CAHIERS DU SÉMINAIRE D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

ALDO BRIGAGLIA

Sur les relations des mathématiciens français et italiens au début du XXe siècle

Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques 1re série, tome 5 (1984), p. 21-48
<http://www.numdam.org/item?id=CSHM_1984__5__21_0>

SUR LES RELATIONS DES MATHÉMATICIENS FRANÇAIS ET ITALIENS AU DÉBUT DU XX^{E} SIÈCLE

PAR ALDO BRIGAGLIA*

"L'influence de ce grand événement de l'histoire [[la Révolution française]] sur le développement de la science s'est manifestée dans deux directions. D'une part a eu lieu une séparation plus accentuée entre les nations, jointe à un développement distinct des qualités nationales caractéristiques. Les idées scientifiques, du reste, conservent naturellement leur universalité ; et les rapports internationaux entre savants sont devenus particulièrement importants pour les progrès de la science ; mais le développement de l'idée scientifique progresse aujourd'hui sur des bases nationales." (F. Klein, *Conférences sur les Mathématiques*, p.99-100, Paris(Hermann), 1898).

"Enfin, il ne sera pas inutile de faire observer devant ce Congrès que l'Analyse générale et la Théorie des Ensembles abstraits offrent un bel exemple de coopération internationale [[...]]. Et si, en Italie, l'Analyse générale proprement dite n'a pas encore trouvé d'adeptes, n'oublions pas que cette science nouvelle est née de l'Analyse fonctionnelle, merveilleuse création du génie italien." (M. Fréchet, *L'Analyse générale et les Espaces abstraits*,Atti del Congresso internazionale dei Matematici, t.I, p.273-274, Bologna(Zanichelli), 1929).

"L'extrême rigidité d'un mandarinat fondé sur de désuètes institutions académiques fait que toute tentative de renouvellement, si elle ne reste purement verbale, paraît vouée à l'échec. L'Italie, autrefois siège d'une école mathématique florissante, semble tombée dans un état de sclérose, analogue à celui dont la France se trouve menacée, mais qui a eu là des effets encore plus prompts et plus destructeurs." (A. Weil, *L'avenir des mathématiques*, dans F. Le Lionnais, *Les grands courants de la pensée mathématique*, p.318-319, Cahiers du Sud, 1948).

Ces citations peuvent constituer une espèce de fil conducteur pour ma conférence. En effet, Klein souligne le caractère dialectique du rapport entre universalité et nationalité des idées mathématiques. Je ne m'arrêterai pas sur cet aspect de "sociologie" des mathématiques qui mériterait un certain approfondissement.

---

* Conférence donnée le 13 avril 1983 au Séminaire d'Histoire des Mathématiques.

Je veux souligner seulement ici comment le caractère "national" des mathématiques a été gonflé souvent de façon artificielle pour des motifs politico-idéologiques (en Italie pendant le fascisme, par exemple, en France après la première guerre mondiale), et surtout comment les diverses écoles gagnantes sur le plan académique se sont souvent auto-assignées le droit de représenter "l'authentique esprit national dans les mathématiques", reléguant les points de vue opposés dans la catégorie des "étrangers à la tradition nationale". Mais c'étaient seulement des aberrations de propagande. S'il existe un fond national également dans les mathématiques - et je crois qu'il en est ainsi - il consiste plus dans la manière dont les diverses écoles de pensée ont agi mutuellement les unes sur les autres, si bien qu'une d'entre elles l'a emporté par un contenu sur un autre. Ainsi, par exemple, il est difficile de dire laquelle est plus française des écoles géométriques : analytique ou synthétique, Couturat ou Poincaré, Bourbaki ou Borel ; ou plus italiennes les écoles de Severi ou de Peano ; ou plus allemandes celles de Klein ou Hilbert, Study ou Schubert ? Mais la forme du débat entre ces manières universelles d'entendre les mathématiques a été différente dans les différents pays, et surtout les différentes idées se sont affirmées dans des époques et de façons différentes dans les diverses nations. C'est précisément dans les façons et les époques d'assimilation des idées nouvelles que réside l'importance des échanges entre les mathématiques italienne et française, si on les considère comme des échanges entre les différentes écoles et non simplement entre les individus.

C'est la raison pour laquelle je me limiterai à examiner les trois domaines dans lesquels les échanges entre les deux écoles m'ont paru être particulièrement significatifs pour l'assimilation des idées nouvelles : la théorie des groupes de Lie, certains des espects de la géométrie algébrique et l'anlyse fonctionnelle abstraite.

La citation de Fréchet met en évidence un autre aspect du problème sur lequel je m'arrêterai un peu plus. En effet, comme le souligne justement Fréchet, il est étonnant qu'une école - c'est le cas de l'école italienne d'analyse fonctionnelle - qui a pourtant posé toutes les présuppositions pour un saut de qualité, hésite après à faire ce saut, bloquée non tant par la difficulté intrinsèque de l'opération que par la domination d'une conception bien précise.

Ce qu'affirme A. Weil est un peu une réponse à la question de Fréchet, une réponse qui trouve cependant son fondement en dehors de la simple histoire interne des mathématiques, car la naissance d'un mandarinat académique, capable de bloquer l'évolution "naturelle" des mathématiques d'un pays, ne peut s'expliquer que par la dialectique entre la communauté mathématique et le monde externe, les idées d'un pays dans lequel vivent les mathématiciens et en dehors duquel ils ne peuvent pas se retirer complètement. C'est donc en considérant le "nouveau" mode de faire les mathématiques au vingtième siècle que je vais essayer d'envisager les rapports entre les deux écoles mathématiques, française et italienne.

Par le mot "nouveau" je n'entendrai rien de particulier : "nouveau" n'est pas nécessairement synonyme de "meilleur", c'est seulement l'expression d'une réalité sur laquelle je n'exprimerai aucun jugement. Et je ne pense pas me tromper, si, donc, je définis le "nouveau" mode de faire les mathématiques comme la tendance à la *généralisation*-maximum des concepts mathématiques. Une telle généralisation me semble relativement plus significative que les deux autres tendances : la tendance à l'abstraction et la tendance à la rigueur, qui cependant parcourent les mathématiques du vingtième siècle, et je ne crois pas qu'on puisse réduire simplement une tendance à l'autre.

Comme cela se produit toujours, le choix que j'ai fait est subjectif. Il y aurait beaucoup d'autres possibilités aussi dignes et même plus dignes de considération (il suffit seulement de penser aux rapports entre les idées de Lebesgue et celles de Vitali). Mais, plus généralement, je n'ai presque jamais fait référence aux situations d'importance plus grande dans les rapports entre les deux écoles : parler des rapports Darboux-Bianchi, ou Poincaré-Enriques, ou Volterra-Hadamard, aurait signifié faire *sic et simpliciter* de l'histoire des mathématiques, et cela est bien loin de mes intentions.

Je pense au contraire que les rapports entre les deux écoles sont mieux mis en évidence par certains aspects cachés derrière les replis des grandes découvertes ; par ailleurs, je crois qu'il est important de chercher à mettre en lumière les nombreuses tentatives, même si elles n'ont pas été toujours fructueuses, grâce auxquelles a été créé le milieu qui a permis la maturation des grands tournants de la pensée mathématique.

Dans ce sens-là, même les "sans grade" ont, je crois, droit à une place dans l'histoire des mathématiques.

L'un des points de vue les plus importants sous lesquels se sont développées, à la fin du dix-neuvième siècle, les idées les plus "nouvelles" des mathématiques est, je crois, celui de groupe de Lie. Ce concept s'est répandu en France et en Italie dans les années 1893-1900 par les travaux de E. Cartan et de L. Bianchi. Même si, comme on le verra mieux plus loin, les rapports directs entre ces deux mathématiciens ont été très rares, il me semble qu'une comparaison entre ces deux différentes approches peut être utile.

D'autant que c'est bien grâce à ces rapports qu'en 1905 l'école italienne parviendra à son meilleur résultat sur la théorie des groupes de Lie: le théorème de

Eugenio Elia Levi (tout groupe de Lie G est produit semi-direct de son radical R et d'un groupe de Lie semi-simple isomorphe à G/R), théorème que Elie Cartan avait énoncé douze ans auparavant dans une note aux *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*. Ce qui est révélateur , c'est que le mémoire de Levi avait le même titre que celui de la fameuse thèse de E. Cartan.

Je considère un peu ce théorème comme le point d'arrivée d'une recherche, développée dans le cadre de l'école mathématique pisanne, dont je donnerai une brève esquisse en essayant de mettre en relief les nombreuses interactions avec l'école française. En examinant attentivement la formation de l'école pisanne, on peut faire remonter l'assimilation des conceptions de Lie à deux sources principales : Klein et Jordan.

Le point de départ de la formation de E.E. Levi peut sûrement se rattacher à son maître Luigi Bianchi, qui est sans aucun doute et avant tout un grand géomètre différentiel,mais qui, dans sa longue activité de professeur auprès de l'Ecole Normale de Pise, a formé des élèves de diverses spécialités.

