconçue. Surtout ne regardez pas le dictionnaire.

Pour être intéressant un fait mathématique doit, avant tout, être beau. Un théorème peut être, et doit être, beau comme l'est, je m'imagine un poème. Je dis « je m'imagine » car, étant tout de même un professionnel dans une branche de l'activité de l'esprit, j'ai souvent peu de tendresse pour les jugements sur les mathématiques émis par ceux qui, sans être mathématiciens, croient y voir clair ; je n'ose donc pas croire que je puis, moi mathématicien, éprouver en lisant un poème, ou en regardant un talbeau, le même plaisir, sentir la même beauté que le poète ou le peintre respectivement. Je dis donc qu'un mathématicien réfléchissant, je dirais contemplant, un théorème (déjà démontré, déjà existant) éprouve souvent le même sentiment de beauté, la même émotion, qu'éprouve un poète lorsqu'il lit un poème. Mais, aussi peu poète ou peintre que je sois, je crois que le fait mathématique — intéressant — comporte toute la beauté d'une œuvre d'art plus quelque chose de bien, spécifique. J'ai l'impression que l'œuvre mathématique comporte, en plus de la beauté artistique, un élément dynamique. Je me trompe, peut-être, en attribuant à l'Art des qualités uniquement contemplatives provoquant, bien entendu, des émotions profondes, et je ne devrais pas parler des choses que je ne fais que recevoir. Mais, ce dont je suis certain, ce qu'en lisant un Mémoire mathématique — intéressant — je sens des mouvements dans mon esprit : des faits mathématiques que je connais depuis longtemps, ceux que je suis en train de contempler —

et ce mot correspond à la réalité, — des faits vagues, même pas encore en vraie formation, s'entrechoquent, demandent à être comparés. Tous ces faits sont en train de se pousser les uns des autres, pour se comparer au nouveau phénomène ; les faits anciens cherchent à s'améliorer, à se reproduire à la lumière de la nouvelle connaissance acquise. En un mot, je me sens enrichi. Je comprends peu la peinture moderne, mais je la respecte, car j'ai la vague impression qu'elle aussi est capable de donner aux initiés les mêmes doux, ou violents, maux de tête.

Souvent le mathématicien, plein d'expérience et de sagesse, provoque consciemment, délibérément, des comparaisons entre différentes théories mathématiques. Mais un théorème intéressant est celui qui déclanche ce mouvement, disons brownien, automatiquement, presque contre la volonté du mathématicien-lecteur. Pour tout dire, un tel fait *inspire* le mathématicien et provoque souvent, très souvent, des nouvelles recherches. Je crois qu'un chimiste dirait, s'il connaissait les mathématiques, ou s'il se rendait compte de ce qui se passe dans la tête d'un mathématicien, qu'un théorème intéressant est un catalyseur pour la réaction qui est la nouvelle découverte mathématique. Donc, un beau théorème est celui qui est susceptible d'inspirer un mathématicien, celui qui peut engendrer de nouveaux théorèmes. *Le fait mathématique intéressant crée un état d'esprit.*

Un jeune peintre, à qui il m'est arrivé d'exprimer ces sentiments, que je croyais vagues, m'a bien fait comprendre que son état d'esprit n'est nullement différent, lorsqu'il crée ou lorsqu'il contemple un tableau. Il a raison, je crois, de dire que le grand et beau tableau, et je dirais, moi, le beau théorème, crée un rythme qui permet la création d'autres œuvres en parfait unisson avec lui-même.

A vrai dire, à ce point de vue, il y a presqu'un élément tragique dans cette beauté du théorème — tragique pour le théorème — car, une fois cet état d'esprit créé, ce rythme créé, l'esprit, pourvu de cet état, s'envole, crée d'autres phénomènes et oublie le théorème qui a pourtant provoqué ce remue-ménage. Le théorème est comme ces insectes qui meurent immédiatement après la reproduction. Du moins, dans l'esprit de celui qui vient de l'admirer. Bien sûr, on lui garde, si j'ose dire, une reconnaissance éternelle, et on continue à *dire* que le théorème est beau. On l'utilisera encore, mais avec plus de calme, peut-être même avec plus de fruit. En tout cas, ce théorème a beaucoup de chance de rester un instrument important de travail.

