Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques

JEAN MAYER

Le théorème des quatre couleurs : notice historique et aperçu technique

Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques 1re série, tome 3 (1982), p. 43-62
<http://www.numdam.org/item?id=CSHM_1982__3__43_0>

LE THEOREME DES QUATRE COULEURS : NOTICE HISTORIQUE ET APERÇU TECHNIQUE

par Jean MAYER*

Au début de juillet 1976, alors que se tenait à l'Université de Paris-Orsay le colloque du Centre National de la Recherche Scientifique "Combinatoire et théorie des graphes", le bruit courut parmi les participants que deux chercheurs de l'Université d'Urbana dans l'Illinois, Kenneth Appel et Wolfgang Haken, étaient parvenus à démontrer la conjecture des quatre couleurs. De telles annonces avaient eu lieu plusieurs fois dans le passé, mais il s'agissait ou de fausses nouvelles ou de preuves incomplètes qui n'avaient pas tenu à l'examen. Cette fois, la nature de la démonstration et les renseignements donnés inspiraient davantage confiance; du reste, à la fin de ce mois de juillet, les deux auteurs annoncèrent officiellement le résultat, apportant ainsi la conclusion d'une quête opiniâtre qui avait occupé le monde mathématique pendant près d'un siècle.

La définition et les origines du problème.

Parmi les grands problèmes théoriques, il en est peu qui soient aussi faciles à saisir dans leur énoncé et qui parlent autant à l'imagination, même des profanes. Quiconque a joué avec un de ces puzzles éducatifs représentant la carte des départements français a pu être amené à y réfléchir. Combien le dessinateur a-t-il employé de couleurs pour en distinguer les pièces ? Aurait-il pu en utiliser un moins grand nombre ? Jusqu'où peut-on pousser cette économie dans le cas d'une carte plane quelconque ? C'est surtout par cet aspect intuitif que le problème du coloriage des cartes séduit l'imagination.

En termes plus rigoureux, on définira comme <u>carte</u> la division d'une portion du plan en <u>régions</u> et comme <u>coloriage</u> de la carte l'attribution d'une couleur à chacune des régions de telle manière qu'à deux régions voisines soient affectées des couleurs différentes. Il s'agit alors de minimiser le nombre des couleurs utilisées pour obtenir le <u>nombre chromatique</u> de la carte proposée, puis de déterminer le maximum de ce nombre pour l'ensemble (infini) des cartes tracées sur le plan: on définit ainsi le <u>nombre chromatique du plan</u>.

Deux précisions s'imposent: 1°) on entend par <u>région</u> une portion connexe du plan; les deux Palatinats (jadis états souverains), n'étant pas contigus, ne sauraient, pris ensemble, constituer une région; 2°) deux régions sont <u>voisines</u> si elles ont en commun une <u>ligne</u> frontière et non simplement un ou plusieurs points. Aux Etats-Unis d'Amérique, quatre états (Arizona, Utah, Colorado, Nouveau-Mexique) ont un point-frontière en commun, le <u>four-corner-point</u>. Si l'on devait les considérer comme deux à deux voisins, le problème perdrait tout sens:

* Conférence donnée le 11 février 1981 au Séminaire d'Histoire des Mathématiques.

car on peut aisément imaginer, pour toute valeur de n, un n-corner-point exigeant n couleurs différentes pour les états incidents: le nombre chromatique n'aurait en ce cas pas de borne supérieure.

Ainsi défini, le nombre chromatique est évidemment une propriété intrinsèque du plan (et de la sphère, qui lui correspond par une projection stéréographique). Le problème consiste à déterminer rigoureusement ce nombre, invariant topologique de ces deux surfaces.

Sur l'origine du problème, des légendes se sont transmises durant plusieurs décennies; mais une critique sérieuse ne leur a apporté aucune confirmation. Le problème des quatre couleurs aurait été connu de Möbius, d'Euler, ou même remonterait aux cartographes de la Renaissance. En fait Möbius s'est occupé en passant d'un problème qu'on a souvent confondu avec celui des couleurs, mais qui s'en distingue fondamentalement:

peut-on construire sur le plan cinq régions dont chacune ait une ligne frontière commune avec chacune des autres ?

Si la réponse était oui, il en résulterait une carte plane 5-chromatique et la conjecture des quatre couleurs serait fausse; mais on démontre de façon assez simple qu'une telle carte ne peut pas exister. Le théorème des quatre couleurs ne s'ensuit pas cependant: l'implication ne fonctionne pas dans l'autre sens. La figure 1 ✱ montre une carte exigeant quatre couleurs et ne comportant pas un ensemble de quatre régions deux à deux voisines; on pourrait supposer un cas analogue avec une couleur de plus. La confusion entre ces deux questions est à l'origine de maintes démonstrations illusoires de la conjecture.

Euler, avec le problème des ponts de Königsberg, établit le premier théorème de la théorie des graphes, cette branche des mathématiques qui devait s'épanouir au vingtième siècle et dont relève le problème des quatre couleurs; mais à propos de ce dernier on n'a relevé dans son oeuvre aucune allusion. Quant aux cartographes anciens, on ne s'est guère avisé, à ce qu'il nous semble, qu'ils n'imprimaient pas de cartes en couleurs; cela seul constituerait une objection de poids à la paternité qu'on leur attribue en cette matière.

La première mention écrite du problème, son acte de naissance pour ainsi dire, se trouve dans une lettre d'Augustus de Morgan à Sir William Rowan Hamilton du 23 octobre 1852. Un de ses étudiants, Frederic Guthrie, lui ayant fait part de la conjecture imaginée par son frère Francis, de Morgan la transmit à Hamilton sans parvenir à l'intéresser. Il fallut encore un bon quart de siècle pour que le problème éveillât l'intérêt des spécialistes grâce aux communications présentées par Cayley à la Société Mathématique et à la Société Géographique de Londres (notes publiées en 1878 et 1879).

✱ Les figures sont rejetées à la fin du texte.

La tentative de Kempe et sa critique par Heawood.

Dès 1879, l'avocat Arthur Bray Kempe, membre de la Société Mathématique de Londres, publia une démonstration de la conjecture qui fut reçue très favorablement. S'appuyant sur les propriétés topologiques du plan, il établissait que, dans toute carte plane, il existait une région n'ayant pas plus de cinq voisines. Il utilisait alors le principe de récurrence pour montrer que, si l'on savait colorier avec quatre couleurs la carte privée d'une telle région, le coloriage de la carte complète pouvait s'en déduire. On pouvait donc passer d'une carte quelconque de n régions à une carte de $n + 1$ régions, en supprimant puis rétablissant une région de degré $\leqslant 5$ (le degré est le nombre des régions voisines).

Le coloriage se complète sans peine pour une région de degré $\leqslant 3$, dont les voisines n'épuisent pas l'ensemble des couleurs disponibles. L'entourage d'une région de degré 4 peut comporter les quatre couleurs: Kempe imagina un argument remarquable, que nous exposerons plus loin, pour supprimer l'occurrence d'une des couleurs dans le voisinage de la région considérée et permettre le coloriage de la carte. Restait la région de degré 5: pour traiter ce cas, Kempe appliquait deux fois simultanément son argument, modifiant les couleurs de deux régions voisines du pentagone non colorié. Il fallut attendre onze ans pour que P.J. Heawood, dans un article où il s'excusait presque de son point de vue critique et destructif, mît en évidence la faille du raisonnement: les deux modifications pratiquées dans le voisinage de la région pentagonale n'étaient pas indépendantes l'une de l'autre et il pouvait se faire que, l'une étant pratiquée, l'autre devînt impossible, et vice versa. Heawood poussa même la conscience jusqu'à construire une carte de 26 régions qui mettait en échec la réduction de Kempe. Une carte de 9 régions aurait suffi (H.S.M. Coxeter, W.T. Tutte), mais Heawood avait tenu à présenter un exemple sans régions de degré inférieur à 5.