Ses écrits sur la théorie des groupes finis, sur les groupes de Lie, sur la théorie des nombres, sur la théorie des formes sont restés longtemps uniques dans le panorama des mathématiques italiennes, et ils montrent un intérêt singulier, dans le cadre de l'école mathématique italienne, par la façon de voir toujours les problèmes mathématiques dans leur plus grande généralité possible et par la façon d'apprécier surtout les liens entre les différentes théories ; de sa tendance à la généralité résulte son jugement de la très grande importance de nouveaux langages algébriques, dont il fut un, parmi de très peu nombreux en Italie, à saisir la portée généralisatrice.

Nous pouvons commencer, de façon idéale, à examiner brièvement cet aspect du développement de la pensée de Bianchi, par ses belles *Leçons* sur la théorie des groupes finis de l'année 1899 (*Lezioni sulla teoria di gruppi di sostituzioni*, Pisa(Spoerri), 1900).

La source principale d'inspiration du livre est sans aucun doute le vieux *Traité des substitutions* de C. Jordan, écrit près de trente ans auparavant, mais encore valable, et que Bianchi rend actuel en considérant les développements de Dedekind (dans son appendice XI aux *Vorlesungen über die Zahlentheorie* de Dirichlet) et de H. Weber (dans son *Lehrbuch der Algebra*). Le texte de Bianchi ne contient pas de grandes nouveautés : c'est un exposé didactique clair qui a comme but principal de donner une présentation complète de la théorie de Galois, avec des ouvertures sur la théorie des nombres algébriques de Kummer-Kronecker-Dedekind et sur les groupes de Lie.

Le rapport explicite existant entre le livre de Bianchi et celui de Jordan est un exemple curieux de la façon dont une théorie mathématique peut souvent "rebondir" plusieurs fois d'un pays à l'autre au cours de son assimilation définitive dans la culture d'un pays.

Ainsi, même en laissant de côté l'ancienne querelle Ruffini-Galois, il n'y a aucun doute que, comme l'écrit Jordan lui-même, l'oeuvre de Betti avait constitué un pas fondamental pour la redécouverte de l'oeuvre de Galois, et - élément assez significatif - dans une période durant laquelle Ruffini et son oeuvre avaient été complètement oubliés en Italie (C. Jordan, *Traité des substitutions*, p.VI, Paris (Gauthier-Villars), 1957) :

> "Mais [[...]] il [[Galois]] avait laissé sans démonstration suffisante plusieurs propositions fondamentales. Cette lacune ne tarda pas à être comblée par M. Betti, dans un Mémoire important, où la série complète de ces théorèmes de Galois a été pour la première fois rigoureusement établie."

D'autre part, la théorie de Galois pénètre réellement en Italie par le très diffus *Traité* de Jordan, et non grâce à l'oeuvre de Betti . Bianchi, qui avait été élève de Betti, assimile plus de l'auteur français que de son maître en ce qui concerne l'exposé de ses leçons.

De plus, Bianchi, en reparcourant en partie la genèse historique des trente dernières années, voit nettement dans la théorie de Galois,traitée à la manière de Jordan, les antécédents directs, la clef pour comprendre,et apprécier à la fois dans sa juste signification, la théorie de Lie.

Il suffit de lire, même rapidement, la nécrologie sur Jordan de Bianchi de 1922 pour se rendre compte comment il a su deviner, avec une grande précision, le rôle exercé par le livre de Jordan et par son article de 1869 sur les groupes de mouvements dans la genèse de la théorie des groupes de Lie. En effet, Bianchi écrit (*Opera Omnia*, vol.I, parte seconda, p.258-259, Roma(Ed.Cremonese)) :

> "Parmi les mémoires en relation avec la théorie des groupes, on relève encore la théorie ancienne de 1869 sur les groupes de mouvements [[...]] . Ici Jordan considère à la fois les groupes discontinus et les groupes continus, il a devancé dans ce domaine la théorie de Lie, sans introduire la notion de transformations infinitésimales génératrices fondamentales dans la théorie de Lie."

Le témoignage recueilli par Bianchi est certainement un témoignage de première main (qu'on peut confronter, par exemple, avec celui de Bourbaki), un récit pénétrant qui rappelle un moment de tension morale et intellectuelle exceptionnelle dans l'histoire des mathématiques, le printemps de 1870, quand Klein et Lie sont partis à Paris pour connaître Darboux et Jordan et pour y apprendre la théorie des groupes. Bianchi écrit à ce propos (p.265 du volume cité) :

"L'étude du grand traité de Jordan, en particulier, [[...]] a attiré toute l'attention de Klein et de Lie et a eu l'influence la plus décisive et heureuse sur le développement ultérieur de leurs recherches."

C'est précisément dans le cadre de cette continuité entre l'oeuvre de Jordan et celle de Lie que Bianchi fait suivre ses *Leçons* de 1899 par le livre *Lezioni sulla Teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni* de 1902 (Pisa(Spoerri), 1903). Il s'agit d'un exposé exhaustif qui pourrait être comparé utilement à la thèse de E. Cartan (*Sur la structure des groupes de transformations finis et continus*, Paris(Nony), 1894 = *Oeuvres complètes*, partie I, vol. 1, p.137-287), le premier texte, sans conteste, de ce genre qui est paru en Italie, témoignage de la volonté lucide de Bianchi de former, dans la prestigieuse école de Pise,un groupe de chercheurs au niveau de l'avant-garde mondiale. Je ne m'arrêterai pas sur un autre exposé, également de 1902, de E. Pascal (*Les groupes continus de transformations*) qui démontre, d'une certaine façon, la grande demande qui se faisait jour sur ces questions en Italie.

Comme en témoigne une lettre à Weingarten, l'intérêt de Bianchi pour la théorie des groupes de Lie remontait au moins à l'année 1895 (donc une époque très proche de la thèse de E. Cartan), et, d'autre part, les deux mathématiciens ont eu la même source d'inspiration, à savoir les ouvrages fondamentaux, mais peu rigoureux, de Killing des années 1888-1890. Mais, malgré de nombreuses ressemblances, les deux théories restent pour ainsi dire sans intersection, se déplaçant sur des plans apparemment parallèles.

Les deux mathématiciens furent peu suivis dans leurs patries respectives, tous les deux eurent comme point de référence surtout les recherches de l'école allemande : on sait très bien combien fortement E. Cartan a toujours mis en évidence le "programme d'Erlangen" de Klein. Nous allons donner une longue citation des réflexions de E.Cartan sur ses recherches de cette époque, bien qu'elle leur soit bien postérieure (Congrès international des mathématiciens d'Oslo de 1936). Ces réflexions clarifient bien certains points d'affinité entre la pensée de E. Cartan et celle de Bianchi (*Comptes Rendus*, t.I, p.96, Oslo(Brøgger), 1937) :

"Il est clair que l'on englobe ainsi dans la géométrie tous les problèmes d'équivalence par rapport à un groupe quelconque, fini ou infini. La question se pose de savoir jusqu'à quel point il est légitime d'attribuer un caractère géométrique à des problèmes si généraux et dont le plus souvent l'énoncé ressortit à l'analyse pure. Il n'y a évidemment aucune réponse nécessaire à une pareille question. M. Veblen, il y a quelques années, déclarait géométrique tout ce que les gens compétents regardent comme tel : je souscris volontiers à cette opinion, bien que les gens compétents ne soient pas toujours d'accord, même en mathématiques. En fait la systématisation faite par Klein a été adoptée sans résistance comme une extension légitime du domaine de la géométrie, parce qu'elle fournissait un principe unificateur de plusieurs théories développées antérieurement et auxquelles personne ne refusait de reconnaître le caractère géométrique. Dans le cas qui nous occupe, en est-il de même ? On serait tenté de répondre non, car le point de vue d'où nous venons d'envisager la géométrie riemannienne ne met justement pas en évidence, on peut même dire masque complètement, ce qu'il y a en elle de géométrique, au sens intuitif du mot."

Une conférence entière ne suffirait pas pour parler des liens qu'a eu, dans ce contexte, la pensée de E. Cartan avec la conception du "transport parallèle" de Levi-Civita.

Je rappellerai seulement les réflexions profondes de E. Cartan sur la possibilité qu'avait ce concept de jeter un pont entre les deux points de vue de la géométrie : celui de Riemann et celui de Klein.

Revenant à Bianchi, je me limiterai à rappeler que celui-ci, bien que toute sa contribution originale concerne le domaine de la géométrie différentielle, a été fortement fasciné par les relations que sa discipline montrait avoir avec les autres branches des mathématiques - surtout avec la théorie des nombres - et il a souvent souligné comment le nouveau langage algébrique avait justement pu fournir les outils pour une profonde généralisation et pour l'unification des mathématiques.

Apparemment au moins, Bianchi et E. Cartan n'eurent pas, comme je l'ai déjà souligné, des liens personnels très étroits, et ils ne se citent pas souvent non plus. Mais c'est justement de la fusion des admirables leçons de Bianchi avec la grande thèse de E. Cartan que se produit, presque *ex abrupto*, le résultat le plus significatif de l'école italienne dans la théorie des groupes de Lie, le théorème précité de E.E. Levi.