Que reste-t-il de la notion « d'utilité » du phénomène mathématique ? Ce mot, a-t-il un sens ? M'accusera-t-on d'avoir une conception trop aristocratique de la mathématique ? Des aristocrates sont les faits mathématiques eux-mêmes. Un fait mathématique est utile lorsqu'il provoque d'autres faits, d'autres faits *mathématiques*. Ceux-ci forment un espace fermé, nul n'y entre sans promesse d'en engendrer d'autres. C'est là toute son utilité.

Je pense qu'aucun de vous ne s'attend, ou ne s'attend plus, à ce que je parle de cette autre utilité des mathématiques — l'utilité pratique. J'aime bien les ingénieurs, j'aime encore mieux les physiciens et les astronomes, mais je n'ai pas choisi les mathématiques pour les servir, et je m'imagine que la réciproque est vraie. D'ailleurs, je défie quiconque de me fournir un argument en faveur de l'utilité de la partie des mathématiques, qui permet uniquement de démontrer qu'une étoile, qu'on croyait simple, est double. Est-il possible, en d'autres termes, de donner au mot « important », un sens tel, qu'il devienne clair que la découverte d'une étoile double est plus importante que celle d'une suite de nombres premiers jumeaux ?

Pour se venger, le mathématicien « impur », celui qui fait des mathématiques pour d'autres que pour lui-même, pourrait me sortir la comparaison classique avec le jeu d'échecs. En quoi, donc, diffère un beau théorème d'un beau coup d'échecs? Je ne crois pas que le joueur d'échecs éprouve les mêmes sentiments qu'un mathématicien. Le beau coup d'échecs est beau, soit parce qu'il pare à un coup de l'adversaire, soit parce que l'adversaire n'y peut pas parer. Ce coup d'échecs est égoïste, j'entends égoïste par rapport aux autres coups. Il ne provoque pas un état d'esprit, il ne provoque pas une atmosphère de désir de la découverte. Il ne crée certainement pas un rythme tel, qu'on veuille abandonner le jeu dont il est né, pour en créer d'autres en unisson avec lui, ou, alors, je gage que le meilleur joueur serait toujours perdant.

Je viens de faire une courte analyse de ce que provoque dans l'esprit d'un mathématicien — de quelques mathématiciens — un beau théorème. J'ai la conviction profonde que l'état d'esprit ainsi créé est caractéristique de l'intérêt du phénomène mathématique, je dirais qu'il peut servir de définition de cette beauté ou de cet intérêt. Mais peut-on indiquer quelques caractéristiques plus objectives de l'importance en mathématique ? Encore une fois, je dois faire abstraction de toute notion d'utilité du point de vue de l'ingénieur ou même de celui du physicien. J'ai souvent de la nostalgie de la connaissance du monde physique. Je voudrais le connaître, le comprendre. Mais ces crises de regret ne me saisissent jamais lorsque je suis intimement mathématicien. Les mathématiques utilisées par les physiciens ne sont pas, tout simplement, celles que j'aime. Presque toujours, lorsqu'il m'arrive de penser à un phénomène de physique enveloppé des mathématiques, c'est la physique du phénomène qui m'intéresse ; ses mathématiques sont tristes, sans âme, elles ne font que mal traduire un fait dont la grandeur est ailleurs. Ou alors, j'oublie le fait physique lui-même, il ne m'aurait servi que de fournisseur d'une idée mathématique, dont seulement des germes, des bribes, ont été mêlés à ce phénomène du monde extérieur. Que les physiciens veuillent bien m'excuser, mais s'il se trouve qu'une belle idée mathématique ait été associée à une explication d'un fait physique, tout se passe comme si, en réalité, le fond de cette idée n'ait pas été compris par le physicien. D'ailleurs, les physiciens ne seraient pas justifiés de s'offenser. Ne serait-ce pas injuste que toutes les beautés soient de leur côté ? La physique n'a-t-elle pas de ses propres beautés profondes, sans qu'elle soit obligée d'en chercher dans ce qu'elle ne considère, après tout, que comme un instrument de travail ?