Il est surprenant que le nom de Kempe, attaché par ailleurs à des travaux mathématiques corrects et originaux, survive dans l'histoire des mathématiques uniquement grâce à cette démonstration erronée; plus étonnant encore, le fait que la "preuve" de Kempe ait été longtemps plus connue que sa démolition par Heawood. Lucas la cite au IV^e volume de ses <u>Récréations mathématiques</u> (1894, réédition en 1960), Callandreau dans ses <u>Célèbres problèmes de mathématiques</u> (1949, réédités en 1965), sans que la moindre note mette en garde le lecteur: visiblement les deux auteurs donnent, en toute bonne foi, la démonstration de Kempe comme valable.

Du reste, malgré son échec, Kempe avait abordé le problème par la meilleure voie possible, en tout cas par la seule qui se soit jusqu'ici révélée praticable. Mieux encore, il avait forgé, pour réduire la région de degré 4, l'outil dont l'emploi généralisé allait permettre la réduction de nombreuses configurations et par là même conduire au succès, un peu moins d'un siècle après sa tentative.

Enfin les résultats directs de son étude n'étaient pas insignifiants: il avait démontré la réductibilité des régions de degré $\leqslant 4$; Heawood montra que sa méthode, insuffisante dans le cas de quatre couleurs, permettait de démontrer le théorème (plus faible):

Toute carte tracée sur le plan peut être coloriée avec cinq couleurs au plus.

Les chercheurs qui viendront ensuite concentreront leurs efforts sur les cartes sans n-corner-point pour $n > 3$ (cartes cubiques) et sans région de degré inférieur à 5. En effet, s'il existe un contre-exemple minimal à la conjecture des quatre couleurs, il doit remplir ces deux conditions. En 1904, P. Wernicke montrait que de telles cartes comportaient nécessairement un pentagone voisin d'un autre pentagone ou d'un hexagone. Philip Franklin (1922) puis Henri Lebesgue (1940) apportèrent à cette proposition des renforcements successifs. Mais dès le début du vingtième siècle la conjecture manifestait une résistance inattendue, contre laquelle il devenait indispensable de forger de nouvelles armes.

G.D. Birkhoff; l'ère des réductions.

La découverte de Heawood sur l'irréductibilité de la région pentagonale par les procédés connus avait mis les chercheurs dans l'impasse; en 1912 et 1913, deux articles de G.D. Birkhoff relancèrent les progrès. Etudiant les propriétés d'une hypothétique carte minimale planaire 5-chromatique, Birkhoff prouve qu'on peut en exclure certaines configurations (formées de plusieurs régions) en généralisant le procédé inventé par Kempe pour la région de degré 4. Par exemple, une région de degré quelconque dont tous les voisins sont des pentagones, ou un circuit de quatre pentagones entourant une arête (deux des pentagones, non consécutifs, ayant cette arête pour frontière commune) constituent des configurations réductibles. Il démontre aussi que tout cycle de cinq régions ayant plus d'une région à l'intérieur et plus d'une région à l'extérieur est réductible: cette proposition est très largement utilisée dans l'établissement de réductions plus compliquées. Il montre encore que toute carte de moins de 17 régions est absolument réductible, donc coloriable en quatre couleurs.

Dès lors, de nombreux chercheurs s'attachent aux propriétés des cartes minimales pour approfondir les deux points suivants: 1°) augmenter le catalogue des configurations réductibles; 2°) prouver, à l'aide de ces réductions, que toute carte de moins de N régions est coloriable avec quatre couleurs. On obtient ainsi pour N (que T. Saaty a proposé d'appeler nombre de Birkhoff):

N = 22 (Ph. Franklin, 1922); N = 26 (C.N. Reynolds, 1926); N = 32 (Franklin, à nouveau); N = 36 (C.E. Winn, 1938).

Après une assez longue pause, O. Ore, qui publia en 1967 une importante récension du problème, montra avec J. Stemple en 1969 (publication en 1970) que N = 40. Ce résultat fut contesté en raison d'une lacune dans une démonstration du livre de 1967 (théorème 12. 4. 1 a). Mais la proposition incriminée (d'ailleurs vraie et démontrée correctement par Winn) n'intervenait pas dans la preuve du résultat cité! N fut ensuite élevé à la valeur 45 par W. Stromquist, puis à 48 par l'auteur de ces lignes. En 1974, Stromquist parvint à la valeur 52: sa démonstration, concise et élégante, figure dans sa thèse, en appendice. La même année, nous atteignions N = 96, dernière valeur finie de N, qui ne put voir la publication avant le succès complet et définitif de Appel et Haken.

L'oeuvre de Heesch.

En fait, tous ces succès partiels étaient autant de renonciations à la victoire absolue. L'auteur d'un résultat, devant borner son ambition en fonction des méthodes choisies, s'interdisait au départ de considérer le cas général; il laissait dans l'ombre, en particulier, le point essentiel: le problème des quatre couleurs dépend-il d'un nombre fini de cas de configurations ?

Le mérite d'avoir conçu clairement la finitisation du problème revient à Heinrich Heesch dont les recherches, entreprises en 1936, s'étendent sur une quarantaine d'années. Les premiers résultats, publiés en 1969 seulement, corroborent ceux d'autres chercheurs, mais présentent aussi des aspects profondément originaux. Il lie de façon explicite le coloriage des cartes planes (conçu de manière duale comme un coloriage de graphes) à la caractéristique eulérienne positive du plan et de la sphère; il envisage les contributions eulériennes des éléments du graphe comme un "analogue discontinu" de la courbure locale (la courbure de la sphère, globalement positive, étant la caractéristique eulérienne des polyèdres simples). Il calcule à la main un nombre important de réductions. Dans les années soixante, avec Karl Dürre, il parvient à soumettre à l'ordinateur l'algorithme des chaînes de Kempe et calcule en quinze ans près de trois mille réductions.

En 1972, l'argument de finitisation du problème, exposé sous forme conjecturale dans son livre de 1969 (Untersuchungen zum Vierfarbenproblem, p.179), se précisa sous la forme suivante: la solution générale dépend de 8571 cas de figure, dont chacun nécessite une réduction (calculable à l'ordinateur). A Oberwolfach, où se tiennent périodiquement des colloques sur la théorie des graphes, nous avons pu voir en 1975 le catalogue de ces configurations, groupées sur de grandes feuilles de bristol ressemblant aux planches d'un atlas.

Parmi les conceptions originales de Heesch, il faut encore signaler la classification des réductions (notamment les "D-réductions" et les "C-réductions" si importantes pour le calcul à l'ordinateur) et la notion d'obstacle à la réduction, développée théoriquement par W. Haken et par W. Stromquist. Précurseur imaginatif et chercheur opiniâtre, Heesch méritait pleinement la place d'honneur que lui ont reconnue Appel et Haken dans leur exposé historique sur le problème.[1]

La dernière étape.