Les *Leçons* de Bianchi, mentionnées ci-dessus, contiennent déjà quelques paragraphes (80-82) consacrés à la structure des groupes finis et continus, dans lesquels il souligne (p.290), avec raison, comment E. Cartan avait "confirmé et en partie rectifié" les "importantes recherches de Killing à ce propos". Mais ce n'est là qu'un aspect secondaire du livre de Bianchi ; le coeur même du livre est au contraire une extension systématique de la théorie de Galois au cas des équations différentielles linéaires : c'est ainsi que s'établissent les théorèmes que Bianchi appelle de Jordan-Lie et de Hölder-Engel sur les séries de composition, ainsi que toutes les analogies indispensables. On arrive de la sorte au développement de la théorie de Picard-Vessiot-Drach sur les conditions d'intégrabilité par quadrature d'une équation différentielle linéaire. Le point culminant de toute la théorie est le théorème de Vessiot : "La condition nécessaire pour qu'une équation linéaire soit intégrable par quadrature est que celle-ci ait un groupe de rationalité intégrable."

C'est un genre de recherches en général assez différent de celui de E. Cartan, qui pourtant s'occupa, d'une certaine manière, des questions analogues entre 1894 et 1896 dans le mémoire *Sur la réduction de la structure d'un groupe à sa forme canonique* (*Oeuvres complètes*, partie I, vol.1, p.293-353), dans lequel il pose (p.293) précisément le problème de "décomposer un groupe donné en une série normale de sous-groupes".

Il me semble que quand E. Cartan affirme dans sa thèse (p.137) :

> "D'une manière analogue encore, la théorie des équations différentielles linéaires fondée par MM.Picard et Vessiot et, plus généralement, celle des équations différentielles qui admettent un système fondamental d'intégrales mettent en évidence l'importance de la structure des groupes finis et continus."

cela reflète, en quelque sorte, plus la volonté de faire accepter ces études dans un contexte mathématiquement peu favorable en France, plutôt qu'une conviction intime comme c'est le cas de Bianchi.

De toute façon, ce qui m'intéresse de souligner, plus que la communauté de recherches, c'est la tendance commune de la vision de l'évolution des mathématiques comme tendue vers la recherche de la plus grande généralité possible et des principes qui puissent se substituer au recours à l'intuition géométrique.

Voici ce que dit Bianchi à ce sujet (p.519) :

> "Disons que, en général, dans les problèmes d'intégration, la théorie des groupes continus joue un rôle analogue à celui de la théorie des groupes de substitutions dans l'étude des équations algébriques selon Galois. Ces relations intéressantes apparaissent de la manière la plus évidente dans les applications de la théorie des équations différentielles linéaires que Picard commença et développa lui-même ainsi que Vessiot [[...]]. Les fameuses méthodes,qui pour certaines classes

d'équations différentielles conduisent à la résolution par quadratures ou même à l'abaissement de l'équation, se présentent aux mathématiciens dès le premier développement de la théorie. Elles semblent d'ailleurs dues plus à une inspiration heureuse qu'aux conséquences des principes généraux. Lie coordonna la majeure partie de ces méthodes sous un principe unique, démontrant que le succès dépendait presque toujours du fait qu'il s'agissait, et de façon immédiatement visible, d'un groupe continu de transforamtions à un ou à plusieurs paramètres admis par l'équation différentielle."

Je ne m'y attarderai plus, mais je pense qu'on peut relever deux choses à partir des positions exprimées par Bianchi : 1) Comment, dans le même apprentissage d'une théorie mathématique qui lui dérivait de ses rapports avec l'école allemande, l'école italienne avait "filtré" pour ainsi dire son assimilation à travers l'apport de l'école française (Jordan,Picard et Vessiot pour Bianchi, et puis surtout E. Cartan pour Elia Levi). C'est ici un état d'âme profondément propre à tous les mathématiciens italiens : ce n'est pas par hasard que Volterra choisit comme symbole du *Risorgimento* mathématique italien le voyage effectué en 1858 par Betti, Brioschi et Casorati en France et en Allemagne, à savoir chez Hermite d'une part et chez Weierstrass d'autre part (V. Volterra, *Betti, Brioschi, Casorati*, p.43-57, *Compte rendu du deuxième Congrès international des mathématiciens*, Paris(Gauthier-Villars), 1902). 2) L'exemple de la comparaison que j'ai essayé d'établir démontre qu'en Italie et en France, malgré des difficultés considérables pour s'affirmer, le langage "abstrait" et "formel" a commencé à se développer avec détermination presque dans les mêmes circonstances qu'en Allemagne ; en Italie dans une école de grands préstige et influence comme l'Ecole Normale de Pise. C'est seulement à cause des facteurs externes, surtout après la première guerre mondiale, que le "formalisme" - identifié avec l'esprit rébarbatif allemand - a été considéré comme étant en dehors des traditions "latines" franco-italiennes. Cela n'empêcha pas en fait, comme il arrive souvent par les caprices d'alliances d'états, qu'avec Severi fut rappelée - comme une expression typique du "rébarbatif" cartésianisme français - la manifestation en France, avant l'Italie, des tendances formalistes dans la seconde moitié des années 1930.

Il n'y a donc rien de surprenant, en parlant des rapports entre Bianchi et l'école française, si j'ai parlé de ceux pour ainsi dire cachés entre E. Cartan et Bianchi plutôt que de ceux bien plus évidents entre Bianchi et Darboux et Guichard. Ces derniers liens, très étroits, existaient en fait sur un problème désormais classique pour les deux écoles, un problème qui avait porté, je dirais de façon naturelle, à l'échange des résultats mutuels et à quelques polémiques de priorité ; c'est aussi, naturellement, une chose importante, mais je dirais qu'elle est presque normale.

C'est au contraire justement, il me semble, dans les difficultés que rencontre une école à assimiler un langage déterminé que les échanges réciproques ont une évidence et une signification majeures. Et c'est justement ici le cas du rapprochement de E. Cartan et de Bianchi au sujet du problème des groupes de Lie.

Le second exemple que je voudrais traîter est celui de l'analyse fonctionnelle et des liens entre les façons d'aborder cette question par l'école française et par l'école italienne. La publication récente de l'article de A.E. Taylor *A Study of Maurice Fréchet I*, dans l'*Archive for History of Exact Sciences* (t.27 (1982), p.233-295), me dispense de m'attarder sur les origines et le développement des idées de J. Hadamard et de M. Fréchet sur l' "analyse abstraite" et sur la théorie des espaces métriques. Je voudrais seulement me limiter ici à quelques considérations concernant directement la façon dont souvent les idées, en passant d'une école à l'autre, se modifient et se développent de manière parfois imprévue.

Déjà en étudiant l'article de Taylor nous voyons que, jusqu'à la publication de la thèse de Fréchet (1906), les liens qu'a, *via* Hadamard, l'élaboration de ses théories avec les résultats de l'école italienne (Ascoli, Arzelà, Volterra) sont très étroits. Il serait difficile en effet de comprendre la genèse de la thèse de Fréchet sans les profonds liens scientifiques et personnels de Hadamard (le "père spirituel de Fréchet") avec l'école italienne.

Au contraire, après la publication de sa thèse, il n'est possible de trouver aucune mention de son oeuvre dans la culture mathématique italienne de l'époque. Pour trouver un écho réel du point de vue de Fréchet dans l'école italienne il faudra attendre l'après-guerre.

L'étonnement de Fréchet, en voyant (en 1928) que ses théories ont si peu fructifié en Italie, là où elles avaient pour ainsi dire bourgeonné, est sincère et mérite réflexion.

Une première remarque est que la réponse donnée habituellement par les historiens des mathématiques est tout à fait insuffisante. En fait, on parle en général d'une "intolérance" ,par ailleurs mal définie, de la tradition italienne vis-à-vis de l'"abstraction" et de l'axiomatique. Il me semble qu'il s'agit d'un point de vue superficiel. En effet, l'école italienne (avec Peano et Pieri, par exemple) avait donné une impulsion importante au développement des fondements axiomatiques de la géométrie, offrant un terrain tout à fait adéquat à la compréhension des fondements abstraits de la thèse de Fréchet.

Je crois que l'oeuvre de Pieri surtout allait exactement vers un usage des axiomes indépendamment de toute signification concrète des objets auxquels ils se référaient : "Aujourd'hui, la géométrie peut exister indépendamment d'une interprétation quelconque de ses concepts primitifs." Sur cette même voie, c'est Gino Fano qui avait proposé, je crois le premier, une géométrie finie. Or, il ne semble pas qu'il existe une plus grande tendance à l'abstraction dans l'analyse générale que dans la géométrie finie.

D'autre part, même la position initiale de Volterra sur la thèse de Fréchet semble bien loin d'être hostile. Il faut dire tout de suite que la publication même de la thèse dans les *Rendiconti di Circolo Matematico di Palermo* n'était pas due au hasard, mais elle était un choix délibéré de Volterra qui avait été chargé, par le directeur des *Rendiconti* Guccia, de rechercher en France les mémoires dignes d'intérêt particulier et qui pourraient servir au *Circolo* pour son effort de développement alors particulièrement intense[1].