La recherche des caractères objectifs de l'intérêt mathématique est donc, permettez-moi l'expression, une affaire mathématique, intérieure. Mais, même en me plaçant du point de vue purement mathématique, le mot intéressant a, bien entendu, plusieurs sens possibles. On pourrait, par exemple, s'imaginer qu'on désire faire une antologie, ou, plutôt un catalogue, sur quelques centaines de pages, des découvertes mathématiques les plus importantes réalisées depuis les temps grecs jusqu'à nos jours, et qu'on cherche un critère général des faits qu'on y mettra. Il serait, je crois, juste de remarquer que, si le nombre de pages est fixé d'avance, deux mathématiciens professionnels quelconques, chargés de ce travail, sortiraient des ouvrages assez semblables ; les mêmes faits y figureront, sauf, bien entendu, lorsqu'il s'agira du travail accompli durant le dernier demi-siècle, ou surtout la dernière décade : chacun de ces auteurs manifestera, sinon son originalité, du moins l'intérêt de ses préoccupations personnelles, en y mettant en vedette les théorèmes de sa branche. C'est humain — le « patriotisme local » joue beaucoup en mathématiques, comme dans toute autre science : « la partie des mathématiques dont je m'occupe est la plus importante ».

Ce n'est pas de cette objectivité tout à fait parfaite que je désire dire un mot maintenant. J'ai en vue encore une autre objectivité. Une objectivité tout de même assez subjective. Tout à l'heure, j'ai décrit l'état d'esprit provoqué par un fait mathématique intéressant, je vais maintenant faire une description assez sommaire des caractères d'un fait susceptible de provoquer, en moi, un tel état. Je désire donc vous énumérer quelques qualités *extérieures* d'un phénomène mathématique qui me plait et qui plait, probablement, à un nombre assez considérable de mathématiciens. C'est le mot extérieur qui est important. Il y a, je crois, une correspondance biunivoque entre ces qualités extérieures et les qualités intérieures, je veux dire psychologiques, que j'ai décrites plus haut.

Le fait d'être général est une grande vertu pour un fait mathématique, et l'on éprouve une sorte de léger mépris pour le fait particulier.

Je n'arrive pourtant pas à diviniser la généralité en soi. L'affirmation, qu'on pourrait traiter de particulière, que le nombre e est transcendant, et surtout sa démonstration, me laisse rêveur, et il y a, d'autre part, tant de faits mathématiques généraux qui m'ennuyent. La généralité est belle lorsqu'elle possède un caractère *explicatif.* Lorsqu'on découvre un théorème avec des hypothèses restrictives qu'on sent peu liées au sujet ou qui paraissent dues uniquement à la méthode employée pour sa démonstration, on cherche, évidemment, à se débarrasser de ces conditions gênantes. On cherche donc à généraliser le résultat pour donner au phénomène son aspect naturel. C'est une généralisation, en quelque sorte, technique. Mais, même, une fois débarrassé de ces, si j'ose dire, impuretés artificielles, le résultat ainsi démontré ne nous donne pas toute satisfaction. On sent la nécessité de se placer sur un plan plus élevé, on sait qu'on ne comprendra son vrai caractère que s'il concerne un plus grand nombre d'objets. Il y a un moment où l'ensemble d'objets, auxquels il s'applique, explique le sens même du théorème. Il serait, je crois, juste de dire, que c'est après avoir trouvé un théorème, qu'on doit chercher, que d'ordinaire on cherche, le vrai objet, ou le vrai ensemble d'objets, auquel il s'applique. C'est ainsi qu'on obtient la généralisation explicative. Personnellement, je sens *qu'il y a un optimum* à cette généralité. Un théorème A n'est pas nécessairement ni plus intéressant, ni plus beau, qu'un théorème plus général B. C'est surtout au prix d'une plus grande abstraction qu'on obtient une généralisation. Or, l'abstraction est belle et grande lorsqu'elle est explicative, lorsqu'elle donne, j'ose le dire, un caractère métaphysique au phénomène. En un mot, lorsque cette abstraction indique le monde qui est propre au phénomène découvert. Mais si on perd le souci de la recherche de ce monde qui lui est propre et qu'on cherche à généraliser uniquement par goût de généralisation ou le goût d'abstraction, on risque d'entrer dans un monde formalisé. Or, j'aime, dans une théorie mathématique, la présence de la matière. — Je m'aperçois que je suis en train d'employer un mot souvent utilisé par les philosophes, mais, en réalité, le mot matière n'a ici qu'un sens simple, naif, immédiat. — Je dis, donc, que j'aime à sentir de la matière en mathématiques, ou, pour passer à l'autre extrémité, je n'aimerais pas vivre dans le monde de la logique formelle telle que l'envisagent quelques-uns de mes collègues. Pour moi, une fonction analytique, par exemple, est un être que je puis toucher avec mon esprit, que je sens et que j'aime à disséquer. Ses singularités sont ses défauts que j'aime autant que ses qualités.