Grâce aux travaux de l'équipe Heesch-Dürre, la conjecture était entrée dans l'ère des ordinateurs. En octobre 1971, le bruit courut qu'une solution venait d'être obtenue par Y. Shimamoto avec l'aide de la machine: la réduction de la région (ou dualement du sommet) de degré 5 se trouvait impliquée par celle d'une configuration plus compliquée [2]; à son tour, la configuration donnée, soumise au calcul électronique, se révélait "D-réductible"; le traitement en machine avait duré 26 heures. La lacune de la démonstration de Kempe semblait donc comblée et le problème résolu. Un examen détaillé, fait par Haken, confirma l'exactitude de l'implication initiale. On se heurtait donc à une difficulté, discutée avec subtilité par H. Withney et W.T. Tutte: [3] ou bien la construction de Shimamoto pouvait être éliminée et la réduction du sommet de degré 5 obtenue directement (ce qui contredisait le résultat établi par Heawood), ou bien la réduction calculée à l'ordinateur était erronée. En fait, un second essai en machine révéla l'erreur dans le calcul de la réduction. La construction de Shimamoto aboutissait en fait à un critère de D-irréductibilité permettant de tester une configuration donnée. Le problème résistait toujours.

L'intense activité déclenchée par les ouvrages de Ore (1967) et de Heesch (1969) faisait prévoir, sinon le succès prochain, du moins de nouveaux progrès. Aux réductions calculées à la main se substituait l'étude systématique des réductions à l'ordinateur (F. Allaire et E. Swart, F. Bernhart, S. Gill). Edward Moore mettait en évidence, une fois de plus, la complexité du problème combinatoire en construisant des cartes "reduction-free", ne comportant en principe aucune réduction connue, en particulier aucune configuration réductible de taille <12 (voir plus loin).

Le mérite revint à Haken et Appel de conjuguer efficacement l'emploi des deux outils ébauchés par Kempe et forgés par Heesch:

1°) le processus de "déchargement", utilisant la formule d'Euler pour les polyèdres, en vue de construire un ensemble "inévitable" de configurations;

2°) la réduction (par ordinateur, évidemment) des configurations appartenant à l'ensemble inévitable.

Pour la première partie, la simplification des procédés de Heesch, l'invention d'une stratégie progressivement affinée par un véritable dialogue avec l'ordinateur, la rédaction, enfin, d'une étude dépassant quatre cents pages dactylographiées, mais explicitant le raisonnement combinatoire sans le secours du calcul électronique utilisé dans la phase préparatoire, aboutirent à la constitution d'une collection de 1936 configurations (nombre qui put être ramené à 1482, puis à 1405).

Pour la partie concernant les réductions, développée simultanément avec la collaboration de John Koch, l'ordinateur ne pouvait être éliminé (certaines configurations comportaient près de deux cent mille coloriages à étudier); mais les travaux d'Allaire et Swart, puis le très vaste catalogue de Dürre, Heesch et F. Miehe (1977) [4] apportèrent, par une concordance presque absolue, [5] une confirmation des calculs effectués.

Certains mathématiciens ont manifesté leur gêne devant le long cheminement de la preuve combinatoire, dissimulé pour sa plus grande partie dans les mémoires et les circuits de la machine. Il n'y a pourtant là aucun scandale logique: l'ordinateur avait déjà servi à établir des résultats (en théorie des nombres, en combinatorique, par exemple); mais c'était la première fois qu'il contribuait de manière essentielle à la démonstration d'un théorème général.

Principe de la démonstration.

Pour faciliter la présentation des raisonnements, on peut donner au problème du coloriage une forme équivalente: dans chacune des régions, on choisit un point intérieur (chef-lieu ou capitale, si l'on veut) et l'on relie les chefs-lieux de deux régions voisines par une ligne qui ne traverse aucune autre région. Il est facile d'éviter que les différentes lignes se croisent, et l'on peut démontrer en toute rigueur cette propriété du graphe résultant, appelée planarité. On construit ainsi ce qu'on appelle le graphe dual de la carte : la figure 2 représente le graphe dual de la carte des départements français ; pour des raisons d'échelle, nous avons renoncé à y faire figurer les nouveaux départements (91 à 95) de la région parisienne; le passage de la nouvelle carte à l'ancienne (où seuls figurent les sommets 75 et 78, correspondant respectivement à Paris et à Versailles) s'obtient par une contraction du graphe.

Dans le graphe dual, ce sont les sommets que l'on colorie; une coloration correcte exige que toute arête ait ses extrémités de couleurs différentes. Lorsqu'on parle du coloriage d'un graphe, on entend toujours, à moins de spécification contraire, le coloriage des sommets. Le graphe dual d'une carte est, par construction, un graphe sur le plan; la conjecture peut alors se formuler ainsi:

Tout graphe planaire est coloriable avec quatre couleurs au plus.

Kempe connaissait cette dualisation du problème, qu'il a mentionnée sans l'utiliser; il savait également que la conjecture des quatre couleurs concerne spécifiquement le plan (ou la sphère); il indique au passage qu'une carte tracée sur le tore peut requérir six couleurs. Il appartenait à Heawood, dans le même article où il démolit la démonstration de Kempe, de construire sur le tore une carte nécessitant sept couleurs et de prouver que sept couleurs suffisent toujours. On voit sur la figure 3, à gauche, la partition du tore en sept régions deux à deux voisines et, à droite, celle du tore à deux trous en huit régions exigeant huit couleurs (la partie cachée des arêtes-frontières est figurée en pointillé). Si l'on unifie, grâce à une "anse cylindrique" les deux régions quadrilatérales hachurées, on obtient un tore à trois trous dont le régionnement nécessite neuf couleurs. C'est là un problème voisin, mais distinct de la conjecture des quatre couleurs: le problème de Heawood, résolu par G. Ringel et J.W.T. Youngs en 1968.

Pour revenir au problème original, la dualisation permet de concevoir aisément plusieurs simplifications préalables:

1°) Le graphe à colorier peut être supposé connexe: sinon les différentes composantes seront traitées séparément, comme dans la figure 2. S'il est séparable par un sommet (graphe articulé), les lobes du graphe peuvent être coloriés isolément, puis les coloriages combinés, en permutant au besoin les couleurs dans chaque lobe pour les faire coïncider sur le sommet commun. L'argument se généralise dans le cas d'une séparation par deux sommets reliés par une arête, ou par un cycle de trois arêtes.

2°) Le graphe peut être supposé triangulé: s'il ne l'est pas, on ajoutera des arêtes diagonales tant qu'il subsistera des faces non triangulaires (sans oublier la face extérieure). Il est bien évident que l'adjonction d'arêtes renforce les contraintes de coloriage et qu'une solution valable pour le graphe triangulé reste valable si l'on supprime les arêtes qu'on a introduites.

3°) Les sommets de degré < 5 sont réductibles: pour un sommet de degré 2 ou 3 (ceux de degré 0 ou 1 ne se présentent pas dans une triangulation), l'entourage n'utilise pas toutes les couleurs disponibles; on peut donc les effacer ainsi que les arêtes qui y aboutissent [6]. Soit un sommet V de degré 4: ses voisins (A, B, C, D dans un ordre cyclique donné) peuvent présenter les coloriages suivants (les couleurs étant désignées par les nombres de 1 à 4):

1 2 1 2 ; 1 2 1 3 ; 1 2 3 2 ; 1 2 3 4.