Il s'agit donc d'un vrai choix délibéré et significatif, probablement inspiré par Hadamard, mais accepté sans hésitation par Volterra et les responsables du *Circolo*. Le désintérêt ultérieur de Volterra lui-même pour les développements de l'analyse générale et de la topologie n'est pas, en lui-même, très significatif. En effet, il ne se limite habituellement à rappeler brièvement les développements de l'analyse fonctionnelle de l'école française que pour s'excuser de ne pas avoir le temps de les traîter. Mais c'est ici une position strictement personnelle, qui n'est pas propre à l'école italienne, due surtout à l'attention qu'il porte aux problèmes en liaison avec les applications des mathématiques à la biologie et à l'économie.

En effet, l'homme qui, au contraire, en Italie, semble plus directement intéressé par les développements de l'analyse fonctionnelle en France est Salvatore Pincherle, qui avait fait ses études secondaires en France et avait suivi les cours de Weierstrass à Berlin en 1877-1878. C'est encore une preuve de l'esprit ouvert vers le monde de la génération des mathématiciens italiens immédiatement postérieure à celle du *Risorgimento*, de Betti, Brioschi, Casorati, Cremona et Beltrami. Pincherle entra à Bologne, dès 1889, en contact avec Arzelà, orientant ses études vers l'analyse fonctionnelle.

Son premier rapprochement avec l'école française remonte au premier Congrès international des mathématiciens de 1897 lorsque, après la conférence de Hadamard *Sur certaines applications possibles de la théorie des ensembles* (p.201-202 des *Verhandlungen des ersten internationalen Mathematiker-Kongresses*, Leipzig(Teubner), 1898) - qu'on peut considérer un peu comme le manifeste du programme dans lequel les recherches de Fréchet trouveront leur plein développement - il intervint pour souligner les analogies entre le point de vue de Hadamard et celui développé dans les années 1880 par l'école italienne, et en notant (p.202) comment "plusieurs géomètres italiens ont, sous divers points de vue, regardé les fonctions comme les points d'un ensemble et même d'un continuum".

Pincherle cite à ce sujet Ascoli, Volterra, Arzelà et lui-même, et je pense que c'est à peu près depuis cette date que l'école française adaptera pleinement ses méthodes aux méthodes italiennes, en les assimilant et en les généralisant sous plusieurs aspects.

Une mise au point des rapports entre l'école française et l'école italienne a été faite par Hadamard lui-même au Congrès de Bologne de 1928 (*Le développement et le rôle scientifique du calcul fonctionnel*, p.143-161 du t.I des *Atti del Congresso internazionale dei Matematici*, Bologna(Zanichell), 1929), durant lequel Pincherle était président. Mais ce n'est sûrement pas seulement un geste de courtoisie d'hôte qui pousse le grand mathématicien français à souligner l'influence du fondateur de l'*Unione Matematica Italiana* dans le développement des idées-phares du calcul fonctionnel.

En effet, Pincherle était arrivé,par une série de mémoires d'intérêt considérable, à des fondements organiques et de grande ampleur, bien qu'ils n'aient pas donné, il me semble, immédiatement des fruits très significatifs.Je me réfère surtout au *Mémoire sur le calcul fonctionnel distributif* paru dans les *Mathematische Annalen* en 1897 (t.49, p.325-382).

Je voudrais souligner que le point de vue de Pincherle est déjà extrêmement général, malgré la forte restriction faite au début de son mémoire en choisissant comme espace l'espace des fonctions *analytiques*, ce qui limite sensiblement la généralisation des résultats.

De toute façon, déjà dans le mémoire précité de 1897, Pincherle avait exposé de façon complète la structure d'algèbre linéaire soumise aux méthodes d'analyse fonctionnelle, et il avait justement souligné comment le point de départ de sa théorie a été l'extension du langage de l'algèbre linéaire de dimension finie (qu'il emprunte à la reconstruction de Peano à partir des travaux de Grassmann) au cas de dimension infinie (p.330-331) :

> "Nous considérons l'ensemble de ces séries comme une variété ou espace (que nous appelons espace fonctionnel) à un nombre infini de dimensions : chaque série est un élément ou point de cet espace, et le système des coefficients de la série peut se regarder comme le système de ses coordonnées. Ces opérations distributives donnent des correspondances de cet ensemble sur lui-même, correspondances qui sont analogues aux homographies et se réduisent aux homographies mêmes lorsqu'on les applique à des variétés à un nombre fini de

dimensions contenues dans l'espace fonctionnel."

Comme on peut le voir, l'agencement de la théorie par Pincherle est un agencement fondé sur le concept d'opérateur linéaire, et il est innovateur, car il anticipe de plusieurs années sur les travaux de Schmidt et de Fréchet (1908) de "géométrisation" de l'espace de Hilbert, tandis que dans le cadre de mêmes recherches et la même année, dans un mémoire intitulé *Sull'operazione aggiunta* (Rendiconti della R. Acc. delle Scienze dell'Istituto di Bologna (Nuova Serie), 2(1897-1898), 130-139 = *Opere scelte*, vol.II, p.77-84, Roma(Ed. Cremonese), 1954), il introduisit, dans le contexte de l'espace S des fonctions analytiques, le concept de forme bilinéaire et d'ajoint d'un opérateur linéaire relativement à la forme donnée. Dans ce cadre, otée, je le répète, la restriction de travailler sur des fonctions analytiques (restriction d'ailleurs qui n'est pas essentielle, et que Pincherle lui-même éliminera déjà en 1901 dans son livre et ultérieurement sous l'influence des travaux de l'école de Hilbert), il arrive à exprimer un grand nombre de concepts de Fréchet et de Schmidt, de même ceux élaborés en 1906 par Hellinger et Toeplitz.

Voici comment s'exprime Pincherle (p.82-83) :

"Les éléments φ de S , que nous appellerons *points*, à savoir les puissances entières positives de la variable x , convergent à l'intérieur d'un cercle de centre $x = 0$ et de rayon supérieur à un nombre positif r ; les éléments δ de S' , que nous appellerons *plans* [[cette terminologie cache complètement la notion de dualité]], à savoir les séries de puissances entières négatives de x convergeant en dehors d'un cercle de centre $x = 0$ et de rayon inférieur à r [[...]]. On aura par exemple :

$$\varphi = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots ,$$
$$\delta = \dots + \frac{u_0}{x} + \frac{u_1}{x^2} + \dots + \frac{u_n}{x^n} + \dots .$$

Comme opération (φ, δ) on définira le reste, pour $x = 0$, de $\delta(x)\varphi(x)$, à savoir

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(r)} \varphi(x)\delta(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n ,$$

où, dans l'intégrale définie, l'intégration est étendue à la circonférence (r) et où se vérifient immédiatement les conditions [[la bilinéarité de (,)]] imposées dans le § 2 à une telle opération [[...]]. Soit maintenant A une opération distributive de de détermination unique qui, appliquée à des points de l'espace S qu'on vient de définir, reproduise des points du même espace. Celle-ci pourra, par exemple, être définie moyennant les séries (les points) qu'elle fait correspondre aux puissances entières positives (et nulles) de la variable x , à savoir par

$$A(x^n) = a_{n_0} + a_{n_1} x + \dots + a_{n_i} x^{n_i} + \dots ,$$

ou, ce qui revient au même, par le tableau à double entrée

$$(Q) \begin{cases} a_{00} a_{01} a_{02} \dots a_{0\nu} \dots \\ a_{10} a_{11} a_{12} \dots a_{1\nu} \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases} .$$

De façon analogue, l'opération $\bar{A}$ adjointe de A , et qui transforme les plans de S' en plans, est définie par :

$$\bar{A}\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right) = \frac{b_{n_0}}{z} + \frac{b_{n_1}}{z^2} + \dots + \frac{b_{n_\nu}}{z^{\nu+1}} + \dots ;$$

soit par le tableau à double entrée

$$(Q') \begin{cases} b_{00} b_{01} b_{02} \dots b_{0\nu} \dots \\ b_{10} b_{11} b_{12} \dots b_{1\nu} \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases} .$$

Mais l'opération $\bar{A}$ est donnée, par définition, par

$$\int_{(r)} A[\varphi(x)]\, \delta(x)\, dx = \int_{(r)} \varphi(x) \bar{A}[\delta(x)]\, dx .$$

Or, en faisant $\varphi(x) = x^m$, $\delta(x) = \dfrac{1}{x^{\mu+1}}$ on obtient immédiatement

$a_{m\mu} = b_{\mu m}$, d'où : *Si l'opération $\bar{A}$ est adjointe de A , le tableau à double entrée (Q') est obtenu à partir de (Q) en échangeant les lignes et les colonnes, et réciproquement.*"

Cette longue citation m'a paru importante pour démontrer combien a été poussée en avant la formalisation abstraite de l'analyse dans le cadre du langage des espaces vectoriels topologiques par l'école italienne à la fin du dix-neuvième siècle, pour donner une juste image de la "rencontre" entre le point de vue de Pincherle et celui de Hadamard au Congrès de Zurich en 1897. Dès ce moment, les deux écoles travaillent en se rencontrant fréquemment. A chaque nouveau résultat de l'école française (Hadamard - Fréchet), de l'école allemande (Hilbert - Hellinger, etc.) ou de l'école suédoise (Fredholm), répond immédiatement un travail de Pincherle, jusqu'aux études de 1911-1913 dans lesquelles il récrit, dans son formalisme, les résultats de l'école hilbertienne sur le concept de spectre d'un opérateur. Mais, probablement, ses limites se trouvent précisément dans le fait que, au grand effort de relecture et de réinterprétation des résultats des écoles européennes, il ne correspond pas un aussi important ensemble de résultats originaux, et cela rendait les résultats de Pincherle pour ainsi dire plus "langagiers" que d'un contenu intéressant,très peu diffusés sur le plan européen. De toute façon, la théorie de S. Pincherle avait été , déjà en 1901,exposée de façon systématique dans un livre d'une tonalité tout à fait abstraite, écrit avec U. Amaldi : *Le operazioni distributive*, Bologna(Zanichelli).