Même lorsque je sais que des propriétés que possèdent ces fonctions sont le propre d'autres êtres plus abstraits, mais aussi, je le répète, plus vide de matière, je ne vois aucun avantage esthétique à les abandonner : il y a en elles tellement plus de chaleur. C'est bien simple, je ne connais aucune loi divine qui m'obligerait d'abandonner un être que je sens complet, pour un autre être qui possède les mêmes vertus, mais en plus sec et en plus formel. L'objet des mathématiques, dit-on, est d'étudier les relations entre les choses et non pas les choses elles-mêmes. J'approuve cette formule, mais je ne désire pas étudier les relations entre les relations. Je désire que le dernier terme soit une chose, une chose abstraite, mais une chose quand même.

Je suis bien conscient du fait que le passage dans un monde plus formel fait souvent disparaître les difficultés techniques auxquelles on se heurte dans le monde plus particulier, dans le monde plus pourvu de matière. Mais, précisément, si j'aime ce monde mathématique, assez général pour qu'il soit compris par l'ensemble de ses phénomènes, je l'aime aussi parce qu'il présente des difficultés. La difficulté d'une démonstration, sa non-trivialité, comme disent les mathématiciens depuis quelques décades, est un des grands attraits de la découverte mathématique. Il serait faux de comparer le désir de vaincre une grosse difficulté dans la recherche d'une démonstration au désir d'une réussite sportive. D'ailleurs, la difficulté n'est pas recherchée, elle se présente à l'esprit, je dirais *heureusement*, toute seule lorsqu'on désire réaliser, si vous me permettez l'expression, une intuition. Autrement dit, l'attitude du mathématicien n'est pas la suivante : voyons, « posons-nous un problème difficile ! » Son attitude sera mieux traduite lorsqu'on dira qu'une vérité mathématique, un pressentiment purement intuitif, effleure son esprit, c'est alors que les difficultés surgissent. Elles surgissent lorsqu'on cherche à se convaincre, ou à convaincre les autres mathématiciens, de la justesse de l'intuition. Chacun de nous a en lui tout un monde mathématique presque secret ou intime auquel il croit et c'est un des deux grands bonheurs — mathématiques — qu'il éprouve. L'autre bonheur relève de la capacité de convaincre l'autre ego, celui qui est sceptique, et aussi ses lecteurs et auditeurs. L'intuition paraîtrait pauvre, dépourvue d'intérêt, si la difficulté de son expression ou de sa réalisation ne l'accompagnait pas. Oui, la vie du mathématicien serait infiniment moins intéressante s'il suffisait que l'intuition frappe, si j'ose dire, le mathématicien, pour que le problème apparaisse comme résolu.

En somme, le mathématicien, du moins tel que je le conçois, a une vie double : il vit dans un monde d'idées intuitives, d'autant plus intuitives, excusez le paradoxe apparent, qu'elle gravite autour d'une matière, matière abstraite, mais matière quand même ; il a de la satisfaction, — une semi-satisfaction — de cette intuition, car il sent qu'elle correspond à la vérité. Mais, alors, il veut convaincre soi-même et les autres que son intuition est juste, c'est alors que commence son autre vie. Vie de difficultés, difficultés qui fournissent tant de joie et sans lesquelles la vie du mathématicien serait ou trop vague ou trop facile.