Les trois premiers laissent une couleur disponible pour V: on les appelle coloriages directs. Le dernier cas relève de l'argument des chaînes, imaginé par Kempe:

D n'est pas voisin de B, sinon BVD serait un triangle et le graphe serait réductible (voir 1° ci-dessus). Le graphe G, privé du sommet V et des arêtes incidentes, est colorié avec quatre couleurs; nous désirons libérer une couleur pour V. Considérons l'ensemble des sommets de couleur 2 ou 4 et les arêtes qui les unissent: si aucune "chaîne de couleurs" ne relie B à D, nous pouvons intervertir les couleurs 2 et 4 dans la partie qui contient D, libérant la couleur 4 pour V. Si B et D sont reliés par une chaîne de couleurs 2-4, cette modification n'est pas applicable. Mais la topologie du plan (théorème de Jordan) permet d'affirmer que A et C ne sont pas reliés par une chaîne de couleurs 1-3. On peut donc faire C de couleur 1 et V de couleur 3.

On considèrera donc des graphes planaires triangulés ayant tous leurs sommets de degré ≥ 5.

La formule d'Euler.

Le point de départ imaginé par Kempe était excellent; si nous transposons sa démonstration dans le langage dual des graphes, nous appellerons v_i un sommet de degré $\underline{i}$ (c'est le dual d'une région ayant $\underline{i}$ voisines); appelons p_i le nombre de sommets de degré $\underline{i}$ et S, A, F les nombres respectifs de sommets, d'arêtes et de faces du graphe. Les graphes sur le plan vérifient la formule d'Euler pour les polyèdres:

$$S - A + F = 2.$$

Or $S = \sum_i p_i$, $2A = \sum_i ip_i$ (par dénombrement des extrémités des arêtes). De plus, dans une triangulation, on a $2A = 3F$ (chaque arête appartient à deux faces; chaque face est incidente à deux arêtes). On calcule de façon élémentaire:

$$\sum_i (6 - \underline{i})p_i = 12 \qquad (\underline{i} \geqslant 2) \qquad (1) .$$

Le second membre de l'égalité étant positif, le premier l'est aussi. Ceci montre que toute triangulation comporte un sommet de degré 2, 3, 4 ou 5; l'ensemble $\{v_2, v_3, v_4, v_5\}$ est ce qu'on nomme un ensemble inévitable de configurations (chaque configuration, dans ce cas, se réduisant à un sommet de degré déterminé).

Le second pas de la démonstration consistait à <u>réduire</u> chacune de ces configurations, c'est-à-dire à montrer que, si le graphe G contenant la configuration F n'était pas coloriable avec quatre couleurs, on pouvait, par une modification locale de sa structure, en déduire un graphe "plus petit" (ayant un nombre moindre de sommets) et qui, lui non plus, ne pouvait pas être colorié avec quatre couleurs. On montre facilement que tout graphe minimal (planaire 5-chromatique) est triangulé. Une configuration réductible est, par définition, exclue de tout graphe minimal. Donc la mise en évidence d'un <u>ensemble inévitable de configurations réductibles</u> implique qu'il n'existe pas de graphes minimaux et, par récurrence, qu'aucun graphe planaire n'est 5-chromatique.

L'ensemble de Kempe $\{v_2, v_3, v_4, v_5\}$ est bien inévitable; mais il comprend une configuration non réductible, à savoir v_5. Pour contourner cet obstacle, il faut mettre en évidence un ensemble inévitable plus vaste, ne comprenant que des configurations réductibles.

Le principe de déchargement.

Considérons à nouveau l'égalité (1):

$$\sum_i (6 - \underline{i})p_i = 12,$$

avec, cette fois, $\underline{i} \geqslant 5$, puisque v_i est réductible pour $\underline{i} \leqslant 4$. Chaque sommet contribue au premier membre de (1) pour une quantité égale à $6 - \underline{i}$, sa <u>contribution eulérienne</u>. Celle-ci est positive pour un v_5, nulle pour un v_6, négative pour tous les sommets de degré $\geqslant 7$, qu'on appelle <u>sommets majeurs</u>. Or la somme de toutes les contributions eulériennes est positive. Considérons le graphe comme un réseau électrique dont les arêtes seraient les fils conducteurs, et les contributions eulériennes comme des charges que l'on pourrait déplacer le long de ces fils. Nous imaginerons (sans le décrire ici) un processus de déchargement permettant de répartir la charge positive de chaque v_5 (au besoin, en la fractionnant) sur les sommets majeurs les plus proches. Dans la pratique, les processus utilisés ont ceci de commun qu'aucune charge ou fraction de charge ne parcourt plus de deux arêtes. Ceci limite aussi bien le nombre des cas à considérer que le diamètre des configurations à réduire. Si la compensation entre charges positives et négatives était complète (graphe complètement déchargé) l'égalité (1) se trouverait contredite. Il reste donc des sommets chargés positivement, mais ceux-ci appartiennent à un ensemble inévitable de configurations, qui dépend de la stratégie employée pour le déchargement du graphe. L'habileté de K. Appel et W. Haken fut de concevoir une stratégie localement modifiable à l'aide de règles et d'exceptions, permettant ainsi de contourner l'obstacle d'une configuration difficile ou impossible à réduire.

Aperçu de la théorie des réductions.

Une configuration à réduire se présente presque toujours comme une partie connexe d'un graphe entourée par un cycle appelé cycle séparateur; la longueur de ce cycle (nombre d'arêtes, ou bien de sommets) est la taille de la configuration. La structure, à l'intérieur de ce cycle, est entièrement connue. De la partie située à l'extérieur on ne sait rien, sinon qu'elle est coloriable avec quatre couleurs (hypothèse de récurrence). Chaque coloriage de la partie extérieure induit un coloriage du cycle séparateur, tel que deux sommets consécutifs de ce cycle reçoivent des couleurs différentes. Il convient donc de considérer tous les coloriages possibles[7] du cycle séparateur C; certains d'entre eux sont compatibles avec la structure de la configuration F étudiée: ils permettent un coloriage correct des sommets intérieurs à C. On les appelle coloriages directs. Appelons Φ_0 l'ensemble de ces coloriages.

L'argument des chaînes de Kempe permet de ramener certains coloriages $\notin \Phi_0$ à des coloriages (alternatifs) $\in \Phi_0$. Ces nouveaux coloriages forment un ensemble Φ_1. De même, on déterminera un ensemble Φ_2 de coloriages que l'argument des chaînes permet de ramener à des coloriages $\in \Phi_0 \cup \Phi_1$, puis un ensemble Φ_3 défini de la même manière. En effet l'argument des chaînes engendre un algorithme inductif. Les coloriages ainsi obtenus s'appellent coloriages indirects. L'ensemble des coloriages directs/indirects de C constitue la clôture de Φ_0, notée $\overline{\Phi}_0$. Si tous les coloriages possibles de C appartiennent à $\overline{\Phi}_0$, la configuration est réductible, plus précisément D-réductible, et la carte contenant F est 4-coloriable en même temps que l'extérieur de C.

Il peut exister des coloriages $\notin \bar{\Phi}_0$, c'est-à-dire qui ne sont ni directement ni indirectement extensibles à l'intérieur de F. Si <u>tous</u> ces coloriages réfractaires à l'argument des chaînes peuvent être éliminés par une modification de l'intérieur de C (F $\longrightarrow$ F' telle que F' ait moins de sommets que F), la configuration est encore réductible, puisqu'en remplaçant F par F' on obtient un graphe G' plus "petit" que G, et dont tous les coloriages sont extensibles (de manière directe ou indirecte) à G. On appelle F' un <u>réducteur</u> de F; cette technique généralisée porte le nom de <u>C-réduction</u>. Par exemple, dans la réduction de la figure 4, due à Arthur Bernhart, le cycle séparateur est de taille 8: il comporte 274 coloriages possibles (non équivalents par permutation des couleurs), dont 120 directs ou indirects. Le réducteur associé, en imposant une couleur identique à B et D et une couleur différente à F et H (ce qu'on note en abrégé par B = D $\neq$ F = H), élimine les 154 coloriages réfractaires. On remarquera que le réducteur identifie les sommets B et D d'une part, F et H d'autre part, et présente une arête joignant B-D à F-H. Cela peut se schématiser en indiquant les arêtes par des diagonales de C et les identifications par des diagonales en trait double (diagramme à droite de la figure).