A l'intérieur de l'école française, les travaux qui impressionneront le plus Pincherle sont ceux de Hadamard de 1903 (*Sur les opérations fonctionnelles*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, t.136, p.351-354) et la série d'articles de Fréchet *Sur les opérations linéaires* parus en trois fois dans les *Transactions of the American Mathematical Society* (t.5(1904), p.493-499 ; t.6(1905), p.134-140 ; t.8(1907), p.433-446). Mais, il semble, que le premier de ces mémoires de Fréchet ait été influencé de son côté par le livre de Pincherle et Amaldi ; du moins, Fréchet montre qu'il le connaît assez bien, d'ailleurs il le cite p.494. D'autre part, Hadamard, dans son livre *Leçons sur le calcul des variations* (Paris(Hermann), 1901), fait explicitement référence aux travaux de Pincherle, surtout en ce qui concerne le concept d'opérateur linéaire.

Celui qui a suivi en France un point de vue analogue à celui de Pincherle c'est C. Bourlet (1866-1913), qui a exposé ses idées dans le mémoire *Sur les opérations en général et les équations différentielles linéaires d'ordre infini*, paru dans les *Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure* (3^{e} série, t.14(1897), p.133-190).

Comme on l'a déjà dit, c'est précisément Hadamard qui soulignera, en 1928, le rôle de Pincherle. Mais, revenant au point de départ de cette discussion, je crois qu'on peut dire que l'évolution, pour ainsi dire "naturelle", des idées de l'analyse fonctionnelle avait été portée en Italie à un développement en connexion avec celui concomitant existant dans le reste de l'Europe, et qui s'entrecroise avec les développements de l'école française avec laquelle il converge sur plusieurs points (bien qu'il reste très en retrait sur le plan des conceptions topologiques abstraites).

Le troisième exemple que je voudrais proposer concerne la géométrie algébrique. Il ne s'agit pas ici d'une comparaison exhaustive de la "grande" géométrie italienne de Enriques-Castelnuovo-Severi et la géométrie française de Poincaré-Picard. Le temps m'en manquerait, et d'autre part une telle comparaison a été déjà faite par Dieudonné (dans son *Cours de géométrie algébrique*, t.I, Paris(Presses Universitaires de France), 1974), qui a mis en relief les différences entre la théorie transcendante de l'école française et l'école "birationnelle" qui a prévalu en Italie.

Je veux simplement mettre ici en relief, très brièvement, quelques aspects des relations entre le représentant principal de l'école "birationnelle" française G. Halphen et le fondateur du *Circolo matematico di Palermo* G.B. Guccia.

L'influence du brillant savant français sur la première génération des géomètres algébriques italiens fut considérable. Ce n'est pas le cas ici d'exposer en détail cette influence qui a été parfois sous-estimée par rapport à celle,malgré tout prédominante, de Max Neother.

Je reporterai ici un passage d'une lettre de Guccia à Halphen de l'année 1888 qui illustre la situation de la géométrie en Italie, destinée à se modifier bien vite avec Segre, Bertini et Castelnuovo (mais, encore en 1891, Segre exprimait des perplexités analogues à celles de Guccia) :

> "Je serais on ne peut plus heureux si vous vous décidiez à m'écrire une Note sur ce sujet pour les *Rendiconti* de Palerme. Ce serait le seul moyen de secouer (par votre autorité) l'indifférence que les géomètres italiens apportent dans ces sujets de recherches très délicats et très difficiles.
>
> A l'heure qu'il est, ils aiment mieux à publier de longs mémoires sur la géométrie *générale* (sans singularités) ce qui est plus facile et ce qui leur permet de faire des interminables et montones applications du principe de correspondance de Chasles, desquelles nous avons par-dessus la tête !"

Il écrit encore, soulignant la rigueur qui a toujours distingué l'oeuvre de Halphen sur un terrain périlleux comme celui de la géométrie algébrique :

> "Dans chaque question de géométrie dont vous vous êtes occupé, vous y avez apporté une telle *rigueur de démonstration* que maintenant on doit vous écouter sans discuter."

La correspondance entre Guccia et Halphen concerne en bonne partie le développement, par Guccia, d'un théorème sur le nombre d'intersections de trois surfaces en un point singulier et qui étend un problème analogue - mais concernant deux surfaces - traité dix ans environ auparavant par Halphen.

Il s'agit d'un théorème très intéressant, si l'on tient compte du fait qu'en 1888 la théorie des surfaces algébriques en était encore à sa préhistoire.

La mort a fauché Halphen au beau milieu de sa production scientifique et de sa discussion avec Guccia, qui semblait convaincu d'avoir ramené l'auteur français - occupé alors en 1889 par la rédaction de son grand traité sur les fonctions elliptiques - sur les chemins de la géométrie. En fait, il écrivait, dans ce qui est probablement sa dernière lettre à Halphen : "Maintenant je me félicite avec moi-même de vous avoir fourni l'occasion de retourner à la géométrie et [[...]] comme je n'en doute pas [[...]] à donner à mon théorème, par une autre voie, la généralité qui lui manque." Son enthousiasme était justifié. Abandonnant pour un moment seulement le sentiment inflexible que l'histoire ne se fait pas avec des "si",je me permets de considérer que la mort prématurée de Halphen a enlevé, sans aucun doute, à l'école française l'homme qui aurait pu, par tradition et par formation, s'intéresser à une comparaison d'idées et de points de vue riche et stimulante avec l'école italienne.

On peut considérer comme le dernier hommage de l'école italienne à la mémoire de Halphen l'attribution à Severi en 1908 de la "Médaille Guccia", avec la référence explicite au grand mémoire de Halphen de 1882 (*Sur la classification des courbes gauches algébriques*, Journal de l'Ecole polytechnique, 52^{e} cahier, p.1-200), dans le but de ranimer le secteur de l'étude des courbes gauches algébriques, qui se trouvait dans un état de dépérissement relatif par rapport au développement impétueux des autres branches de la géométrie algébrique.

Au moment de l'attribution de la Médaille Guccia, les mathématiciens italiens obtenaient une consécration officielle de la part des mathématiques françaises, consécration qui est aussi une comparaison des méthodes de deux écoles, qui atteint, précisément dans les premières années de ce siècle, une force et un intérêt extraordinaires :je me réfère à l'attribution du prestigieux prix Bordin, par deux fois, aux mathématiciens italiens, en 1907 à Enriques et Severi et en 1909 à Bagnera et De Franchis. Le sens de cette attribution est souligné, en particulier, par le fait que le sujet du concours était particulièrement "français" ; il s'agissait, en effet, comme le précise son énoncé, de "reconnaître d'une manière générale si les coordonnées des points d'une surface algébrique peuvent s'exprimer en fonctions abéliennes de deux paramètres". Un thème donc très cher à l'école française, et en particulier à Picard. Le mémoire de Enriques et Severi qui a obtenu le prix a eu une grande importance historique, et a donné même lieu à de nombreuses polémiques. Le rapport de Georges Humbert souligne en effet (*Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t.145(1907), p.982-983) :

"Le problème posé par l'Académie peut donc être considéré comme résolu pour les surfaces *irrégulières*. En ce qui concerne les surfaces *régulières*, les auteurs se bornent à étudier celles qui correspondent à une involution formée, sur [[une surface]] F , par des transformations ordinaires [[...]]. Pour compléter la solution du problème initial, il resterait donc à poursuivre la même étude, dans le cas d'une involution comprenant des transformations singulières."

Mais, comme De Franchis l'a fait observer malicieusement, c'est précisément dans le cas des transformations singulières que se trouverait la vraie difficulté du problème.

Mais ce genre de discussion ne concerne pas tant l'histoire de la géométrie algébrique que celle de la communauté mathématique italienne, et elle n'a aucun intérêt pour notre conférence.

Je veux, au contraire, me limiter ici à l'analyse de l'influence qu'ont eue les deux prix Bordin *italiani* - et les idées de Picard et Humbart - sur le prix Bordin de 1919 Salomon Lefschetz, prix obtenu pour son mémoire *On Certain Numerical Invariants of Algebraic Varieties, with Application to Abelian Varieties* (Trans. Amer. Math. Soc., 22(1921), 327-482 = *Selected Papers*, p.41-196, Bronx(Chelsea), 1971).

C'est, à mon avis, un bel exemple de la manière dont un prix de l'Académie a pu donner, à travers une série de sujets profondément liés entre eux et approfondis, une impulsion importante au développement de la géométrie algébrique dans une direction riche de résultats - l'étude des variétés abéliennes- et dans une unité profonde de sujets et de méthodes italiennes et françaises, dont le travail de Lefschetz est un bel exemple.

Les travaux que je vais examiner très brièvement - à part celui de Lefschetz - sont les suivants :

F. Enriques et F. Severi : *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques* (Acta Math., t.32(1909), p.283-392 ; t.33(1910), p.321-403)) (Prix Bordin 1907).

G. Bagnera e M. De Franchis : *Le superficie algebriche le quali ammetono una rappresentazione parametrica mediante funzioni iperelittiche di due argomenti* (Mem. di Mat. e di Fis. Soc. It. Sci. dei XL, (3), t.15(1908), p.253-343) (mémoire écrit à l'occasion du même prix Bordin, mais non envoyé).

G. Bagnera et M. De Franchis : *Le nombre* ρ *de M. Picard pour les surfaces hyperelliptiques et pour les surfaces irrégulières de genre zéro* (Rend. di Circolo Mat. di Palermo, t.30(1910), p.185-238) (Prix Bordin 1910) .

Ce fut le travail de Scorza : *Intorno alla teoria generale delle matrici di*

Riemann e ad alcune sue applicazioni (Rend. del Circolo Mat. di Palermo, t.41(1916), p.263-380) qui agit comme filtre fondamental entre ces mémoires et ceux de Lefschetz, surtout pour réinterpréter dans ce contexte les idées de Humbert sur les matrices de Riemann. A ces travaux se relie celui de G. Castelnuovo : *Sulle funzioni abeliane* (Rend. Acc. dei Lincei, (5), t.30(1921), p.50-55, 99-103, 195-200, 355-360 = *Memorie scelte*, p.529-549, Bologna(Zanichelli), 1937) qui est presque le seul mémoire de géométrie algébrique publié par Castelnuovo après 1906, et qui a eu une si grande influence, de nombreuses années plus tard (1959), sur le traité désormais classique de S. Lang.

Après cette revue bibliographique, il me reste encore bien peu de temps pour aborder le reste, surtout si l'on tient compte de la complexité des techniques utilisées. Je voudrais seulement souligner que l'ensemble de ces travaux est un ensemble de mémoires difficilement séparables, mais il est très étrange que les noms de Bagnera, de Franchis, Scorza et Humbert aient pratiquement disparu des histoires écrites sur cette matière.

Je vais commencer par rappeler que Castelnuovo déclare de façon explicite (p. 549) :

> "Les fréquentes conversations avec S. Lefschetz durant l'hiver 1921 [[...]] me poussèrent à publier une partie d'une recherche étendue sur les fonctions abéliennes que j'avais entreprise depuis plusieurs années dans le but d'éclaircir et d'étendre les importants résultats de G. Humbert sur les fonctions hyperelliptiques singulières."

C'est encore lui qui a tracé l'histoire que je voudrais contribuer à reconstruire ici (p.529) :

> "Le professeur Lefschetz, dans le mémoire [[...]] qui obtint le prix Bordin [[...]] établit d'importants résultats sur les fonctions abéliennes, avec une méthode importante fondée sur des considérations d'*analysis situs* [[...]]. J'étais arrivé moi-même depuis quelque temps aux résultats analogues, en suivant une direction purement analytique qui fut, à vrai dire, déjà indiquée par Frobenius, mais ici elle est dégagée des parties accessoires, elle est considérablement développée et mise mieux en lumière, en utilisant les points de vue géniaux de Scorza et du langage de la géométrie algébrique.
>
> Cette même direction permet d'étendre et de simplifier les procédés appliqués par M. Humbert au cas de deux variables."

Les travaux de Humbert des années 1899-1900 (*Sur les fonctions abéliennes singulières*, Journal de Math. pures et appl., (5), t.5(1899), p.233-350 ; t.6(1900), p.279-386) constituent un peu le point d'arrivée des études de l'école française (Picard et surtout Poincaré) sur les fonctions abéliennes de deux variables et de leurs groupes de transformations. Etant donné qu'une variété abélienne de dimension n est une variété algébrique représentée paramétriquement par des fonctions abéliennes de n variables (aux périodes près), les études de l'école française avaient posé les fondements de l'étude des variétés abéliennes de dimension deux (appelées surfaces hyperelliptiques) et elles peuvent être considérées comme les fondements de la théorie classique des variétés abéliennes.

Les théories de l'école française et celles de l'école italienne trouvèrent un premier terrain commun quand Severi démontra que l'invariant ρ de Picard (c'est un entier positif ou nul tel que $\rho+1$ courbes arbitraires sur une surface algébrique soient toujours les courbes logarithmiques d'une intégrale de 3^e espèce et que, au contraire, on peut toujours trouver ρ courbes pour lesquelles il n'y a pas d'intégrale de 3^e espèce ayant cette propriété) n'est autre - pour des surfaces régulières - que le nombre maximum de courbes algébriquement indépendantes sur la même surface.

Sous l'impulsion de Humbert et de Picard, l'Académie des Sciences de Paris décidait d'orienter les recherches dans cette direction en proposant (en 1905) comme sujet pour le prix Bordin la classification de toutes les surfaces hyperelliptiques. Les mémoires qui traitent ce sujet sont ceux,d'une part, de Enriques et Severi et, d'autre part, de Bagnera et De Franchis. Les deux mémoires (dont seulement le premier parvint à temps à l'Académie et fut "couronné" en 1907), en faisant abstraction de violentes polémiques, sont complémentaires. Aucun des deux ne répond complètement à la question posée par l'Académie, mais, ensemble, ils donnent une classification complète des surfaces hyperelliptiques.

Le sujet suivant, proposé en 1907 (pour l'année 1909), voulait poursuivre les recherches dans la même direction (*Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t.145, p.1068) :

> "On propose de faire une étude approfondie de cet invariant [[le nombre ρ de Picard]] et de chercher notamment comment on pourrait trouver sa valeur exacte, au moins pour des catégories étendues de surfaces."

Bagnera et De Franchis choisirent d'étudier les surfaces hyperelliptiques (excepté celles irrégulières de genre zéro), en développant une recherche qui était, de ce point de vue-là, extraordinairement accomplie, en retrouvant une série de résultats qui utilisaient des techniques facilement généralisables.

Ce mémoire contient, comme l'a signalé Lefschetz, presque tous les résultats des recherches sur les variétés abéliennes dans le cas de dimension deux. Nous sommes donc en présence d'une étude exhaustive du calcul explicite des invariants pour une classe étendue de surfaces, ce qui est extrêmement rare en géométrie algébrique, et extrêmement difficile à réaliser en pratique. Le rapport de Picard soulignait - en plus d'une histoire intéressante du problème basée sur l'étude des mémoires cités ci-dessus - la difficulté et l'élégance de l'étude des deux mathématiciens italiens (*Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t.149(1909), p.1187-1188) :

> "On comprend à quelles discussions délicates et minutieuses conduit pour ces vingt types la recherche des invariants ρ et ρ_0 [[...]]. Les auteurs ont montré une grande habileté analytique et géométrique dans l'application à une question bien délimitée des travaux récents sur la théorie des surfaces algébriques, et plusieurs théorèmes incidemment obtenus sont d'une grande élégance."

La théorie des surfaces hyperelliptique était ainsi presque épuisée dans ses grandes lignes. De toute façon, la voie à la généralisation aux variétés abéliennes de dimension quelconque était de la sorte complètement déblayée, voie ouverte en utilisant dans le cas général les méthodes de la dimension deux. Et c'est précisément cette généralisation qui a été poursuivie par Lefschetz dans son mémoire "couronné" de 1919.

Picard pensait sûrement à une telle généralisation lorsque, terminant son rapport, il écrivait :

> "L'Académie aurait sans doute été heureuse de rencontrer des résultats d'un caractère plus général ; mais, dans des questions aussi difficiles que la question posée, les recherches particulières poussées jusqu'à leur dernier terme ont une réelle valeur et peuvent fournir d'intéressants exemples propres à guider les travaux ultérieurs."

Le premier pas sur les chemins des travaux ultérieurs fut fait grâce aux recherches de Scorza et de Rosati. Le travail de 1916 de Scorza déjà cité est, je crois, le premier qui a réorganisé de façon cohérente et générale les résultats connus, en en obtenant de nouveaux, en reliant entre elles, de façon précise, la théorie des fonctions abéliennes à n paramètres et la géométrie algébrique hyperspatiale, posant ainsi les fondements de la théorie classique des variétés abéliennes.