Dans cet aperçu, forcément schématique et incomplet, nous devons mentionner que l'extérieur de C, dont la structure est inconnue, nécessite une discussion: afin de ne pas créer de boucles dans G', on ne peut identifier dans le réducteur deux sommets qui, dans G, sont joints par une arête; pour la même raison, on ne peut joindre par une diagonale deux sommets de C qui se trouveraient représenter le même sommet de G. Il faut même envisager le cas, pour une configuration de diamètre plus large, où la structure de F, "immergée" dans le graphe original G, se recouvrirait elle-même en partie. Ces hypothèses, susceptibles d'infirmer la réduction, conduisent heureusement dans l'immense majorité des cas à des réductions différentes plus simples, mais qu'il convient de ne pas omettre dans la démonstration.

<u>Les obstacles à la réduction (figure 5)</u>.

La théorie des réductions n'est pas achevée; cependant on a pu dégager de l'expérience, puis dans certains cas justifier théoriquement quelques observations utiles. Heesch est le premier qui ait aperçu, dans les configurations qu'il étudiait, des types d'obstacles à la réduction, à savoir:

1°) un sommet "à 4 jambes"; une configuration comportant un sommet V adjacent à plus de trois sommets consécutifs du cycle séparateur C n'est pas réductible, à moins qu'elle ne comporte une sous-configuration réductible dont V ne fait pas partie.- Cette proposition ne s'applique pas au cas exceptionnel du sommet de degré 4 réduit par Kempe.

2°) un "sommet Y". Une configuration comportant un sommet adjacent à trois sommets ou plus, non tous consécutifs, de C n'est pas réductible, à moins qu'elle ne comporte une sous-configuration réductible éliminant l'obstacle.

3°) une "paire de v_5 suspendus". Une configuration comprenant deux v_5 formant un triangle avec un de ses sommets intérieurs et n'ayant pas d'autres voisins dans l'intérieur de C n'est pas réductible, à moins qu'elle ne comporte une sous-configuration réductible d'où l'obstacle soit exclu.

Une configuration exempte des obstacles 1 et 2 a été dénommée géographiquement bonne. Si elle ne comporte pas non plus l'obstacle 3, elle est dite permissible. Il ne suffit pas, cependant, qu'une configuration soit permissible pour être réductible. Il existe quelques contre-exemples, peu nombreux, car l'irréductibilité par les chaînes de Kempe d'une configuration donnée est plus difficile encore à démontrer que la réductibilité.

On voit ici l'une des raisons de la grande complexité de la démonstration: si l'on peut espérer simplifier et alléger le processus de déchargement et diminuer le nombre des configurations inévitables nécessaires, le traitement des réductions par l'argument de Kempe exige l'étude d'un grand nombre de coloriages: il existe 66430 coloriages non équivalents d'un cycle de taille 13; un cycle de taille 14 en comporte 199291. Cette partie de la preuve, la plus lourde de beaucoup au point de vue combinatoire, est à peu près incompressible: l'aide de l'ordinateur ne peut en être éliminée, même a posteriori.

Autres aspects du problème.

Il faut distinguer, dans la démonstration d'Appel et Haken, l'ampleur combinatoire (de l'ordre de 10^{10} bits) et le schéma logique très simple, fondé sur la notion de récurrence et celle de configuration réductible qui en découle. Un graphe minimal planaire 5-chromatique ne peut comporter une telle configuration; or tout graphe planaire en comporte au moins une; donc aucun graphe planaire n'est minimal. Par conséquent, en utilisant une méthode de descente infinie analogue à celle de Fermat, on peut ramener tout graphe planaire (et dualement toute carte) à un coloriage trivial en quatre couleurs. Toutefois l'algorithme de coloriage est aussi compliqué dans son principe que la preuve combinatoire elle-même.

D'autres manières d'aborder le problème, que nous allons présenter brièvement, mettront en évidence le caractère profond de cette complexité.

La conjecture de Tait.

Revenons à la présentation originale du problème et considérons une carte cubique (sans n-corner-point pour $n > 3$) pourvue d'un coloriage en quatre couleurs désignées par 1, 2, 3, 4. Définissons un coloriage des arêtes en trois couleurs a, b, c: on colorie avec a une arête qui sépare des régions de couleurs 1 et 2 ou 3 et 4; avec b une arête séparant des régions de couleurs 1 et 3 ou 2 et 4; avec c une arête séparant des régions de couleurs 1 et 4 ou 2 et 3. On démontre que deux arêtes de même couleur ne peuvent être incidentes à un même sommet; donc le coloriage des arêtes avec a, b, c décompose le graphe des frontières de la carte en trois facteurs de degré 1; cette propriété est équivalente à la conjecture des quatre couleurs pour les cartes cubiques. Or on sait ramener le cas général à ce cas particulier. La conjecture de Tait, qui concerne cette propriété des graphes cubiques planaires, n'a pu être démontrée directement. De plus certains graphes cubiques non planaires, comme le graphe de Petersen (figure 6), ne la vérifient pas.

Chaque fois qu'on a voulu lier, par implication, la conjecture des quatre couleurs à une propriété générale des graphes planaires (existence de circuits hamiltoniens dans certaines classes de graphes, système d'orientation des arêtes, système de congruences de Heawood), la propriété s'est révélée stérile ou infirmée par des contre-exemples. C'est ce qui a fait parfois soupçonner que la conjecture était indémontrable ou même pouvait être fausse.

Les polynômes chromatiques.

G.D. Birkhoff, qui a joué un rôle essentiel dans l'étude des réductions, a proposé en 1946, dans un long article écrit avec D. Lewis [8], une étude quantitative du problème. Etant donné un graphe G quelconque et un ensemble de λ couleurs, combien existe-t-il de coloriages corrects de G ? Pour un graphe d'un sommet, il y en a λ ; pour un graphe de deux sommets, il en existe λ^2 s'ils ne sont pas reliés par une arête et $\lambda(\lambda-1)$ s'ils sont reliés. La formule se généralise pour un graphe complet de n sommets; le nombre de coloriages est alors:

$$\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1).$$

C'est évidemment un polynôme en λ, le polynôme chromatique du graphe complet; il a même un degré toujours égal au nombre de sommets du graphe.

Cette propriété s'étend aux graphes quelconques. Si G n'est pas complet, il comporte au moins deux sommets A et B non reliés par une arête. On forme alors un graphe G_1 en ajoutant à G l'arête AB (reliement) et un graphe G_2 en unifiant A et B en un sommet C ayant pour voisins les sommets voisins de A et/ou de B (contraction). Dans G_1, A et B sont de couleurs différentes; dans G_2, un sommet unique leur correspond. Le nombre des coloriages de G est donc la somme des nombres de coloriages de G_1 et de G_2. De proche en proche, on arrive à des graphes complets: la somme du nombre de leurs coloriages est encore un polynôme chromatique en λ, dont le degré est égal au nombre de sommets de G. (Signalons que, si G comporte une boucle, le polynôme chromatique qui lui correspond est zéro, quel que soit le nombre des sommets.)