Il serait trop long d'exposer, même avec un minimum d'éléments, le point de vue de Scorza, mais je rappellerai ici seulement que celui-ci est basé sur une étude systématique des propriétés de ce qu'il appelle matrice de Riemann, c'est-à-dire une matrice qui peut être considérée comme un tableau des périodes primitives d'un corps de fonctions abéliennes. La liaison entre les études de Scorza et celles de Humbert réside dans le concept d'"index de singularité" d'une matrice de Riemann. Une matrice Ω de type $(n,2n)$ à coefficients entiers est une matrice de Riemann si, et seulement si, il existe une forme bilinéaire rationnelle Φ identiquement nulle sur les lignes de Ω et telle que $A = -\frac{1}{2i}\,\Omega\Phi\Omega$ soit une forme hermitienne définie positive.

L'ensemble des Φ , associées à une matrice de Riemann, forme un espace vectoriel dont la dimension est égale, par définition, à $1+k$; k prend le nom d'index de singularité de Ω . L'introduction de ce concept a permis à Humbert de faire faire des progrès décisifs à la théorie des fonctions abéliennes de deux paramètres. L'extension des concepts de Humbert au cas général et leur organisation suivant un programme organique peut se résumer dans les termes suivants : "fonder l'étude des variétés abéliennes sur l'examen organique et ordinaire des matrices de Riemann, tout à fait indépendant des différentes interprétations concrètes dont elles sont susceptibles".

La seconde partie du mémoire de Scorza est consacrée à l'application de ces concepts généraux à l'étude des transformations birationnelles d'une surface hyperelliptique en elle-même. Cette étude est précédée d'un examen général du problème dans le cas de variétés abéliennes de dimension quelconque.

J'espère que l'inévitable schématisation de mon exposé ne vous a pas empêché de saisir, dans le point de vue de Scorza, un net changement par rapport au développement général de la géométrie algébrique classique italienne. L'étude générale et abstraite, dégagée de tout recours à l'intuition, est en fait considérée ici comme l'instrument le plus propre pour obtenir des résultats, même dans le cas des problèmes déterminés et particuliers. Il s'agit d'un changement de point de vue que l'école italienne ne saura pas saisir pleinement.

A part la référence aux travaux déjà cités de Humbert, il est intéressant de noter la remarque suivante de Lefschetz (p.78) :

"The very interesting method which dominates his [[Scorza's]] and Rosati's investigations had been used previously without their being apparently awere of it by Cotty in his Paris thesis (1912) for the case $p=2$ [[*Les fonctions abéliennes et la théorie des nombres*, Toulouse(Privat)]]. Cotty attributes the idea to Humbert."

L'influence de Humbert aurait pu s'exercer indirectement sur Scorza par l'intermédiaire de Guccia, qui était, comme on le savait très bien, très lié avec Humbert.

Scorza poursuivra encore, en 1919, cette même direction. Dans un travail publié dans les *Rendiconti di Palermo*, t.45, p.1-204 : *Le algebre di ordine qualunque e le* *matrici di Riemann,* il affirme que la théorie des matrices de Riemann peut être exposée de façon la plus complète dans le cadre de la théorie abstraite des algèbres sur un champ quelconque, comme celui introduit par Dickson en 1905. Il écrit (p.5) :

> "La théorie des algèbres m'a conduit, grâce aux matrices riemanniennes, non seulement à des propositions d'une généralité et d'une précision absolument inespérées, mais elle m'a même paru d'une telle puissance heuristique, d'une rapidité si souple et d'une si grande élégance, que je crois pouvoir l'indiquer sûrement comme l'un des instruments de recherche le plus puissant et efficace pour toutes les questions d'analyse et de géométrie, qui trouvent leurs fondements les plus naturels dans les théories des matrices de Riemann."

Il s'agit d'un point de vue hardi et nouveau qui, tout en laissant inchangé l'objet de la géométrie algébrique classique - les variétés complexes - en bouleverse complètement les méthodes.

Dans la même année 1919, comme je l'ai déjà répété plusieurs fois, Lefschetz obtient le prix Bordin. Ce n'est pas ici la place d'exposer, et même dans les grandes lignes, le travail de Lefschetz. Il suffit seulemnt de dire ici qu'il est basé entièrement sur une synthèse des conceptions de Scorza et de ceux de la topologie algébrique, comme Lefschetz l'a affirmé lui-même plusieurs fois.

Il est donc tout à fait naturel que, lorsque Lefschetz a voyagé en 1920 en Italie, il ait cherché avec insistance à entrer en contact précisément avec Scorza et avec l'école sicilienne de géométrie algébrique.

Comme on l'a déjà dit, l'oeuvre de Lefschetz représente le moment culminant du développement de la théorie classique des variétés abéliennes, une théorie dans laquelle les méthodes géométriques et algébriques italienne et française aboutirent à la synthèse la plus complète. Cela est mis en évidence plusieurs fois par le mathématicien américain, en particulier dans le passage suivant :

> "Parmi les divers écrits,qui m'ont influencé pendant ce travail, sont à signaler tout particulièrement: les mémoires de Poincaré sur l'*analysis situs* et sur la distribution des courbes d'une surface algébrique, les travaux de M. Picard, tels qu'ils sont exposés dans le traité qu'il a écrit en collaboration avec M. Simart, enfin ceux des superbes géomètres de l'école italienne."

Malheureusement, l'historiographie incomplète sur la théorie des variétés abéliennes passe aujourd'hui complètement sous silence l'apport de Scorza et Humbert, apport qui, au contraire, me semble très significatif - comme le savaient, d'autre part parfaitement, les auteurs contemporains de Scorza.

La monographie de Baldassarri *Algebraic Varieties* (Berlin(Springer), 1956) elle-même, pourtant si documentée sur l'apport italien, ne cite même pas une seule fois Scorza.

Personnellement, je retiens, au contraire, que le groupe constitué par Scorza, Rosati et Torelli a constitué une tendance bien précise et significative de la géométrie algébrique italienne, une ligne à laquelle se relie idéalement le dernier travail de Castelnuovo déjà cité. Castelnuovo écrivait lui-même à propos de Humbert :

> "Tandis que je corrige les épreuves, il me parvient la nouvelle de la mort de G. Humbert. Je salue avec révérence la mémoire de ce grand savant dont les recherches sur les fonctions abéliennes ont inspiré, dans les dix dernières années, tant de travaux de l'école italienne."

Le dernier domaine dont je voudrais parler est celui de l'organisation des mathématiques. Il me semble que dans cette partie les rapports aient été très étroits, même sur une question fondamentale : le problème des rapports entre les mathématiques allemandes et françaises, problème qui avait été très accentué par la guerre franco-prussienne de 1870.

Je diviserai, très schématiquement, les aspects organisationnels de l'évolution des mathématiques au dix-neuvième siècle en deux grandes phases : la première phase, qui se déroule de 1820 à 1870 environ, est caractérisée par la définition des mathématiques comme science autonome, même sur le plan organisationnel, par rapport à l'ensemble des autres sciences, y compris la physique. C'est une orientation caractérisée par la fondation des revues mathématiques spécialisées (1810 : *Annales de Mathématiques pures et appliquées* de Gergonne ; 1826 : *Journal für die reine und angewandte Mathematik* de Crelle ; 1836 : *Journal de Mathématiques pures et appliquées* de Liouville) en premier lieu, puis par la fondations des organisations nationales des mathématiciens (1865 : London Mathematical Society ; 1875 : Société Mathématique de France). Mais, déjà en 1870, s'était manifestée une tendance, extrêmement forte, au renforcement des orientations internationales et surtout à leur organisation systématique.

Naturellement, il a toujours existé des rapports internationaux entre les savants, mais ces rapports étaient de caractère surtout individuel : le voyage de Lie et Klein à Paris en 1870, dont j'ai déjà parlé, est un exemple typique du genre de rapports qui existaient entre les savants de l'époque.

Mais, comme je l'ai dit précédemment, le climat était déjà prêt pour le passage à une forme organisée de ces rapports. La guerre franco-prussienne déchira, d'un seul coup, les liens profonds déjà tissés et établis, provocant un retard d'environ vingt ans dans leur rétablissement (le premier Congrès international n'eut lieu, comme on le sait, qu'en 1897). Entre temps, le problème du développement de l'organisation des contacts internationaux à l'intérieur de la communauté des mathématiciens fut pris en main par les pays "neutres" : la Suisse, la Suède et l'Italie. Dans cette démarche, à part les noms des grands mathématiciens tels que Klein, Poincaré, Jordan, etc., apparaissent des personnages moins connus, mais de grande importance : en France Charles Agnès Laisant et Georges Humbert, en Italie Giovanni Guccia, en Suisse Henri Fehr et en Suède Gösta Mittag-Leffler. Le premier fait concret dans cette direction est la publication, à partir de l'année 1882, des *Acta Mathematica* à Stockholm.

Le directeur des *Acta* était Mittag-Leffler, mais je suis convaincu que, parmi ceux qui ont inspiré la fondation de cette revue, il y avait Charles Hermite[2] et Georg Cantor (mise à part l'approbation bienveillante de Weierstrass, qui jouait désormais le rôle du "père" des mathématiques européennes). L'association des deux noms peut sembler étrange, étant donnée l'"horreur" avec laquelle Hermite avait accueilli les nouveautés cantoriennes[3]. Mais il n'en est pas ainsi. Cantor éprouvait une profonde amertume à cause des difficultés rencontrées en Allemagne de la part des instances académiques inspirées par Kronecker[4] et cherchait, sur le plan international,l'espace "vital" qui, en Allemagne, lui était contesté (et c'est là une des contradictions bien précises, dont je parlais au début, et qui me font accepter difficilement un concept tel que le concept de tradition scientifique d'un pays . C'est la dialectique entre les différentes conceptions qui a elle des aspects nationaux, et non pas le fait de prévaloir l'une sur l'autre: il est difficile de trouver un pays qui a montré autant d'hostilité envers Cantor, et qui, inversement, a assimilé aussi profondément ses idées, que l'Allemagne). Hermite, de son côté, sentait alors profondément les limites et les conséquences négatives que les limitations nationales imposaient à la recherche mathématique.

Ensuite, en 1884, fut fondé le *Circolo Matematico di Palermo*, qui, dès l'année 1887, prenait un caractère nettement international, refusant de se confiner au plan local. Même si la tradition italienne avait été plus liée aux mathématiques allemandes (Klein surtout), le *Circolo* apparaît, tout de suite, comme une forme de collaboration entre les mathématiciens français et italiens.

Laisant, Humbert, Jordan et Halphen donnèrent tous un apport considérable aux premières années de vie du *Circolo*, et Jordan utilisa même son prestige indiscutable pour contribuer à ses premiers succès internationaux. Guccia, de plus, opposa souvent l'attitude accueillante de Jordan et des mathématiciens français à l'attitude bien réservée de certains milieux académiques italiens.

Poursuivant mon panorama rapide, je rappelle que dans les années 1890 le problème de l'association internationale des mathématiciens était posé de plus en plus nettement. Je cite quelques dates : en 1891 fut diffusé, dû principalement à Laisant, un *Projet d'association universelle internationale des mathématiciens*, déjà accompagné de status et dont il existe une copie manuscrite de Laisant dans les archives du *Circolo Matematico di Palermo* ; en 1893, Klein insistait, au Congrès de Chicago, sur la nécessité de la création d'une association internationale des mathématiciens.

En 1894, à Caen, au Congrès de l'association française pour l'avancement des sciences, on reprenait les mêmes idées, en avançant l'idée des Congrès internationaux. Finalement, en 1897, on arrivait au premier Congrès international des mathématiciens qui a eu lieu en Suisse neutre, à l'organisation duquel Laisant et Cantor apportèrent encore une fois une contribution essentielle.

Sur le plan concret, le premier Congrès n'obtint pas de résultats décisifs. Mais les bases furent jetées pour une coopération internationale plus étroite, du moins en ce qui concerne la didactique des mathématiques (la fondation de la revue *L'Enseignement Mathématique*, en 1899, à Genève, l'oeuvre de M. Fehr et C.A. Laisant, encore une fois, fut un résultat important, car il permit à la Commission Didactique Internationale d'avoir son propre organe de presse. Autour de cette Commission eut lieu une coopération vraiment significative pendant de nombreuses années, jusqu'à la première guerre mondiale. Parmi les grands mathématiciens qui consacrèrent une partie de leur activité à la didactique et qui se rencontrèrent pour discuter de ces problèmes, je citerai surtout F. Klein, E. Borel et G. Castelnuovo.) Mais la décision la plus importante fut de réunir, tous les quatre ans, les Congrès Internationaux de Mathématiques.

Les questions qu'aborda le Congrès n'étaient pas seulement des questions liées à une volonté génératrice de relations internationales (bien que cet aspect émotionnel ne soit pas à mésestimer, parce que, en cette même année 1897, les espoirs de créer un esprit sincère de compréhension entre les nations étaient grands, et je crois que, d'une façon générale, les mathématiciens avaient partagé les espoirs et les illusions si répendues alors) : il y avait aussi des questions d'ordre pratique abordées par le Congrès, telle, par exemple, l'opportunité des renvois bibliographiques.

De toute façon, et malgré les espoirs, l'objectif de la construction d'un organisme international permanent des mathématiciens ne fut pas réalisé.

A cet objectif se consacrèrent très sérieusement les mathématiciens français et italiens durant la période qui va de 1904 à 1907. L'intention de présenter au Congrès de Rome un projet d'un organisme directeur si longtemps souhaité fut exposée durant un dîner de caractère très officiel, à Paris à l'Hôtel Continental, auquel prirent part Guccia, Darboux, Jordan, Poincaré, Appell, Painlevé, Humbert, Hadamard, Borel, André, Laisant, Fouret, Drach, Olivier et Boutroux (Picard étant empêché). Le compte rendu de cette réunion par *L'Enseignement Mathématique* en souligne les aspects officiels plutôt que ceux de la collaboration franco-italienne.

Le temps me manque pour approfondir ces questions, mais je voudrais souligner ici que les rapports entre les mathématiciens italiens et français furent fortement stimulés par des points de vue communs sur de nombreux problèmes. Il suffit de voir comment, dans les mêmes années 1906-1907, Borel et Enriques établissent de façon très analogue le rapport entre les mathématiques et la culture générale, donnant jour à deux revues qui s'influencèrent beaucoup mutuellement, à savoir *La Revue du Mois* et *Scientia*.

Il s'agit d'une conception des mathématiques qui - à partir du renouvellement profond de leurs méthodes et de leurs fondements - trouvèrent l'impulsion pour établir sur des bases différentes des rapports encore plus étroits avec les autres sciences. Ce fut une exigence profonde qui a entraîné successivement des hommes aussi divers que E. Cartan et Levi-Civita à envisager les "nouvelles" mathématiques dans leurs rapports avec la relativité, ou que Castelnuovo et Borel à chercher dans le calcul des probabilités ce sens du concret qui semblait se perdre ailleurs.

De toute façon, la forte dialectique qui a toujours existé entre les différentes conceptions des mathématiques (géométrie analytique - synthétique, euclidienne - non euclidienne, ou,plus récemment, existence par constructibilité ou par non-contradiction, mathématique zermeloiennes ou non zermeloiennes) a fait progresser la recherche sans jamais mettre en doute leur profonde unité de fond. Etant donné que les différentes tendances se sont toujours développées avec des allures et des méthodes différentes suivant les pays, le besoin d'internationalité de la science ne s'est jamais éloigné du besoin de liberté dans la recherche, et c'est précisément dans ce sens-là que s'orientèrent les efforts réunis des mathématiciens italiens et français.

Permettez-moi donc en terminant de mettre l'une à côté de l'autre une phrase de Picard - prononcée dans le climat enthousiaste du Congrès de 1897 et qu'il a presque reniée vingt ans après lors de la terrible guerre qui lui a tant coûté sur le plan personnel - et une phrase de Michele De Franchis, le successeur de Guccia à la tête du *Circolo*. Picard avait dit à la fin du Congrès (p.61 des *Verhandlungen* déjà cités) :

> "Ce sera aussi un des résultats de ce congrès que de voir plus d'éclectisme se répandre entre les diverses méthodes scientifiques. Nous

> n'avons pas tous, fort heureusement, les mêmes tendances d'esprit [[...]]. Gardons-nous d'être exclusifs, et ayons pour tous les travailleurs consciencieux la même sympathie. Souvenons-nous que dans les mathématiques, comme dans les toilettes des dames, la mode n'est pas sans exercer une certaine influence. Je bois [[...]] à l'union de plus en plus profonde et féconde entre les différentes tendances de l'esprit mathématique."

Et dans un climat désormais brutalement changé, en 1919, De Franchis écrit :

> "Que l'on ne veuille pas avoir de contacts avec des personnes ignobles est juste, mais qu'il doive exister aussi le pêché originel du lieu de naissance, il me semble que cela ne peut pas se soutenir [[...]]. Ce qui [[...]] est hors de doute c'est que les distinctions qu'on veut faire entre les savants, selon leur pays d'origine, ôteront à la science pour longtemps son caractère international, ôtant à une partie les fruits du travail de l'autre partie [[...]]. Et prenez garde, car après cela [[...]] il est fatal que la collaboration scientifique se réactive, mais cependant notre société sera morte."

NOTES DE LA RÉDACTION

1 Voir p.179 du livre de A. Brigaglia e G. Masotto : *Il circolo Matematico di Palermo*, Bari (Ed. Dedalo), 1982. Ce livre important donne de nombreuses informations sur les relations entre les mathématiciens français et italiens.

2 Voir dans ces mêmes *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques*, p.49, les *Lettres de Charles Hermite à Gösta Mittag-Leffler (1874 - 1883)*, ainsi que l'article de Y. Domar : *On the foundation of Acta Mathematica* (Acta Math., 148(1982), 3-8).

3 Sur l'accueil par C. Hermite des travaux de G. Cantor voir p.152-159 de notre article *Des correspondances mathématiques des XIX^e et XX^e siècles* (Revue de Synthèse, (3), 97(1976), n° 81-82, 149-170). Nous reviendrons prochainement sur cette question dans une étude sur *Georg Cantor et Henri Poincaré*.