On voit par là, incidemment, que le problème du coloriage en général est NP-complet dès que λ dépasse 2; pour $\lambda = 2$, la condition nécessaire et suffisante est que G soit biparti, donc sans circuit de longueur impaire.

Le polynôme chromatique n'a évidemment de sens, d'après sa définition, que pour des valeurs entières non négatives de λ. On a cependant étudié ces polynômes comme des expressions algébriques définies pour λ quelconque réel ou complexe. Si l'on pouvait déterminer un graphe planaire dont le polynôme s'annulerait pour $\lambda = 4$, on aurait un contre-exemple de la conjecture des quatre couleurs. Peut s'en faut qu'un tel contre-exemple n'existe: sous le titre humoristique Is the Four-Color Conjecture Almost False ? [9] S. Beraha et J. Kahane présentent une famille de graphes (ou cartes) sur le plan dont les polynômes chromatiques s'annulent pour des valeurs de plus en plus proches de 4.

La théorie des polynômes chromatiques s'est largement développée sur le plan algébrique: nous ne pouvons que citer les noms de Ronald Read, Ruth Bari, Lewis et Hall, et surtout W.T. Tutte, dont il faut signaler les remarquables travaux sur les séries énumératives de cartes planes avec ou sans colorations.

La conjecture de Hadwiger; la conjecture de Hajós.

On remarquera, dans toutes ces investigations, le rôle réduit joué par la planarité des graphes, alors que le problème concerne une propriété intrinsèque du plan. La formule d'Euler met en évidence l'existence de sommets de degré $\leqslant 5$, démontrant par là le théorème des 6 couleurs et fournissant un algorithme simple de coloration. L'argument des chaînes, qui permet de démontrer facilement le théorème des 5 couleurs et, avec les plus grandes difficultés techniques, le théorème des 4 couleurs, n'utilise, outre la formule d'Euler, que le théorème de Jordan: toute courbe fermée tracée sur le plan le sépare en deux régions telles qu'on ne peut relier un point de la première à un point de la seconde sans couper la courbe.

Cependant un critère de planarité, de nature combinatoire, avait été mis en évidence dès 1930 par C. Kuratowski (sous forme topologique). Un graphe est planaire si et seulement si aucun de ses sous-graphes n'est une subdivision des graphes K_5 ou $K_{3,3}$. (Une subdivision d'un graphe s'obtient en remplaçant une ou plusieurs de ses arêtes par une chaîne d'arêtes: voir figure 7).

Un critère voisin, obtenu par K. Wagner en 1937, est fondé sur la notion de contraction élémentaire. Comme au paragraphe précédent, on identifie deux sommets A et B, mais seulement s'ils sont reliés par une arête. Une suite de contractions élémentaires s'appelle une contraction du graphe. Ceci posé, un graphe connexe est planaire si et seulement si on ne peut pas le contracter en K_5 ou en $K_{3,3}$. Le graphe de Petersen (figure 6) comporte une subdivision de $K_{3,3}$ (critère de Kuratowski); il peut être contracté en K_5 (critère de Wagner).

En 1943, H. Hadwiger proposa la conjecture suivante: tout graphe dont le coloriage nécessite n couleurs est contractible en K_n (K_n étant le graphe complet de n sommets). En 1961, G. Hajós proposa une conjecture plus forte, qui implique celle de Hadwiger: tout graphe dont le coloriage exige n couleurs comporte comme sous-graphe une subdivision de K_n.

Les deux propositions sont triviales pour n = 1 ou n = 2, faciles pour n = 3: un graphe de nombre chromatique 3 comporte nécessairement un circuit impair, qui est une subdivision de K_3. Pour n = 4, la preuve fut donnée par G.A. Dirac.

On sait aujourd'hui que la conjecture de Hajós est fausse pour $n \geqslant 7$; Paul Catlin a donné des contre-exemples en 1978 (publication en 1979) [10]. Pour n = 5 ou n = 6, elle n'est pas décidée. Quant à la conjecture de Hadwiger, K. Wagner a montré que, pour n = 5, elle était équivalente au théorème des quatre couleurs. Elle aurait donc pu servir à l'établir; en fait, c'est l'inverse qui s'est produit. Pour $n > 5$, on n'en connaît ni démonstration, ni contre-exemple.

La difficulté du théorème des quatre couleurs tient donc principalement à deux raisons, dont la première est sa complexité: au-delà de deux couleurs, les problèmes de coloriage sont NP-complets (et la conjecture de Tait est un problème de coloriage en 3 couleurs); le problème des cycles hamiltoniens, auquel la conjecture des quatre couleurs est reliée, est également NP-complet. La seconde raison tient à l'absence de théorèmes plus forts dont on pourrait déduire une démonstration. Il en résulte l'alternative, déjà suggérée par Appel et Haken: ou bien le problème des quatre couleurs peut être résolu par une méthode entièrement différente de la leur, en particulier sans le recours à l'ordinateur; ou bien il restera le premier exemple de théorème général exigeant le recours à la machine. La première hypothèse implique assurément l'intervention d'une puissante imagination mathématique, capable de forger des outils logiques appropriés; la seconde laisserait dans un état désespéré les cas non décidés de la conjecture de Hajós et toute la conjecture de Hadwiger pour $n \geqslant 6$.

Références générales.

Historique:

May, K.O.: "The Origin of the Four-Color Conjecture". Isis, 56 (1965), p. 346-348.

Biggs, N.L., Lloyd, E.K., Wilson, R.J.: Graph theory, 1736-1936. Oxford, Clarendon Press, 1976, X-239 p., p. 90-106 et 158-186.

Exposés généraux:

Ore, Oystein: The four-color problem. New York et Londres, Academic Press, 1967, 259 p.

Appel, Kenneth I. et Haken, Wolfgang: "The Four-Color Problem", dans Mathematics Today, Twelve informal essays, edited by L.A. Steen. New York, Heidelberg et Berlin, Springer, 1978: p. 153-180. (Historique et discussion des aspects logiques de la solution.)

Fournier, Jean-Claude: "Coloriage des cartes géographiques. Théorème des 4 couleurs et problèmes de coloration en théorie des graphes". Revue du Palais de la Découverte, n° spécial 12, janvier 1978, p. 5-28.

La solution:

Appel, K.I. et Haken W.: "Every planar map is four colorable". Illinois Journal of Mathematics, 21 (1977):

"Part I: discharging", p. 429-490;
"Part II: reducibility" (avec J. Koch): p.491-567.
(La preuve explicite du théorème de déchargement a été annexée au numéro du journal sous forme de deux microfiches représentant 445 pages dactylographiées.)

Notes

1- Voir notamment leur article dans Mathematics Today (références générales).

2- La configuration testée par Shimamoto était constituée d'un sommet de degré 8 dont les voisins avaient pour degrés (dans l'ordre cyclique) 5 6 6 6 6 6 5, le huitième sommet étant de degré indéterminé.

3- Whitney, Hassler et Tutte, W.T.:"Kempe chains and the four colour problem". Utilitas mathematica, 2 (novembre 1972), p. 241-281.

4- Dürre, K., Heesch, H., Miehe, F.: Eine Figurenliste zur Chromatischen Reduktion. Preprint Nr 73 (1977), Institut für Mathematik der Technische Universität Hannover.

5- Deux discordances (sur plus de mille cas): la vérification a confirmé le résultat de Appel et Haken dans les deux cas.

6- Dans le cas d'un cycle de longueur 2, il en résulte une arête double que l'on simplifiera.

7- Il y en a 4 pour un cycle C_4, 10 pour un C_5, 31 pour un C_6 ; les valeurs suivantes sont 91, 274, 820, 2461, 7381, 22144; pour C_{13} et C_{14}, elles sont données plus loin.

8- Birkhoff, G.D., et Lewis D.: "Chromatic polynomials". Trans. Amer. Math. Soc., 60 (1946), p. 355-451.

9- Beraha, S. et Kahane, J.: "Is the Four-Color Conjecture Almost False ?" Journal of Combinatorial Theory, series B, 27 n°1 (1979), p. 1-12.

10- Catlin, Paul A.:"Hajós' Graph-Coloring Conjecture: Variations and Counterexamples". Journal of Combinatorial Theory, series B, 26, n° 2 (1979), p. 268-274.

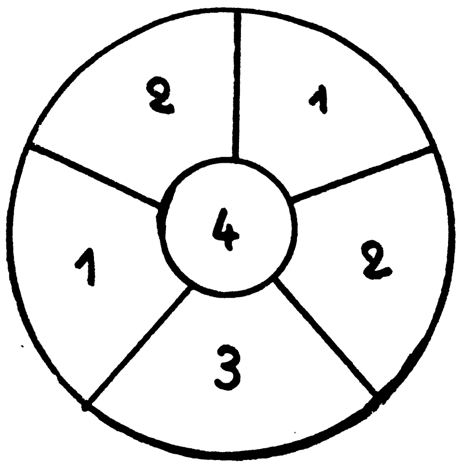
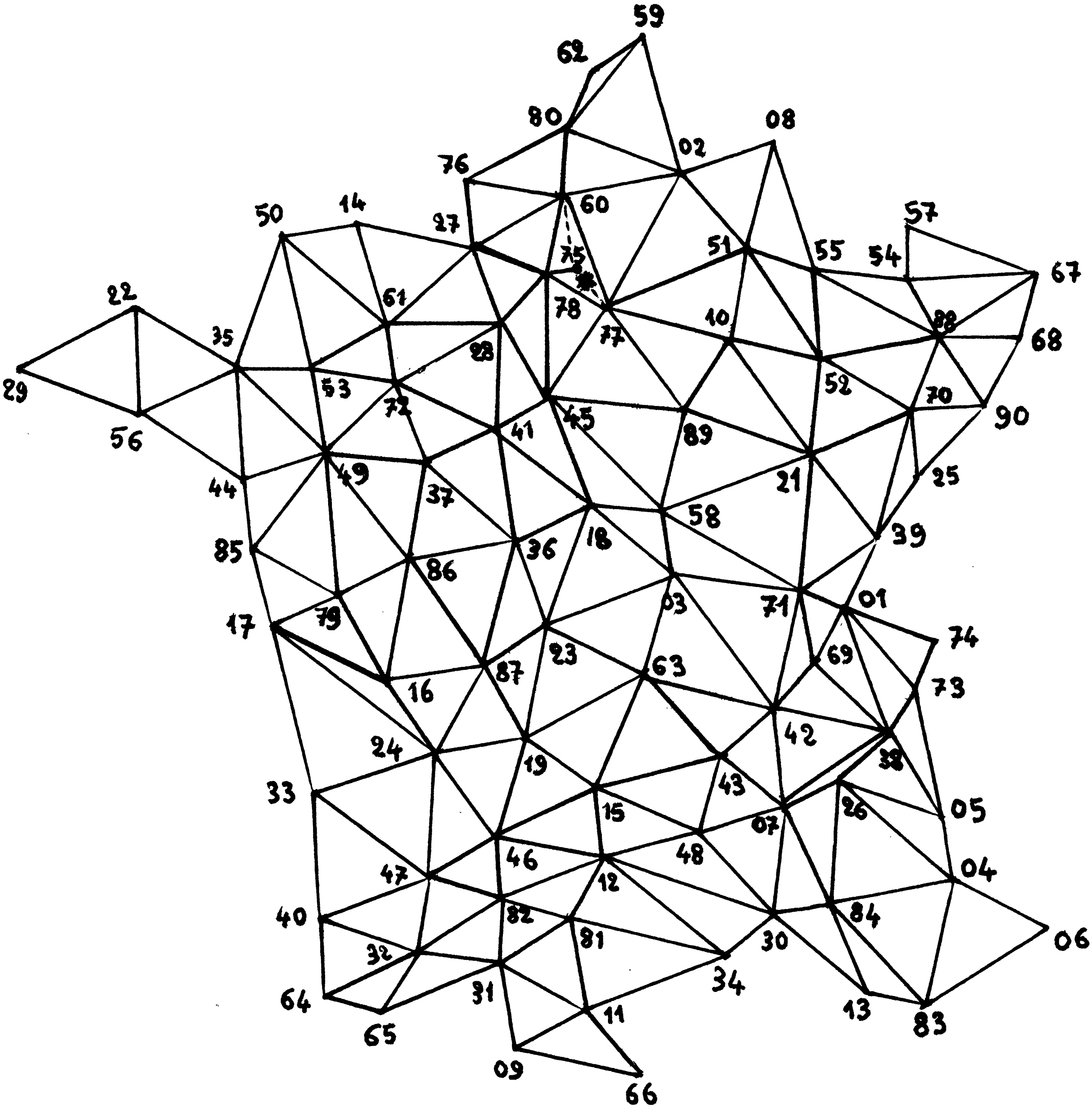
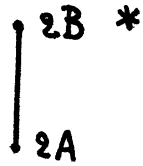


Figure 1.— Une carte 4-chromatique.





* Le sommet 75 est la <u>contraction</u> des sommets 75, 91, 92, 93, 94, 95, non représentables à l'échelle de la figure ;

les sommets 2A et 2B, inversement, sont <u>l'expansion</u> du sommet 20, correspondant à la Corse.

Figure 2.— Graphe dual d'une carte géographique bien connue.

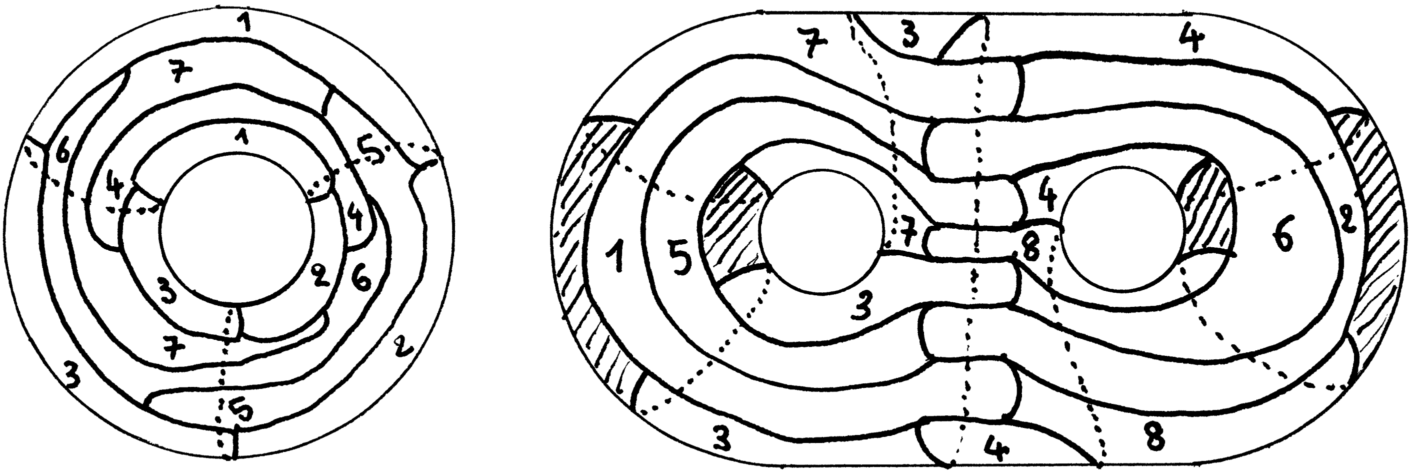


Figure 3.— 7, 8, 9 couleurs, ou le coloriage sur les tores.

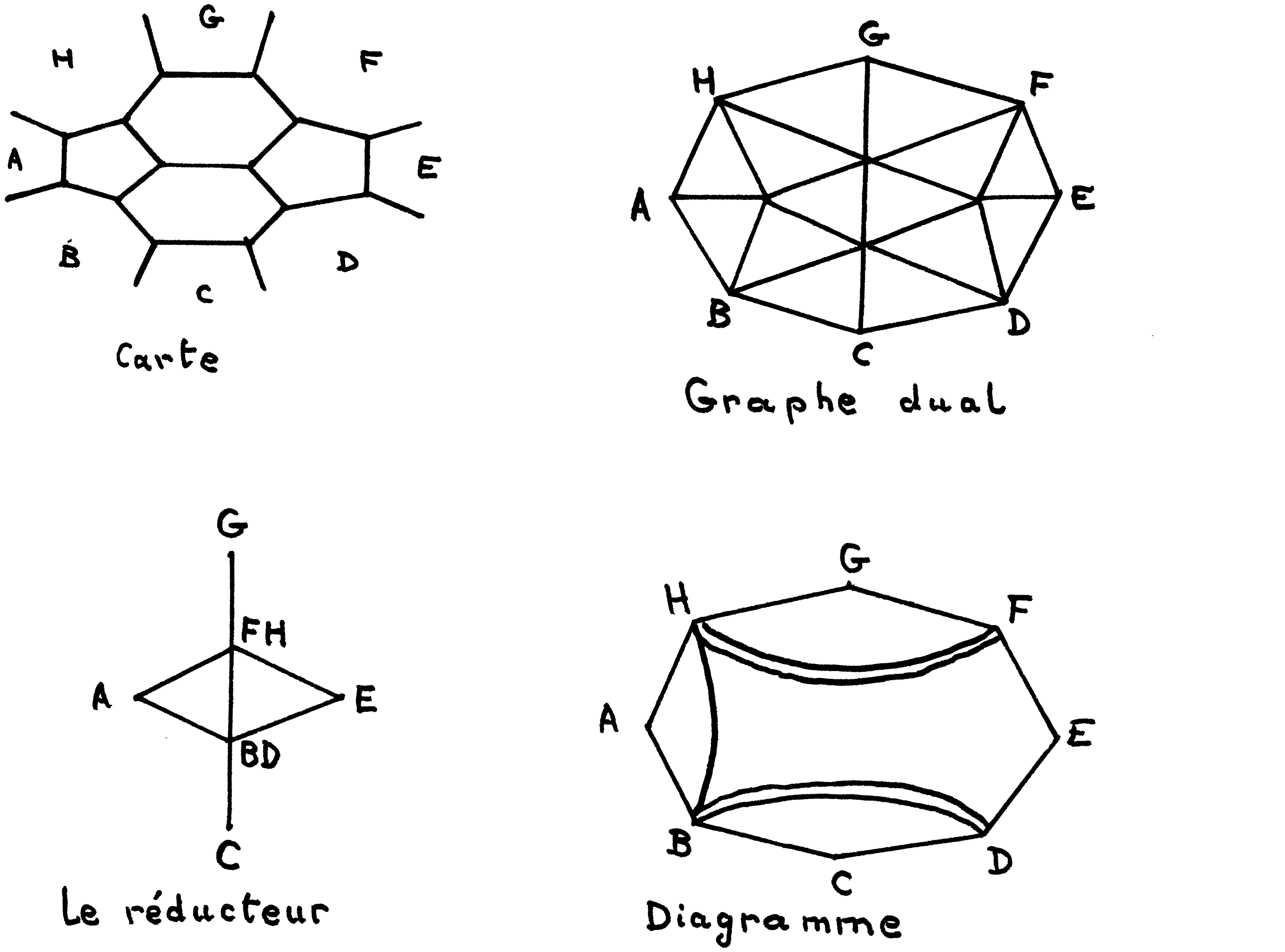
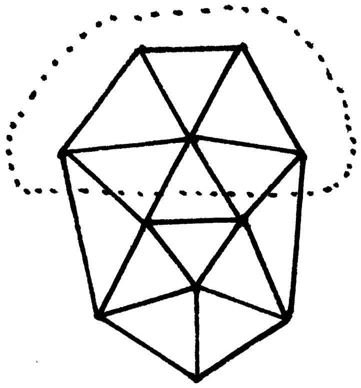
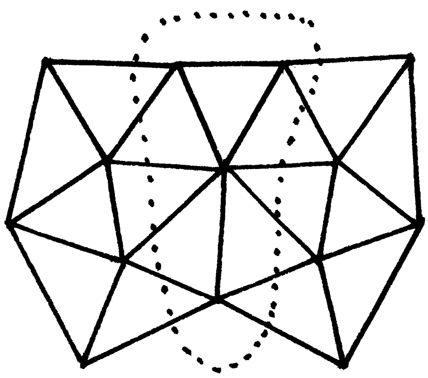


Figure 4.— Une réduction d'Arthur Bernhart.



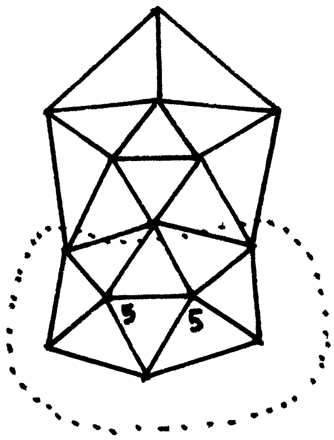
(1°)

Sommet "à 4 jambes"



(2°)

"l'Y"



(3°)

"paire 5-5 suspendue"

Figure 5.— Obstacles à la réduction.

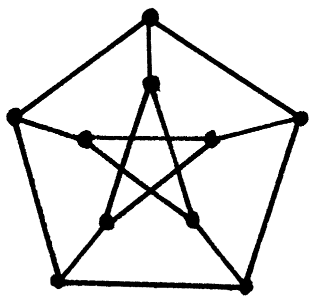
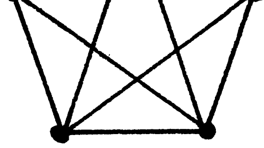
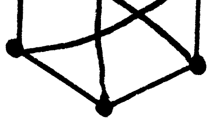


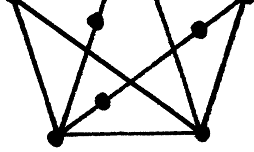
Figure 6.— Le graphe de Petersen.

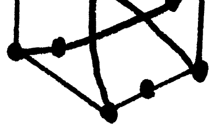


K_5



$K_{3,3}$





subdivisions :

de K_5 de $K_{3,3}$

Figure 7.— Les graphes de Kuratowski et deux exemples de subdivisions.